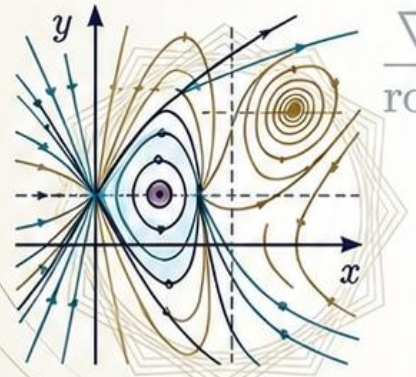
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة
القبة - الجزائر

## ملخصات الدروس

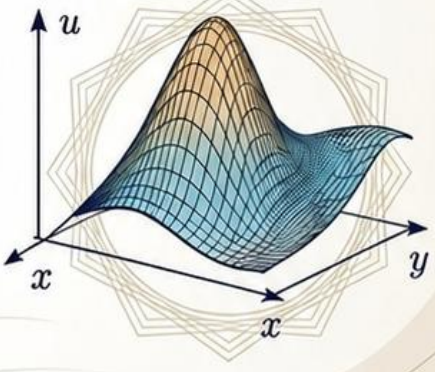
# في المعادلات التفاضلية

## مع تمارين محلولة




$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t)$$




إعداد

البروفيسورة

لطيفة آيت محيوت

جويلية 2026

بِسْمِ اللَّهِ الَّذِي لَا يَضُرُّ مَعَ اسْمِهِ شَيْءٌ
فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَهُوَ
السَّمِيعُ الْعَلِيمُ

لِكُلِّ مَنْ لَدَيْهِ مُلَاحَظَةٌ أَوْ سُؤَالٌ، يُرْجَى
مُرَاسَلَتُنَا عَبْرَ عُنْوَانِ الْبَرِيدِ الْإِلِكْتَرُونِيِّ التَّالِي:

latifa.aitmahiout@g.ens-kouba.dz

# المحتويات


**مقدمة** **6**

**1 المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى الخطية وغير الخطية** **8**

1.1 عموميات حول المعادلات التفاضلية . . . . . 8

2.1 مفاهيم أساسية حول حلول المعادلات التفاضلية العادية . . . . . 12

3.1 مسألة كوشي (Cauchy) . . . . . 13

1.3.1 متتالية بيكارد (متتالية التقريبات المتعاقبة) . . . . . 15

2.3.1 التفسير الهندسي لحل مسألة كوشي . . . . . 16

4.1 نظريات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي . . . . . 18

1.4.1 مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ وتطبيقها على مسألة كوشي . . . . . 21

5.1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى . . . . . 33

6.1 بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى . . . . . 54

1.6.1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين . . . . 54

7.1 تمارين محلولة . . . . . 59

**2 جمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى** **96**

1.2 مفاهيم أساسية حول جمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى . . . . . 96

1.1.2 تعريف جملة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى . . . . . 96

2.1.2 الشكل الشعاعي لجملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى . . . . . 97

3.1.2 دراسة وجود ووحدانية حل جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى 97

4.1.2 كيفية كتابة معادلة تفاضلية من الرتبة $n$ على شكل جملة $n$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى. . . . . 98

2.2 دراسة جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى . . . . . 100

1.2.2 الصيغة العامة . . . . . 100

2.2.2 مسألة كوشي . . . . . 102

3.2.2 حل الجمل الخطية المتجانسة . . . . . 103
4.2.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة عندما تكون المصفوفة $A$ قطرية 112
3.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة عندما تكون المصفوفة مثلثية ومعاملاتها ثوابت حقيقية . . . . . 115
1.3.2 حساب حلول جملة معادلات تفاضلية خطية متجانسة مصفوفتها مثلثية ومعاملاتها توابع مستمرة . . . . . 118
2.3.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة . . . . 121
3.3.2 حل الجمل الخطية غير المتجانسة . . . . . 129
4.2 تمارين محلولة . . . . . 134

**3 المسائل الحدية 149**
1.3 حساب حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية . . . . . 149
1.1.3 طريقة تخفيض الرتبة لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية معاملاتها توابع مستمرة . . . . . 149
2.1.3 مبدأ طريقة تخفيض الرتبة . . . . . 150
3.1.3 حساب حلول المعادلة التفاضلية (3) . . . . . 151
4.1.3 دراسة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة . . . . . 155
5.1.3 دراسة معادلة أولر-كوشي . . . . . 159
2.3 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية غير المتجانسة . . . . . 163
3.3 المسائل الحدية . . . . . 169
1.3.3 دراسة المسائل الحدية . . . . . 171
2.3.3 دراسة وجود ووحدانية حل مسألة حدية . . . . . 174
3.3.3 مسألة شتورم-ليوفيل (Sturm-Liouville) . . . . . 184
4.3 تمارين محلولة . . . . . 195

**4 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية 222**
1.4 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية . . . . . 223
2.4 دراسة أهم نماذج المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية . . . . . 227
3.4 دراسة مسألة الحرارة . . . . . 232
4.4 دراسة مسألة الأمواج . . . . . 236
5.4 دراسة مسألة لابلاس . . . . . 242
6.4 مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة . . . . . 246
7.4 تمارين محلولة . . . . . 254

# مقدمة

إن تاريخ الرياضيات هو، في جوهره، قصة سعي الإنسان الدؤوب لفهم التغير وتفسير قوانين الطبيعة. وفي قلب هذا المسعى الإنساني والفكري، تتربع المعادلات التفاضلية كأعظم لغة ابتكرها العقل البشري لوصف الأنظمة الديناميكية والظواهر الطبيعية عبر الزمن.

بدأت فصول هذه القصة في أواخر القرن السابع عشر، تزامناً مع اختراع حساب التفاضل والتكامل على يد كل من إسحاق نيوتن (Isaac Newton) وغوتفريد لايبنتز (Gottfried Leibniz). في تلك الحقبة، كانت الغاية الأساسية ميكانيكية بحتة: دراسة حركة الكواكب ومسارات الأجسام. وسرعان ما أدرك العلماء أن قوانين الطبيعة لا تُصاغ عادة بدلالة مواقع الأجسام، بل بدلالة معدلات تغيرها، لتُولد بذلك أولى المعادلات التفاضلية.

خلال القرن الثامن عشر، شهدت هذه المعادلات تطوراً هائلاً بفضل جهود عمالقة الرياضيات أمثال الإخوة برنولي (Bernoulli)، وليونارد أويلر (Leonhard Euler)، وجوزيف لويس لاغرانج (Joseph-Louis Lagrange). بفضلهم، تحولت دراسة المعادلات التفاضلية من مجرد محاولات فردية لحل مسائل فيزيائية معينة، إلى فرع رياضي قائم بذاته، يمتلك أدواته التحليلية الخاصة.

ومع حلول القرن التاسع عشر، أدرك الرياضيون أن إيجاد "حلول صريحة ودقيقة" لمعظم المعادلات هو أمر شبه مستحيل نظراً لتعقيد المسائل التي نجدها في الطبيعة. هنا حدثت النقلة النوعية الأهم: الانتقال من الحساب المباشر إلى الدراسة النظرية والنوعية. فقد أرسى أوغستان لويس كوشي (Augustin-Louis Cauchy) ورودولف ليبشيتز (Rudolf Lipschitz) أسس الصرامة الرياضية من خلال نظريات الوجود والوحدانية، بينما أسس هنري بوانكاريه (Henri Poincaré) للنظرية النوعية التي تهتم بدراسة السلوك الهندسي والتقاربي للحلول دون الحاجة لمعرفة صيغتها. ومن جهة أخرى، مهدت أعمال فوريه (Bertrand Fourier) ولابلاس (Pierre-Simon Laplace) الطريق لدراسة الظواهر التي تعتمد على عدة متغيرات عبر المعادلات التفاضلية الجزئية.

في هذا المستوى من مساركم الجامعي، أنتم مدعوون لمحاكاة هذا التطور التاريخي. فالهدف لم يعد مقتصراً على إيجاد الحلول كما كان الحال، بل يتعداه إلى التجريد والتحليل المعمق لبنية هذه الحلول.

لقد صُممت هذه المطبوعة البيداغوجية لترافقكم في هذه الرحلة الفكرية عبر أربع محطات متدرجة:

- **الباب الأول: المعادلات التفاضلية العادية.** نستهل مسارنا بوضع الإطار النظري الصارم، معتمدين على مبرهنة كوشي-ليبشيتز الأساسية، لندرس شروط الوجود والوحدانية ونتعمق في التحليل الدالي التي تكون فيها الدالة المجهولة تابعة لمتغير مستقل واحد. الأدوات الأساسية المستعملة في هذا الفصل هي الاستمرارية وقابلية الاشتقاق وحساب التكاملات.

- **الباب الثاني: جمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.** ننتقل هنا إلى دراسة معادلة تفاضلية من رتبة $n$، عن طريق كتابتها على شكل $n$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى. لذلك، نحتاج إلى توظيف أدوات الجبر الخطي مثل المصفوفات والمصفوفة الأسية.

- **الباب الثالث: المسائل الحدية.** تُعنى هذه المسائل بدراسة المعادلات التفاضلية المرفقة بشروط تُفرض على الحل عند حدود (أطراف) مجال الدراسة، بدلاً من الشروط الابتدائية عند نقطة واحدة. يبرز هذا النوع من المسائل بشكل أساسي في الفيزياء والنمذجة الهندسية (كما هو الحال في دراسة توازن الأوتار المهتزة أو استقرار الجسور). يفتح هذا الفصل الباب واسعاً أمام تقنيات تحليلية جديدة، ويُمهد الطريق للنظرية الطيفية (Spectral Theory).

- **الباب الرابع: المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية.** في المحطة الأخيرة، نتجاوز حدود المتغير الواحد لندرس دوال تتعلق بعدة متغيرات. سنتعرف على النماذج الرياضية الكلاسيكية (معادلات الحرارة، الموجة، ولابلاس) التي شكلت حجر الزاوية في الفيزياء الرياضية الحديثة.

إن استيعاب هذا المقرر يتطلب ربطاً مستمراً بين المكتسبات القبلية في الجبر والتحليل من جهة، والحدس الفيزيائي من جهة أخرى. نأمل أن تجدوا في صفحات هذه المطبوعة ما يُشبع فضولكم العلمي ويُؤسس لقاعدة متينة تكملون بها مساركم الأكاديمي.

# الباب 1

# المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى الخطية وغير الخطية

## 1.1 عموميات حول المعادلات التفاضلية

نبدأ بتعريف معادلة تفاضلية عادية.

**تعريف 1.1.1 ( معادلة تفاضلية عادية) :**

إذا كان التابع المجهول

$$y = y(x)$$

تابعاً لمتغير مستقل واحد فقط $x$، فإن المعادلة التي تربط بين $x$ و $y(x)$ ومشتقاته العادية تسمى **معادلة تفاضلية عادية.**
والشكل العام لمعادلة تفاضلية عادية من الرتبة $n$ هو

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \qquad x \in J \tag{1}$$

حيث $F$ تابع معرف على $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ و $J$ مجال من $\mathbb{R}$.

ننتقل الآن إلى تعريف معادة تفاضلية جزئية.

### تعريف 2.1.1 (المعادلة التفاضلية الجزئية) :

إذا كان التابع المجهول

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (m \geqslant 2)$$

تابعاً لعدة متغيرات مستقلة، فإن المعادلة التي تربط بين هذه المتغيرات وبين $u$ ومشتقاته الجزئية تسمى **معادلة تفاضلية جزئية.**
والشكل العام لها هو:

$$F\left(x_1, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0, \tag{2}$$

حيث يظهر في المعادلة التابع $u$ وبعض مشتقاته الجزئية.

**أمثلة**

1. المعادلة:

$$y' = y$$

هي معادلة تفاضلية عادية.

2. المعادلة:

$$\partial_t u = \partial_{xx} u$$

هي معادلة تفاضلية جزئية وتسمى معادلة الحرارة.

فيما يلي، نذكر أهم الخصائص الأساسية لمعادلة تفاضلية عادية.

• **رتبة معادلة تفاضلية.** نسمي رتبة معادلة تفاضلية أكبر رتبة مشتق تظهر صراحة في المعادلة التفاضلية بعد تبسيطها إن أمكن.

**أمثلة**

1. إن المعادلة $y'' + y' - y = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.
2. نعتبر المعادلة التفاضلية:

$$(y')^2\, y'' + y\, y'' = 0$$

نلاحظ أن المشتق الثاني $y''$ يظهر كعامل مشترك، ومنه يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$y''\left((y')^2 + y\right) = 0$$

بعد التبسيط، يتبين أن أعلى رتبة مشتق تظهر في المعادلة هي رتبة المشتق الثاني $y''$، ومنه فإن هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

**ملاحظة.** إن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية بإخراج $y''$ كعامل مشترك لا يغير من رتبتها.

• **المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية.** نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة $n$ إنها **خطية**، إذا أمكن كتابتها على الشكل:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

حيث $a_0, \ldots, a_n, b$ توابع لـ $x$ معرفة على مجال $J$ من $\mathbb{R}$، مع $a_n(x) \neq 0$ على $J$.

لاحظ أنه في المعادلة التفاضلية الخطية، المعاملات $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ لا تتعلق بالتابع المجهول $y$.

ونقول عن معادلة تفاضلية إنها غير خطية، إذا كانت بعض أو كل معاملاتها تتعلق بالتابع المجهول $y$ أو مشتقاته. بصفة خاصة، تكون المعادلة التفاضلية غير خطية في إحدى الحالات التالية:

- ظهور $y$ أو أحد مشتقاته مرفوعاً إلى أس يختلف عن 1.
- ظهور جداء يتضمن $y$ ومشتقاته (مثل $y \cdot y'$ أو $y' \cdot y''$).
- ظهور $y$ أو أحد مشتقاته داخل دالة غير خطية (مثل $\sin(y)$ أو $e^{y'}$).

**ملاحظة.** الخطية تكون بالنسبة للتابع المجهول $y$ ومشتقاته.

**أمثلة:**

1. المعادلة التفاضلية $y' = y^2$ غير خطية لأن $y$ يظهر بقوة 2.
2. المعادلة التفاضلية $y' = \sin(y)$ غير خطية لأن التابع sin غير خطي وهو تابع لـ $y$.
3. المعادلة التفاضلية $y' = e^x y$ خطية. بالفعل، يمكن كتابتها على شكل معادلة صفرية:

$$y' - e^x y = 0,$$

ونلاحظ أن معاملاتها $a_1(x) = 1$ و $a_0(x) = -e^x$ لا تتعلق بالتابع المجهول $y$.

• **المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.**

في البداية، نؤكد أن مفهومي التجانس وعدم التجانس يخصان فقط المعادلات التفاضلية الخطية، ولا ينطبقان على المعادلات التفاضلية غير الخطية.

بعد ترتيب حدودها، يمكن كتابة كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة $n$ على الشكل:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = b(x), \ x \in J.$$

نقول عنها إنها **متجانسة** إذا كان الطرف الأيمن للمعادلة معدوماً، أي:

$$b(x) = 0, \ \forall x \in J \quad (b \equiv 0).$$

أما إذا كان الطرف الأيمن للمعادلة غير معدوم تماماً على $J$، فنقول عن المعادلة التفاضلية إنها **غير متجانسة.**

**أمثلة:**

1. إن المعادلة $y' = 3y + x$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة.
2. إن المعادلة التفاضلية $y' = y^2$ تفاضلية غير خطية، ومنه لا ينطبق عليها مفهوم التجانس.

في هذا العمل، سنهتم بدراسة ثلاث مسائل أساسية في المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى الخطية وغير الخطية، وهي: **الوجود والوحدانية وتعيين الحل العام.**

لدراسة وجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، علينا أولاً كتابتها على الشكل:

$$y' = f(x, y)$$

حيث $f : U = J \times L \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع حقيقي مستمر.

**مثال :**

نعتبر على $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى التالية:

$$y' + y = x^2$$

لدراستها، نعزل الحد $y'$ فنكتبها على الشكل:

$$y' = f(x, y) = x^2 - y$$

ونعرف التابع $f$ على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x, y) = x^2 - y$$

نقدم فيما يلي، مفاهيم أساسية حول حلول معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى.

## 2.1 مفاهيم أساسية حول حلول المعادلات التفاضلية العادية

نعتبر المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى:

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

حيث $f : U = J \times L \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع حقيقي مستمر.

**تعريف 3.1.1 (حل المعادلة التفاضلية) :**

نقول عن تابع $y$ معرف على مجال $I \subset \mathbb{R}$ إنه حل للمعادلة التفاضلية (3)، إذا تحققت الشروط التالية:

- $y : I \to \mathbb{R}$ من الصنف $C^1$ على $I$ (أي أن $y$ قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر على $I$).
- من أجل كل $x \in I$، الثنائية $(x, y(x))$ تنتمي إلى $U$ (مجموعة تعريف $f$).
- من أجل كل $x \in I$، لدينا: $y'(x) = f(x, y(x))$.

**ترميز.** نرمز لحل المعادلة التفاضلية $y : I \to \mathbb{R}$ بالزوج $(y, I)$.

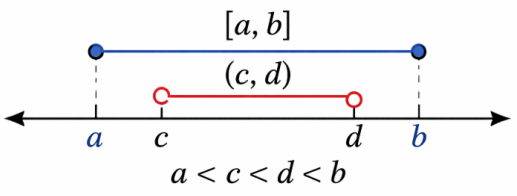
نقدم فيما يلي، مفهوم تمديد حل معادلة تفاضلية.

**تعريف 4.1.1 (تمديد الحل) :**

ليكن $(y_1, I_1)$ و $(y_2, I_2)$ حلين للمعادلة التفاضلية (3). نقول إن $(y_2, I_2)$ تمديد لـ $(y_1, I_1)$، إذا:

- $I_1 \subset I_2$.

أي أنه، إذا كان $I_1 = ]c, d[$ و $I_2 = ]a, b[$، يكون لدينا:



- ومن أجل كل $x \in I_1$، لدينا $y_1(x) = y_2(x)$.

نمر الآن إلى مفهوم الحل الأعظمي.

**تعريف 5.1.1 (الحل الأعظمي) :**

نقول عن حل $(y, I)$ للمعادلة التفاضلية (3) إنه **أعظمي**، إذا لم يوجد حل آخر $z : J \to \mathbb{R}$ لنفس المعادلة التفاضلية، بحيث:

- $I \subset J$ مع $I \neq J$.
- من أجل كل $x \in I$، $z(x) = y(x)$.

بمعنى آخر، نقول عن حل $(y, I)$ لمعادلة تفاضلية إنه أعظمي، إذا كان لا يمكن تمديده إلى حل معرف على مجال أكبر.

وفي الأخير، نقدم مفهوم الحل الشامل.

**تعريف 6.1.1 (الحل الشامل) :**

نقول عن $(y, I)$ إنه **حل شامل** للمعادلة (3)، إذا كان $y$ حلاً لها على مجال $I$، بحيث

$$I = J.$$

بعبارة أخرى، يكون الحل شاملاً إذا كان معرفاً على كامل مجال تعريف المتغير المستقل الذي يظهر في المعادلة التفاضلية.

## 3.1 مسألة كوشي (Cauchy)

تقبل معادلة تفاضلية عادية دون شرط إضافي ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل أي حل. ولا يمكنها أبدا أن تقبل حلا وحيدا بدون اضافة قيود معينة، مثل إعطاء قيمة التابع المجهول عند نقطة معينة، وتحقق شروط معينة على التابع $f$.

نهتم في هذه الفقرة بدراسة مسألة كوشي، والتي هي عبارة عن معادلة تفاضلية مضاف إليها قيمة التابع المجهول عند نقطة معينة، يسمى بـ **الشرط الابتدائي** .

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، نضيف قيمة $y(x_0)$ للحصول على مسألة كوشي.

أما إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية، فإن الحصول على مسألة كوشي، يتطلب إضافة القيمتين:

$$y(x_0) \text{ و } y'(x_0).$$

بصفة عامة، إذا كانت لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة $n$، فإنه للحصول على مسألة كوشي، علينا إضافة القيم التالية:

$$y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0).$$

وبما أن تركيزنا في هذا الفصل، هو حول المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، نقدم التعريف التالي لمسألة كوشي.

### تعريف 7.1.1 (تعريف مسألة كوشي) :

ليكن التابع $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، حيث $J$ مجال من $\mathbb{R}$. ولتكن $(x_0, y_0)$ نقطة من $J \times \mathbb{R}$.
تسمى المعادلة التفاضلية (3)، مضاف إليها الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$، بمسألة كوشي.
ونكتب،

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

أي أن حلول مسألة كوشي (4) هي حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ المعرفة على مجال $I \subseteq J$ ويحوي النقطة $x_0$، بحيث $y(x_0) = y_0$.

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية (3) من $x_0$ إلى $x$، وباستخدام الشرط الإبتدائي $y(x_0) = y_0$، يمكن كتابة مسألة كوشي (4) على الشكل المكافيء:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\mathrm{d}s, \ \forall x \in I, \tag{5}$$

حيث تسمى العلاقة (5) بالمعادلة التكاملية المرفقة بمسألة كوشي.

**ملاحظة 1.1.1:** لاحظ أنه بما أن المتغير المستقل $x$ يظهر في حدود التكامل، علينا استخدام متغير أصم $s$.

تسمح لنا المعادلة التكاملية المرفقة بمسألة كوشي بتعريف متتالية تُسمى **متتالية بيكارد** (Picard)، أو متتالية التقريبات المتعاقبة.

تساعدنا هذه المتتالية في بناء حلول تقريبية لمسألة كوشي (خاصةً عندما يتعذر إيجاد الحل الدقيق بصيغة تحليلية)، كما تمكّننا في الحالات البسيطة من تعيين الحل الدقيق بحساب نهاية المتتالية. بالإضافة إلى ذلك، تُعد هذه المتتالية الأداة الأساسية لإثبات **وجود ووحدانية** حل مسألة كوشي تحت شروط معينة يحققها التابع $f$ (كما سنرى لاحقاً).

## 1.3.1 متتالية بيكارد (متتالية التقريبات المتعاقبة)

نعرف حدود متتالية بيكارد $(y_n)_{n\geqslant 0}$ انطلاقاً من الشرط الابتدائي لمسألة كوشي والعبارة التكاملية المرفقة بها، حيث نبدأ بالتقريب الابتدائي $(n=0)$:

$$y_0(x) = y_0, \quad \forall x \in I.$$

للحصول على التقريب الأول $y_1(x)$ $(n=1)$، نعوض $y(s)$ بالتابع الثابت $y_0(s)=y_0$ في التكامل $\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,\mathrm{d}s$ من المعادلة التكاملية (5)، فنحصل على:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,\mathrm{d}s$$

ثم نعوض $y(s)$ بـ $y_1(s)$ في المعادلة التكاملية، فنحصل على التقريب الثاني $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_1(s))\,\mathrm{d}s.$$

بعدها نعوض $y(s)$ بـ $y_2(s)$ في المعادلة التكاملية، فنحصل على التقريب الثالث $y_3(x)$:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_2(s))\,\mathrm{d}s.$$

وبصفة عامة، تُعطى متتالية التقريبات المتعاقبة بالصيغة التراجعية التالية:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0,\\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,\mathrm{d}s,\\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,\mathrm{d}s,\\
y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))\,\mathrm{d}s,\\
&\vdots\\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \qquad (n \geqslant 1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

وتتقارب متتالية التقريبات $(y_n)_{n\geqslant 0}$ نحو الحل الدقيق $y$ لمسألة كوشي، بحيث:

$$y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x).$$

**ملاحظة 2.1.1:** لا يمكن دائماً حساب حدود متتالية بيكارد تحليلياً بدقة لأنها تعتمد على حساب تكاملات متتالية، وتوجد توابع لا يمكن حساب توابعها الأصلية.

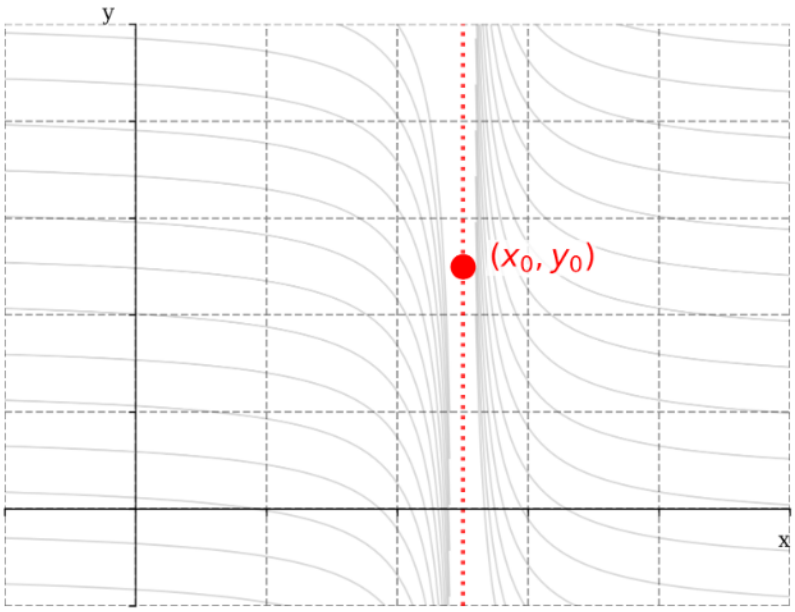
## 2.3.1 التفسير الهندسي لحل مسألة كوشي

حل مسألة كوشي هو كل تابع $y$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$، يحقق المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ ومنحناه البياني يمر من النقطة ذات الإحداثيات $(x_0, y_0)$.

يُسمى المنحنى البياني لحل مسألة كوشي بالمنحنى التكاملي.

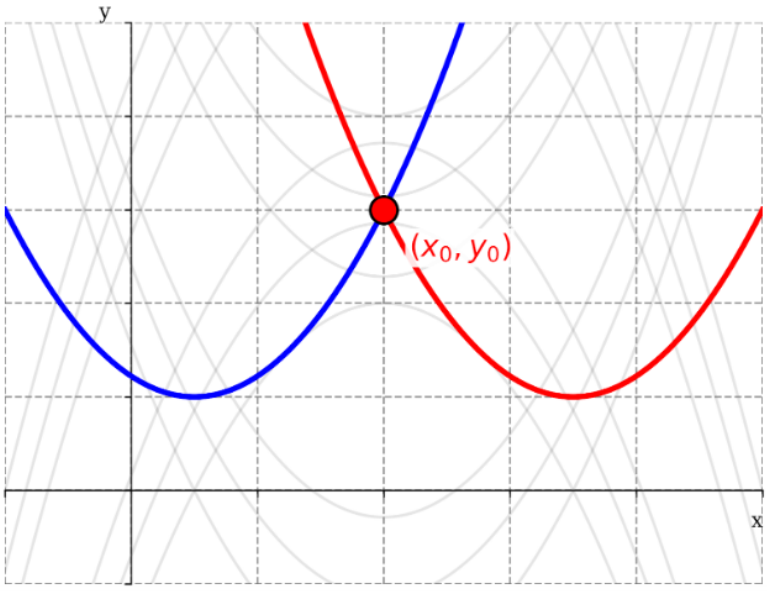
نميز الحالات الثلاث التالية:

- **مسألة كوشي لا تقبل أي حل.** هذا يعني أنه لا يوجد أي منحنى تكاملي لحلول المعادلة التفاضلية، يمر من النقطة ذات الإحداثيات $(x_0, y_0)$.



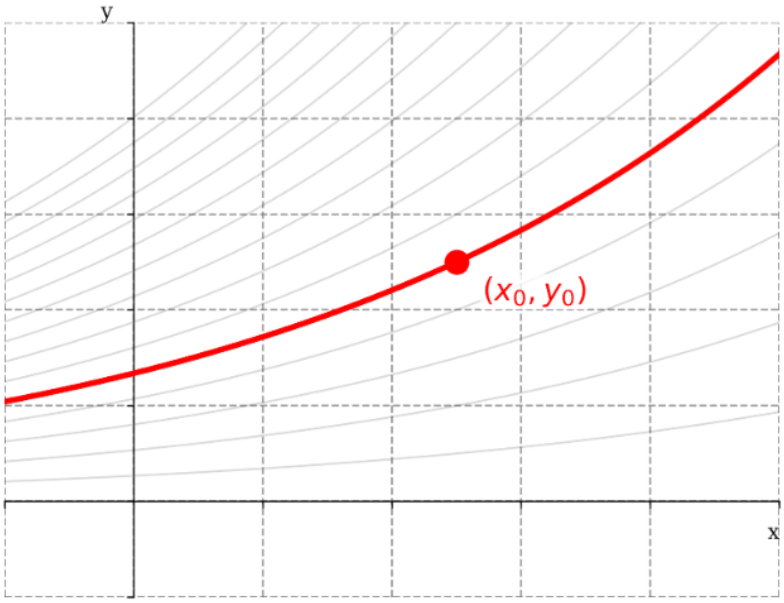

شكل 1.1: حالة عدم وجود منحنى تكاملي يمر من النقطة $(x_0, y_0)$

• **مسألة كوشي تقبل أكثر من حل.** هذا يعني أنه يوجد أكثر من منحنى تكاملي يمر من النقطة ذات الإحداثيات $(x_0, y_0)$.




شكل 2.1: حالة منحنيين تكامليين يمران من النقطة $(x_0, y_0)$

• **مسألة كوشي تقبل حلاً وحيداً.** هذا يعني أنه يوجد منحنى تكاملي وحيد يمر من النقطة ذات الإحداثيات $(x_0, y_0)$.




شكل 3.1: حالة منحنى تكاملي وحيد يمر من النقطة $(x_0, y_0)$

## 4.1 نظريات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي

نُقدِّم في هذه الفقرة، بعض النظريات الأساسية التي تُعطي شروطاً كافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي (4).

**ملاحظة 3.1.1: تنبيه مفهوماتي:**

يُقصد بـ **الحل المحلي** (locale solution) كل حل معرَّف على مجال مفتوح يشمل $x_0$ (جوار لـ $x_0$)، بينما يُقصد بـ **الحل الأعظمي** (maximale solution) الحل الذي لا يمكن تمديده إلى مجال أوسع.

تتدرّج النظريات المعروضة في هذا القسم وفق المخطط التالي:

- **مبرهنة بيانو (Peano):** تُقدِّم شرطاً كافياً للوجود المحلي فقط (دون ضمان الوحدانية).
- **شرط التناقص:** نُبيِّن كيف يضمن تناقص التابع $f$ على شريط وجود ووحدانية الحل.

- **مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ (Banach):** نستعرضها كأداة تحليلية أساسية نعتمد عليها في إثبات الوجود والوحدانية.
- **مبرهنة كوشي-ليبشتز (Cauchy-Lipschitz):** (وتُسمّى أيضاً Picard-Lindelöf)، وهي المبرهنة المركزية في هذا الفصل، وندرسها بصيغتيها: **المحلية** (على مستطيل) و**الأعظمية** (الشاملة).

النظرية التالية تقدم لنا شروطاً كافية لوجود حل محلي على الأقل لمسألة كوشي (4).

**مبرهنة 1.1.1 (مبرهنة بيانو) :**

ليكن $J$ مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$، و $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً.
عندئذ، من أجل كل $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$، تقبل مسألة كوشي (4) حلاً محلياً على الأقل (ليس بالضرورة وحيداً)، معرفاً على مجال مفتوح $I \subset J$ يشمل $x_0$.

نقدم فيما يلي، بعض المبرهنات والنظريات التي تعطينا شروطاً كافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي (4).

المبرهنة التالية تقدم شرطاً كافياً لوجود ووحدانية حل المسألة (4).

**مبرهنة 2.1.1 (مبرهنة الوجود والوحدانية تحت شرط التناقص) :**

نعتبر مسألة كوشي (4). إذا تحقق الشرطان:

1. $f$ مستمر على الشريط $C = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$، حيث $a > 0$.
2. $f$ متناقص بالنسبة إلى المتغير $y$، أي:

$$y_1 < y_2 \implies f(x, y_1) \geqslant f(x, y_2), \qquad \forall x \in [x_0, x_0 + a]$$

فإن مسألة كوشي (4) تقبل حلاً وحيداً معرفاً على المجال $[x_0, x_0 + a]$.

**المراحل الأساسية في إثبات مبرهنة الوجود والوحدانية تحت شرط التناقص**

**الوجود.**

من مبرهنة بيانو، يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث تقبل المسألة (4) حلاً على الأقل $y$ معرفاً على مجال مفتوح $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. لكن، وبما أن التابع $f$ مستمر على الشريط $C = [x_0, x_0 + a]$ مع $a > 0$، نعتبر اقتصارا لهذا الحل على الجهة اليمنى فقط $(x \geqslant x_0)$، لنحصل على حل للمسألة معرفا على المجال $[x_0, x_0 + \varepsilon[$.

**الوحدانية.**

نبرهن بالخلف، فنفرض وجود حلين $y_1$ و $y_2$ للمسألة (4) معرفين على المجال $I = [x_0, x_0 + a]$. أي أن:

$$y_1'(x) = f(x, y_1(x)) \quad \text{و} \quad y_2'(x) = f(x, y_2(x)), \ \forall x \in [x_0, x_0 + a],$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$$

لنبين أن: $y_1(x) = y_2(x)$ من أجل كل $x \in [x_0, x_0 + a]$.

ليكن $x \in [x_0, x_0 + a]$. نضع:

$$w(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

لدينا:

$$w'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)).$$

نُعرف التابع المساعد:

$$\varphi(x) = w^2(x).$$

بإشتقاق $\varphi$ بالنسبة إلى $x$، نجد:

$$\varphi'(x) = 2w(x)w'(x) = 2\big(y_1(x) - y_2(x)\big)\big(f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))\big).$$

بما أن التابع $f$ متناقص بالنسبة إلى المتغير الثاني، فإنه من أجل كل $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$، لدينا:

$$(y_1 - y_2)\big(f(x, y_1) - f(x, y_2)\big) \leqslant 0.$$

ومنه، نستنتج أن:

$$\varphi'(x) \leqslant 0, \ \forall x \in [x_0, x_0 + a].$$

وهذا يعني أن التابع $\varphi$ متناقص على المجال $[x_0, x_0 + a]$.

من جهة أخرى، نعلم أن $\varphi(x) \geqslant 0$ من أجل كل $x$، ولدينا عند النقطة $x_0$:

$$\varphi(x_0) = w^2(x_0) = (y_1(x_0) - y_2(x_0))^2 = 0.$$

بما أن $\varphi$ تابع موجب ومتناقص على $[x_0, x_0 + a]$ وينعدم عند $x_0$، فإنه من أجل كل $x \in [x_0, x_0 + a]$، يكون لدينا:

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) = 0 \implies \varphi(x) = 0.$$

وبالتالي،

$$w(x) = 0 \implies y_1(x) = y_2(x), \ \forall x \in [x_0, x_0 + a].$$

وهذا يثبت وحدانية الحل.

## 1.4.1 مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ وتطبيقها على مسألة كوشي

تُستعمل طريقة النقطة الصامدة لبناخ لإثبات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي. وكما تطرقنا إليه في البداية، فهي تقدم لنا طريقة بناءة لتقريب الحل باستعمال متتالية تُسمى **متتالية بيكارد**.

**تذكير: النقطة الصامدة والتطبيق التقلصي**

نبدأ أولاً بتعريف النقطة الصامدة.

**تعريف 8.1.1 (النقطة الصامدة) :**

ليكن $(E, d)$ فضاءً متريًا، و $T : E \to E$ تطبيقاً. نقول إن $x \in E$ **نقطة صامدة** للتطبيق $T$ إذا تحقق:

$$T(x) = x.$$

نمر الآن إلى تعريف التطبيق التقلصي.

**تعريف 9.1.1 (التطبيق التقلصي) :**

ليكن $(E, d)$ فضاءً متريًا. نقول عن تطبيق $T : E \to E$ إنه **تقلصي** إذا وُجد عدد حقيقي

$\alpha \in ]0,1[$ بحيث:

$$d(T(x),T(y)) \leqslant \alpha\, d(x,y),\ \ \forall x,y \in E.$$

فيما يلي، نذكر بمبرهنة النقطة الصامدة لبناخ.

### مبرهنة 3.1.1 (مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ) :

ليكن $(E,d)$ فضاءً متريا تاماً، وليكن $T : E \to E$ تطبيقاً تقلصياً بثابت $\alpha \in ]0,1[$.
عندئذٍ:

1. يوجد عنصر وحيد $x^* \in E$ بحيث:

$$T(x^*) = x^*.$$

2. من أجل كل $x_0 \in E$، فإن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 0}$ المعرّفة بالعلاقة التراجعية:

$$x_{n+1} = T(x_n),\ \ \forall n \geqslant 0$$

تتقارب نحو النقطة الصامدة $x^*$.

3. **تقدير الخطأ (Error Estimate):** تقدم لنا المتباينة التالية، تقديرا للخطأ المرتكب عند تقريب الحل الدقيق $x^*$ بالحد $x_n$، وذلك بدلالة الحدين $x_0$ و $x_1$:

$$d(x_n,x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_1,x_0), \qquad \forall n \geqslant 1$$

**تطبيق مبرهنة النقطة الصامدة لإثبات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي**

نعتبر مسألة كوشي:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

لإثبات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي بتطبيق مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ، نتبع المراحل التالية:

**المرحلة 1. المعادلة التكاملية المكافئة**

تُكافئ مسألة كوشي المعادلة التكاملية التالية:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

**المرحلة 2. اختيار الفضاء الدالي**

ليكن $h > 0$. وليكن المتراص $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$.
نعتبر الفضاء $X = \mathcal{C}(I_h)$ المتكون من التوابع المستمرة على المجال $I_h$ والمزود بنظيم التقارب المنتظم:

$$\|y\|_\infty = \sup_{x \in I_h} |y(x)|.$$

إن الثنائية $(X, \|\cdot\|_\infty)$ تشكل **فضاء بناخ** (أي فضاء نظيمي تام).

**المرحلة 3. فرضيات على التابع $f$**

ليكن $M > 0$. نضع الفرضيات التالية على التابع $f$:

- $f$ مستمر على المستطيل المغلق:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant h,\ |y - y_0| \leqslant M\}$$

- $f$ يحقق شرط ليبشتز بالنسبة إلى المتغير الثاني $y$ على المستطيل $\mathcal{R}$ ؛ أي أنه يوجد ثابت $L > 0$، بحيث:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{R}$$

**المرحلة 4. تعريف كرة مغلقة $B$**

نُعرّف الكرة المغلقة ذات المركز $y_0$ والنصف قطر $M$ في الفضاء $X$:

$$B = \{y \in X : \|y - y_0\|_\infty \leqslant M\}$$

بما أن $B$ جزء مغلق من فضاء بناخ $X$، فهو فضاء متري تام.

**المرحلة 5. تعريف التطبيق $T$**

من أجل كل تابع $y \in B$، نعرف التطبيق $T : B \to X$ بـ:

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,\ \forall x \in I_h.$$

نلاحظ أن حل مسألة كوشي هو بالضبط **نقطة صامدة للتطبيق** $T$.

**المرحلة 6. إثبات أن** $T(B) \subset B$

بما أن $f$ مستمر على المستطيل المغلق والمحدود $\mathcal{R}$، فهو محدود عليه. إذن يوجد ثابت $K > 0$، بحيث:

$$|f(x,y)| \leqslant K, \qquad (x,y) \in \mathcal{R}.$$

من أجل كل $y \in B$ وكل $x \in I_h$، يكون لدينا:

$$|Ty(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, \mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|\, \mathrm{d}s \right| \leqslant K|x - x_0| \leqslant Kh$$

وعليه،

$$||Ty - y_0||_\infty \leqslant Kh.$$

إذا اخترنا $h \leqslant \frac{M}{K}$، فإن $\|Ty - y_0\|_\infty \leqslant M$، ما يعني أن $Ty \in B$. وبالتالي،

$$T(B) \subset B.$$

**المرحلة 7. إثبات أن** $T$ **تطبيق تقلصي**

ليكن $y_1, y_2 \in B$. من أجل كل $x \in I_h$، لدينا:

$$\begin{aligned} |Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \big[ f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \big]\, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|\, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L|x - x_0|\, \|y_1 - y_2\|_\infty \leqslant Lh\, \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

ومنه:

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_\infty \leqslant Lh\, \|y_1 - y_2\|_\infty$$

إذا اخترنا $h < \frac{1}{L}$، فإن الثابت $\alpha = Lh < 1$، ويكون $T$ تطبيقا تقلصيا على $B$.

**المرحلة 8. الخلاصة والنتيجة**

باختيار $h$ بحيث يحقق الشرطين:

$$h \leqslant \frac{M}{K} \quad \text{و} \quad h < \frac{1}{L},$$

أي:

$$h < \min\left(\frac{M}{K}, \frac{1}{L}\right),$$

تتحقق شروط مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ على الفضاء المتري التام $B$.

إذن، يوجد عنصر وحيد $y \in B$ بحيث $T(y) = y$، وهو الحل الوحيد لمسألة كوشي على المجال $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$. كما أن متتالية بيكارد المعرّفة بالعلاقة $y_{n+1} = T(y_n)$ تتقارب بانتظام نحو هذا الحل.

نمر الآن إلى مبرهنة أخرى تعطينا شروطا كافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي موضوعة على مستطيل مركزه النقطة التي أعطي عندها الشرط الإبتدائي.

### مبرهنة 4.1.1 (المبرهنة الأساسية) :

نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

على مستطيل مركزه $(x_0, y_0)$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\},$$

نفرض أن $f$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ مستمران على $\mathcal{R}$ ونضع $M = \sup\limits_{(x,y)\in\mathcal{R}} |f(x, y)|$.

عندئذ، تقبل مسألة كوشي حلا وحيدا على المجال $|x - x_0| \leqslant \alpha$، حيث $\alpha = \min(a, b/M)$، والتقريبات المتعاقبة متقاربة نحوه.

يسمى المستطيل $\mathcal{R}$ المعرف في المبرهنة الأساسية بمستطيل الأمان، وسبب التسمية موضح في الملاحظة التالية.

### ملاحظة 4.1.1:

لماذا تسمية مستطيل الأمان؟

لأن المنحنى التكاملي لحل مسألة كوشي لا يخرج من حدود المستطيل $\mathcal{R}$، حيث مجال تعريف الحل محتوى في جزء محور الفواصل المحصور داخل المستطيل.

**وما الذي يضمن هذا؟**

إن الاختيار

$$\alpha = \min(a, b/M),$$

هو الذي يضمن أن المنحنى التكاملي لحل مسألة كوشي لا يخرج من المستطيل.

بالفعل، إن العبارة التكاملية المرفقة بمسألة كوشي (4)، هي:

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$|y(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|\ \mathrm{d}s \leqslant \int_{x_0}^{x} M\ \mathrm{d}s = M|x - x_0|. \tag{7}$$

إن المتباينة الأخيرة أساسية حيث أنها تتحكم في تغيير الصورة $x \mapsto y(x)$ بتغيير السابقة $x$.

• الشرط الأول حتى لا يخرج المنحنى التكاملي لحل مسألة كوشي من حدود محور التراتيب التي يضعها المستطيل $\mathcal{R}$، هو:

$$|y(x) - y_0| \leqslant b.$$

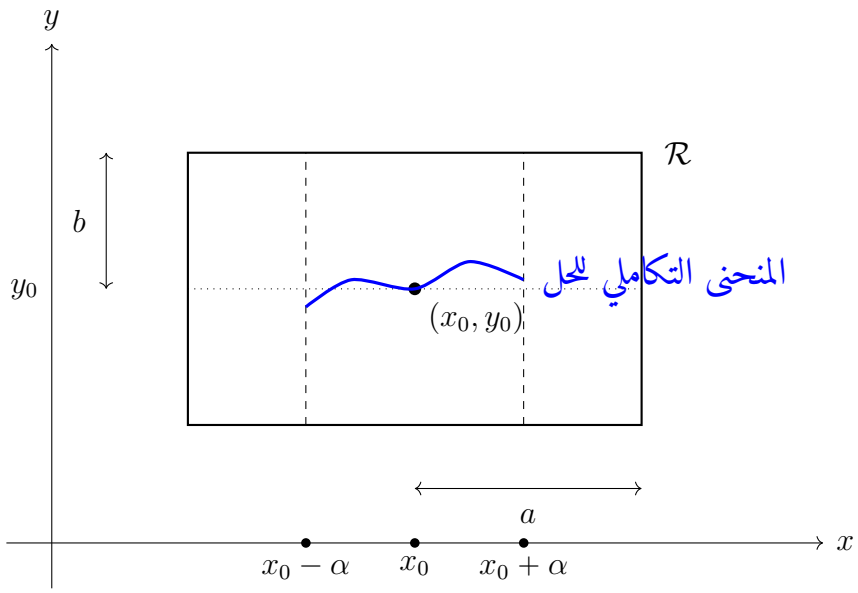
بما أن

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \leqslant \frac{b}{M},$$

فإن:

$$M|x - x_0| \leqslant b.$$

**توضيح بياني.**




**ملاحظة 5.1.1:**

في المبرهنة الأساسية، يمكن استبدال الشرط $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمر ومحدود على $\mathcal{R}$ بالشرط $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$.

بالفعل، لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ مستمر ومحدود} \Leftarrow f \text{ ليبشتزي بالنسبة لـ } y.$$

لإثبات هذا الاستلزام، نستخدم متباينة التزايدات المنتهية.

**التذكير بمبرهنة التزايدات المنتهية.** ليكن $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا على $[a, b]$ وقابلا للاشتقاق على $]a, b[$. ومنه، يوجد $c \in ]a, b[$ بحيث

$$|g(b) - g(a)| = |g'(c)||b - a|.$$

لنفرض أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمر ومحدود، ولنبين أن $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$.

ليكن $(x, y_1)$ و $(x, y_2)$ من $I \times J$. من مبرهنة التزايدات المنتهية، يوجد $c$ من $]y_1, y_2[$، بحيث

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right| |y_1 - y_2| \leqslant k|y_1 - y_2|,$$

حيث $k$ هو الحد الأعلى لـ $\frac{\partial f}{\partial y}$ على $\mathbb{R}$.

**ملاحظة 6.1.1:**

إن الاستلزام العكسي غير صحيح دائماً. بعبارة أخرى:
كون التابع $f$ ليبشتزياً بالنسبة لـ $y$ على $\mathbb{R}$ ، لا يستلزم بالضرورة أن يكون المشتق الجزئي $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجوداً ومستمراً على $\mathbb{R}$. وهذا ما نلاحظه من خلال المثال المضاد التالي:

ليكن $f$ تابعا معرفا على $\mathbb{R}^2$ بـ $f(x,y)=|y|$.
من جهة، التابع $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$. بالفعل، إذا كان $(x,y_1)$ و $(x,y_2)$ عنصرين من $\mathbb{R}^2$، فإنه حسب خواص القيمة المطلقة، يكون لدينا:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = ||y_1|-|y_2|| \leqslant |y_1-y_2|\,.$$

وعليه، فإن التابع $f$ يحقق شرط ليبشتز بالنسبة إلى $y$، وثابت ليبشتز في هذه الحالة هو $k=1$.
من جهة أخرى، المشتق الجزئي للتابع $f$ بالنسبة إلى $y$ غير موجود أصلاً عند النقطة $y=0$ (لأن المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار). ومن أجل $y\neq 0$ يُعطى المشتق بـ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & : y>0, \\ -1 & : y<0. \end{cases}$$

وبالتالي، بما أن المشتق الجزئي غير موجود عند الصفر، فإنه من البديهي أن شرط "وجود واستمرار المشتق الجزئي على كامل $\mathbb{R}$" غير محقق، رغم أن التابع ليبشتزي.

**أهم مراحل إثبات المبرهنة الأساسية.**

نعتبر مسألة كوشي (4):

$$\begin{cases} y' = f(x,y(x)), \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

**إثبات الوجود.** لإثبات أن مسألة كوشي تقبل حلا على الأقل، نستخدم طريقة بيكارد أو ما تسمى بطريقة متتالية التقريبات المتعاقبة.

نعرف متتالية بيكارد $(y_n)$، بـ:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\ \mathrm{d}s.$$

• باستخدام الفرضيات على $f$، نبين أن المتتالية $(y_n)$ متقاربة لأنها عبارة عن مجموع جزئي لسلسلة متقاربة نهايتها $y$.

• نبرهن بعدها، أن النهاية $y$ مستمرة وتحقق المعادلة التكاملية

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\ \mathrm{d}s.$$

ومنه وجود حل على الأقل.

**الوحدانية.** لإثبات الوحدانية، نستخدم توطئة غرونفال.

### توطئة 1.1.1 (توطئة غرونفال Gronwall ) :

ليكن الثابت الحقيقي $N \geqslant 0$ وليكن $f$ و $g$ تابعين مستمرين وموجبين على $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$، ويحققان المتباينة:

$$f(x) \leqslant N + \int_{\alpha}^{x} f(s)g(s)\ \mathrm{d}s.$$

عندئذ،

$$f(x) \leqslant N \exp\left(\int_{\alpha}^{x} g(s)\ \mathrm{d}s\right).$$

**إثبات توطئة غرونفال**

ليكن $x$ من $[\alpha, \beta]$.

نضع

$$w(x) = N + \int_{\alpha}^{x} f(s)g(s)\ \mathrm{d}s.$$

لدينا فرضا،

$$f(x) \leqslant w(x).$$

باشتقاق $w$، نحصل على:

$$w'(x) = f(x)g(x).$$

ومنه، بما أن التابع $g$ موجب، لدينا:

$$w'(x) = f(x)g(x) \leqslant w(x)g(x). \tag{8}$$

بضرب (8) في المعامل الموجب $\exp\left(-\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right)$، نجد:

$$w'(x)\exp\left(-\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right) - w(x)g(x)\exp\left(-\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right) \leqslant 0.$$

أي أن،

$$\left(w(x)\exp\left(-\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right)\right)' \leqslant 0.$$

وبالمكاملة من $\alpha$ إلى $x$، يكون لدينا:

$$w(x)\exp\left(-\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right) \leqslant w(\alpha).$$

ومنه،

$$f(x) \leqslant w(x) \leqslant N\exp\left(\int_\alpha^x g(s)\ \mathrm{d}s\right),$$

حيث $N = w(\alpha)$.
وهو المطلوب.

**كيفية استخدام توطئة غرونفال في إثبات الوحدانية:**

نبرهن بالخلف ونفرض أن $(y_1, I)$ و $(y_2, I)$ حلان مختلفان للمسألة (4). أي أنه من أجل كل $x$ من $I$، لدينا:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s))\ \mathrm{d}s,$$

و

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s))\ \mathrm{d}s,$$

مع $y_1 \neq y_2$.

ومنه،

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \, \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant k \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)| \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

بوضع $g(x) = k$ و $N = 0$، لدينا من توطئة غرونفال:

$$\forall x \in I, \ |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant 0.$$

أي أن

$$\forall x \in I, \ |y_1(x) - y_2(x)| = 0.$$

ومنه الوحدانية.

لقد رأينا أن المبرهنة الأساسية تضمن لنا وجود حل محلي داخل "مستطيل الأمان". ولكن، طبيعياً، نتساءل عما إذا كان بإمكاننا تمديد هذا الحل خارج هذا المستطيل للحصول على حل أعظمي، ومتى يمكننا التأكد من أن هذا الحل معرف على كامل مجال تعريف التابع $f$ بالنسبة لـ $x$. للإجابة على هذا التساؤل، نورد مبرهنة التمديد التالية:

**مبرهنة 5.1.1 (مبرهنة التمديد الشامل على مجال $I$) :**

لتكن المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$، حيث $f$ تابع مستمر على $I \times \mathbb{R}$، مع $I$ مجال مفتوح من $\mathbb{R}$، ويحقق شرط ليبشتزي محلياً بالنسبة إلى $y$.
إذا كان الحل $y$ محدودا على كل متراص $[a, b]$ محتوى في $I$، فإنه يمكن تمديده على المجال $I$ بأكمله.

نمر الآن إلى نظرية كوشي ليبشتزي بصيغتيها القوية والضعيفة والتي تقدم لنا شروطا كافية لوجود ووحدانية حل أعظمي لمسألة كوشي.

**مبرهنة 6.1.1 (مبرهنة كوشي - ليبشتز -الصيغة الضعيفة ) :**

لتكن مسألة كوشي (4) حيث $f$ معرف على مفتوح $U \subset \mathbb{R}^2$، مستمر على $U$ ومن الصنف $\mathcal{C}^1$ بالنسبة إلى $y$.
عندئذ، من أجل كل $(x_0, y_0) \in U$، مسألة كوشي تقبل حلا أعظميا وحيدا على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0$.

يمكن أن تقبل مسألة كوشي حلا أعظميا وحيدا، وهذا من أجل شرط أضعف على $f$. هذا ما تقدمه لنا النظرية الموالية:

**مبرهنة 7.1.1 (مبرهنة كوشي - ليبشتز -الصيغة القوية ) :**

لتكن مسألة كوشي (4) حيث $f$ معرف على مفتوح $U \subset \mathbb{R}^2$ مستمر على $U$ وليبشتزي محليا بالنسبة إلى $y$.
عندئذ، من أجل كل $(x_0, y_0) \in U$، المسألة (4) تقبل حلا أعظميا وحيدا على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0$.

أكيد أنه بعد كل هذا لازلت تتساءل: إن لم تتحقق شروط إحدى المبرهنات التي درسناها، ماذا نقول عن وحدانية حل مسألة كوشي؟ الملاحظة التالية تؤكد ما قلناه في بداية الفقرة.

**ملاحظة 7.1.1:** إن شروط مبرهنات الوجود والوحدانية كافية وليست لازمة. هذا يعني أنه إذا لم تتحقق أحد شروط مبرهنات الوجود والوحدانية المقدمة، لا يمكننا استنتاج أي شيء حول وحدانية حل مسألة كوشي.

## 5.1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

كما رأينا في بداية الملخص، نسمي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة، كل معادلة تفاضلية من الشكل:

$$y' = a(x)y + b(x), \ x \in J, \tag{9}$$

حيث $a, b \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

حسب مبرهنة كوشي-ليبشتز (الصيغة القوية أو الضعيفة)، فإنه من أجل كل شرط ابتدائي $(x_0, y_0)$، المعادلة التفاضلية (9) تقبل حلاً أعظمياً وحيداً على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0$.

**ملاحظة 8.1.1: تبرير تحقق شروط مبرهنة كوشي - ليبشتز:**

قد يتساءل الطالب: كيف نضمن تحقق شروط مبرهنة كوشي - ليبشتز بمجرد فرض استمرار التابعين $a$ و $b$؟

لنتحقق من شروط المبرهنة (الصيغة الضعيفة) للتابع $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ المعرف على المفتوح $U = J \times \mathbb{R}$:

1. **استمرار التابع $f$:** بما أن التابعين $a$ و $b$ مستمران على $J$، فإن التابع $(x, y) \mapsto a(x)y + b(x)$ مستمر على $J \times \mathbb{R}$ (كجمع وضرب توابع مستمرة).
2. **$f$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ بالنسبة لـ $y$:** بحساب المشتق الجزئي لـ $f$ بالنسبة إلى $y$، نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a(x), \ \forall (x, y) \in J \times \mathbb{R}.$$

وبما أن $a \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$، فإن المشتق الجزئي $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجود ومستمر على كامل الفضاء $J \times \mathbb{R}$.

**ملاحظة إضافية (شرط ليبشتز المحلي):** يمكن أيضاً إثبات أن $f$ ليبشتز محليا بالنسبة إلى $y$. بالفعل، من أجل كل جزء متراص $K \subset J$ وكل $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$، لدينا:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \big|(a(x)y_1 + b(x)) - (a(x)y_2 + b(x))\big| = |a(x)| \cdot |y_1 - y_2|.$$

وبما أن التابع $a$ مستمر على المتراص $K$، فإنه محدود ويبلغ حديه الأعلى والأدنى عليه. أي أنه،

يوجد $L_K = \sup_{x\in K} |a(x)| < +\infty$ بحيث:

$$\forall x \in K,\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L_K |y_1 - y_2|.$$

وبالتالي، التابع $f$ ليبشتزي محلياً بالنسبة إلى $y$.

هدفنا في هذا الجزء، هو حساب الحل العام للمعادلة التفاضلية (9). ولذلك، نميز ثلاث حالات.

**الحالة 1.** $a \equiv 0$ و $b \equiv 0$.
في هذه الحالة، تصبح المعادلة (9) من الشكل:

$$y' = 0. \tag{10}$$

بأخذ أصلي طرفي (10)، نجد:

$$\int y'(x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x.$$

ومنه،

$$y(x) = C.$$

أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية (10) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = C,$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

**الحالة 2.** $b \equiv 0$.
في هذه الحالة، تكتب المعادلة (9) على الشكل:

$$y' = a(x)y. \tag{11}$$

نلاحظ أن $y \equiv 0$ حل للمعادلة التفاضلية (11). لنبحث الآن عن حلول المعادلة التفاضلية (11) التي لا تطابق التابع المعدوم. أي أنه توجد نقطة $x_0$ على الأقل بحيث $y(x_0) \neq 0$. وبما أن $y$ مستمر، فهذا يعني أنه يوجد جوار $V$ لـ $x_0$، بحيث:

$$y(x) \neq 0, \qquad \forall x \in V.$$

وبالتالي، يمكننا قسمة طرفي المعادلة التفاضلية (11) على $y(x)$ من أجل كل $x \in V$، ونكتب:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x), \qquad \forall x \in V.$$

ومنه،

$$(\ln|y(x)|)' = a(x), \qquad \forall x \in V.$$

بمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$ (حيث $x_0$ نقطة كيفية من $J$)، نجد:

$$\int_{x_0}^{x} (\ln|y(s)|)' \, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} a(s) \, \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$\ln|y(x)| - \ln|y_0| = \int_{x_0}^{x} a(s) \, \mathrm{d}s,$$

حيث $y(x_0) = y_0$.

وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (11) على $J$، هو:

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s) \, \mathrm{d}s\right),$$

حيث $y_0$ ثابت حقيقي كيفي.

**الحالة 3.** $b \not\equiv 0$.

في هذه الحالة، نعتبر المعادلة التفاضلية غير المتجانسة (9):

$$y' = a(x)y + b(x), \qquad x \in J.$$

توجد طريقتان لحل هذه المعادلة.

**الطريقة 1.**

تتمثل هذه الطريقة في كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية (9) على الشكل:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (11) المرفقة بالمعادلة غير المتجانسة (9)، و $y_p$ حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (9).

لنعرف أولاً معنى **حل خاص** لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

**تعريف 10.1.1 (تعريف حل خاص لمعادلة تفاضلية عادية) :**

نعتبر المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى:

$$y' = f(x, y), \ x \in J.$$

إن هذه المعادلة التفاضلية تقبل ما لا نهاية من الحلول. لنرمز بـ $S$ لمجموعة هذه الحلول. نسمي حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية كل عنصر $y_p$ من $S$.

نعود الآن إلى تعيين الحل العام للمعادلة غير المتجانسة، والذي يتم عبر مرحلتين:

**المرحلة 1. تعيين الحل العام للمعادلة المتجانسة (11) المرفقة لـ (9).**

حسب ما جاء في الحالة 2 أعلاه، الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة يكتب على الشكل:

$$y_h(x) = Ce^{A(x)},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي و $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\ \mathrm{d}s$.

**المرحلة 2. تعيين حل خاص للمعادلة (9).**

نبحث عن حل خاص للمعادلة (9) باستخدام طريقة تغيير الثابت.

**ماذا نعني بالبحث عن حل خاص باستخدام طريقة تغيير الثابت؟** يعني أنه في عبارة الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة، نستبدل الثابت الحقيقي الكيفي بتابع $x \mapsto C(x)$، وهذا يعطينا شكل الحل الخاص الذي نبحث عنه:

$$y_p(x) = C(x)e^{A(x)}. \tag{12}$$

والهدف الآن هو تعيين التابع $x \mapsto C(x)$ الذي من أجله يكون $y_p$ المعرف في (12) حلاً للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (9).

بتعويض $y_p$ ومشتقه $y_p'(x) = C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)}$ في المعادلة غير المتجانسة (9)، نجد:

$$C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x).$$

ومنه،

$$C'(x)e^{A(x)} = b(x).$$

أي أن:

$$C'(x) = e^{-A(x)}b(x).$$

نضع $C(x_0) = 0$ (هذه القيمة اختيارية لتبسيط الحسابات)، فنجد:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\ \mathrm{d}s.$$

ومنه فإن حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (9) هو:

$$y_p(x) = \left( \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\ \mathrm{d}s \right) e^{A(x)}.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (9) على المجال $J$ هو:

$$y(x) = \exp\left( \int_{x_0}^{x} a(s)\ \mathrm{d}s \right) \left( y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s) \exp\left( - \int_{x_0}^{s} a(\tau)\ \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \right), \tag{13}$$

حيث $y_0$ ثابت حقيقي كيفي.

القضية الموالية تقدم لنا حالة خاصة يمكننا فيها تعيين حل خاص لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة، بطريقة مباشرة دون الحاجة إلى استخدام طريقة تغيير الثابت، في حالة معامل $y$ ثابت والطرف الثاني $b$ يكتب على شكل مزج خطي لتوابع مستمرة.

### قضية 1.1.1 (مبدأ التركيب الخطي) :

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى غير المتجانسة:

$$y' = ay + b(x),$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ثابت و $b \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.
إذا كان الطرف الثاني يكتب على الشكل:

$$b(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j(x),$$

حيث $\lambda_j \in \mathbb{R}$ و $b_j \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$،
وكان $y_{p,j}$ حلاً خاصًا للمعادلة:

$$y' = ay + b_j(x),$$

فإن التابع:

$$y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{p,j}(x)$$

هو حل خاص للمعادلة الأصلية.

لندرس الآن بعض الحالات الخاصة.

**الحالة الخاصة 1. الطرف الثاني من الشكل $P(x)e^{kx}$.**

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الأولى:

$$y' = ay + b(x),$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ثابت، والطرف الثاني للمعادلة معطى بـ:

$$b(x) = P(x)e^{kx},$$

حيث $P$ كثير حدود درجته $n$ و $k \in \mathbb{R}$.

**المبدأ الذي نعتمد عليه في البحث عن حل خاص للمعادلة في هذه الحالة، هو الآتي:**

نلاحظ أولاً أن المعادلة المتجانسة المرفقة بالمعادلة المعطاة، هي:

$$y' = ay$$

حلها العام، هو:

$$y_h(x) = Ce^{ax},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

عند البحث عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة، نحاول اختيار تابع له نفس طبيعة الطرف الثاني $b(x) = P(x)e^{kx}$. غير أن شكل الحل الخاص يعتمد على ما إذا كان $e^{kx}$ حلاً للمعادلة المتجانسة أم لا. ولهذا السبب، نميز حالتين حسب العلاقة بين $k$ و $a$.

**الحالة 1-1. $k \neq a$.**

في هذه الحالة، نبحث عن حل خاص من الشكل

$$y_p(x) = Q(x)e^{kx},$$

حيث $Q$ كثير حدود درجته تساوي درجة $P$. أي

$$\deg(Q) = n.$$

**الحالة 1-2.** $k = a$.

في هذه الحالة، يكون $e^{ax}$ حلاً للمعادلة المتجانسة المرفقة. لذلك فإن أي تابع من الشكل $Q(x)e^{ax}$ ينتمي إلى فضاء حلول المعادلة المتجانسة، ولا يمكن أن يمثل حلاً خاصاً للمعادلة غير المتجانسة.
ولتفادي هذا التداخل، نبحث عن حل خاص من الشكل

$$y_p(x) = xQ(x)e^{ax}.$$

**الحالة الخاصة 2. الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية دالة مثلثية.**
نعتبر المعادلة التفاضلية

$$y' = ay + b(x),$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ والطرف الثاني معطي بـ:

$$b(x) = P_1(x)\cos(kx) + P_2(x)\sin(kx),$$

مع $P_1$ و $P_2$ كثيرا حدود درجتهما أقل أو تساوي $n$ و $k \in \mathbb{R}^*$.

في هذه الحالة، نبحث عن حل خاص من نفس شكل الطرف الثاني، أي من الشكل:

$$y_p(x) = Q_1(x)\cos(kx) + Q_2(x)\sin(kx),$$

حيث $Q_1$ و $Q_2$ كثيرا حدود نعيّنهما بتعويض عبارة $y_p$ في المعادلة التفاضلية، مع

$$\deg(Q_1) \leqslant n,\ \deg(Q_2) \leqslant n.$$

**الطريقة 2. طريقة المعامل التكاملي.**

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى غير المتجانسة (9):

$$y' = a(x)y + b(x),\ x \in J.$$

الهدف من طريقة المعامل التكاملي، هو كتابة المعادلة (9) على شكل أبسط معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى:

مشتق تام = طرف ثان لا يتعلق بالتابع المجهول $y$.

**كيف نحصل على هذا الشكل؟** بضرب طرفي (9) في تابع $x \mapsto \mu(x)$ نعينه لاحقا، نحصل على العلاقة:

$$\mu(x)y'(x) + a(x)\mu(x)y = \mu(x)b(x). \tag{14}$$

نختار $\mu$ بحيث

$$\mu' = a(x)\mu.$$

أي أن:

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)\ \mathrm{d}s\right).$$

عندئذ، تصبح المعادلة (14) من الشكل:

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)b(x).$$

بمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$\mu(x)y(x) = \mu_0 y_0 + \int_{x_0}^{x} \mu(s)b(s)\ \mathrm{d}s.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (9) على $J$، هو:

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} b(s)\exp(A(s))\ \mathrm{d}s\right),$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

**ملاحظة 9.1.1:**

قبل الشروع في تطبيق طريقة المعامل التكاملي لحل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة، يجب التأكد أولا ما إذا كانت المعادلة التفاضلية موضوعة على الشكل:

مشتق تام = طرف ثان.

في هذه الحالة، نكامل طرفي المعادلة مباشرة لتعيين الحل العام.

**بعض الأمثلة حول كيفية حل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة بإستخدام الطريقة 1**

**مثال :**

نعتبر على $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1+x^2)y' + xy = (1+x^2)^{5/2}. \tag{15}$$

إن المعادلة (15) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة. حلها العام يكتب على الشكل:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بالمعادلة (15):

$$(1+x^2)y' + xy = 0. \tag{16}$$

و $y_p$ حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (15)، نعينه باستخدام طريقة تغيير الثابت.

لنعين أولا الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (16). إن $y \equiv 0$ حل واضح لها. لنبحث عن حلول أخرى غير التابع المعدوم. أي نبحث عن تابع $y$ بحيث يوجد $x_0 \in I$ مع $y(x_0) \neq 0$. من استمرار التابع $y$، يوجد $V$ جوار لـ $x_0$ بحيث

$$\forall x \in V,\ y(x) \neq 0.$$

وعليه، بقسمة طرفي المعادلة المتجانسة على $y$، نجد:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{(1+x^2)},\ \forall x \in V.$$

نضع

$$y_1(x) = (1+x^2)^{-1/2}.$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (16)، هو:

$$y_h(x) = Cy_1(x),$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

لنعين الآن، حلا خاصا للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (15) باستخدام طريقة تغيير الثابت. من

أجل ذلك، نبحث عن حل خاص من الشكل

$$y_p(x) = C(x)y_1(x).$$

بالتعويض في (15)، نجد:

$$(1+x^2)C'(x)y_1(x) + \big[(1+x^2)C(x)y_1' + xC(x)y_1(x)\big] = (1+x^2)^{5/2}.$$

ومنه،

$$(1+x^2)C'(x)y_1(x) + C(x)[(1+x^2)y_1'(x) + xy_1(x)] = (1+x^2)^{5/2}.$$

وعليه،

$$(1+x^2)C'(x)y_1(x) = (1+x^2)^{5/2}.$$

وبالتالي،

$$C'(x) = (1+x^2)^2,$$

أي أن:

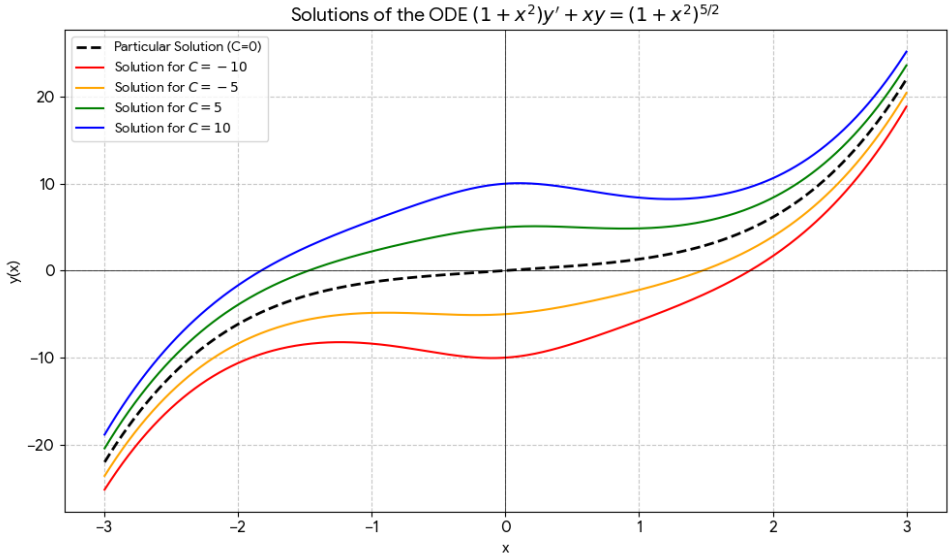
$$C(x) = \int_{x_0}^{x} (1+2s^2+s^4)\,\mathrm{d}s = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} + C,$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (15) على $\mathbb{R}$ هو:

$$y(x) = \frac{C + x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5}{\sqrt{1+x^2}},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.




شكل 4.1: التمثيل البياني لبعض المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (15)

**ملاحظة وتفسير التمثيل البياني:**

عند دراسة الرسم البياني لهذه المعادلة، يمكننا استخلاص ملاحظتين أساسيتين حول سلوك الحلول:

1. **التقارب بين الحلول ( تلاشي تأثير الحالة الابتدائية):** نلاحظ أنه رغم تباعد المنحنيات في الوسط (قرب المبدأ) بسبب اختلاف قيم الثابت $C$، إلا أنها سرعان ما تقترب من بعضها البعض لتلتحم وتصبح تقريبا منحنى واحد عند اللانهاية فقط.

**التعليل الرياضي:** الفرق بين أي حلين $y_1$ و $y_2$ (الموافقين لثابتين $C_1$ و $C_2$) يعطى بـ:

$$y_1(x) - y_2(x) = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

بما أن

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{|x|\to\infty} 0,$$

فإن مساهمة الجزء المتجانس $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ تتلاشى عند اللانهاية.

وبالتالي فإن سلوك جميع الحلول لما يكون $|x|$ كبيرا بما فيه الكفاية، يُحكم أساساً بالجزء

$$\frac{x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5}{\sqrt{1+x^2}},$$

ولا يعود للثابت $C$ تأثير يُذكر على السلوك عند اللانهاية.

2. **التزايد غير المحدود ( Unbounded Growth ):** نلاحظ أن حلول هذه المسألة تتزايد بلا حدود (تتجه نحو $\pm\infty$). يعود ذلك لدرجة البسط (الحد $x^5$) التي تفوق درجة المقام، مما يفرض تزايدا سريعاً جداً للقيم كلما زاد المتغير $x$.

**التفسير الفيزيائي (الانقياد القسري ونسيان الماضي):**

يمكن قراءة سلوك هذا الحل فيزيائياً كحالة "انقياد قسري" تحت تأثير مؤثر خارجي قوي جداً.

- **طغيان المؤثر الخارجي:** الطرف الثاني للمعادلة $(1+x^2)^{5/2}$ يمثل قوة خارجية تتزايد بشكل هائل مع تزايد $x$. هذه القوة "تُجبر" الحل $y$ على اللحاق بها والتزايد معها.
- **تشبيه (الإعصار):** لنتخيل جسماً صغيراً (ورقة شجر) يقع تحت تأثير رياح إعصار تشتد سرعته باستمرار.
  - تمثل القوة الخارجية (الإعصار) المحرك الأساسي للحركة.
  - يمثل الثابت $C = y(0)$ مكان الورقة في البداية.

بما أن قوة الإعصار تصبح هائلة جداً، فإن سرعة الورقة ستصبح كبيرة جداً (تؤول إلى اللانهاية)، وبذلك يصبح الفرق الناتج عن مكانها الأولي مهملاً (يؤول للصفر). أي أن **الحاضر القوي يمحو أثر الماضي.**

**مثال :**

نعتبر على $\mathbb{R}$، المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + y = 5\sin(2x). \tag{17}$$

إن المعادلة (17) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة.

نلاحظ أن التابعين $x \mapsto 1$ و $x \mapsto 5\sin(2x)$ مستمران على $\mathbb{R}$. ومنه فإن المعادلة (17) تقبل حلا على الأقل.

ويمكن كتابة حلها العام، على الشكل:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بـ (17):

$$y' + y = 0, \tag{18}$$

و $y_p$ حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (18).

- **تعيين** $y_h$.

نضع

$$A(x) = -\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s = -x + x_0.$$

ومنه فإن الحل العام لـ (18) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y_h(x) = Ce^{-x},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

- **تعيين** $y_p$.

نلاحظ أن الطرف الثاني $b$ للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة يكتب على الشكل:

$$b(x) = 5\sin(2x).$$

ومنه فإن التابع $y_p$ الذي من الشكل:

$$y_p(x) = \alpha_1 \cos(2x) + \alpha_2 \sin(2x),$$

حيث $\alpha_1$ و $\alpha_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان، هو حل خاص للمعادلة (17).

بتعويض عبارة $y_p$ في (17)، نجد:

$$-2\alpha_1 \sin(2x) + 2\alpha_2 \cos(2x) + \alpha_1 \cos(2x) + \alpha_2 \sin(2x) = 5\sin(2x).$$

ومنه،

$$(-2\alpha_1 + \alpha_2)\sin(2x) + (2\alpha_2 + \alpha_1)\cos(2x) = 5\sin(2x).$$

بالمطابقة، نستنتج أن:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 5, \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

أي أن،

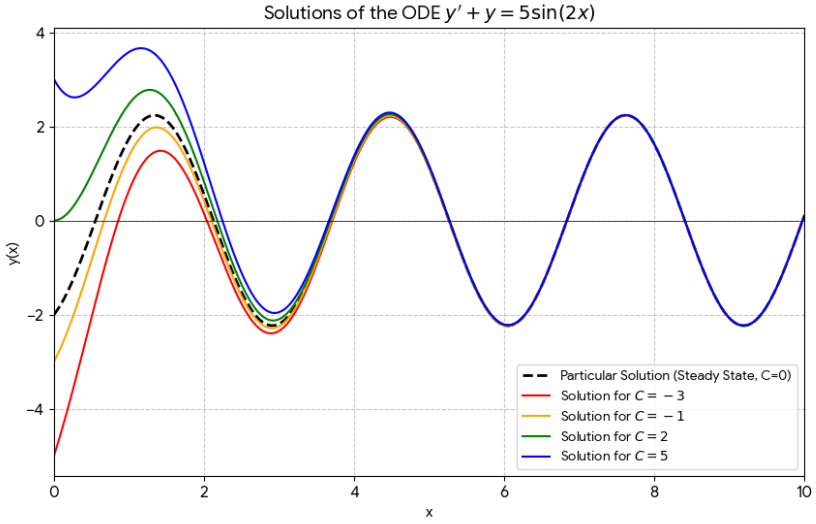
$$\alpha_1 = -2, \ \alpha_2 = 1.$$

وبالتالي،

$$y_p(x) = -2\cos(2x) + \sin(2x).$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (17) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = Ce^{-x} - 2\cos(2x) + \sin(2x).$$




شكل 5.1: التمثيل البياني لبعض المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (17)

**ملاحظة حول التمثيل البياني (النظام العابر والنظام الدائم):**

يظهر الرسم البياني سلوكاً مميزاً جداً، حيث يمكننا التمييز بوضوح بين مرحلتين:

1. **المرحلة الانتقالية أو النظام العابر ( Transient Phase):** في البداية (عند القيم الصغيرة لـ $x$)، تكون المنحنيات متباعدة ومختلفة عن بعضها البعض. هذا يعني أن الحل يتأثر بشدة بالشرط الابتدائي $C$. السبب الرياضي هو وجود الحد الأسي $Ce^{-x}$ الذي لم يتلاشَ بعد.
2. **المرحلة المستقرة أو النظام الدائم (Steady State ):** عندما يكبر $x$، نلاحظ أن جميع المنحنيات "تلتصق" ببعضها البعض وتصبح متطابقة، متخذةً شكلاً تموجياً (دورياً). رياضياً، بما أن $\lim_{x\to\infty} Ce^{-x} = 0$، فإن الحد العابر يتلاشى، ويؤول الحل العام ليتطابق تماماً مع الحل

الخاص الدوري:

$$y(x) \approx -2\cos(2x) + \sin(2x)$$

**التفسير الفيزيائي (الاستجابة القسرية لدارة كهربائية):**

يمثل هذا السلوك، ظاهرة فيزيائية شهيرة تُعرف بـ **الاستجابة القسرية** (Forced Oscillations).
بما أن المعادلة من الرتبة الأولى، فإن أفضل نموذج فيزيائي يطابقها هو **دارة كهربائية (RC)** موصولة بمولد تيار متناوب (تردده يوافق $\sin(2x)$).

- في اللحظات الأولى، يكون سلوك الدارة (شحنة المكثف) مزيجاً بين الشحنة الابتدائية للمكثف (الحل العابر) وتأثير المولد.
- بعد فترة، "تنسى" الدارة شحنتها الابتدائية، وتصبح استجابتها متناغمة تماماً مع توتر المولد المتناوب. الحلول لا تتوقف (لا تؤول إلى الصفر) ولكنها تستقر على نمط اهتزازي ثابت تفرضه القوة الخارجية.

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية على $\mathbb{R}$:

$$y' - y = 2xe^{2x}. \tag{19}$$

إن المعادلة (19) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، غير متجانسة.
المعادلة المتجانسة المرفقة بها، هي:

$$y' - y = 0, \tag{20}$$

وحلها العام على $\mathbb{R}$، هو:

$$y_h(x) = Ce^x,$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.
لنعين الآن، حلا خاصا للمعادلة غير المتجانسة (19)، من الشكل:

$$y_p(x) = Q(x)e^{2x},$$

حيث $\deg Q = 1$.. أي أن كثير الحدود $Q$ من الشكل:

$$Q(x) = \alpha x + \beta,$$

مع $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

بتعويض عبارة $y_p$ في (19)، نجد:

$$Q'(x)e^{2x} + 2Q(x)e^{2x} - Q(x)e^{2x} = 2xe^{2x}.$$

ومنه،

$$Q'(x) + Q(x) = 2x.$$

وبما أن $Q$ كثير حدود من الشكل:

$$Q(x) = \alpha x + \beta,$$

مع $\alpha$ و $\beta$ من $\mathbb{R}$، نستنتج أن:

$$Q(x) = 2(x - 1).$$

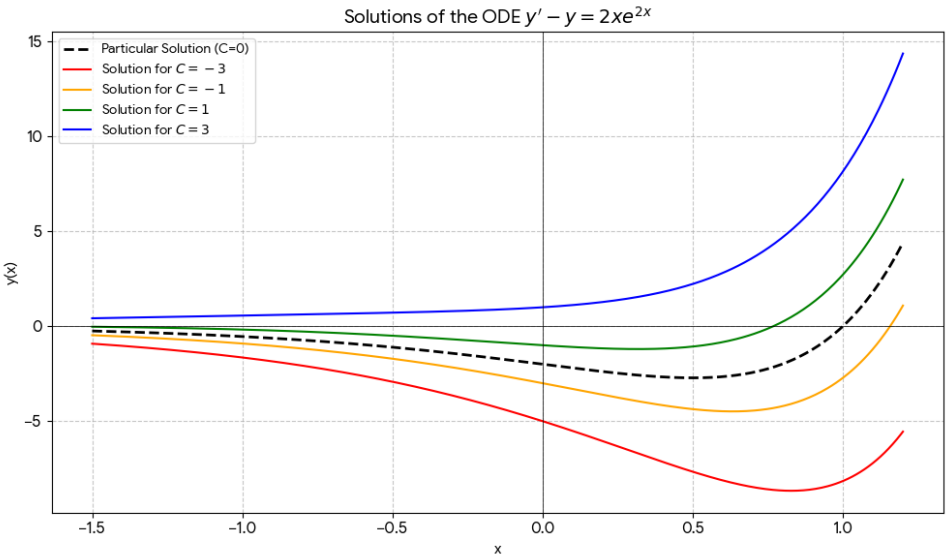
أي:

$$y_p(x) = 2(x - 1)e^{2x}.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (19) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = Ce^x + 2(x - 1)e^{2x},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.




شكل 6.1: التمثيل البياني لبعض المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (19)

**ملاحظة حول التمثيل البياني (النمو الأسي والتباعد):**

نلاحظ من خلال الرسم البياني خاصية مميزة لهذه الحلول وهي **التزايد الأسي السريع** وعدم الاستقرار.

- **سلوك المنحنيات:** كلما زادت قيمة $x$، تبتعد المنحنيات التكاملية بسرعة هائلة عن محور الفواصل، متجهة نحو اللانهاية ($\pm\infty$ حسب إشارة الثابت). هذا ما يُعرف بظاهرة **التباعد** (Divergence).
- **التعليل الرياضي:** يعود هذا السلوك لوجود الحدود الأسية ($e^x$ و $e^{2x}$) في الحل العام. من المهم ملاحظة أن الحد $e^{2x}$ هو الذي يفرض هيمنته عند اللانهاية (لأنه الأسرع تزايدا)، مما يجعل جميع الحلول تتضخم قيمها بلا حدود مع تزايد $x$، ولكنها تبقى معرفة على كامل $\mathbb{R}$ (لا توجد خطوط مقاربة عمودية كما في ظاهرة الانفجار).

**التفسير الفيزيائي (التزايد الأسي وعدم الاستقرار):**

إن تباعد الحلول نحو اللانهاية يحمل دلالة فيزيائية قوية وهي **عدم الاستقرار** (Instability) أو ما يُعرف بـ **التزايد الأسي غير المحدود** (Unbounded Exponential Growth).

يمكن تصور هذا السلوك في الحالات التالية:

- **التكاثر البيولوجي (نموذج مالتوس):** مثل تكاثر البكتيريا في وسط يحتوي على موارد وغذاء غير محدود. معدل التكاثر يتناسب طردياً مع عدد البكتيريا الموجودة في اللحظة الزمنية التي نراقب فيها النظام، مما يؤدي إلى تضخم أسي للعدد مع مرور الزمن.
- **التفاعلات المتسلسلة والجموح الحراري (Thermal Runaway):** مثل التفاعلات الكيميائية الطاردة للحرارة في غياب نظام تبريد. الحرارة الناتجة تزيد من سرعة التفاعل، مما يولد حرارة أكبر تتزايد أسياً، مؤدية إلى خروج النظام عن السيطرة (وهو ما قد يسبب انفجاراً في الواقع الفيزيائي، لكن رياضياً يُعبر عنه بنمو أسي سريع).

**أمثلة معادلات تفاضلية خطية نستعمل طريقة المعامل التكاملي، لحساب حلها العام**

نستهل هذه الفقرة بالمثال التالي:

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

إن المعادلة (21) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة، يمكن كتابتها على الشكل:

$$((1+x^2)y)' = 1. \tag{22}$$

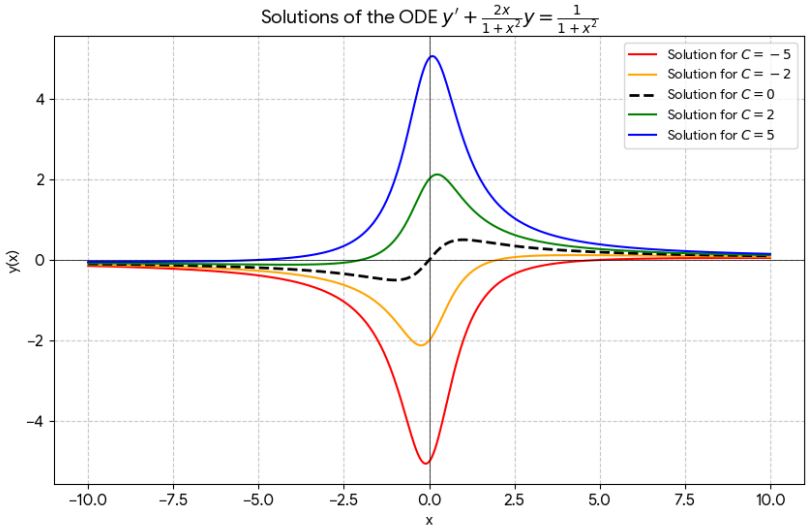
بمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$\int_{x_0}^{x} ((1+s^2)y(s))' \, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s.$$

ومنه، الحل العام للمعادلة التفاضلية (21) على $\mathbb{R}$ هو:

$$y(x) = \frac{C+x}{1+x^2},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.




شكل 7.1: التمثيل البياني لبعض المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (21)

**ملاحظة حول التمثيل البياني (السلوك المقارب للحلول):**

نلاحظ من خلال التمثيل البياني ظاهرة تقارب جميع المنحنيات التكاملية نحو محور الفواصل ($y =$

0) كلما ابتعدنا عن المبدأ (أي عندما يؤول $x$ إلى $\pm\infty$).
يمكن تعليل ذلك رياضياً بحساب نهاية الحل العام:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+C}{1+x^2} = 0.$$

هذا يعني أنه مهما كانت قيمة الثابت $C$ (أي مهما كان الشرط الابتدائي للمسألة)، فإن الحل يتلاشى ويقترب من الصفر عند اللانهاية. تُسمى هذه الخاصية رياضياً بـ **الاستقرار المقارب** ( Asymptotic Stability ).

**التفسير الفيزيائي (الخمود والعودة إلى السكون):**
إن تقارب الحل $y(x)$ نحو الصفر، مهما كان الشرط الابتدائي، يحمل دلالة فيزيائية واضحة وهي **الخمود** أو **العودة إلى حالة السكون** (التوازن).
يمكن فهم ذلك بمثال حركي دقيق:

- إذا اعتبرنا المتغير $x$ هو الزمن، والدالة $y(x)$ تمثل **سرعة** جسم متحرك.
- المعادلة تُنمذج حركة جسم يتعرض لقوة احتكاك (مقاومة) متغيرة، بينما القوة المحركة الخارجية له $(\frac{1}{1+x^2})$ تتناقص تدريجياً مع مرور الوقت.
- النتيجة الحتمية: بما أن القوة المحركة تتلاشى وتؤول إلى الصفر، وبوجود احتكاك يمتص الطاقة، فإن السرعة ستتناقص حتماً حتى تنعدم تماماً ويتوقف الجسم، سواء كانت انطلاقته (سرعته الابتدائية) كبيرة جداً أو صغيرة.

رياضياً وفيزيائياً، نقول إن الحل يتلاشى ( Vanishing Solution ) في اللانهاية، والنظام يفقد طاقته الحركية كلياً.
لندرس المثال التالي:

**مثال :**

نعتبر على $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1+x^2)y' + 3xy = 6x. \qquad (23)$$

إن المعادلة (23) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة، يمكن كتابتها على الشكل:

$$y' + \frac{3x}{1+x^2}y = \frac{6x}{1+x^2}. \tag{24}$$

بضرب طرفي المعادلة (24) في المعامل التكاملي

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{3s}{1+s^2}\ \mathrm{d}s\right) = (x^2+1)^{3/2},$$

نحصل على:

$$(x^2+1)^{3/2}y' + (x^2+1)^{3/2}\frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{1+x^2}(x^2+1)^{3/2}.$$

وبمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$\int_{x_0}^{x} \left((s^2+1)^{3/2}y(s)\right)'\ \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} 6s\sqrt{s^2+1}\ \mathrm{d}s.$$

لنحسب التكامل

$$\int_{x_0}^{x} 6s\sqrt{s^2+1}\ \mathrm{d}s.$$

هو من الشكل:

$$\int_{x_0}^{x} b'(s)(b(s))^{\alpha}\ \mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha+1}\left[(b(s))^{\alpha+1}\right]_{x_0}^{x}.$$

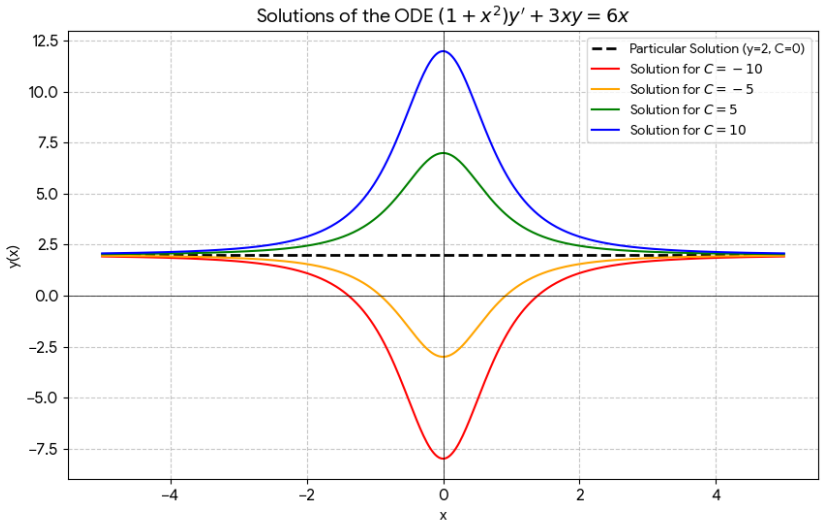
ومنه لدينا بوضع $\alpha = \frac{1}{2}$ و $b(s) = s^2+1$:

$$\int_{x_0}^{x} 6s\sqrt{s^2+1}\ \mathrm{d}s = 3\int_{x_0}^{x} 2s\sqrt{s^2+1}\ \mathrm{d}s = 2\left[(s^2+1)^{3/2}\right]_{x_0}^{x}.$$

وبالتالي، فان الحل العام للمعادلة (23) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2},$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.




شكل 8.1: التمثيل البياني لبعض المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (23)

**تعليق وتفسير التمثيل البياني (فقدان الذاكرة للحلول):**

نلاحظ هندسياً من خلال التمثيل البياني، أن جميع المنحنيات التكاملية لحلول المسألة، مهما اختلفت قيم الثابت $C$، تتقارب وتؤول في النهاية إلى المستقيم المقارب $y = 2$. يمكن شرح هذه الظاهرة من زاويتين:

1. **التفسير الرياضي:** نعلم أن حل مسألة كوشي يتكون من مجموع حل خاص $y_p$ (هنا $y_p = 2$) و $y_h$ حل للمعادلة المتجانسة يتعلق بثابت حقيقي كيفي $C$.

   بما أن الحد $y_h(x) = C(x^2+1)^{-3/2}$ يؤول إلى 0 لما $x \to +\infty$، فهذا يعني أن تأثير الشروط الابتدائية يتلاشى تدريجياً، وكأن الحل "ينسى" نقطة انطلاقه ولا يبقى في النهاية سوى السلوك المستقر $(y = 2)$.

2. **التفسير الفيزيائي (قانون التبريد لنيوتن):** لتقريب الفكرة، يمكننا تشبيه المسألة بوضع **فنجان قهوة** في غرفة مبردة (أو ثلاجة) عند درجة حرارة ثابتة (2 درجة مئوية). إذا أعدنا كتابة المعادلة (23) على الشكل:

$$y' = -\frac{3x}{1+x^2}(y-2)$$

   نجد أنها تطابق تماماً قانون التبريد لنيوتن ( Newton Law of Cooling ) مع معامل انتقال حراري يتغير بمرور الزمن.

   - يمثل الحل $x \mapsto y(x)$ درجة حرارة القهوة في اللحظة $x$.

- يمثل **الحل الخاص** ($y_p = 2$) درجة حرارة الوسط المحيط .
- يمثل **الثابت** $C$ حالة القهوة عند البداية (الفارق الحراري الابتدائي).

سواء كانت القهوة تغلي (شرط ابتدائي مرتفع) أو مثلجة (شرط ابتدائي منخفض)، فإن الحل سيستقر بمرور الوقت عند درجة حرارة الوسط. أي أن القهوة تفقد ذاكرة حرارتها الأصلية وتخضع لحرارة الوسط.

## 6.1 بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى

بصفة عامة، لا يمكن إيجاد حل صريح لمعادلة تفاضلية غير خطية إلا في بعض الحالات الخاصة. في هذا الجزء، نعرض إحدى هذه الحالات، وهي حالة المعادلات التفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى وذات متغيرين منفصلين.

### 1.6.1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين

نقول عن معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى إنها ذات متغيرين منفصلين، إذا أمكن كتابتها على الشكل:

$$N(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + M(x) = 0, \tag{25}$$

حيث $M$ تابع مستمر على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$، و $N$ تابع مستمر على مجال مفتوح $J$ من $\mathbb{R}$، مع $x \in I$ و $y(x) \in J$.

ليكن $H_1$ و $H_2$ تابعين أصليين لـ $M$ و $N$ على التوالي. أي:

$$M(x) = H_1'(x),\ N(y) = H_2'(y).$$

نكتب (25) على الشكل:

$$H_2'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + H_1'(x) = 0. \tag{26}$$

نلاحظ أن:

$$H_2'(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{dx}(H_2(y))$$

ومن ثم نرى أن الطرف الأيسر للعلاقة الأخيرة عبارة عن مشتق تركيب تابعين:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H_2(y)) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}H_2'(y).$$

ومنه نكتب (26) على الشكل:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(H_1(x) + H_2(y(x))\big) = 0. \tag{27}$$

بمكاملة طرفي (27) من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$(H_1(x) - H_1(x_0)) + (H_2(y) - H_2(y_0)) = 0,$$

وهذا بوضع $y(x_0) = y_0$.

وبما أن

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(s)\ \mathrm{d}s.$$

و

$$H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(s)\ \mathrm{d}s.$$

فإن:

$$\int_{x_0}^{x} M(s)\ \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} N(s)\ \mathrm{d}s = 0. \tag{28}$$

تسمى المعادلة (28) بالصيغة الضمنية المرفقة بـ (25). ولحل (25)، يكفي كتابة الصيغة الضمنية لها واستخراج عبارة التابع المجهول $y$ منها.

**ملاحظة 10.1.1:**

الصيغة الضمنية تكون معرفة **محلياً** فقط بجوار النقطة $(x_0, y_0)$ من $I \times J$.

ماذا يعني هذا عملياً؟ هذا يعني أن العلاقة الجبرية بين $x$ و $y$ تعطينا حلاً للمعادلة التفاضلية في جوار $x_0$، ولا تضمن بالضرورة وجود الحل على $I$ بأكمله.

لندرس المثال التالي:

**مثال :**

نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{29}$$

يمكن كتابة معادلة المسألة (29) على الشكل:

$$2(y-1)y' = 3x^2+4x+2. \tag{30}$$

إن المعادلة (30) تفاضلية من الرتبة الأولى، وغير خطية ذات متغيرين منفصلين. لحلها، نكتب الصيغة الضمنية المرفقة بها:

$$2\int_{-1}^{y}(s-1)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{x}(3s^2+4s+2)\,\mathrm{d}s. \tag{31}$$

ومنه،

$$y^2-2y-3 = x^3+2x^2+2x.$$

أي:

$$y^2-2y+1 = x^3+2x^2+2x+4.$$

وعليه،

$$(y-1)^2 = x^3+2x^2+2x+4.$$

هذا يعني أننا وجدنا حلين:

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}.$$

نختار حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط الابتدائي لمسألة كوشي، $y(0) = -1$.
وبالتالي، فإن حل المسألة (29)، هو:

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3+2x^2+2x+4},$$

على المجال:

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x^3+2x^2+2x+4 > 0\}.$$

لدينا:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x + 2)(x^2 + 2).$$

بما أن $x^2 + 2 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، فإن الشرط $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 > 0$ يكافئ $x + 2 > 0$، أي $x > -2$. وبالتالي، فإن مجال تعريف الحل هو المجال المفتوح $I = ]-2, +\infty[$.

نمر الآن للمثال الموالي.

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2 y' = \frac{x^2 + 1}{3y^2 + 1}. \tag{32}$$

نلاحظ أن المعادلة غير معرفة عند $x = 0$. ومنه لا يمكن حلها على $\mathbb{R}$ بأكمله. لذلك، نقوم بحل المعادلة على $]0, +\infty[$ وعلى $]-\infty, 0[$.

إن المعادلة (32) تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى وذات متغيرين منفصلين، حيث يمكن كتابتها على الشكل:

$$(3y^2 + 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \qquad x \neq 0. \tag{33}$$

لحلها، يكفي كتابة الصيغة الضمنية المرفقة بها.

ليكن $x_0 \neq 0$. نضع $y_0 = y(x_0)$.

إن الصيغة الضمنية المرفقة بـ (32)، هي:

$$\int_{y_0}^{y} (3s^2 + 1)\ \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \frac{s^2 + 1}{s^2}\ \mathrm{d}s. \tag{34}$$

لدينا من جهة،

$$\int_{y_0}^{y} \left(3s^2 + 1\right)\ \mathrm{d}s = \left[s^3 + s\right]_{y_0}^{y} = y^3 + y - \left(y_0^3 + y_0\right).$$

ولدينا من جهة أخرى،

$$\int_{x_0}^{x} \frac{s^2 + 1}{s^2}\ \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\ \mathrm{d}s = \left[s - \frac{1}{s}\right]_{x_0}^{x} = x - \frac{1}{x} - \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right).$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (32) يحقق المعادلة الجبرية:

$$y^3 + y - x + \frac{1}{x} = C, \qquad x \in \mathbb{R}^*,$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

**ملاحظة 11.1.1:** أكيد أنك تتساءل: ألن نستخرج العبارة الصريحة لـ $y$؟ الأمر عادي جداً. فمن الصعب استخراج العبارة الصريحة في هذا المثال كما فعلنا في المثال السابق. وبالتالي يكفي تعريف العلاقة التي يحققها $y$.

## 7.1 تمارين محلولة

**تمرين 1.1.1 :**

نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' + y = g(x); \\ y(1) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

حيث

$$g(x) = \begin{cases} 2 & : x \in [0,1], \\ 0 & : x \in ]1, +\infty[. \end{cases}$$

عين حلاً مستمراً للمسألة (35).

**حل التمرين 1.1 :**

1. **تعيين الحل العام $y_g$ للمعادلة على المجال $]0,1[$.**

ان المعادلة

$$y' + y = 2,$$

تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى. لحلها، يمكننا استخدام طريقة المعامل التكاملي.

بضرب طرفي المعادلة في المعامل التكاملي $\mu(x) = e^x$، نجد:

$$e^x y' + y e^x = 2e^x \implies (e^x y)' = 2e^x.$$

بمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$ (حيث $x_0 \in ]0,1[$)، نجد:

$$\int_{x_0}^{x} (e^s y(s))' \, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} 2e^s \, \mathrm{d}s.$$

وهذا يكافئ:

$$[e^s y(s)]_{x_0}^{x} = [2e^s]_{x_0}^{x}.$$

ومنه:

$$e^x y(x) - e^{x_0} y(x_0) = 2e^x - 2e^{x_0}.$$

بوضع

$$C_1 = e^{x_0}y(x_0) - 2e^{x_0},$$

نحصل على:

$$e^x y(x) = 2e^x + C_1.$$

وبالقسمة على $e^x$، نجد الحل العام:

$$y_g(x) = 2 + C_1 e^{-x}, \ \forall x \in ]0,1[,$$

حيث $C_1$ ثابت حقيقي كيفي.

2. **تعيين الحل العام $y_d$ للمعادلة على المجال $]1,+\infty[$.**

على هذا المجال $g(x) = 0$، وبالتالي المعادلة تصبح متجانسة

$$y' + y = 0.$$

حلها العام هو:

$$y_d(x) = C_2 e^{-x}, \ \forall x \in ]1,+\infty[.$$

حيث $C_2$ ثابت حقيقي كيفي.

3. **تعيين حلا مستمرا للمسألة (35).**

ليكون الحل $y$ مستمراً عند النقطة $x = 1$ ويحقق الشرط الابتدائي $y(1) = 0$، يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to 1^-} y_g(x) = \lim_{x\to 1^+} y_d(x) = y(1) = 0.$$

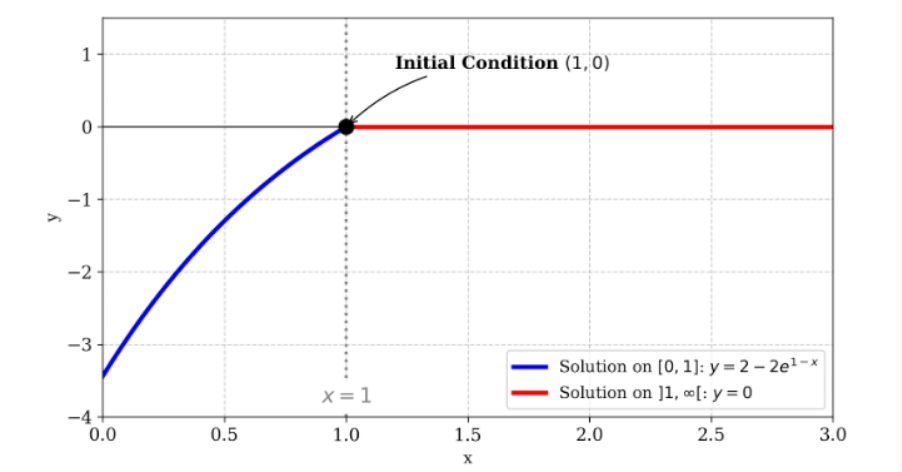
أي أن:

$$2 + C_1 e^{-1} = 0 \quad \text{و} \quad C_2 e^{-1} = 0.$$

من المعادلة الأولى نجد $C_1 = -2e$، ومن المعادلة الثانية نجد $C_2 = 0$.

**الخلاصة:** الحل المستمر للمسألة (35) المعرف على $[0,+\infty[$ هو:

$$y(x) = \begin{cases} 2 - 2e^{1-x} & : x \in [0,1], \\ 0 & : x \in [1,+\infty[. \end{cases}$$




شكل 9.1: التمثيل البياني لحل المسألة (??)

**ملاحظة 12.1.1:** **استمرار واشتقاق الحل عند** $x = 1$ : نلاحظ هندسياً وحسابياً أن الدالة $y$ **مستمرة** عند $x = 1$ (المنحنى متصل)، ولكنها **غير قابلة للاشتقاق** عند هذه النقطة (لاحظ تشكل نقطة زاوية عند $x = 1$).
السبب هو أن المشتق من اليسار يساوي 2 والمشتق من اليمين يساوي 0. هذا الانقطاع في المشتق سببه أن الدالة $g$ في الطرف الثاني للمعادلة كانت غير مستمرة عند $x = 1$.

**تمرين 2.1.1 :**

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = xy^3, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{36}$$

**حل التمرين 2.1 :**

1. دراسة وجود ووحدانية حل المسألة (36)

نعرف على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ التابع $f$ بـ:

$$f(x,y)=xy^3.$$

إن التابع $f$ من الصنف $C^1$ بالنسبة إلى $y$ على $\mathbb{R}$. ومنه، حسب نظرية كوشي ليبشتز -الصيغة الضعيفة-، فإن المسألة (36) تقبل حلاً وحيداً على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0=0$.

**2. حساب حل المسألة (36)**

إن المعادلة (36) تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى وذات متغيرين منفصلين.
لحلها، نكتب الصيغة الضمنية المرفقة بها:

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}s}{s^3}=\int_0^x s\ \mathrm{d}s.$$

**ملاحظة منهجية:** لاحظ أننا قمنا بالقسمة على $y^3$ بشكل مباشر. يعود التبرير الرياضي لذلك إلى أن حل مسألة كوشي يعني البحث عن حلول المعادلة التفاضلية التي تحقق الشرط الابتدائي. في حالتنا هذه، لدينا $y(0)=1\neq 0$. وبما أن الدالة $y$ مستمرة، فإنه يوجد جوار $V$ للنقطة $x_0=0$ لا تنعدم عليه الدالة $y$. وبالتالي، يمكننا القسمة على $y$ بكل أريحية ما دام هدفنا هو إيجاد الحل محلياً بجوار $x_0$ أين يكون الشرط الابتدائي غير معدوم.

بحساب التكاملين نجد:

$$\left[-\frac{1}{2s^2}\right]_1^y=\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x.$$

ومنه،

$$-\frac{1}{2y^2}-\left(-\frac{1}{2(1)^2}\right)=\frac{x^2}{2}.$$

ومنه،

$$-\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2}.$$

بضرب طرفي المساواة الأخيرة في $-2$، نجد:

$$\frac{1}{y^2}-1=-x^2.$$

ومنه:

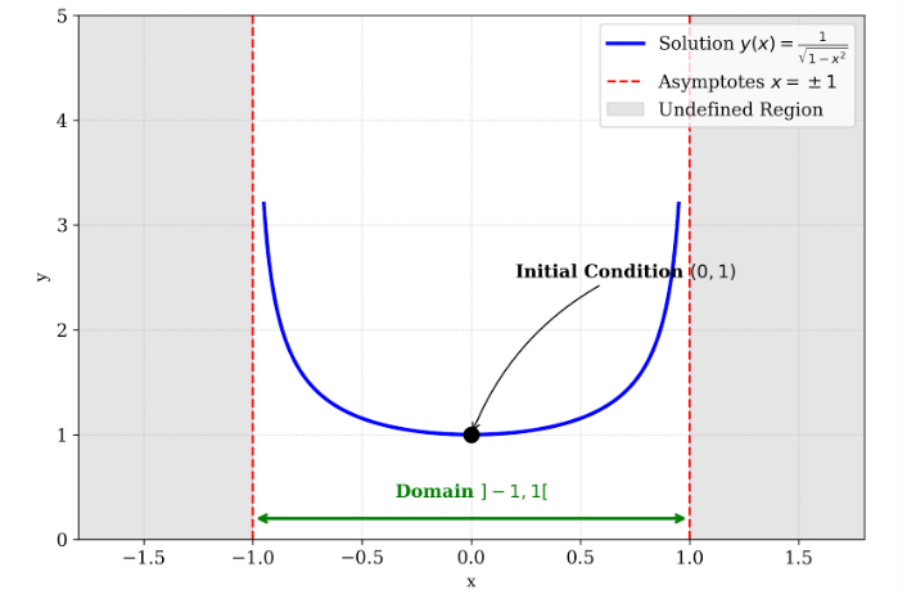
$$y^2(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

ليكون الحل معرفاً وحقيقياً، يجب أن يكون المقام موجباً تماماً. أي $1 - x^2 > 0$، بمعنى $x \in ]-1, 1[$.
وعليه، نجد حلين ممكنين للمعادلة التفاضلية:

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

بما أن الشرط الابتدائي هو $y(0) = 1$ (قيمة موجبة)، فإننا نختار الحل الموجب. وبالتالي، فإن الحل الوحيد للمسألة (36) على المجال $]-1, 1[$، هو:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$




شكل 10.1: التمثيل البياني لحل المسألة (36)

**التفسير الرياضي والفيزيائي للتمثيل البياني (الانفجار في مدة منتهية):**
هذا المثال يوضح ظاهرة جوهرية وخاصة بالمعادلات التفاضلية غير الخطية تُسمى **"الانفجار في مدة منتهية"** ( Finite-Time Blow-up ).

1. **من الناحية الرياضية:** نلاحظ أن مجال تعريف الحل $]-1, 1[$ محدود (منتهٍ)، رغم أن المعاملات في المعادلة الأصلية معرفة على كل $\mathbb{R}$. يعود ذلك لدرجة "اللاخطية" العالية

($y^3$) التي تجعل الحل يتزايد بسرعة فائقة جداً بحيث يصل إلى اللانهاية عند اقترابه من الحدود $x = \pm 1$ (ظهور خطوط مقاربة عمودية).

2. **من الناحية الفيزيائية:** يمثل هذا المنحنى ظاهرة "التسارع المفرط" أو الكارثي. الفكرة بسيطة: تمثل المشتقة $y'$ سرعة تغير الدالة $y$. وبما أن:

$$y' = xy^3,$$

فإن مقدار السرعة هو:

$$|y'| = |x||y|^3.$$

وبالتالي، عندما تزداد قيمة $y$، يزداد مقدار السرعة $y'$ بشكل هائل وتراكمي، مما يؤدي إلى تزايد عمودي للحل عندما يقترب $x$ من $-1$ (من اليمين) أو من $1$ (من اليسار). النظام هنا يفقد استقراره بالكامل وينهار في وقت محدد، وهي الظاهرة المعروفة باسم **الانفجار في مدة منتهية.**

### تمرين 3.1.1 :

احسب حل مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = (x-2)(y+1), \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{37}$$

### حل التمرين 3.1 :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الخطية (37) على الشكل:

$$\frac{1}{1+y}\frac{dy}{dx} = x - 2, \ \forall x \in V(0).$$

بالفعل، بما أن الشرط الابتدائي $y(0) = 2 \neq -1$ وبما أن $y$ مستمر، فإنه يوجد جوار $V(0)$

للصفر، بحيث:

$$\forall x \in V(0),\ y(x) \neq -1.$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى خطية وذات متغيرين منفصلين. لحلها، نكتب الصيغة الضمنية المرفقة لها:

$$\int_2^y \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = \int_0^x (s-2)\,\mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$[\ln|1+s|]_2^y = \frac{x^2}{2} - 2x.$$

ومنه،

$$\ln|1+y| - \ln(3) = \frac{x^2}{2} - 2x \implies \ln|1+y| = \ln(3) + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

وعليه، بما أن:

$$|1+y| = 1+y,\ \forall x \in V(0),$$

نستنتج أن:

$$1 + y(x) = 3\exp\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right).$$

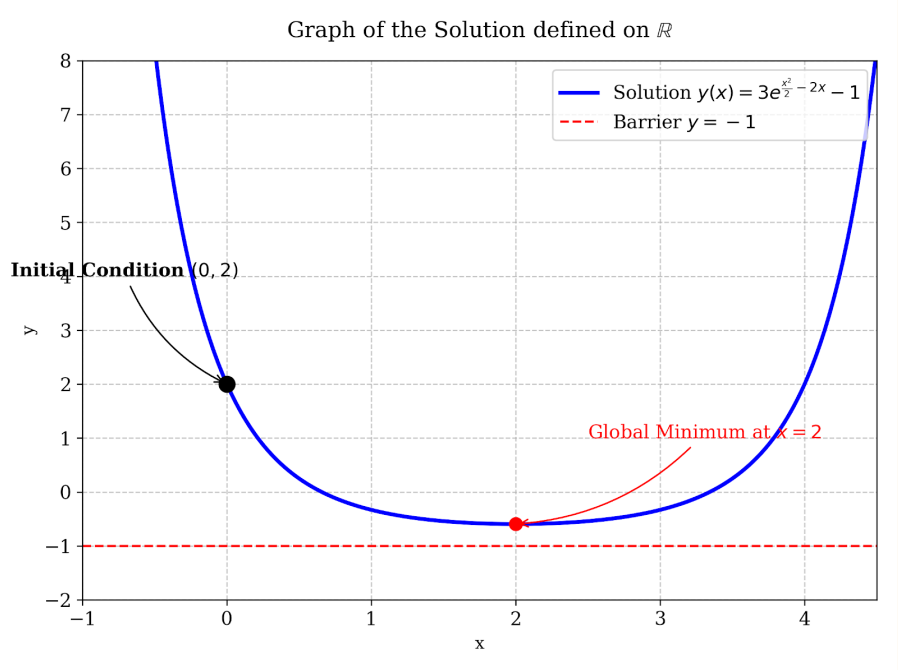
وبالتالي، العبارة الصريحة للحل هي:

$$y(x) = 3\exp\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) - 1.$$

**ملاحظة هامة:** لا شك بأنك في حيرة من أمرك. وأنت تقول في نفسك: كيف في البداية عملنا على جوار $V(0)$ للنقطة $x_0 = 0$ وفي الأخير وجدنا أن حل المسألة معرف على $\mathbb{R}$ بأكمله؟!

- **أثناء الحل (الحذر المبدئي):** في البداية، أردنا القسمة على $y+1$. ولكي يكون هذا مسموحاً رياضياً، يجب أن نضمن أن المقام لا ينعدم، أي $y \neq -1$. بما أننا لا نعرف الدالة $y$ بعد، لا يمكننا أن نقوم بفرضيات عشوائية. لذلك نعتمد على خاصية جوهرية للحل وهي **الاستمرار**. بما أن الشرط الابتدائي هو $y(0) = 2$ (وهي قيمة بعيدة عن القيمة الممنوعة $-1$)، فمن استمرار $y$ نضمن أنه سيبقى مختلفاً عن $-1$ (وأكبر منه تماماً) في جوار $V(0)$ للصفر. هذا يضمن لنا صحة كل العمليات الحسابية.
- **بعد الحل (التحقق النهائي):** مباشرة بعد الحصول على العبارة الصريحة للحل $y$، وجدنا حسابياً أنه معرف ومستمر من أجل كل الأعداد الحقيقية $x \in \mathbb{R}$، وأن قيمته لا تساوي

أبداً $-1$ (لأن الدالة الأسية موجبة تماماً). ومن هنا نستنتج أن الحل مقبول على $\mathbb{R}$ بأكمله، وأن الحذر الذي توخيناه في البداية كان ضرورياً فقط لبناء الحل بشكل سليم وصارم.




شكل 11.1: التمثيل البياني لحل المسألة (37)

**التفسير الرياضي والفيزيائي للتمثيل البياني:**

1. **رياضياً (حاجز الوحدانية):** نلاحظ أن المنحنى التكاملي يقترب من المستقيم $y = -1$ لكنه لا يقطعه أبداً. السبب هو أن $y = -1$ يعدم المشتق $(y' = 0)$ ويمثل حلاً ثابتاً للمعادلة ( Trivial Solution ) وحلاً للمسألة من أجل الشرط الابتدائي $y(0) = -1$. حسب نظرية كوشي-ليبشتز ومبدأ **وحدانية الحلول** ( Uniqueness )، لا يمكن لمنحنيين تكامليين أن يتقاطعا. لذلك، يشكل المستقيم $y = -1$ "جداراً" يمنع الحل من النزول تحته.
2. **فيزيائياً (تأثير البيئة):** يمكن تفسير الحد $(x-2)$ كعامل خارجي متغير مع الزمن $x$ (مثل درجة الحرارة أو توفر الغذاء).

- عندما $x < 2$: العامل الخارجي سلبي (ظروف سيئة)، مما يجبر الحل (مثل عدد السكان أو حجم كائن) على التناقص.
- عندما $x > 2$: يتحول العامل الخارجي إلى إيجابي (ظروف جيدة)، مما يسمح للحل بالنمو والتزايد بسرعة هائلة ( Exponential Growth ).

النقطة $x = 2$ تمثل لحظة "انقلاب الموازين" أو نقطة التحول من التدهور إلى الازدهار.

### تمرين 4.1.1 :

أوجد حل مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) - b(x)y^2(x); \\ y(0) = A > 0, \end{cases} \tag{38}$$

حيث $a$ و $b$ دالتان مستمرتان على مجال $I$ يشمل $0$. (تسمى هذه المعادلة **معادلة برنولي Bernoulli**).

### حل التمرين 4.1 :

إن معادلة المسألة (38)، تفاضلية غير خطية من نوع **برنولي** ( Bernoulli ) من الشكل:

$$y' = a(x)y - b(x)y^{\alpha}$$

مع $\alpha = 2$.

نلاحظ أن الدالة المعدومة $y \equiv 0$ هي حل للمعادلة التفاضلية، ولكنها لا تحقق الشرط الابتدائي $y(0) = A > 0$ للمسألة. وعليه، فإن التابع المعدوم ليس حلا للمسألة.

بما أن الطرف الثاني للمعادلة:

$$f(x, y) = a(x)y - b(x)y^2$$

من الصنف $C^1$ بالنسبة لـ $y$، فإن نظرية الوحدانية (كوشي-ليبشيتز) تضمن أن الحل الذي يمر من النقطة $A > 0$ لا يمكن أن يتقاطع مع الحل المعدوم. إذن، الحل $y$ **لا ينعدم أبداً** (ويبقى موجباً تماماً) على مجال تعريفه.

بما أن $y \neq 0$، يمكننا قسمة طرفي المعادلة على $y^2$:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{a(x)}{y} - b(x). \tag{39}$$

نقوم بتبديل المتغير، ونضع:

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

باشتقاق $z$ بالنسبة لـ $x$، نجد:

$$z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

بالتعويض في المعادلة (39)، نجد:

$$z' + a(x)z = b(x). \tag{40}$$

لقد حصلنا على **معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى** للمجهول $z$.

إن المعادلة (40) تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى. حلها العام يُكتب على الشكل:

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x),$$

حيث $z_h$ الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بها:

$$z' + a(x)z = 0,$$

و $z_p$ حل خاص للمعادلة غير المتجانسة.

- إن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$z_h(x) = Ce^{-\alpha(x)},$$

حيث:

$$\alpha(x) = \int_0^x a(t)dt.$$

- باستخدام طريقة تغيير الثابت، نجد حلاً خاصاً:

$$z_p(x) = e^{-\alpha(x)} \int_0^x b(t)e^{\alpha(t)}dt.$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (40) هو:

$$z(x) = e^{-\alpha(x)} \left( C + \int_0^x b(t)e^{\alpha(t)}dt \right),$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي نعينه باستخدام الشرط الابتدائي.

لدينا:

$$z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{A}.$$

بالتعويض في عبارة $z$ عند $x = 0$ (علماً أن $\alpha(0) = 0$ والتكامل ينعدم)، نجد:

$$z(0) = 1 \cdot (C + 0) = C \implies C = \frac{1}{A}.$$

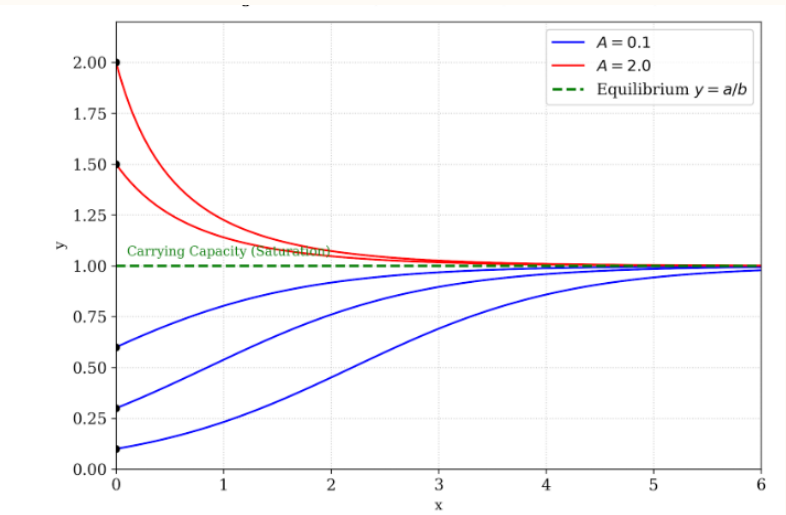
ومنه:

$$z(x) = e^{-\alpha(x)} \left( \frac{1}{A} + \int_0^x b(t)e^{\alpha(t)}dt \right).$$

وبما أن $y = 1/z$، فإن حل مسألة كوشي (38) هو:

$$y(x) = \frac{e^{\alpha(x)}}{\frac{1}{A} + \int_0^x b(t)e^{\alpha(t)}dt}.$$

حيث $\alpha(x) = \int_0^x a(s)ds$.




شكل 12.1: مثال توضيحي في الحالة الخاصة حيث $a$ و $b$ ثابتان موجبان (النمو اللوجستي).

**التفسير الرياضي والفيزيائي للتمثيل البياني:**

إن التمثيل البياني أعلاه يمثل "**نموذج النمو السكاني في بيئة محدودة الموارد**" أو ما يُعرف بالنمو اللوجستي ( Growth Logistic ). وهو يعبر عن صراع ديناميكي بين قوتين:

- **قوة التكاثر** $(ay)$: تدفع المنحنى للصعود (نمو متسارع للسكان).
- **قوة المنافسة** $(-by^2)$: تدفع المنحنى للنزول (كابح للنمو بسبب محدودية الغذاء والمساحة).

**النتيجة والاستقرار:** تتوازن هاتان القوتان تماماً عند القيمة $y = \frac{a}{b}$، والتي تُسمى "**السعة القصوى للبيئة**" ( Capacity Carrying ).

- إذا كانت الكمية الابتدائية $A$ أقل من السعة القصوى (المنحنيات الزرقاء)، يتزايد الحل أسياً في البداية ثم يتباطأ حتى يستقر بشكل مقارب عند السقف $\frac{a}{b}$.
- إذا كانت الكمية الابتدائية $A$ مفرطة وتتجاوز السعة القصوى (المنحنيات الحمراء)، يحدث تناقص (وفيات أو استنزاف) حتى يستقر الحل تنازلياً عند نفس السقف $\frac{a}{b}$.

**تمرين 5.1.1 :**

احسب حل المعادلة التفاضلية:

$$xy' + y = 1, \ x > 0. \tag{41}$$

## حل التمرين 5.1 :

إن المعادلة (41) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة.

بدلاً من الاندفاع مباشرة في تطبيق الطرق التقليدية، نلاحظ أن الطرف الأيسر يمثل مشتق الجداء $(x \cdot y)$، أي أن:

$$xy' + y = (xy)'.$$

وعليه، يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$(xy)' = 1. \tag{42}$$

ومنه،

$$xy = x + c,$$

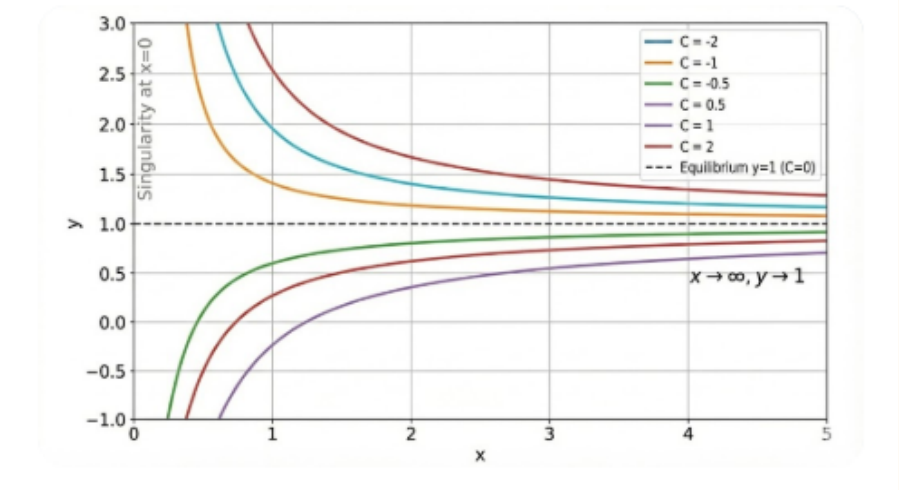
حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي.

ومنه،

$$y = \frac{x + c}{x}.$$

وبالتالي، فإن حل المعادلة (41) على $]0, +\infty[$، هو

$$y(x) = 1 + \frac{c}{x}.$$




شكل 13.1: التمثيل البياني لحلول (41).

**ملاحظة.** لاحظ أن المنحنيات التكاملية لحلول المعادلة التفاضلية (41) عبارة عن قطوع زائدة تقترب جميعها من المستقيم $y = 1$ (حالة التوازن) وتبتعد نحو اللانهاية عند الاقتراب من الصفر.

### تمرين 6.1.1 :

**1.** احسب الحل الدقيق لمسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} xy' + y = \sin(x), \ x > 0, \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{43}$$

**2.** حاول حساب التقريبات المتعاقبة الثلاث الأولى لها. ماذا تستنتج؟

**3.** على المستطيل التالي:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |x| \leqslant \frac{1}{2}, \ |y| \leqslant 1 \right\}$$

ادرس المسألة التالية بطريقتين:

$$y' = -x^2 y^2 + e^{-y^2}, \quad y(0) = 0. \tag{44}$$

## حل التمرين 6.1 :

1. **حساب الحل الدقيق للمسألة (43) .**

إن معادلة المسألة (43) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة. ويمكن كتابتها على الشكل:

$$(xy)' = \sin(x). \tag{45}$$

بمكاملة طرفي (45) من $x_0 = 1$ إلى $x$، نجد:

$$\int_1^x (sy(s))' \, \mathrm{d}s = \int_1^x \sin(s) \, \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$xy(x) - y(1) = [-\cos(s)]_1^x = -\cos(x) + \cos(1).$$

ومنه،

$$xy(x) = -\cos(x) + \cos(1).$$

وبالتالي، فإن حل المسألة (43) على المجال $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(-\cos(x) + \cos(1)\right), \ x > 0.$$

2. **حساب التقريبات المتعاقبة الثلاث الأولى للمسألة (43).**

نعلم أن $y_0 = 0$.

أولا، نكتب المعادلة التفاضلية

$$xy' + y - \sin(x) = 0,$$

على الشكل:

$$y' = f(x, y),$$

حيث

$$f(x, y) = \frac{\sin(x) - y}{x}.$$

لدينا:

$$y_1(x) = y_0 + \int_1^x f(s, y_0) \, \mathrm{d}s = \int_1^x \frac{\sin(s)}{s} \, \mathrm{d}s.$$

لاحظ أن التكامل

$$\int_1^x \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s$$

موجود، لكن لا يمكن حسابه بدقة.
ولدينا كذلك،

$$y_2(x) = y_0 + \int_1^x f(s, y_1(s))\,\mathrm{d}s = \int_1^x \frac{\sin(s) - y_1(s)}{s}\,\mathrm{d}s.$$

التكاملات موجودة لكن لا يمكن حسابها. وبالتالي، نستنتج أنه لا يمكن دائما حساب التقريبات المتعاقبة غير أن هذا لا يمنع تقاربها نحو الحل الدقيق للمسألة إن تحققت الشروط الكافية.

### 3. دراسة مسألة كوشي على مستطيل، بطريقتين.

نعتبر مسألة كوشي (44):

$$y' = -x^2y^2 + e^{-y^2}, \quad y(0) = 0. \tag{46}$$

على المستطيل:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leqslant \frac{1}{2}, |y| \leqslant 1\right\}.$$

**الطريقة 1. باستخدام المبرهنة الأساسية.**
نعرف التابع $f$ على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, بـ:

$$f(x, y) = -x^2y^2 + e^{-y^2}.$$

لنتأكد من شروط المبرهنة الأساسية.
1. إن التابع $f$ مستمر على المستطيل $\mathcal{R}$ لأنه عبارة عن تركيب ومجموع توابع مستمرة على المستطيل المتراص $\mathcal{R}$، فهو محدود، ولدينا:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= |-x^2y^2 + e^{-y^2}| \\ &\leqslant |-x^2||y^2| + |e^{-y^2}| \\ &\leqslant \frac{5}{4} = M. \end{aligned}$$

2. إن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمر على المستطيل المتراص $\mathcal{R}$ فهو محدود ويبلغ حديه الأعلى والأدنى.

حسب المبرهنة الأساسية، نستنتج من 1. و 2. أن المسألة (44) تقبل حلا وحيدا على المجال $|x| \leqslant \alpha$، حيث

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2},$$

أي أن مجال الحل هو $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

كما أن التقريبات المتعاقبة متقاربة نحو الحل الدقيق للمسألة (44).

**2. باستخدام مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ.**

• لنتأكد أولا أن $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$ على المستطيل $\mathcal{R}$.

ليكن $(x, y_1)$ و $(x, y_2)$ من $\mathcal{R}$. لدينا:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |-x^2 y_1^2 + e^{-y_1^2} + x^2 y_2^2 - e^{-y_2^2}|, \\ &\leqslant |x^2||y_1^2 - y_2^2| + |e^{-y_1^2} - e^{-y_2^2}|. \end{aligned}$$

باستخدام متباينة التزايدات المنتهية على التابع $x \mapsto e^{-x^2}$ ، نجد:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |x^2| \sup_y |2y||y_1 - y_2| + \sup_y |(e^{-y^2})'||y_1 - y_2|, \\ &\leqslant \frac{1}{4} \times 2 \times |y_1 - y_2| + 2 \times |y_1 - y_2|, \\ &\leqslant \frac{5}{2}|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

وعليه، $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$ على المستطيل $\mathcal{R}$ وثابت ليبشتز هو $L = \frac{5}{2}$.

نعرف المجموعة

$$S(\rho) = \{y \in S : ||y||_\infty \leqslant \rho\},$$

حيث $S$ مجموعة التوابع المستمرة على المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$، مزودة بالنظيم

$$||y||_\infty = \sup_x |y(x)|.$$

نعرف التطبيق $T$ بـ:

$$T : S(\rho) \to S(\rho)$$

$$y(x) \mapsto (T(y))(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s))\ \mathrm{d}s.$$

**تعيين $\rho$.**
لدينا:

$$||y||_\infty \leqslant |y_0| + M|x| \leqslant \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

ليكن $y_1$ و $y_2$ من $S(\rho)$. لدينا:

$$\begin{aligned} ||T(y_1) - T(y_2)||_\infty &= \sup_{|x|\leqslant a} \left| \int_0^x (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\ \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \sup_{|x|\leqslant a} \int_0^{|x|} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\ \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

بما أن $f$ ليبشيتزي، لدينا:

$$||T(y_1) - T(y_2)||_\infty \leqslant \sup_{|x|\leqslant a} \int_0^{|x|} L|y_1(s) - y_2(s)|\ \mathrm{d}s.$$

باستخدام خاصية النظيم:

$$|y_1(s) - y_2(s)| \leqslant ||y_1 - y_2||_\infty,$$

يكون لدينا:

$$\begin{aligned} ||T(y_1) - T(y_2)||_\infty &\leqslant L \sup_{|x|\leqslant a} ||y_1 - y_2||_\infty \int_0^{|x|} \mathrm{d}s, \\ &\leqslant La||y_1 - y_2||_\infty \end{aligned}$$

لكي يكون $T$ تقلصي، يجب أن يكون

$$La < 1,$$

حيث $L = \frac{5}{2}$.

إذن لكي يكون $T$ تقلصي، يجب أن يتحقق الشرط:

$$a < \frac{2}{5}.$$

إذن نختار مثلا

$$a = \frac{1}{5}.$$

عندئذ،

$$||T(y_1) - T(y_2)||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||y_1 - y_2||_\infty$$

وبالتالي $T$ تقلصي على المجال $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$.

حسب مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ، مسألة كوشي (44) تقبل حلا وحيدا على هذا المجال، والتقريبات المتعاقبة متقاربة نحو الحل الدقيق للمسألة.

**تمرين 7.1.1 :**

ادرس وجود ووحدانية المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = x^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{47}$$

على المستطيل:

$$\mathcal{R} = \{(x, y), 0 \leqslant x \leqslant 1, |y - 1| \leqslant 1\}.$$

**حل التمرين 7.1 :**

نضع $f(x, y) = x^2 + e^{-y^2}$ ونعتبر المسألة (47) على المستطيل:

$$\mathcal{R}' = \{(x, y), |x| \leqslant 1, |y - 1| \leqslant 1\}.$$

أ- إن التابع $f$ مستمر على المستطيل $\mathcal{R}'$ لأنه عبارة عن تركيب ومجموع توابع مستمرة على $\mathcal{R}'$.

ليكن $(x, y) \in \mathcal{R}'$. لدينا:

$$|f(x, y)| = |x^2 + e^{-y^2}| \leqslant |x^2| + |e^{-y^2}| \leqslant 1 + 1 = 2 = M.$$

إذن $f$ محدود على $\mathcal{R}'$.

ب- نبين بنفس الطريقة أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمر ومحدود على المستطيل $\mathcal{R}'$.

ومنه نستنتج من المبرهنة الأساسية أن المسألة تقبل حلاً وحيدا على المجال $\left[0, \frac{1}{2}\right]$، والتقريبات المتعاقبة متقاربة نحوه.

### تمرين 8.1.1 :

على المستطيل:

$$\mathcal{R} = \{(x, y), 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant 1\},$$

نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = x + e^{-x} + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

أ- برهن على أن $f$ مستمر على $\mathcal{R}$ وأنه يحقق شرط ليبشتز بالنسبة إلى $y$.

ب- بين أن المسألة (48) تقبل حلا وحيدا على مجال $I$ يطلب تعيينه.

جـ- هل يمكن تمديد حل المسألة (48) على مجال أكبر؟

### حل التمرين 8.1 :

نعتبر المسألة التالية:

$$\begin{cases} y' = x + e^{-x} + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{49}$$

على المستطيل:

$$\mathcal{R} = \{(x, y), 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}.$$

**أ- إثبات أن التابع $f$ مستمر على المستطيل $\mathcal{R}$ ويحقق شرط ليبشتز بالنسبة إلى $y$.**

إن التابع $f$ عبارة عن تركيب ومجموع توابع مستمرة على المستطيل $\mathcal{R}$، فهو مستمر على $\mathcal{R}$.

لنبين الآن أن $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$. ليكن $(x, y_1)$ و $(x, y_2)$ من $\mathcal{R}$.

لدينا:

$$\begin{aligned} |f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= \left|e^{-y_1^2}-e^{-y_2^2}\right| \\ &\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1}\left|(e^{-y^2})'\right||y_1-y_2| \\ &\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1}\left|-2ye^{-y^2}\right||y_1-y_2| \\ &\leqslant 2\,|y_1-y_2|\,. \end{aligned}$$

ومنه $f$ ليبشتزي بالنسبة إلى $y$ بثابت ليبشتز $L=2$.

**ب- إثبات أن المسألة (48) تقبل حلا وحيدا على مجال $I$ يطلب تعيينه.**

بما أن $f$ مستمر على متراص، فهو محدود ويبلغ حديه الأعلى والأدنى.
ليكن $(x,y)\in\mathcal{R}$. لدينا:

$$|f(x,y)|=|x+e^{-x}+e^{-y^2}|\leqslant 1+1+1=3=M.$$

ومنه، $f$ محدود على $\mathcal{R}$ بالثابت $M=3$.
من أ- ومن محدودية $f$، وحسب المبرهنة الأساسية، نستنتج أن المسألة (48) تقبل حلا وحيدا على المجال $I=[0,\alpha]$، حيث

$$\alpha=\min\left(1,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

أي أن مجال الحل، هو: $I=\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

**جـ- دراسة إمكانية تمديد الحل على مجال أكبر.**

نعم، يمكن تمديد الحل على مجال أكبر، وبشكل أدق، يمكن تمديده إلى $\mathbb{R}$ بأكمله.

لإثبات ذلك، يكفي إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي كيفي $a>0$، يبقى الحل $y$ محدودا على المتراص $[-a,a]$.

ليكن $a>0$. من أجل كل $x\in[-a,a]$، لدينا:

$$\begin{aligned} |y'(x)| &= |x+e^{-x}+e^{-y^2}| \\ &\leqslant a+e^{a}+1=M. \end{aligned}$$

بمكاملة طرفي المتراجحة الأخيرة من 0 إلى $x$ واستخدام الشرط الابتدائي $y(0) = 0$، نحصل على:

$$|y(x)| = \left|\int_0^x y'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x |y'(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant M|x|.$$

وبما أن $x \in [-a, a]$، فهذا يعني أن $|y(x)|$ محدودة بثابت منته هو $Ma$، مما يسمح بتمديد الحل إلى أي مجال منته، وبالتالي يمكن تمديده إلى $\mathbb{R}$ بأكمله.

### تمرين 9.1.1 :

نعتبر على المستطيل $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-1, 5]$، مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = x^2y^2 + y^4, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{50}$$

برهن أن المسألة (50) تتمتع بحل وحيد على مجال $I$ يطلب تعيينه.

### حل التمرين 9.1 :

نعتبر مسألة كوشي (50):

$$\begin{cases} y' = x^2y^2 + y^4; \\ y(0) = 2, \end{cases} \tag{51}$$

على المستطيل $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-1, 5]$.

لإثبات وجود ووحدانية حل مسألة كوشي باستخدام المبرهنة الأساسية، نعيد أولاً كتابة المستطيل على شكل مستطيل مركزه النقطة $(0, 2)$ التي أعطي عندها الشرط الابتدائي.

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1, |y - 2| \leqslant 3\}.$$

1. إن التابع $f$ مستمر على المستطيل المتراص $\mathcal{R}$ فهو محدود، ولدينا من أجل كل $(x, y)$ من

$\mathcal{R}$،

$$|f(x,y)| \leqslant x^2y^2 + y^4 \leqslant 1 \times 5^2 + 5^4 = 650 = M.$$

2. بنفس الطريقة، نبين أن $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ مستمر ومحدود على المستطيل $\mathcal{R}$.

حسب المبرهنة الأساسية، نستنتج من 1. و 2. أن المسألة (50) تقبل حلاً وحيدا على المجال $|x| \leqslant \alpha$، حيث $\alpha = \min\left(1, \dfrac{3}{650}\right) = \dfrac{3}{650}$. ومنه، مجال الحل هو $\left[-\dfrac{3}{650}, \dfrac{3}{650}\right]$.

### تمرين 10.1.1 :

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = y^2, \ x \in \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{52}$$

### حل التمرين 10.1 :

نضع

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = y^2 \end{aligned}$$

**1. دراسة الوجود والوحدانية.**

نلاحظ أن التابع $f$ من الصنف $C^1(\mathbb{R})$ بالنسبة إلى $y$. ومنه حسب مبرهنة كوشي-ليبشتز (الصيغة الضعيفة)، من أجل كل شرط ابتدائي $(x_0, y_0)$، المسألة (52) تقبل حلاً وحيدا على مجال مفتوح $I$ يشمل $x_0$.

**2. حساب حل المسألة (52).**

إن المعادلة

$$y' = y^2,$$

تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى، وهي ذات متغيرين منفصلين.

أول فكرة تخطر على البال، هي كتابة هذه المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$\frac{1}{y^2}y' = 1.$$

لكن الكتابة $\frac{1}{y^2}$ ليست دائما صحيحة. هي ليست صحيحة في حالة $y \equiv 0$ وليست صحيحة في حالة $y(x_0) = 0$.

لذا سنعالج كل حالة على حدة بوضع فرضيات على الشرط الابتدائي $y_0$.

**إحذر! لا نضع فرضيات على التابع المجهول $y$!**

**الحالة 1:** $y_0 = 0$.

نلاحظ أنه إذا كان $y_0 = 0$، فإن التابع المعدوم $y \equiv 0$ يحقق المعادلة التفاضلية، فهو حل للمسألة. ومن وحدانية الحل، نستنتج أنه لما $y_0 = 0$، المسألة تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ هو التابع المعدوم.

**الحالة 2:** $y_0 \neq 0$.

في هذه الحالة، التابع المعدوم $y \equiv 0$ ليس حلا للمسألة لأنه لا يحقق الشرط الابتدائي.

بما أن $y_0 = y(x_0) \neq 0$ نستنتج من استمرارية $y$ أنه يوجد $V$ جوار لـ $x_0$ بحيث

$$\forall x \in V,\ y(x) \neq 0.$$

ومنه،

$$\frac{y'}{y^2} = 1,\ \forall x \in V.$$

وهي معادلة تفاضلية غير خطية ذات متغيرين منفصلين. لحلها، نكتب الصيغة الضمنية المرفقة بها:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$\left[\frac{-1}{s}\right]_{y_0}^{y} = x - x_0.$$

أي:

$$-\frac{1}{y(x)} = x - \left(\frac{1}{y_0} + x_0\right).$$

بوضع $c = x_0 + \frac{1}{y_0}$، نحصل على:

$$-\frac{1}{y(x)} = x - c \implies \frac{1}{y(x)} = c - x.$$

ومنه،

$$y(x) = \frac{1}{c - x}.$$

**تعيين مجال تعريف $y$.**

إن الحل $y$ غير معرف عند النقطة $x = c$. وعليه، نميز حالتين:

- إذا كان $y_0 > 0$، فإن $c = x_0 + \frac{1}{y_0} > x_0$. في هذه الحالة، مجال الحل هو $I = ]-\infty, c[$.
- إذا كان $y_0 < 0$، فإن $c = x_0 + \frac{1}{y_0} < x_0$. في هذه الحالة، مجال الحل هو $I = ]c, +\infty[$.

### تمرين 11.1.1 :

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = y^{3/4}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{53}$$

## حل التمرين 11.1 :

نعرف التابع $f$ على $D = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{4} y^{-1/4}.$$

نلاحظ أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ ليس محدودا في جوار $x_0 = 0$. ومنه، $f$ ليس ليبشيتزي بالنسبة إلى $y$ في جوار الصفر. ولذا لا يمكن استخدام المبرهنة الأساسية أو مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ.

كما نلاحظ أن $\frac{\partial f}{\partial y}$ ليس سالبا. أي أن التابع $f$ غير متناقص بالنسبة إلى $y$. ومنه لا يمكننا استخدام نظرية بيانو مع شرط التناقص.

وبالتالي، في هذه الحالة، علينا بحساب الحلول يدويا.

إن التابع المعدوم $y \equiv 0$ حل واضح للمسألة (53). لنبحث عن حلول أخرى غير التابع المعدوم. أي نبحث عن الحلول الموجبة تماما للمسألة.

إن المعادلة

$$y' = y^{3/4},$$

تفاضلية من الرتبة الأولى، غير خطية وذات متغيرين منفصلين. الصيغة الضمنية المرفقة بها، هي:

$$\int y^{-3/4}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x.$$

ومنه،

$$4y^{1/4} = x + C,$$

حيث $C$ ثابت حقيقي كيفي.

وعليه، حل ثان للمعادلة التفاضلية للمسألة، هو:

$$y(x) = \left(\frac{x+C}{4}\right)^4.$$

لنعين $C$ بإستخدام الشرط الإبتدائي. لدينا:

$$y(0) = \left(\frac{0+C}{4}\right)^4 = \frac{C^4}{256} = 0 \implies C = 0.$$

وعليه، فإن حل موجب للمسألة، معطى بـ:

$$y(x) = \frac{x^4}{256},$$

معرف على $]0, \infty[$.

وعليه، حل ثان للمسألة (53) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y_2(x) = \begin{cases} 0a : x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4}{256} \qquad\quad : x > 0. \end{cases}$$

### تمرين 12.1.1 :

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = -|y|^{1/2}\mathrm{sgn}(y); \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{54}$$

حيث تابع الإشارة $y \mapsto \mathrm{sign}(y)$ معرف بـ:

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & , \ y \geqslant 0, \\ -1 & , \ y < 0. \end{cases}$$

### حل التمرين 12.1 :

نضع

$$f(x,y) = -|y|^{1/2}\mathrm{sgn}(y),$$

أي أن

$$f(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{y} & , \ y \geqslant 0, \\ \sqrt{-y} & , \ y < 0. \end{cases}$$

لدينا،

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & , \ y > 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-y}} & , \ y < 0. \end{cases}$$

لاحظ أن $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ غير محدود في جوار الصفر. وفي هذه الحالة، لا يمكن تطبيق مبرهنة كوشي-ليبشتز ولا مبرهنة النقطة الصامدة لبناخ. ولذلك نفكر في تطبيق مبرهنة بيانو وشرط التناقص.

نلاحظ أن التابع $f$ مستمر على الشريط

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x < +\infty, |y| \in \mathbb{R}\},$$

كما نلاحظ أن $f$ متناقص تماما بالنسبة إلى $y$ على $\mathbb{R}$.

وبالتالي، حسب مبرهنة بيانو وشرط التناقص، المسألة (54) تتمتع بحل وحيد على المجال $[0, +\infty[$

وهو الحل المعدوم $y \equiv 0$.

رغم أن $f$ متناقصة على $\mathbb{R}$ بأكمله، إلا أن شرط التناقص يضمن الوحدانية في اتجاه واحد فقط $x \geqslant 0$. وبالتالي، ندرس إمكانية وحدانية الحل أو تعدد الحلول عن طريق حسابها مباشرة.
لنبحث عن حلول للمعادلة التفاضلية $y' = -|y|^{1/2}\mathrm{sgn}(y)$ تحقق الشرط $y(0) = 0$، على المجال $]-\infty, 0]$.
نلاحظ أن $y \equiv 0$ حل للمسألة على المجال $]-\infty, 0[$. لنبحث عن حلول أخرى غير التابع المعدوم. ولذا، سنميز حالتين:

**الحالة 1. نبحث عن الحلول الموجبة** $\forall x < 0,\ y(x) > 0$.

بما أن $y > 0$، فإن $|y| = y$ و $\mathrm{sgn}(y) = 1$.

المعادلة التفاضلية تصبح:

$$y' = -\sqrt{y}.$$

وهي معادلة تفاضلية غير خطية ذات متغيرين منفصلين (بما أن $y \neq 0$، يمكننا القسمة على $\sqrt{y}$.)، يمكن كتابتها على الشكل:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = -\mathrm{d}x.$$

الصيغة الضمنية المرفقة بها، هي:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = -\int \mathrm{d}x.$$

ومنه،

$$2\sqrt{y} = -x + C,$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي نعينه بإستخدام الشرط الابتدائي $y(0) = 0$.

لدينا:

$$2\sqrt{y} = -x. \tag{55}$$

**لاحظ هنا أن** $x < 0$، **وبالتالي** $-x$ **مقدار موجب، مما يتوافق مع الطرف الأيسر** $2\sqrt{y}$ **الموجب** .

بتربيع طرفي (55)، نجد:

$$4y = x^2 \implies y_1(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

**الحالة 2.نبحث عن الحلول السالبة** $\forall x < 0,\ y(x) < 0$.

بما أن $y < 0$، فإن $|y| = -y$ و $\text{sgn}(y) = -1$.

المعادلة التفاضلية تصبح:

$$y' = -\sqrt{-y} \times (-1) \implies y' = \sqrt{-y}.$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين، يمكن كتابتها على الشكل:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{-y}} = \mathrm{d}x.$$

الصيغة الضمنية المرفقة بها، هي:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{-y}} = \int \mathrm{d}x.$$

ومنه،

$$-2\sqrt{-y} = x + c,$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي نعينه بإستخدام الشرط الإبتدائي $y(0) = 0$.

لدينا:

$$-2\sqrt{0} = 0 + c \implies c = 0.$$

تصبح المعادلة

$$-2\sqrt{-y} = x. \tag{56}$$

**لاحظ أنه بما أن $x < 0$، الطرفان سالبان، والمعادلة منطقية رياضيا.**

بتربيع طرفي (56)، نجد:

$$4(-y) = x^2 \implies -4y = x^2 \implies y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2.$$

وبالتالي، نستنتج أن المسألة (54) تقبل ثلاثة حلول (على الأقل) على المجال $]-\infty, 0]$.

**تمرين 13.1.1 :**

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt{y-1}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{57}$$

## حل التمرين 13.1 :

نعرف على $D = \mathbb{R} \times [1, +\infty[$ التابع $f$ بـ:

$$f(x, y) = 2x\sqrt{y-1}.$$

إن التابع $f$ مستمر على $D$. ومشتقه الجزئي بالنسبة إلى $y$، هو:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y-1}}.$$

نلاحظ أن $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ غير معرف عند $y = 1$ و مستمر على المفتوح $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$.

وعليه، نميز حالتين حسب قيمة $y_0$.

**الحالة 1:** $y_0 > 1$.

في هذه الحالة، يكون التابع $f$ قابل للإشتقاق باستمرار بالنسبة إلى $y$ في جوار $(x_0, y_0)$. ومنه حسب مبرهنة كوشي-ليبشتز، المسألة تقبل حلا وحيدا في جوار $x_0$.

لنحسب الحل في هذه الحالة. بما أن $y > 1$ في جوار $x_0$، يمكن قسمة طرفي المعادلة على $\sqrt{y-1}$، فنحصل على معادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين:

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}} y' = 2x.$$

لحلها، تكتب الصيغة الضمنية المرفقة بها:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} 2s\, \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$\left[2\sqrt{s-1}\right]_{y_0}^{y} = \left[s^2\right]_{x_0}^{x}.$$

أي:

$$2\sqrt{y-1} - 2\sqrt{y_0-1} = x^2 - x_0^2.$$

وعليه، فإنه في هذه الحالة، حل المسألة (57) هو:

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x^2 - x_0^2 + 2\sqrt{y_0 - 1}}{2}\right)^2,$$

على المجال

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 - x_0^2 + 2\sqrt{y_0 - 1} \geqslant 0\right\}.$$

**الحالة 2:** $y_0 = 1$.

إذا كان $y_0 = 1$، فإن المشتقة الجزئية $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ليست محدودة في جوار الشرط الإبتدائي $(x_0, 1)$.
وعليه، لا يمكننا في هذه الحالة إثبات وحدانية حل المسألة.

نلاحظ أولا أن التابع الثابت:

$$y_1(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

هو حل للمعادلة التفاضلية ($y_1' = 0$ و $2x\sqrt{1-1} = 0$ ) والشرط الإبتدائي $y(x_0) = 1$ كذلك محقق.
وعليه، فإن التابع الثابت $y \equiv 1$ هو حل أول للمسألة.

بما أن وجود الجذر التربيعي في معادلة المسألة يفرض رياضيا أن يكون $y \geqslant 1$، ولنتمكن من القسمة على هذا الجذر دون الوقوع في حالة عدم تعيين، نبحث حصرا عن الحلول التي تحقق $y > 1$.
الصيغة الضمنية المرفقة بالمعادلة التفاضلية للمسألة (57)، هي:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\sqrt{s-1}}\,\mathrm{d}s = 2\int_{x_0}^{x} s\,\mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$\left[2\sqrt{s-1}\right]_{y_0}^{y} = 2\left[\frac{s^2}{2}\right]_{x_0}^{x}.$$

وعليه، نحصل على المعادلة التالية:

$$2\sqrt{y-1} = x^2 - x_0^2. \tag{58}$$

بما أن الطرف الأيسر $2\sqrt{y-1}$ لـ (58) موجب تماما، فهذا يستلزم بالضرورة أن الطرف الأيمن هو موجب كذلك. أي:

$$x^2 - x_0^2 \geqslant 0 \implies |x| \geqslant |x_0|.$$

بتربيع طرفي (58)، نجد أن الحل الثاني للمعادلة التفاضلية يعطى بالعبارة:

$$y_2(x) = 1 + \left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right)^2,$$

على $]-\infty, -|x_0|[ \cup ]|x_0|, +\infty[$.

لندرس الآن، إمكانية تمديد الحل $y_2$ على $\mathbb{R}$. لذلك، نحسب نهاية $y_2$ ونهاية مشتقه $y_2'$ عند النقطتين الحرجتين $x_0$ و $-x_0$.

لدينا،

$$\lim_{x \to \pm x_0} y_2(x) = \lim_{x \to \pm x_0} \left[1 + \frac{1}{4}(x^2 - x_0^2)^2\right] = 1 = y(x_0).$$

ولدينا،

$$\lim_{x \to \pm x_0} y_2'(x) = \lim_{x \to \pm x_0} [x(x^2 - x_0^2)] = 0 = y_2'(x_0).$$

وبالتالي، نستنتج أن المسألة (57) تقبل حلين على الأقل على $\mathbb{R}$، هما:

$$y_1 \equiv 1,$$

و

$$y_2(x) = \begin{cases} 1 & : |x| \leqslant |x_0|, \\ 1 + \dfrac{1}{4}(x^2 - x_0^2)^2 & : |x| > |x_0|. \end{cases}$$

### تمرين 14.1.1 :

نعتبر مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y' = 2x(1+y) = f(x,y), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{59}$$

1. باستخدام طريقة التقريبات المتعاقبة، احسب الحل الدقيق للمسألة (59).
2. اثبت أنه إذا فرضنا أن $\varphi_1$ و $\varphi_2$ حلان للمسألة (59) على مجال $I$ من $\mathbb{R}$، فإنهما حتما متساويان.

## حل التمرين 14.1 :

1. **حساب الحل الدقيق للمسألة (59) باستخدام طريقة التقريبات المتعاقبة.**

لدينا:

$$y_0 = 0.$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_0)\ \mathrm{d}s = \int_0^x 2s\ \mathrm{d}s = x^2.$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s))\ \mathrm{d}s = \int_0^x 2s(1+s^2)\ \mathrm{d}s = x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_2(s))\ \mathrm{d}s = \int_0^x 2s\left(1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4\right)\ \mathrm{d}s = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6.$$

ومنه يمكن أن نبرهن بالتراجع أن:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2i}}{i!}.$$

يمكننا التأكد بسهولة أن شروط المبرهنة الأساسية محققة. وبالتالي، فإن متتالية التقريبات المتعاقبة متقاربة نحو الحل الدقيق للمسألة (59).

بما أن:

$$e^z = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{z^i}{i!},$$

فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} = e^{x^2} - 1.$$

أي أن الحل الدقيق للمسألة (59) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = e^{x^2} - 1.$$

2. **إثبات أنه إذا كان $\varphi_1$ و $\varphi_2$ حلان للمسألة (59)، فإنهما حتما متساويان.**

ليكن $\varphi_1$ و $\varphi_2$ حلين للمسألة (59) على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

نضع

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

بما أن كل من $\varphi_1$ و $\varphi_2$ يحقق المعادلة التفاضلية للمسألة (59)، فإنه لدينا:

$$\varphi' = \varphi_1' - \varphi_2' = 2x(1+\varphi_1) - 2x(1+\varphi_2) = 2x(\varphi_1 - \varphi_2) = 2x\varphi.$$

وبالنسبة للشرط الابتدائي:

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = 0 - 0 = 0.$$

إذن التابع $\varphi$ يحقق مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} \varphi' - 2x\varphi = 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{60}$$

إن معادلة المسألة (60) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ومتجانسة. لحلها، يمكننا استخدام طريقة المعامل التكاملي، وهذا بضرب طرفي المعادلة في $e^{-x^2}$. فنجد:

$$e^{-x^2}\varphi' - 2xe^{-x^2}\varphi = 0.$$

ومنه،

$$\left(e^{-x^2}\varphi(x)\right)' = 0, \ \forall x \in I.$$

بمكاملة الطرفين، نستنتج أن:

$$e^{-x^2}\varphi(x) = c,$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي.

باستخدام الشرط الابتدائي $\varphi(0) = 0$، نجد أن:

$$0 \cdot e^0 = c \implies c = 0.$$

وعليه،

$$e^{-x^2}\varphi(x) = 0, \forall x \in I,$$

أي:

$$\varphi(x) = 0, \ \forall x \in I.$$

وبما أن $\varphi \equiv 0$، نستنتج أن $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. وهو المطلوب.

### تمرين 15.1.1 :

أُخرجت كعكة من الفرن عند اللحظة $t = 0$ بدرجة حرارة ابتدائية قدرها $T(0) = 180°\text{C}$، ووُضعت على طاولة المطبخ حيث درجة حرارة المحيط ثابتة وتساوي $T_a = 25°\text{C}$.
ينص قانون نيوتن للتبريد على أن معدل التغير الزمني لدرجة حرارة الجسم يتناسب طردياً مع الفرق بين درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط المحيط به.

1. اكتب المعادلة التفاضلية العادية التي تمذج تطور درجة حرارة الكعكة $T(t)$ بدلالة الزمن $t$ (المُقاس بالدقائق).
2. حل المعادلة التفاضلية المُتحصل عليها، عِلماً أنه بعد مرور 15 دقيقة من إخراج الكعكة من الفرن، أصبحت درجة حرارتها $100°\text{C}$.
3. احسب المدة الزمنية اللازمة لتنخفض درجة حرارة الكعكة إلى $30°\text{C}$.

### حل التمرين 15.1 (تبريد كعكة - قانون نيوتن) :

**1. صياغة النموذج الرياضي:**

تُكتب سرعة تغير درجة الحرارة رياضياً على شكل المشتقة الأولى للزمن: $T'(t)$. أما الفرق بين درجة حرارة الكعكة والمحيط فهو $(T(t) - T_a)$.
حسب قانون نيوتن للتبريد، المعادلة التفاضلية هي:

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a),$$

حيث $k > 0$ هو ثابت التبريد الخاص بالكعكة.
بما أن درجة حرارة الغرفة ثابتة $T_a = 25°\text{C}$، تصبح المعادلة التفاضلية العادية:

$$T'(t) = -k(T(t) - 25). \tag{61}$$

**2. حل المعادلة التفاضلية وإيجاد الثوابت:**
نضع:

$$y(t) = T(t) - 25.$$

باشتقاق الطرفين، نجد:

$$y'(t) = T'(t). \tag{62}$$

بتعويض (62) في (61)، نحصل على المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة، من الرتبة الأولى، التالية:

$$y'(t) = -k \cdot y(t).$$

حلها العام على $\mathbb{R}$، من الشكل

$$y(t) = Me^{-kt},$$

حيث $M$ ثابت حقيقي كيفي.
وبالتالي، بالرجوع إلى المتغير الأصلي، نجد:

$$T(t) - 25 = Me^{-kt} \implies T(t) = 25 + Me^{-kt},$$

ونعين الثوابت الحقيقية $M$ التي من أجلها يتحقق الشرط الإبتدائي $T(0) = 180$.
لدينا:

$$T(0) = 25 + Me^0 = 180 \implies 25 + M = 180 \implies M = 155.$$

وعليه، فإن حل المعادلة التفاضلية (61) على $[0, +\infty[$، هو:

$$T(t) = 25 + 155e^{-kt}.$$

إيجاد الثابت $k$: نستخدم المعطى الثاني. عند $t = 15$ دقيقة، أصبحت الحرارة $100°\text{C}$:

$$100 = 25 + 155e^{-15k} \implies 75 = 155e^{-15k} \implies e^{-15k} = \frac{75}{155} = \frac{15}{31}$$

بإدخال دالة اللوغاريتم النيبيري $\ln$ على الطرفين، نجد:

$$-15k = \ln\left(\frac{15}{31}\right) \implies k = -\frac{1}{15}\ln\left(\frac{15}{31}\right) \approx 0.0484 \text{ min}^{-1}.$$

**3. حساب المدة الزمنية اللازمة لتبلغ حرارة الكعكة، $30°\text{C}$:**

نبحث عن اللحظة $t$ التي يتحقق فيها $T(t) = 30$:

$$30 = 25 + 155e^{-kt} \implies 5 = 155e^{-kt} \implies e^{-kt} = \frac{5}{155} = \frac{1}{31}.$$

وعليه،

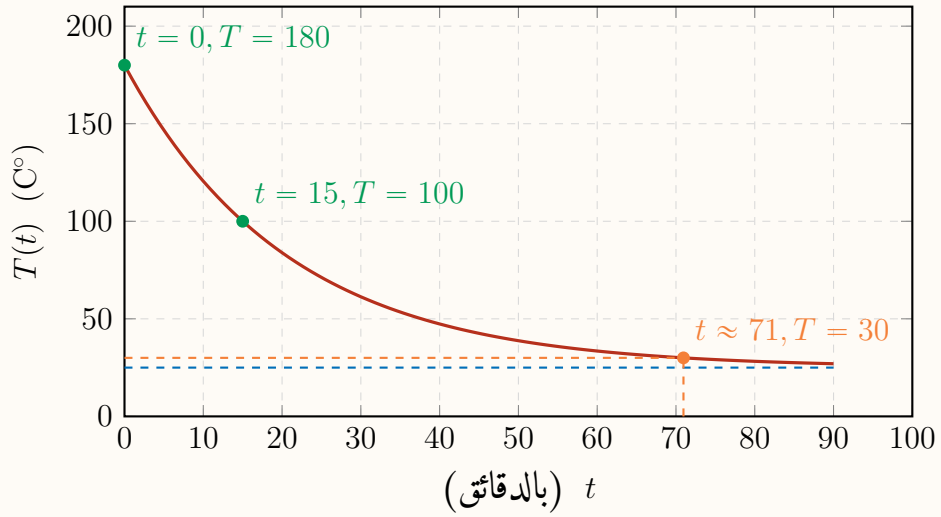
$$-kt = \ln\left(\frac{1}{31}\right) = -\ln(31) \implies t = \frac{\ln(31)}{k}.$$

بتعويض قيمة $k$، نحصل على:

$$t = \frac{\ln(31)}{-\frac{1}{15}\ln\left(\frac{15}{31}\right)} \approx \frac{3.434}{0.0484} \approx 70.95 \text{ min}$$

إذن، ستنخفض درجة حرارة الكعكة إلى $30°\text{C}$ بعد مرور حوالي **71 دقيقة** (أي ساعة و 11 دقيقة تقريباً).

منحنى تبريد الكعكة



# الباب 2

# جمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

## 1.2 مفاهيم أساسية حول جمل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

### 1.1.2 تعريف جملة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

نسمي **جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى**، كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases} \quad (1)$$

حيث:

- $x \in I$ هو **المتغير المستقل**، مع $I \subset \mathbb{R}$ مجال مفتوح.
- $f_i : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (من أجل $1 \leqslant i \leqslant n$) **توابع معطاة**، مع $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة مفتوحة.
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ هي **التوابع المجهولة** المراد إيجادها.

**تعريف 1.2.2 (حل جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى) :**

نسمي **حلاً** للجملة (1) على مجال مفتوح $J \subseteq I$، كل مجموعة من التوابع $y_1, y_2, \ldots, y_n : J \to \mathbb{R}$ من الصنف $\mathcal{C}^1(J)$ تحقق الشرطين التاليين:

1. $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \in \Omega$ من أجل كل $x \in J$.

2. تحقق الجملة (1) من أجل كل $x \in J$.

### 2.1.2 الشكل الشعاعي لجملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى

لدراسة الجملة (1)، يمكن كتابتها على الشكل الشعاعي:

$$Y'(x) = H(x, Y(x)). \tag{2}$$

ويمكن إرفاقها بشرط ابتدائي عند نقطة $x_0 \in I$، فنحصل على:

$$\begin{cases} Y'(x) = H(x, Y(x)); \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{3}$$

حيث:

$$H : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad H(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix} \in \Omega.$$

تسمى المسألة (3) بمسألة كوشي.

### 3.1.2 دراسة وجود ووحدانية حل جملة معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى

فيما يلي، نقدم مبرهنة تعطي شروطاً كافية لوجود ووحدانية حل المسألة (3) في الحالة العامة (أي سواء كانت الجملة خطية أو غير خطية).

**مبرهنة 1.2.2 (مبرهنة كوشي-ليبشتز) :**

نعتبر مسألة كوشي

$$\begin{cases} Y'(x) = H(x, Y(x)); \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

حيث

$$H : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

مع $I$ مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $\Omega$ مفتوح من $\mathbb{R}^n$.

إذا كان التابع $H$ مستمراً على $I \times \Omega$، وليبتشزي محلياً بالنسبة إلى المتغير الشعاعي $Y$، فإنه من أجل كل شرط ابتدائي $(x_0, Y_0)$ من $I \times \Omega$، تقبل المسألة حلاً وحيداً على مجال مفتوح $J \subseteq I$ يشمل $x_0$.

### 4.1.2 كيفية كتابة معادلة تفاضلية من الرتبة $n$ على شكل جملة $n$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

يمكن كتابة معادلة تفاضلية من الرتبة $n$ على شكل جملة $n$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، بوضع:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)}. \end{cases} \tag{4}$$

عندئذ، يمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الرتبة $n$ التالية:

$$y^{(n)}(x) = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

على شكل جملة $n$ معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى:

$$\begin{cases} y_i' = y_{i+1}, \ \forall i = 1, \ldots, n-1, \\ y_n' = G(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{5}$$

لندرس المثال الموالي:

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

$$y'' + (y')^2 = g(x, y), \tag{6}$$

حيث $g$ تابع مستمر على $I \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$، وليبشتزي محليا بالنسبة الى $y$.

**1. كتابة المعادلة التفاضلية (6) على شكل جملة معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى.**

إن المعادلة (6) تفاضلية من الرتبة الثانية. يمكن كتابتها على شكل جملة معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى، بوضع:

$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y'. \end{cases} \tag{7}$$

فنحصل على:

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2, \\ y_2' = y'' = g(x, y_1) - y_2^2. \end{cases} \tag{8}$$

والتي تكتب على الشكل الشعاعي:

$$Y'(x) = H(x, Y(x)),$$

حيث:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad H(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ g(x, y_1) - y_2^2 \end{pmatrix}.$$

باضافة الشرط الابتدائي

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{pmatrix},$$

نحصل على مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} Y' = H(x, Y), \\ Y(x_0) = Y_0. \end{cases} \tag{9}$$

**2. دراسة وجود ووحدانية حل المسألة (9).**

لدراسة وجود ووحدانية حل المسألة (9)، علينا التأكد من تحقق شروط نظرية كوشي ليبشتز. لدينا:

- التابع $g$ مستمر، وبالتالي $H$ مستمر على $I \times \tilde{\Omega}$، حيث $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$.
- الدالة $y_2 \mapsto -y_2^2$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}$. فهي ليبشتزية محليا.

ومنه، نستنتج أن $H$ ليبشتز محليا بالنسبة إلى $Y$. وعليه، حسب نظرية كوشي-ليبشتز، فإنه من أجل كل شرط ابتدائي $(x_0, Y_0)$، يوجد تابع شعاعي وحيد

$$Y \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^2),$$

يحقق الجملة (9) على مجال مفتوح $J \subset I$ يشمل $x_0$.

وبالتالي، يوجد تابع وحيد

$$y \in \mathcal{C}^2(J),$$

يحقق المعادلة التفاضلية (6)، والشرطين الابتدائيين

$$y(x_0) = y_{1,0}, \ y'(x_0) = y_{2,0}.$$

## 2.2 دراسة جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

### 1.2.2 الصيغة العامة

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التالية:

$$(10) \qquad \begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases}$$

حيث $y_i = y_i(x)$ هي التوابع المجهولة و $a_{i,j}$ و $f_i$ مع $(i, j = 1, \ldots, n)$ توابع حقيقية مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

يمكن كتابة الجملة (10) على الشكل المصفوفي:

$$(11) \qquad Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),$$

حيث

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

نقول عن الجملة (11) إنها متجانسة، إذا وفقط إذا كان $F \equiv 0$. أما إذا كان $F \not\equiv 0$، فنقول عن الجملة إنها غير متجانسة.

**تعريف 2.2.2 :**

نسمي حلاً للجملة (10) كل تابع شعاعي $Y$ من الصنف $\mathcal{C}^1(I)$ يحقق المساواة (11) من أجل كل $x$ من $I$.

لندرس المثال التالي:

**مثال :**

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى التالية:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + 3y_2. \end{cases} \tag{12}$$

يمكن كتابة الجملة (12) على الشكل المصفوفي

$$Y' = AY,$$

حيث

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**مثال :**

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى غير المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - xy_2 + e^x, \\ y_2' = x^2 y_1 - y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + 2e^{-x}. \end{cases} \tag{13}$$

يمكن كتابة الجملة (13) على الشكل

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),$$

حيث

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ x^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

## 2.2.2 مسألة كوشي

نرفق بالجملة (10) الشرط الابتدائي:

$$Y(x_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

تسمى الجملة (10) المرفقة بالشرط الابتدائي (14)، مسألة كوشي.

النظرية التالية تقدم شروطاً كافية لوجود ووحدانية حل المسألة (10)--(14).

**نظرية 1.2.2 :**

إذا كانت التوابع $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ و $f_i$ مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$، فإنه من أجل كل $x_0$ من $I$ وكل $Y_0 \in \mathbb{R}^n$، تقبل مسألة كوشي (10)--(14) حلاً وحيداً $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

لندرس المثال الموالي.

**مثال :**

نعتبر المسألة التالية على $\mathbb{R}$:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),\ Y(0) = Y_0, \tag{15}$$

حيث

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ e^x \end{pmatrix},\ Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

إن مداخل المصفوفة $A$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها ثابتة، كما أن مركبات الشعاع $F$ توابع مستمرة على $\mathbb{R}$.
ومن ثَمَّ، فإن مسألة كوشي (15) تقبل حلاً وحيداً $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

## 3.2.2 حل الجمل الخطية المتجانسة

### فضاء الحلول

نعتبر الجملة الخطية المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \tag{16}$$

نرمز بـ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ لفضاء المصفوفات الحقيقية المربعة من الرتبة $n$.
ولتكن $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مداخلها توابع مستمرة على مجال مفتوح $I$.

### الصيغة العامة لحل الجملة (16)

لدينا النتيجة التالية:

**مبرهنة 2.2.2 :**

تشكل مجموعة حلول الجملة الخطية المتجانسة (16) المعرفة على المجال $I$ فضاءً شعاعياً جزئياً من $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ بعده $n$.

### إثبات المبرهنة

لنرمز بـ $S$ إلى مجموعة جميع حلول الجملة (16):

$$S = \left\{ Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)\ ;\ Y'(x) = A(x)Y(x),\ \forall x \in I \right\}.$$

(1) $S$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$.
بالفعل:

- التابع المعدوم $Y\equiv 0$ ينتمي إلى $S$، إذن $S\neq\varnothing$.
- إذا كان $X,Y\in S$، فإن:

$$(X+Y)'(x)=X'(x)+Y'(x)=A(x)X(x)+A(x)Y(x)=A(x)(X(x)+Y(x)),$$

ومن ثَمّ، $X+Y\in S$.

- إذا كان $X\in S$ و $\alpha\in\mathbb{R}$، فإن:

$$(\alpha X)'(x)=\alpha X'(x)=\alpha A(x)X(x)=A(x)(\alpha X(x)),$$

ومن ثَمّ $\alpha X\in S$.

وعليه فإن $S$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$.

(2) حساب بُعد الفضاء $S$.
لنثبت أن $\dim S=n$.
ليكن $x_0\in I$ وليكن $\{e_1,\dots,e_n\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$.
حسب نظرية الوجود والوحدانية (كوشي-ليبشتز)، فإنه من أجل كل $i\in\{1,\dots,n\}$ يوجد حل وحيد $Y^{(i)}\in S$ يحقق الشرط الابتدائي:

$$Y^{(i)}(x_0)=e_i.$$

(3) توليد الفضاء واستقلاله الخطي.
ليكن $Y\in S$ حلاً كيفياً للجملة (16).
نضع:

$$Y(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\quad \text{حيث}\quad \alpha_i=Y_i(x_0).$$

نُعرّف التابع الشعاعي:

$$Z(x)=Y(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y^{(i)}(x).$$

من خطية الجملة، نجد أن $Z$ يحقق:

$$Z'(x)=A(x)Z(x),\quad Z(x_0)=0.$$

وبالتالي فإن الحل الوحيد الذي يحقق الشرط الابتدائي $Z(x_0) = 0$ هو الحل المعدوم:

$$Z(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

ومن ثَمّ:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x_0)\, Y^{(i)}(x), \quad \forall x \in I.$$

وهذا يُبين أن الأشعة الحلول $\{Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}\}$ تولد الفضاء $S$.
بما أن الأشعة الابتدائية $\{e_1, \ldots, e_n\}$ مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^n$، فإن التوابع الشعاعية $\{Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}\}$ مستقلة خطياً أيضاً على $I$. وبما أنها مستقلة خطياً وتُولد $S$، فهي تشكل أساساً له. وعليه:

$$\dim S = n.$$

إن المبرهنة 3.2.2 تعني أن كل حل $Y$ للجملة (16) يُكتب على شكل مزج خطي لـ $n$ حل مستقل خطياً $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ للجملة (16):

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + \cdots + c_n Y_n(x),$$

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت حقيقية.

### محدد رونسكي - Wronski

نعتبر الجملة الخطية المتجانسة:

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad x \in I, \tag{17}$$

نذكر أن حلول الجملة (17) هي توابع شعاعية $Y : I \to \mathbb{R}^n$ من الصنف $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

هناك مسألة أساسية هي: كيف نتأكد من أن مجموعة من الحلول $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ مستقلة خطياً على المجال $I$؟ للإجابة عن هذا التساؤل، نُعرف تابع رونسكي.

**تعريف 3.2.2 (تعريف تابع رونسكي) :**

ليكن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$، $n$ حلاً للجملة المتجانسة (17).
نسمي تابع رونسكي (Wronskien) لهذه الحلول، التابع الحقيقي $W$ المعرف بـ:

$$W(x) = \det(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)), \quad x \in I.$$

أي أن رونسكي لـ $n$ حل للجملة، هو محدد المصفوفة التي أعمدتها هي أشعة هذه الحلول الـ $n$.
بعبارة أخرى، إذا كان $Y_j(x) = (y_{1,j}(x), y_{2,j}(x), \ldots, y_{n,j}(x))^T$، فإن:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{1,1}(x) & y_{1,2}(x) & \cdots & y_{1,n}(x) \\ y_{2,1}(x) & y_{2,2}(x) & \cdots & y_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1}(x) & y_{n,2}(x) & \cdots & y_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

ننتقل الآن إلى نتيجة أساسية تخص تابع رونسكي، وهي مبرهنة ليوفيل Liouville.

### مبرهنة 3.2.2 (مبرهنة ليوفيل) :

ليكن $I$ مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ وليكن $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تطبيقا مستمرا.
ليكن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$، $n$ حلاً لجملة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \ \forall x \in I.$$

نعرف تابع **رونسكي** للحلول $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ بالتابع $W : I \to \mathbb{R}$:

$$W(x) = \det\left(Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)\right).$$

لدينا:

1. التابع $W$ قابل للاشتقاق على $I$ ويحقق المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

$$W'(x) = \mathrm{Tr}(A(x))W(x), \ \forall x \in I,$$

حيث $\mathrm{Tr}(A(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$ يمثل أثر المصفوفة $A(x)$

2. من أجل كل $x_0 \in I$، لدينا:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}(A(s))\ \mathrm{d}s\right), \ \forall x \in I.$$

**إثبات مبرهنة ليوفيل:**

نرمز بـ $y_{i,j}(x)$ إلى المركبة رقم $i$ للحل $Y_j(x)$ في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$.
تكتب المصفوفة $M(x)$ التي أعمدتها الأشعة الحلول $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ على الشكل:

$$M(x) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) & y_{1,2}(x) & \cdots & y_{1,n}(x) \\ y_{2,1}(x) & y_{2,2}(x) & \cdots & y_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1}(x) & y_{n,2}(x) & \cdots & y_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

**الخطوة 1: كتابة تابع رونسكي بدلالة أسطر المصفوفة $M$.** لنرمز بـ $L_i(x)$ إلى السطر رقم $i$ للمصفوفة $M(x)$:

$$L_i(x) = \big(y_{i,1}(x),\, y_{i,2}(x),\, \ldots,\, y_{i,n}(x)\big) \in \mathbb{R}^n$$

عندئذ يُكتب تابع رونسكي كمحدد لأسطر المصفوفة $M(x)$:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix}.$$

**الخطوة 2: اشتقاق تابع رونسكي.** بما أن المحدد تطبيق متعدد الخطية ومتناوب، فإن مشتقه يُعطى بمجموع المحددات الناتجة عن اشتقاق سطر واحد في كل مرة:

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} & L_1(x) & \\ & \vdots & \\ L_i'(x) & \leftarrow \text{السطر } i & \\ & \vdots & \\ & L_n(x) & \end{pmatrix} \tag{18}$$

**الخطوة 3: حساب مشتق السطر $L_i'(x)$.** بما أن كل $Y_j$ هو حل للجملة $Y'(x) = A(x)Y(x)$، فإن مركباته تحقق

$$y_{i,j}'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_{k,j}(x).$$

بالتالي، يُكتب السطر المشتق $L_i'(x)$ كتركيبة خطية لأسطر المصفوفة $M(x)$:

$$L_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) L_k(x) \tag{19}$$

**توضيح فكرة التفكيك من أجل $n = 3$.**

لتوضيح كيفية تبسيط المحدد عند تعويض $L_i'(x)$، نأخذ مثالاً في البُعد $n = 3$.

عند اشتقاق السطر الأول $(i = 1)$، نجد:

$$L_1'(x) = a_{11}(x)L_1(x) + a_{12}(x)L_2(x) + a_{13}(x)L_3(x)$$

بتعويض $L_1'(x)$ واستخدام خطية المحدد بالنسبة للسطر الأول، نحصل على:

$$\det\begin{pmatrix} L_1' \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = a_{11}(x) \underbrace{\det\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}}_{=W(x)} + a_{12}(x) \underbrace{\det\begin{pmatrix} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (سطران متماثلان)}} + a_{13}(x) \underbrace{\det\begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (سطران متماثلان)}}$$
$$= a_{11}(x)W(x).$$

نلاحظ أن الحدود الموافق لـ $k \neq 1$ اختفت تماماً لأن المحدد ينعدم عند وجود سطرين مكررين.

**الخطوة 4: التفكيك والحساب في الحالة العامة $n$.** بتعويض $L_i'$ بعبارته (19)، يكون لدينا:

$$\det\begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_i'(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \det\begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_k(x) \quad \leftarrow \text{السطر} i \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix}$$

نناقش قيم $k$ في هذا المجموع:

- **إذا كان $k \neq i$:** الشعاع $L_k(x)$ يظهر مرتين في المحدد (مرة في موقعه الأصلي السطر $k$، ومرة في السطر $i$). بما أن المحدد تطبيق متناوب، فإن قيمته تكون معدومة.
- **إذا كان $k = i$:** الشعاع الموضوع في السطر $i$ هو $L_i(x)$ فنحصل على $W(x)$.

وعليه، تختفي جميع حدود المجموع باستثناء الحد الموافق لـ $k = i$. أي،

$$\det \begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_i'(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix} = a_{ii}(x)W(x).$$

بالتعويض في العلاقة (18)، نجد:

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)W(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right) W(x).$$

أي:

$$W'(x) = \operatorname{Tr}(A(x))\, W(x). \tag{20}$$

**الخطوة 5: حل المعادلة التفاضلية (20).** إن المعادلة (20) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، متجانسة. لحلها، يمكن استخدام طريقة المعامل التكاملي.

نضع $P(x) = \int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s$. بضرب طرفي (20) في المعامل $\mu(x) = \exp(-P(x))$، نجد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(W(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)\right) = 0$$

وهذا يعني أن التابع $x \mapsto W(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)$ ثابت مهما يكن $x$ من $0I$

من أجل $x = x_0$، لدينا:

$$W(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right) = W(x_0)$$

وبالتالي،

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right), \quad \forall x \in I$$

وهو المطلوب. □

لدينا النتيجة التالية:

**نتيجة 1.2.2 :**

يكون تابع رونسكي $W$ لمجموعة حلول جملة خطية متجانسة معرفا على $I$، إما معدوماً تماماً على $I$، وإما لا ينعدم تماما على $I$. بعبارة أخرى، يملك $W$ إحدى الخاصيتين التاليتين:

$$(\forall x \in I,\ W(x) \neq 0) \quad \text{أو} \quad (\forall x \in I,\ W(x) = 0)$$

وبشكل خاص، من أجل أي نقطة $x_0 \in I$:

$$W(x_0) \neq 0 \iff \forall x \in I,\ W(x) \neq 0.$$

أي أنه لاثبات أن تابع رونسكي غير معدوم على مجال، يكفي اثبات أنه لا ينعدم عند نقطة من ذلك المجال.

**إثبات النتيجة:**

ليكن $x_0$ نقطة من $I$.

حسب مبرهنة ليوفيل، لدينا من أجل كل $x \in I$:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right).$$

بما أن دالة الأسية غير معدومة تماماً وموجبة على $\mathbb{R}$ (أي أن $\exp(\cdot) > 0$)، فإن قيمة $W(x)$ تتحدد كلياً بقيمة $W(x_0)$:

- إذا كان $W(x_0) = 0$، فإن $W(x) = 0$ من أجل كل $x \in I$.
- إذا كان $W(x_0) \neq 0$، فإن $W(x) \neq 0$ من أجل كل $x \in I$.

وهذا يثبت النتيجة. □

**خاصية 1.2.2 (خاصية الاستقلال الخطي لحلول جملة خطية متجانسة) :**

ليكن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $n$ حل للجملة الخطية المتجانسة $Y'(x) = A(x)Y(x)$ على المجال $I$.
تكون الحلول $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ **مستقلة خطياً** على المجال $I$ إذا وفقط إذا كان رونسكي هذه الحلول غير معدوم.

وعملياً، يكفي التحقق من عدم انعدام المحدد في **نقطة واحدة فقط** $x_0 \in I$:

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \text{ مستقلة خطياً على } I \iff \exists x_0 \in I,\ W(x_0) \neq 0.$$

بعد أن تعرفنا على كيفية إثبات الاستقلال الخطي لحلول جملة خطية متجانسة باستخدام تابع رونسكي، يمكننا الآن تقديم تعريف للمصفوفة الأساسية للحلول.

### تعريف 4.2.2 (المصفوفة الأساسية - Fundamental Matrix) :

نسمي **مصفوفة أساسية للحلول** للجملة الخطية المتجانسة (17)، كل مصفوفة $\Phi(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ تكون أعمدتها $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ عبارة عن $n$ حلاً مستقلاً خطياً للجملة (17) على $I$ (أي أن محدد رونسكي لهذه الحلول غير معدوم على $I$):

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) & \cdots & Y_n(x) \end{pmatrix}.$$

### ملاحظة 1.2.2: خصائص المصفوفة الأساسية:

تتمتع المصفوفة الأساسية $\Phi(x)$ بالخاصيتين التاليتين:

1. تحقّق المعادلة التفاضلية المصفوفية التالية على المجال $I$:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$$

2. يُكتب الحل العام للجملة الخطية المتجانسة (17)، على الشكل:

$$Y(x) = \Phi(x)C$$

حيث $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ هو شعاع ثوابت حقيقية كيفية.

ننتقل الآن إلى كيفية حساب الحل الدقيق لجملة معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى متجانسة (16). وهذا ممكن في ثلاث حالات فقط:

1. المصفوفة $A$ قطرية.
2. المصفوفة $A$ مثلثية (سفلية أو علوية).
3. مداخل المصفوفة $A$ ثابتة (مستقلة عن $x$).

### 4.2.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة عندما تكون المصفوفة $A$ قطرية

نعتبر الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = A(x)\,Y(x), \qquad x \in I, \tag{21}$$

حيث

$$A(x) = \operatorname{diag}\big(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)\big) = \begin{pmatrix} a_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n(x) \end{pmatrix}$$

مصفوفة قطرية، عناصر قطرها:

$$a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}(I)$$

توابع مستمرة على المجال المفتوح $I \subset \mathbb{R}$.

بوضع:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

وبما أن المصفوفة $A(x)$ قطرية، تُكتب الجملة (21) على الشكل:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_1(x)\, y_1(x), \\ y_2'(x) = a_2(x)\, y_2(x), \\ \quad \vdots \\ y_n'(x) = a_n(x)\, y_n(x). \end{cases}$$

نلاحظ أن كل معادلة تفاضلية من الجملة مستقلة تماماً عن بقية المعادلات التي تُكوّن الجملة.

من أجل كل $i \in \{1, \ldots, n\}$، المعادلة التفاضلية:

$$y_i'(x) = a_i(x)\, y_i(x),$$

خطية متجانسة من الرتبة الأولى. وبما أن معاملاتها $a_i$ توابع مستمرة على المجال $I$، فإن حلها العام يُكتب على الشكل:

$$y_i(x) = c_i \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_i(s)\, \mathrm{d}s\right),$$

حيث $x_0$ نقطة ثابتة من $I$، و $c_i$ ثابت حقيقي كيفي.

لإيجاد حل الجملة باستخدام المصفوفة الأساسية، نبحث عن المصفوفة الأساسية $\Phi$ التي تحقق المسألة التالية:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \qquad \Phi(x_0) = I_n,$$

حيث $I_n$ مصفوفة الوحدة ( Identity Matrix) $n \times n$.

وبما أن الجملة قطرية، فإن المصفوفة الأساسية في هذه الحالة تكون قطرية كذلك:

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}\big(\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\big).$$

بتعويض هذه العبارة في المعادلة المصفوفية $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$، نجد أنه من أجل كل $i \in \{1, \ldots, n\}$، لدينا:

$$\phi_i'(x) = a_i(x)\, \phi_i(x), \qquad \phi_i(x_0) = 1.$$

ومنه:

$$\phi_i(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_i(s)\, \mathrm{d}s\right).$$

وعليه، فإن:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_2(s)\,\mathrm{d}s\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp\left(\int_{x_0}^{x} a_n(s)\,\mathrm{d}s\right) \end{pmatrix},$$

مصفوفة أساسية للجملة (21).

ويمكننا بسهولة التأكد من أن المصفوفة $\Phi$ تحقق الجملة:

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \quad \text{و} \quad \Phi(x_0) = I_n.$$

وبالتالي، فإن الحل العام للجملة (21) على المجال $I$ هو:

$$Y(x) = \Phi(x)C,$$

حيث $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ شعاع ثوابت حقيقية كيفية.

**مثال :**

نعتبر الجملة الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى التالية:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

إن الجملة (22) خطية متجانسة، من الشكل:

$$Y'(x) = A(x)Y(x),$$

حيث المصفوفة $A(x)$ قطرية، وعناصر قطرها هي:

$$a_1(x) = x, \qquad a_2(x) = -1.$$

باختيار $x_0 = 0$، نحسب التكاملات المحددة التالية:

$$\int_0^x a_1(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x s\,\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2}, \qquad \int_0^x a_2(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x -1\,\mathrm{d}s = -x.$$

وبالتالي، المصفوفة:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{x^2/2} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix},$$

تمثل مصفوفة أساسية للجملة، ونلاحظ أنها تحقق الشرط الابتدائي $\Phi(0) = I_2$.

ولذا فإن الحل العام للجملة على $\mathbb{R}$ هو:

$$Y(x) = \Phi(x)C = \begin{pmatrix} e^{x^2/2} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**ملاحظة 2.2.2:** في الحالة التي تكون فيها المصفوفة المرفقة بالجملة، قطرية وعناصر قطرها دوال مستمرة، فإن إنشاء مصفوفة أساسية لحلول الجملة يؤول ببساطة إلى حل $n$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى بشكل مستقل.

## 3.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة عندما تكون المصفوفة مثلثية ومعاملاتها ثوابت حقيقية

$$Y'(x) = AY(x), \tag{23}$$

حيث $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة ذات معاملات حقيقية ثابتة، ونفرض أنها مثلثية (علوية أو سفلية).

لأجل التبسيط، سنعالج هنا حالة مصفوفة مثلثية علوية، أي من الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

**تذكير.**
عندما تكون مداخل المصفوفة ثابتة، فإن المصفوفة التالية مصفوفة أساسية لجملة خطية متجانسة:

$$\Phi(x) = e^{xA},$$

حيث

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

هذا التعريف صحيح من أجل أي مصفوفة مربعة $A$.

وبما أننا نفرض في هذه الحالة أن المصفوفة $A$ مثلثية، فإن مصفوفة الأس $e^{xA}$ ستحافظ على البنية المثلثية، وعناصر قطرها الرئيسي هي ببساطة أسيات عناصر قطر المصفوفة $A$. أي:

$$(e^{xA})_{ii} = e^{a_{ii}x}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

نود التأكيد على أن القاعدة

$$(e^{xA})_{ii} = e^{a_{ii}x}$$

ليست صحيحة للمصفوفات الكيفية. هي صحيحة فقط في حال المصفوفة $A$ مثلثية.

أما العناصر خارج القطر فهي تحسب بحل الجملة.

**مثال :**

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y(x).$$

نلاحظ أن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة $2 \times 2$ مثلثية علوية. لحلها، نبحث عن مصفوفة أساسية من الشكل:

$$\Phi(x) = e^{xA}.$$

حسب خصائص أسية مصفوفة مثلثية، شكل المصفوفة $\Phi$ هو الآتي:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) \\ 0 & \phi_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

وعليه، الشكل المصفوفي $\Phi'(x) = A\Phi(x)$ يعطينا جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التالية:

$$\begin{cases} \phi'_{11}(x) = \phi_{11}(x), \\ \phi'_{22}(x) = 3\phi_{22}(x), \\ \phi'_{12}(x) = \phi_{12}(x) + 2\phi_{22}(x), \end{cases}$$

بما أننا نبحث عن المصفوفة الأساسية الرئيسة التي تحقق $\Phi(0) = I_2$، فإننا نستنتج الشروط الابتدائية التالية لكل مدخل:

$$\phi_{11}(0) = 1, \quad \phi_{22}(0) = 1, \quad \phi_{12}(0) = 0.$$

بحل المعادلتين الأولى والثانية مع مراعاة شروطهما الابتدائية، نجد:

$$\phi_{11}(x) = e^x, \qquad \phi_{22}(x) = e^{3x}.$$

إن التابع $\phi_{12}$ يحقق المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، غير المتجانسة:

$$\phi'_{12}(x) - \phi_{12}(x) = 2e^{3x}, \qquad \phi_{12}(0) = 0.$$

يمكننا حلها باستخدام طريقة المعامل التكاملي. ومنه، بضرب طرفي المعادلة في المعامل التكاملي

$$e^{-x},$$

نحصل على:

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\big(e^{-x}\phi_{12}(x)\big) = 2e^{2x}.$$

بمكاملة الطرفين من 0 إلى $x$، نجد:

$$e^{-x}\phi_{12}(x) = \int_0^x 2e^{2s}\,\mathrm{d}s = e^{2x} - 1.$$

وعليه،

$$\phi_{12}(x) = e^x(e^{2x} - 1) = e^{3x} - e^x.$$

ومنه، فإن المصفوفة الأساسية للجملة هي:

$$\Phi(x) = e^{xA} = \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} - e^x \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، الحل العام للجملة (23)، هو:

$$Y(x) = \Phi(x)\,C,$$

حيث $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ شعاع مركباته ثوابت حقيقية كيفية.

**ملاحظة 3.2.2:** في حالة مصفوفة مثلثية مداخلها ثوابت حقيقية، نستخدم مباشرة المصفوفة الأساسية $e^{xA}$ لأن البنية المثلثية تسمح لنا بحساب مداخل المصفوفة الأساسية بالتعويض المباشر، انطلاقا من القطر الرئيسي.

## 1.3.2 حساب حلول جملة معادلات تفاضلية خطية متجانسة مصفوفتها مثلثية ومعاملاتها توابع مستمرة

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التالية:

$$Y'(x) = A(x)\,Y(x), \tag{24}$$

حيث $A(x) = (a_{ij}(x))$ مصفوفة مربعة $n \times n$ مثلثية، و مداخلها توابع مستمرة على مجال $I \subset \mathbb{R}$. أي أنها من الشكل:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

**ملاحظة 4.2.2:** عندما تكون مداخل المصفوفة ثابتة، يمكن استخدام المصفوفة $e^{xA}$ كمصفوفة أساسية لحلول جملة خطية متجانسة. أما إذا كانت مداخل المصفوفة $A(x)$ توابع للمتغير $x$، فإن الكتابة $e^{xA(x)}$ لا تمثل حلاً للجملة (لأنه بشكل عام، مشتق $e^{xA(x)}$ لا يساوي $A(x)e^{xA(x)}$ ) وبالتالي، علينا استخدام طريقة أخرى لتعيين مصفوفة أساسية.

### إنشاء مصفوفة أساسية لحلول الجملة (24)

**تعريف 5.2.2 (تعريف مصفوفة أساسية لحلول جملة مثلثية) :**

نسمي مصفوفة حلول أساسية للجملة (24)، كل مصفوفة $\Phi(x)$ تحقق الجملة:

$$\begin{cases} \Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \\ \Phi(x_0) = I_n. \end{cases}$$

**مبدأ طريقة الحل** بما أن المصفوفة $A(x)$ مثلثية، فإن المصفوفة $\Phi$ معرفة بـ:

$$\Phi(x) = \left(Y^{(1)}(x), \ldots, Y^{(n)}(x)\right),$$

حيث كل عمود $Y^{(k)}(x)$ هو الحل الوحيد للجملة التالية:

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x), \\ Y(x_0) = e_k. \end{cases}$$

**مثال :**

نعتبر جملة المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى التالية:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

إن تعيين مصفوفة حلول أساسية $\Phi$ للجملة (25)، يعود إلى حل الجملة

$$\begin{cases} \Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \\ \Phi(0) = I_2. \end{cases}$$

**تعيين العمود الأول لـ $\Phi$.** لتعيين العمود الأول لـ $\Phi$، نقوم بحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} y_2'(x) = 2y_2(x), & y_2(0) = 0, \\ y_1'(x) = y_1(x) + xy_2(x), & y_1(0) = 1. \end{cases}$$

فنجد:

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**تعيين العمود الثاني لـ $\Phi$.** لتعيين العمود الثاني لـ $\Phi$، نقوم بحل الجملة التالية:

$$\begin{cases} y_2'(x) = 2y_2(x), & y_2(0) = 1, \\ y_1'(x) = y_1(x) + xy_2(x), & y_1(0) = 0. \end{cases}$$

فنجد:

$$y_2(x) = e^{2x}, \qquad y_1'(x) - y_1(x) = xe^{2x}.$$

وباستخدام طريقة تغيير الثابت، نجد:

$$y_1(x) = e^{2x}(x-1) + e^x.$$

ومنه،

$$Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}(x-1) + e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

**عبارة المصفوفة الأساسية.** وبالتالي، فإن مصفوفة أساسية لحلول الجملة (25)، هي:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x}(x-1) + e^x \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad \Phi(0) = I_2.$$

وحلها العام على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = \Phi(x)C,$$

حيث $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ شعاع مركباته ثوابت حقيقية.

## 2.3.2 حساب حلول الجمل الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

نعتبر الجملة الخطية المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = AY(x), \tag{26}$$

حيث

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

مصفوفة مربعة من الرتبة $n$ ذات معاملات ثابتة، و

$$Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

تابع شعاعي معرف على مجال مفتوح $I \subset \mathbb{R}$.

تهدف هذه الفقرة إلى تعيين الصيغة العامة لحلول الجملة (26) اعتمادًا على القيم الذاتية للمصفوفة $A$ والأشعة الذاتية المرفقة بها.

### فكرة البحث عن حلول من الشكل الأسي

نلاحظ أن الجملة (26) تشبه، من حيث الشكل، معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى:

$$y'(x) = \lambda y(x),$$

والتي يكون حلها العام:

$$y(x) = ce^{\lambda x},$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي.

وبما أن المصفوفة $A$ تمثل مؤثرًا خطيًا على الفضاء $\mathbb{R}^n$، فمن الطبيعي البحث عن حلول للجملة (26) من الشكل:

$$Y(x) = e^{\lambda x}v, \tag{27}$$

حيث $\lambda \in \mathbb{C}$ عدد عقدي، و $v \in \mathbb{C}^n$ شعاع ثابت غير معدوم.

بالتعويض في الجملة (26)، نحصل على:

$$Y'(x) = \lambda e^{\lambda x}v, \qquad AY(x) = e^{\lambda x}Av.$$

ومن ثمة:

$$\lambda e^{\lambda x}v = e^{\lambda x}Av.$$

وبما أن $e^{\lambda x} \neq 0$، نستنتج:

$$Av = \lambda v.$$

أي أن $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$، وأن $v$ شعاع ذاتي مرفق بها.

**نتيجة 2.2.2 :**

كل قيمة ذاتية $\lambda$ للمصفوفة $A$ تعطي حلاً أساسياً للجملة (26) من الشكل:

$$Y(x) = e^{\lambda x}v,$$

حيث $v$ شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda$.

غير أن الحل العام للجملة (26) لا يكون، بوجه عام، مزجًا خطيًا لمثل هذه الحلول إلا إذا وُجد عدد كافٍ من الأشعة الذاتية المستقلة خطيًا.

**تذكير حول القيم الذاتية والأشعة الذاتية**

نقول إن $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ إذا وفقط إذا كان:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

ونقول إن شعاعًا غير معدوم $v \in \mathbb{C}^n$ هو شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda$ إذا تحقق:

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

نميز بين:

- **رتبة التضاعف الجبرية** $m_a(\lambda)$: وهي عدد مرات ظهور $\lambda$ كجذر لكثير الحدود المميز.
- **رتبة التضاعف الهندسية** $m_g(\lambda)$: وهي بُعد الفضاء الذاتي المرتبط بـ $\lambda$، أي $\dim \ker(A - \lambda I)$.

ولدينا دائمًا المتراجحة التالية:

$$1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda).$$

**الحالة الأولى: قيم ذاتية حقيقية متمايزة**

نفترض أن المصفوفة $A$ تقبل $n$ قيمة ذاتية حقيقية متمايزة:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

في هذه الحالة:

- تكون المصفوفة $A$ قابلة للتقطير.
- جملة الأشعة الذاتية المرفقة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تشكل أساسًا للفضاء $\mathbb{R}^n$.

ومن أجل كل $j \in \{1, \ldots, n\}$، يكون التابع:

$$Y_j(x) = e^{\lambda_j x} v_j$$

حلاً أساسياً للجملة (26)، وتكون هذه الحلول مستقلة خطيًا.

وعليه، يُكتب الحل العام على شكل مزج خطي لها:

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j x} v_j,$$

حيث $c_1, \ldots, c_n$ ثوابت حقيقية كيفية.

**مثال: قيم ذاتية حقيقية متمايزة**

نعتبر الجملة الخطية المتجانسة:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y(x).$$

نحسب القيم الذاتية للمصفوفة:

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0,$$

ومنه نستنتج قيمتين ذاتيتين متمايزتين:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1.$$

وبالتالي فإن الأشعة:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

هما شعاعان ذاتيان موافقان لـ $\lambda_1$ و $\lambda_2$ على التوالي.

ومنه، فإن التابعين:

$$Y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

هما حلان مستقلان خطياً للجملة.

وعليه، يُكتب الحل العام على الشكل:

$$Y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**الحالة الثانية: قيم ذاتية حقيقية مضاعفة**

نفترض أن المصفوفة $A$ تقبل قيمة ذاتية $\lambda$ ذات رتبة تضاعف جبرية $m_a(\lambda) > 1$.

**الحالة (أ): قابلية التقطير** ($m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$) إذا كان بُعد الفضاء الذاتي يساوي رتبة التضاعف الجبرية، فإن المصفوفة $A$ تكون قابلة للتقطير، ويُبنى الحل العام بنفس الطريقة كما في الحالة الأولى (باستخدام الأشعة الذاتية المستقلة).

**مثال: قيمة ذاتية مضاعفة مع قابلية التقطير**

نعتبر الجملة:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y(x).$$

للمصفوفة قيمة ذاتية وحيدة $\lambda = 3$ ذات رتبة تضاعف جبرية $m_a(3) = 2$.
كما نلاحظ أن:

$$\ker(A - 3I) = \mathbb{R}^2,$$

ومن ثمة فإن $m_g(3) = 2 = m_a(3)$، وعليه فالمصفوفة قابلة للتقطير.
بأخذ أشعة الأساس القانوني كأشعة ذاتية، نجد أن:

$$Y_1(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

حلان مستقلان خطياً للجملة.
ولذا، يكون الحل العام:

$$Y(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

**الحالة (ب): عدم قابلية التقطير** ($m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$) إذا كان بُعد الفضاء الذاتي أقل من رتبة التضاعف الجبرية، فإن المصفوفة $A$ غير قابلة للتقطير، ونحتاج إلى استعمال **الأشعة الذاتية المعممة** ( Generalized Eigenvectors ).
لنفترض (في حالة $m_a = 2$) أننا وجدنا شعاعاً ذاتياً أساسياً $v_1$ يحقق:

$$(A - \lambda I)v_1 = 0.$$

نبحث حينها عن شعاع ذاتي معمّم $v_2$ يحقق:

$$(A - \lambda I)v_2 = v_1.$$

وتسمى هذه الأشعة بسلسلة جوردان (Jordan Chain). في هذه الحالة، تُعطى الحلول الأساسية المستقلة خطياً بالشكل:

$$Y_1(x) = e^{\lambda x} v_1$$

$$Y_2(x) = e^{\lambda x}\big(v_2 + x v_1\big)$$

**مثال: قيمة ذاتية مضاعفة مع عدم قابلية التقطير**

نعتبر الجملة:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y(x).$$

القيمة الذاتية الوحيدة هي $\lambda = 2$ برتبة تضاعف $m_a(2) = 2$. نحسب الفضاء الذاتي:

$$\ker(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\},$$

ومن ثمة: $m_g(2) = 1 < m_a(2)$. نختار شعاعًا ذاتيًا أساسياً:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نبحث عن شعاع ذاتي معمّم $v_2$ يحقق المعادلة $(A - 2I)v_2 = v_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = 1.$$

نجد مثلًا باختيار $x = 0$:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

عندئذ يكون

$$Y_1(x) = e^{2x} v_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(x) = e^{2x}(v_2 + x v_1) = e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

حلين مستقلين خطيا.

وعليه، يكون الحل العام:

$$Y(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**الحالة الثالثة: قيم ذاتية عقدية مترافقة**

إذا كانت $A$ ذات معاملات حقيقية، وكانت لها قيم ذاتية عقدية مترافقة:

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta,$$

فإننا نستخرج من الحلول العقدية حلولًا حقيقية مستقلة خطيًا.

إذا كان $v$ شعاعًا ذاتيًا (عقدياً) مرفقًا بـ $\lambda$، فإن

$$Y_1(x) = e^{\alpha x}\big(\Re(v)\cos(\beta x) - \Im(v)\sin(\beta x)\big),$$

و

$$Y_2(x) = e^{\alpha x}\big(\Re(v)\sin(\beta x) + \Im(v)\cos(\beta x)\big).$$

حلان حقيقيان مستقلان خطياً.

ومن ثمة، يكون الحل العام:

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x),$$

حيث $c_1, c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**مثال: قيم ذاتية عقدية مترافقة**

نعتبر الجملة:

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y(x).$$

كثير الحدود المميز هو $\lambda^2 + 1 = 0$، ومن ثمة فإن القيم الذاتية هي $\lambda = \pm i$ (أي $\alpha = 0$ و $\beta = 1$).

بحل المعادلة $(A - iI)v = 0$، نجد أن:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

هو شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda = i$.

نستخرج الجزأين الحقيقي والتخيلي للشعاع $v$:

$$\Re(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Im(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

بتطبيق القانون، نستخرج حلين حقيقيين مستقلين:

$$Y_1(x) = e^{0x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin x\right] = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix},$$

$$Y_2(x) = e^{0x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos x\right] = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

وعليه، يُكتب الحل العام:

$$Y(x) = c_1\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

### خاصية 2.2.2 :

تعتمد طريقة حل الجملة الخطية المتجانسة $Y' = AY$ على ما إذا كانت المصفوفة $A$ قابلة للتقطير أم لا. وهذا مرتبط بطبيعة القيم الذاتية للمصفوفة $A$:

- إذا كانت $A$ قابلة للتقطير، فإن الحل العام يُكتب مباشرة بدلالة القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرفقة بها.
- إذا لم تكن قابلة للتقطير، نلجأ إلى الأشعة الذاتية المعممة (سلاسل جوردان).
- في حالة القيم الذاتية العقدية، نستخرج حلولًا حقيقية من الجزأين الحقيقي والتخيلي للحلول العقدية.

وننهي هذه الفقرة بالملاحظة التالية:

**ملاحظة 5.2.2:**

لما كانت المصفوفة $A$ مثلثية، يمكننا انشاء مصفوفة أساسية بالحل التدريجي للجملة ابتداء من المعادلة الأخيرة، وهذه الطريقة صحيحة حتى في الحالة التي تكون فيها مداخل المصفوفة $A$ توابع مستمرة على مجال $I \subset \mathbb{R}$.

أما الطريقة التي تعتمد على حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرفقة بها، فهي صالحة فقط في حالة معاملات المصفوفة $A$ ثابتة.

## 3.3.2 حل الجمل الخطية غير المتجانسة

في هذه الفقرة، نعتبر الجملة الخطية غير المتجانسة التالية:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x), \tag{28}$$

حيث $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مداخلها توابع مستمرة على المجال المفتوح $I$، و $F : I \to \mathbb{R}^n$ شعاع مركباته توابع مستمرة على المجال $I$.

بما أن مداخل المصفوفة $A$ ومركبات الشعاع $F$ مستمرة على $I$، فحسب مبرهنة الوجود والوحدانية للجمل الخطية: من أجل كل شرط ابتدائي $(x_0, Y_0)$، تقبل الجملة (28) حلاً وحيداً على المجال $I$.

يُكتب الحل العام للجملة على الشكل:

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x), \tag{29}$$

حيث $Y_h$ هو الحل العام للجملة الخطية المتجانسة المرفقة:

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \tag{30}$$

و $Y_p$ هو حل خاص يحقق الجملة غير المتجانسة (28).

لدينا من الفقرة السابقة، أن الحل العام للجملة المتجانسة يُكتب على الشكل:

$$Y_h(x) = \Phi(x) \cdot C,$$

حيث $\Phi(x)$ هي مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة، و $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ شعاع مركباته ثوابت حقيقية.

**طريقة تغيير الثوابت:** نبحث عن حل خاص $Y_p$ من الشكل:

$$Y_p(x) = \Phi(x) \cdot C(x),$$

حيث $C(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}$ شعاع مركباته توابع حقيقية قابلة للاشتقاق يطلب تعيينها.

لدينا:

$$Y_p'(x) = \Phi'(x) \cdot C(x) + \Phi(x) \cdot C'(x).$$

بالتعويض في (28)، نجد:

$$\Phi'(x) \cdot C(x) + \Phi(x) \cdot C'(x) = A(x) \cdot \Phi(x) \cdot C(x) + F(x).$$

وبما أن $\Phi(x)$ مصفوفة أساسية، فإنها تحقق الجملة المتجانسة $\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$. ومن ثم، تُختزل المعادلة السابقة إلى:

$$\Phi(x) \cdot C'(x) = F(x).$$

وبما أن $\det\Phi(x) \neq 0$ من أجل كل $x \in I$، يمكننا الضرب في المقلوب:

$$C'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot F(x).$$

بالمكاملة، نجد:

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x) \cdot F(x)\ \mathrm{d}x.$$

وبالتالي، يُعطى الحل الخاص بالصيغة:

$$Y_p(x) = \Phi(x) \int \Phi^{-1}(x) \cdot F(x)\ \mathrm{d}x.$$

وهكذا، فإن الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (28) هو:

$$Y(x) = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \int \Phi^{-1}(x) \cdot F(x)\ \mathrm{d}x.$$

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية التالية:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \tag{31}$$

لحل المعادلة (31)، يمكننا تحويلها إلى جملة معادلتين تفاضليتين من الرتبة الأولى، ولهذا نضع:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \end{cases}$$

وعليه، نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y'' = 3y' - 2y + e^{3x} = -2y_1 + 3y_2 + e^{3x} \end{cases}$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي:

$$Y'(x) = AY(x) + F(x), \tag{32}$$

حيث:

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}.$$

**الخطوة 1: حل الجملة المتجانسة المرفقة**

نحسب القيم الذاتية للمصفوفة $A$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

وعليه، فإن المصفوفة $A$ تقبل قيمتين ذاتيتين متمايزتين:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_1 = 1$ تحقق $(A - I)v = 0$، نختار الشعاع:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

الأشعة الذاتية المرفقة بـ $\lambda_2 = 2$ تحقق $(A - 2I)v = 0$، نختار الشعاع:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ومنه فإن المصفوفة الأساسية لحلول الجملة المتجانسة هي:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

**الخطوة 2: تعيين حل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة**

باستخدام طريقة تغيير الثوابت، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$Y_p(x) = \Phi(x) \cdot C(x).$$

نحتاج أولاً لحساب $\Phi^{-1}(x)$:

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{2e^{3x} - e^{3x}} \begin{pmatrix} 2e^{2x} & -e^{2x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

نحسب الآن الجداء $\Phi^{-1}(x)F(x)$:

$$\Phi^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix}.$$

نحسب الدالة الأصلية للمقدار الناتج (نأخذ ثابت التكامل معدوماً للحصول على حل خاص):

$$C(x) = \int \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix}.$$

وعليه، يُعطى الحل الخاص بـ:

$$Y_p(x) = \Phi(x) \cdot C(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3x} \\ \frac{3}{2}e^{3x} \end{pmatrix}.$$

وبالتالي، الحل العام للمسألة (32) على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3x} \\ \frac{3}{2}e^{3x} \end{pmatrix},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

## 4.2 تمارين محلولة

**تمرين 1.2.2 :**

أوجد الحل $\phi$ للجملة التفاضلية التالية:

$$Y' = AY + F(x), \tag{33}$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**حل التمرين 1.2 :**

إن الجملة (33) خطية غير متجانسة. سنقوم بحلها عبر عدة خطوات:

**1. حساب القيم الذاتية للمصفوفة $A$**

لدينا:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (3-\lambda)^2 + 25 = 0$$

$$\implies \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0.$$

نحسب المميز:

$$\Delta = 36 - 4(34) = -100 = (10i)^2.$$

ومنه،

$$\sqrt{\Delta} = 10i.$$

وكذلك، فالمعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$\lambda_1 = 3 - 5i, \qquad \lambda_2 = 3 + 5i.$$

**2. تعيين المصفوفة الأساسية الحقيقية للجملة المتجانسة**

يكفي أن نجد شعاعاً ذاتياً مرفقاً بإحدى القيمتين. ليكن $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ شعاعاً ذاتياً مرفقاً بـ $\lambda_2 = 3 + 5i$. لدينا:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_2 I)v = 0 &\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3-(3+5i) & 5 \\ -5 & 3-(3+5i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} -5iv_1 + 5v_2 = 0 \\ -5v_1 - 5iv_2 = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow v_2 = iv_1.
\end{aligned}$$

باختيار $v_1 = -i$، نجد $v_2 = 1$. ومنه الشعاع الذاتي هو:

$$v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

لاستخراج الحلول الحقيقية، نحدد الجزء الحقيقي والتخيلي للشعاع $v$:

$$\Re(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Im(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

بتطبيق القاعدة المدروسة للقيم الذاتية العقدية ($\alpha = 3$ و $\beta = 5$)، نحصل على حلين حقيقيين مستقلين:

$$Y_1(x) = e^{3x}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 5x - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 5x\right) = e^{3x}\begin{pmatrix} \sin 5x \\ \cos 5x \end{pmatrix},$$

$$Y_2(x) = e^{3x}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 5x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 5x\right) = e^{3x}\begin{pmatrix} -\cos 5x \\ \sin 5x \end{pmatrix}.$$

وبالتالي،

$$\Phi(x) = e^{3x}\begin{pmatrix} \sin 5x & -\cos 5x \\ \cos 5x & \sin 5x \end{pmatrix}.$$

مصفوفة أساسية الحقيقية للجملة المتجانسة.

**3. البحث عن حل خاص للجملة غير المتجانسة**

باستخدام طريقة تغيير الثوابت، نبحث عن حل من الشكل

$$Y_p(x) = \Phi(x)C(x).$$

لدينا

$$C'(x) = \Phi^{-1}(x)F(x).$$

نحسب محدد المصفوفة الأساسية:

$$\det \Phi(x) = e^{6x}(\sin^2 5x + \cos^2 5x) = e^{6x}.$$

إذن:

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{e^{6x}} e^{3x} \begin{pmatrix} \sin 5x & \cos 5x \\ -\cos 5x & \sin 5x \end{pmatrix} = e^{-3x} \begin{pmatrix} \sin 5x & \cos 5x \\ -\cos 5x & \sin 5x \end{pmatrix}.$$

نحسب الآن الجداء:

$$\Phi^{-1}(x)F(x) = e^{-3x} \begin{pmatrix} \sin 5x & \cos 5x \\ -\cos 5x & \sin 5x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-4x} \begin{pmatrix} \sin 5x \\ -\cos 5x \end{pmatrix}.$$

بمكاملة هذا الشعاع (باستخدام المكاملة بالتجزئة)، نجد الدالة الأصلية:

$$C(x) = \int e^{-4x} \begin{pmatrix} \sin 5x \\ -\cos 5x \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \frac{e^{-4x}}{41} \begin{pmatrix} -4\sin 5x - 5\cos 5x \\ 4\cos 5x - 5\sin 5x \end{pmatrix}.$$

ومنه، الحل الخاص هو $Y_p(x) = \Phi(x)C(x)$:

$$Y_p(x) = \frac{e^{3x} \cdot e^{-4x}}{41} \begin{pmatrix} \sin 5x & -\cos 5x \\ \cos 5x & \sin 5x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sin 5x - 5\cos 5x \\ 4\cos 5x - 5\sin 5x \end{pmatrix}.$$

وبعد نشر الجداء المصفوفي وتبسيطه (استخدام متطابقة $\sin^2 + \cos^2 = 1$)، نجد:

$$Y_p(x) = \frac{e^{-x}}{41} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

**4. إيجاد الحل النهائي $\phi$ المعين بالشرط الابتدائي**

الحل العام للجملة هو

$$Y(x) = \Phi(x)C + Y_p(x).$$

أي:

$$Y(x) = e^{3x}\begin{pmatrix}\sin 5x & -\cos 5x\\ \cos 5x & \sin 5x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \frac{e^{-x}}{41}\begin{pmatrix}-4\\ -5\end{pmatrix}.$$

باستخدام الشرط الابتدائي المعطى:

$$\phi(0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

نجد:

$$Y(0) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4/41\\ -5/41\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

وهذا يعطينا الجملة:

$$\begin{cases} -c_2 - \frac{4}{41} = 0 \implies c_2 = -\frac{4}{41} \\ c_1 - \frac{5}{41} = 1 \implies c_1 = \frac{46}{41} \end{cases}$$

وأخيراً، نعوض الثوابت لنحصل على الحل الوحيد للمسألة:

$$\phi(x) = \frac{e^{3x}}{41}\begin{pmatrix}46\sin 5x + 4\cos 5x\\ 46\cos 5x - 4\sin 5x\end{pmatrix} + \frac{e^{-x}}{41}\begin{pmatrix}-4\\ -5\end{pmatrix}.$$

### تمرين 2.2.2 :

ادرس مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

### حل التمرين 2.2 :

إن المسألة (34) هي جملة معادلتين تفاضليتين خطيتين متجانستين من الرتبة الأولى، مرفقة بشرط ابتدائي. لدراستها، نكتبها على الشكل المصفوفي:

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = Y_0,$$

حيث:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**1. دراسة الوجود والوحدانية**

إن مداخل المصفوفة $A$ هي ثوابت حقيقية، فهي بالتالي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$. وعليه، حسب مبرهنة كوشي-ليبشتز (الوجود والوحدانية)، فإن المسألة (34) تقبل حلاً وحيداً معرفاً على كامل $\mathbb{R}$.

**2. حساب حل المسألة (34)**

بما أن المصفوفة $A$ ذات معاملات ثابتة، نحل الجملة بالبحث عن القيم والأشعة الذاتية.

**أولاً: حساب القيم الذاتية للمصفوفة $A$**

إن أثر المصفوفة $A$ هو:

$$\mathrm{Tr}(A) = 3 + 2 = 5.$$

ومحددها هو:

$$\det(A) = (3)(2) - (-1)(4) = 6 + 4 = 10.$$

وعليه، فإن كثير الحدود المميز هو:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0.$$

نحسب المميز:

$$\Delta = 25 - 4(10) = -15 = (i\sqrt{15})^2.$$

ومنه، تقبل المصفوفة $A$ قيمتين ذاتيتين عقديتين مترافقتين:

$$\lambda_1 = \frac{5 + i\sqrt{15}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{5 - i\sqrt{15}}{2}.$$

نضع $\alpha = \dfrac{5}{2}$ و $\beta = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$، بحيث $\lambda_1 = \alpha + i\beta$.

**ثانياً: تعيين مصفوفة أساسية حقيقية**

لنعين شعاعاً ذاتياً $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ مرفقاً بالقيمة $\lambda_1$. لدينا $(A - \lambda_1 I)v = 0$، ومنه:

$$\begin{cases} (3 - \lambda_1)v_1 - v_2 = 0 \\ 4v_1 + (2 - \lambda_1)v_2 = 0 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى، نجد:

$$v_2 = (3 - \lambda_1)v_1.$$

نعوض بقيمة $\lambda_1$:

$$3 - \lambda_1 = 3 - \left(\frac{5}{2} + i\beta\right) = \frac{1}{2} - i\beta.$$

ومنه: $v_2 = \left(\frac{1}{2} - i\beta\right) v_1$.

باختيار $v_1 = 1$، نجد $v_2 = \frac{1}{2} - i\beta$. إذن،

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - i\beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{u} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \end{pmatrix}}_{w},$$

هو شعاع ذاتي مرفق بـ $\lambda_1$.

بناءً على القاعدة النظرية للقيم الذاتية العقدية، نستخرج حلين حقيقيين مستقلين خطياً:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)u - \sin(\beta x)w\right] = e^{\alpha x}\begin{pmatrix} \cos(\beta x) \\ \frac{1}{2}\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x) \end{pmatrix}$$

و

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\left[\sin(\beta x)u + \cos(\beta x)w\right] = e^{\alpha x}\begin{pmatrix} \sin(\beta x) \\ \frac{1}{2}\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x) \end{pmatrix}.$$

ومنه،

$$\Phi(x) = [y_1(x), y_2(x)] = e^{\alpha x}\begin{pmatrix} \cos(\beta x) & \sin(\beta x) \\ \frac{1}{2}\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x) & \frac{1}{2}\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x) \end{pmatrix} \quad (35)$$

مصفوفة أساسية حقيقية لحلول الجملة المتجانسة.

**ثالثاً: تعيين حل المسألة**

حل المسألة (34) هو $Y(x) = \Phi(x) \cdot C$، حيث $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ شعاع ثابت نعينه بإستخدام الشرط الإبتدائي $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

لدينا:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \Phi(0) \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} C_1 = 1 \\ \dfrac{1}{2} - \beta C_2 = 0 \implies C_2 = \dfrac{1}{2\beta}. \end{cases}$$

وبالتالي فإن حل المسألة (34) على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \cos(\beta x) + \dfrac{1}{2\beta} \sin(\beta x) \\ \left(\beta + \dfrac{1}{4\beta}\right) \sin(\beta x) \end{pmatrix}.$$

مع $\alpha = \dfrac{5}{2}$ و $\beta = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

أي،

$$Y(x) = e^{\frac{5}{2}x} \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}x\right) + \dfrac{\sqrt{15}}{15} \sin\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}x\right) \\ \dfrac{8\sqrt{15}}{15} \sin\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}x\right) \end{pmatrix}.$$

**تمرين 3.2.2 :**

احسب حل الجملة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + \sin x \\ y_2' = 2y_1 + \cos x \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{36}$$

## حل التمرين 3.2 :

إن المسألة (36) هي مسألة كوشي لجملة معادلتين تفاضليتين خطيتين غير متجانستين من الرتبة الأولى. لحلها، نكتبها على الشكل المصفوفي:

$$\begin{cases} Y' = AY + F(x), \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{37}$$

حيث:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

بما أن مداخل المصفوفة $A$ ومركبات الشعاع $x \mapsto F(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$، فإن المسألة (37) تقبل حلاً وحيداً على $\mathbb{R}$.

**أولا: حساب القيم الذاتية للمصفوفة $A$**

نحسب كثير الحدود المميز:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow -\lambda(1-\lambda) - 2 = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \end{aligned}$$

نلاحظ أن جذري المعادلة هما:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

بما أن القيمتين متمايزتان، فإن المصفوفة $A$ قابلة للتقطير.

**ثانيا: تعيين مصفوفة أساسية $\Phi$ للجملة المتجانسة**

ليكن $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ شعاعاً ذاتياً مرفقاً بـ $\lambda_1 = -1$.

لدينا:

$$(A+I)u = 0 \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies 2u_1 + u_2 = 0 \implies u_2 = -2u_1.$$

نختار $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

ليكن $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ شعاعاً ذاتياً مرفقاً بـ $\lambda_2 = 2$.

$$(A-2I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies -v_1 + v_2 = 0 \implies v_1 = v_2.$$

نختار $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ومنه، تمثل:

$$\Phi(x) = \left[e^{\lambda_1 x}u, e^{\lambda_2 x}v\right] = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -2e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

مصفوفة حلول أساسية للجملة.

**ثالثا: تعيين حلا خاصا للمسألة**

باستخدام طريقة تغيير الثوابت، نبحث عن حل $Y_p$ من الشكل:

$$Y_p(x) = \Phi(x)C(x).$$

لدينا

$$C'(x) = \Phi^{-1}(x)F(x).$$

نحسب محدد المصفوفة الأساسية:

$$\det \Phi(x) = e^{-x}(e^{2x}) - e^{2x}(-2e^{-x}) = 3e^{x}.$$

إذن:

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{3e^{x}} \begin{pmatrix} e^{2x} & -e^{2x} \\ 2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{x} & -e^{x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

نحسب الجداء:

$$\Phi^{-1}(x)F(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{x} & -e^{x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{x}(\sin x - \cos x) \\ e^{-2x}(2\sin x + \cos x) \end{pmatrix}.$$

بحساب الدوال الأصلية للمركبتين (باستخدام المكاملة بالتجزئة)، نجد:

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x)F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{x}\cos x \\ -\frac{1}{5}e^{-2x}(3\sin x + 4\cos x) \end{pmatrix}.$$

ومنه، الحل الخاص هو $Y_p(x) = \Phi(x)C(x)$:

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -2e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{x}\cos x \\ -\frac{1}{15}e^{-2x}(3\sin x + 4\cos x) \end{pmatrix}.$$

وبعد النشر والتبسيط، نجد:

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x \\ -\frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\sin x - 3\cos x \\ -\sin x + 2\cos x \end{pmatrix}.$$

**رابعا: إيجاد حل المسألة**

الحل العام للمسألة هو:

$$Y(x) = \Phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_p(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\sin x - 3\cos x \\ -\sin x + 2\cos x \end{pmatrix}.$$

نعوض بالشرط الابتدائي $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

وهذا يعطينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \dfrac{3}{5} = 1 \implies c_1 + c_2 = \dfrac{8}{5} \\ -2c_1 + c_2 + \dfrac{2}{5} = 0 \implies -2c_1 + c_2 = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى، نجد:

$$3c_1 = \frac{10}{5} = 2 \implies c_1 = \frac{2}{3}.$$

وبالتعويض، نجد

$$c_2 = \frac{8}{5} - \frac{2}{3} = \frac{14}{15}.$$

وبالتالي فإن الحل العام للمسألة على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = \frac{2}{3}e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{14}{15}e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\sin x - 3\cos x \\ -\sin x + 2\cos x \end{pmatrix}. \tag{39}$$

### تمرين 4.2.2 :

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} y_1'' - 3y_1' + 2y_1 + y_2' - y_2 = 0, \\ y_1' - 2y_1 + y_2' + y_2 = 0. \end{cases} \tag{40}$$

1. بين أنها تكافيء جملة من الرتبة الأولى، ثم احسب المصفوفة الأساسية للجملة المكافئة.
2. أحسب الحل العام للجملة (40).
3. احسب حل الجملة (40) في حالة $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1'(0) = 1$.

## حل التمرين 4.2 :

إن الجملة (40) جملة معادلات تفاضلية خطية، متجانسة. توابعها المجهولة، هي: $y_1$ و $y_2$.

1. **كتابة الجملة (40) على شكل جملة معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.**

في المعادلة الأولى للجملة، نلاحظ ظهور المشتقة الثانية لـ $y_1$. وعليه، لكتابة الجملة على شكل جملة ثلاث معادلات من الرتبة الأولى، نضع:

$$z_1(x) = y_1(x),\ z_2(x) = y_1'(x),\ z_3(x) = y_2(x).$$

وعليه،

$$z_1'(x) = z_2(x).$$

من المعادلة الثانية للجملة، لدينا:

$$y_2' = -y_1' + 2y_1 - y_2.$$

وعليه،

$$z_3' = 2z_1 - z_2 - z_3. \tag{a}$$

من المعادلة الأولى للجملة، لدينا:

$$y_1'' = 3y_1' - 2y_1 - y_2' + y_2.$$

بتعويض $y_2'$ بالعبارة (a)، يكون لدينا:

$$y_1'' = 4y_1' - 4y_1 + 2y_2.$$

وعليه،

$$z_2' = -4z_1 + 4z_2 + 2z_3.$$

وبالتالي، نحصل على جملة ثلاث معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى:

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = -4z_1 + 4z_2 + 2z_3, \\ z_3' = 2z_1 - z_2 - z_3. \end{cases} \tag{41}$$

ويمكن كتابتها على الشكل المصفوفي

$$Z'(x) = AZ(x),$$

حيث

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لنحسب الآن، المصفوفة الأساسية للجملة (41).
لنعين أولا القيم الذاتية للمصفوفة $A$. لتكن $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $A$.
لدينا:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

ومنه، كثير الحدود المميز هو:

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

وعليه، فإن المصفوفة $A$ تقبل ثلاث قيم متمايزة

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2.$$

نمر الآن، إلى تعيين الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية.

-بالنسبة لـ $\lambda_1 = 0$، بحل الجملة $Av = 0$، نجد $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاعا ذاتيا لها.

-بالنسبة لـ $\lambda_2 = 1$، بحل الجملة $(A - Id)v = 0$، نجد $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاعا ذاتيا لها.

-بالنسبة لـ $\lambda_3 = 2$، بحل الجملة $(A - 2Id)v = 0$، نجد $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاعا ذاتيا لها.

وبالتالي، المصفوفة الأساسية للجملة (41)، هي:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 2e^{2x} \\ 2 & e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **حساب الحل العام للجملة (40).**

يكتب الحل العام لـ (41)، على الشكل:

$$Z(x) = \Phi(x)C,$$

حيث $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ شعاع مركباته ثابتة.

أي،

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 2e^{2x} \\ 2 & e^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$
$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

وبما أن

$$y_1 = z_1, \ y_2 = z_3,$$

فإن الحل العام للجملة الخطية المتجانسة (40) على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2e^x + C_3e^{2x} \\ 2C_1 + C_2e^x \end{pmatrix}, \quad (42)$$

حيث $C_1, C_2$ و $C_3$ ثوابت حقيقية كيفية.

3. **حساب حل الجملة (40) في حالة** $y_1(0) = y_2(0) = 0, \ y_1'(0) = 1$.

حسب نظرية كوشي-ليبشتز، المسألة تقبل حلا وحيدا على مجال مفتوح يشمل $x_0 = 0$.
باستخدام الشروط الابتدائية المعطاة، نحصل على جملة ثلاث معادلات جبرية التالية:

$$\begin{cases} z_1(0) = y_1(0) = 0 & \Longrightarrow\ C_1 + 2C_2 + C_3 = 0 \\ z_2(0) = y_1'(0) = 1 & \Longrightarrow\ 2C_2 + 2C_3 = 1 \\ z_3(0) = y_2(0) = 0 & \Longrightarrow\ 2C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

- من المعادلة الجبرية الثالثة، لدينا: $C_2 = -2C_1$.
- من المعادلة الجبرية الثانية، لدينا: $2(-2C_1) + 2C_3 = 1 \implies C_3 = 2C_1 + \frac{1}{2}$.
- بالتعويض في المعادلة الجبرية الأولى، نجد:

$$C_1 + 2(-2C_1) + (2C_1 + \frac{1}{2}) = 0 \implies -C_1 + \frac{1}{2} = 0 \implies C_1 = \frac{1}{2}.$$

ومنه، نستنتج أن:

$$C_1 = \frac{1}{2},\ C_2 = -1,\ C_3 = \frac{3}{2}.$$

وبالتالي، فإن حل المسألة على $\mathbb{R}$، هو:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

حيث

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{2} - 2e^x + \frac{3}{2}e^{2x}, \\ y_2(x) = 1 - e^x. \end{cases}$$

# الباب 3

# المسائل الحدية

## 1.3 حساب حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{1}$$

حيث $P$ و $Q$ تابعان مستمران على مجال $I \subset \mathbb{R}$.

كما رأينا في الفصل الثاني، فإن حلول المعادلة التفاضلية (1) تشكّل فضاءً شعاعيًا بعده 2.
أي أنه لحساب أي حل للمعادلة (1)، يكفي تعيين حلين مستقلين خطيًا. وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة يكتب على شكل مزج خطي لحلين مستقلين خطيًا.

فيما يلي، ندرس أبرز الطرق المستعملة لإيجاد حلين مستقلين خطيًا للمعادلة التفاضلية (1)، وذلك حسب طبيعة معاملاتها. فقد يمكن تعيين حلين مستقلين خطيًا مباشرة، أو نعيّن حلاً خاصًا $y_1$ للمعادلة التفاضلية، ثم باستعمال طريقة تخفيض الرتبة نجد حلاً ثانيًا $y_2$ يكون مستقلاً خطيًا عن $y_1$.
نستهل هذه الفقرة بطريقة تخفيض الرتبة.

### 1.1.3 طريقة تخفيض الرتبة لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية معاملاتها توابع مستمرة

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية التالية:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{2}$$

حيث $P$ و $Q$ تابعان مستمران على مجال $I \subset \mathbb{R}$.

في الحالة العامة، لا يمكن تعيين حلين مستقلين خطيًا بطريقة منهجية محددة، وذلك يعود إلى طبيعة معاملات المعادلة. في هذه الفقرة، نعالج الحالة العامة التي تكون فيها معاملات المعادلة التفاضلية توابع كيفية مستمرة.

ليكن $y_1$ حلاً للمعادلة (2) لا يطابق التابع المعدوم. نلاحظ أن التابع المعدوم لا يمكن أن نعرف من خلاله أساسا لمجموعة حلول المعادلة التفاضلية. نفرض إذن أنه توجد نقطة $x_0 \in I$ بحيث $y_1(x_0) \neq 0$. ومن استمرار $y_1$، هذا يعني أنه يوجد جوار $V$ لـ $x_0$ بحيث

$$\forall x \in V,\ y_1(x) \neq 0.$$

لهذا، نبحث عن حل $y_2$ مستقل خطيا عن $y_1$ على $V$. ولذلك، نستعمل طريقة تخفيض الرتبة.

### 2.1.3 مبدأ طريقة تخفيض الرتبة

تتمثل طريقة تخفيض الرتبة في البحث عن حل $y_2$ للمعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x),$$

حيث $v$ تابع مجهول نريد تعيينه.

من أجل كل $x \in V$، لدينا:

$$y_2' = v'y_1 + vy_1', \qquad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (2)، نحصل على:

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(x)(v'y_1 + vy_1') + Q(x)vy_1 = 0.$$

بإعادة ترتيب الحدود، نجد:

$$\underbrace{(y_1'' + Py_1' + Qy_1)}_{=0} v + v'(2y_1' + Py_1) + y_1v'' = 0.$$

فنحصل على معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى بالنسبة لـ $v'$:

$$y_1v'' + (2y_1' + Py_1)v' = 0. \tag{3}$$

### 3.1.3 حساب حلول المعادلة التفاضلية (3)

نضع $w = v'$. وعليه، تكتب المعادلة (3) على الشكل:

$$y_1 w' + (2y_1' + Py_1)w = 0.$$

من الواضح أن $w \equiv 0$ حل تافه. نبحث عن الحلول غير الحل التافه، أي نفرض أنه توجد نقطة $x_0 \in V$ بحيث $w(x_0) \neq 0$. وبما أن $w$ تابع مستمر، فهناك جوار $W \subset V$ لـ $x_0$ يبقى فيه $w$ غير منعدم. كما أن هذا يبرر القسمة على $y_1$ في ما يلي لأنها لا تصفر في هذا الجوار.
نثبت نقطة $x_0 \in W$ ونضع $w(x_0) = w_0$. نحصل على:

$$\frac{w'}{w} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P(x).$$

بالمكاملة من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$\ln|w| = -2\ln|y_1| - \int_{x_0}^{x} P(s)\,\mathrm{d}s + \ln c,$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي.
ومن ثمة:

$$w = v' = \frac{c\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)\,ds}}{y_1^2(x)}.$$

بمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ce^{-\int_{x_0}^{s} P(u)\ \mathrm{d}u}}{y_1^2(s)}\ \mathrm{d}s + c_1,$$

حيث $c$ و $c_1$ ثابتان حقيقيان كيفيان.
ومن ثم،

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

أي،

$$y_2(x) = y_1(x)\left(c\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{s} P(u)\ \mathrm{d}u}}{y_1^2(s)}\ \mathrm{d}s + c_1\right).$$

دون فقدان العمومية، نختار $c = 1$ و $c_1 = 0$.

ومنه نحصل على الحل:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{s} P(u)\,du}}{y_1^2(s)}\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

**ملاحظة 1.3.3:**

- طريقة تخفيض الرتبة لا تعطي الحل الأول $y_1$، بل يُفترض أنه معطى أو يمكن ملاحظته مباشرة.
- رونسكي الحلين $y_1$ و$y_2$ يُعطى بـ

$$W(y_1, y_2) = y_1^2 v' \neq 0$$

وهذا ما يؤكد أن الحلين $y_1$ و $y_2$ مستقلان خطياً.

لندرس المثال التالي:

**مثال :**

نعتبر المعادلة:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, \quad x \in ]0, +\infty[. \tag{5}$$

إن المعادلة (5) من الشكل

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

مع

$$P(x) = -\frac{2}{x}.$$

نلاحظ أن $y_1(x) = x^2$ حل خاص للمعادلة. لنبحث عن حل خاص ثان لـ (5) يكون مستقلاً خطياً عن $y_1$، وهذا باستخدام طريقة تخفيض الرتبة.

أي نبحث عن حل $y_2$ من الشكل:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x),$$

حيث

$$v'(x) = \frac{e^{-\int P(x)\ \mathrm{d}x}}{(y_1(x))^2}$$

لدينا:

$$e^{-\int P(x)\ \mathrm{d}x} = e^{\int \frac{2}{x}\ \mathrm{d}x} = e^{2\ln(x)} = x^2.$$

وعليه،

$$v'(x) = \frac{x^2}{(x^2)^2} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

ومنه،

$$v(x) = \int x^{-2}\ \mathrm{d}x = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

وبالتالي نستنتج أن

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)x^2 = -x.$$

لنتأكد أن $y_1$ و $y_2$ مستقلان خطياً، وهذا بحساب تابع رونسكي لهما.
ليكن $x \in ]0, +\infty[$. لدينا:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -x^2 + 2x^2 = x^2 > 0.$$

بما أن

$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ W(x) \neq 0,$$

فإن $y_1$ و $y_2$ مستقلان خطياً.
وبالتالي، فإن حل المعادلة التفاضلية على $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x,$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**ملاحظة 2.3.3:** قد تتساءل عن سبب كتابة الحل العام على الشكل:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x,$$

عوض

$$y(x) = c_1x^2 - c_2x,$$

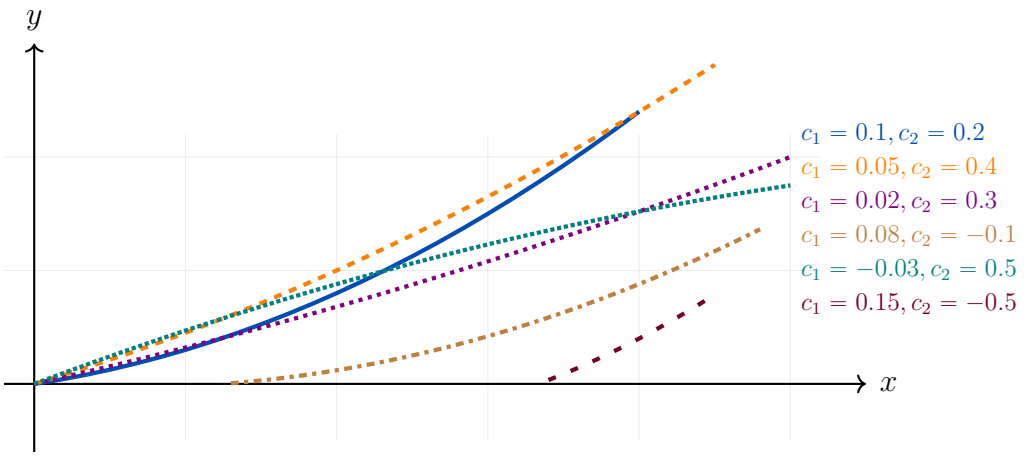
حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

نذكر أن مجموعة حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة تشكل فضاءً شعاعياً. فإن أي تابع من الشكل $Ky_2$، حيث $K \in \mathbb{R}$ هو أيضا حل. في حالتنا هذه:

- اختيار $y_2(x) = x$ أو $y_2(x) = -x$ يؤدي إلى نفس الفضاء الشعاعي للحلول.

بما أن $c_2$ ثابت حقيقي كيفي (بمعنى أنه يمكنه أن يأخذ أي قيمة حقيقية موجبة أو سالبة)، فإن العبارة $+c_2x$ تعطي تماماً جميع الحالات الممكنة التي تعطيها الحالة $-c_2x$.

لذلك، يمكننا تبسيط عبارة الحلول الأساسية بحذف الإشارات والثوابت الزائدة لتسهيل التعامل مع الحل العام.




شكل 1.3: تمثيل بياني لبعض حلول المعادلة التفاضلية (5)

### 4.1.3 دراسة المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية المتجانسة التالية:

$$ay'' + by' + cy = 0, \ x \in I, \tag{6}$$

حيث $a, b, c$ ثوابت حقيقية و $a \neq 0$.

بما أن المعاملات ثابتة، لتعيين أساس لمجموعة حلول المعادلة التفاضلية (6)، نرشح تابعا من الشكل $y(x) = e^{rx}$،

فيكون

$$y'(x) = re^{rx}, \ y''(x) = r^2 e^{rx}.$$

ومنه، بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نجد:

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

وبما أن $e^{rx} \neq 0$،

فإن

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{7}$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية. لحلها، نحسب المميز $\Delta$.

لدينا:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

نميز الحالات التالية:

**1)** $\Delta > 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (7) تقبل حلين حقيقيين متمايزين:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \ r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ومنه، نحصل على حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \ y_2(x) = e^{r_2 x}.$$

وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية على $I$ هو

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**2)** $\Delta = 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (7) تقبل حلا مضاعفا $r = \dfrac{-b}{2a}$.

ومنه، نجد حلاً للمعادلة التفاضلية من الشكل

$$y_1(x) = e^{rx},$$

ونعين حلاً ثانياً للمعادلة التفاضلية مستقلا خطيا عن $y_1$، باستخدام طريقة تخفيض الرتبة.

قبل البدء في تطبيق طريقة تخفيض الرتبة، علينا التأكد أولا أن معامل $y''$ يساوي 1.

إنّ معامل $y''$ في المعادلة التفاضلية (6) هو $a$. وعليه، نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على $a$، فنحصل على:

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

نضع

$$P = \frac{b}{a},\ Q = \frac{c}{a}.$$

ونكتب المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$y'' + Py' + Qy = 0.$$

مبدأ طريقة تخفيض الرتبة هو البحث عن حل ثان $y_2$ من الشكل:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x),$$

حيث $v$ تابع مجهول نقوم بتعيينه.

لدينا:

$$y_2' = v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x),$$

و

$$\begin{aligned} y_2'' &= v''(x)y_1(x) + v'(x)y_1'(x) + v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x) \\ &= v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + y_1''(x)v. \end{aligned}$$

بتعويض $y_2$، $y_2'$ و $y_2''$ في المعادلة التفاضلية

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

نجد:

$$(v''y_1 + 2v'y_1' + y_1''v) + P(v'y_1 + vy_1') + Qvy_1 = 0.$$

بإعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$y_1v'' + (2y_1' + Py_1)v' + \underbrace{(y_1'' + Py_1' + Qy_1)}_{=0}v = 0$$

الحد المضروب في $v$ معدوم تماماً، لأن $y_1$ هو بطبيعته حل للمعادلة التفاضلية.
ومنه، يتبقى لدينا:

$$y_1v'' + (2y_1' + Py_1)v' = 0.$$

وبما أن $y_1(x) = e^{rx}$، فإن مشتقته هي $y_1'(x) = re^{rx}$. بتعويض ذلك، نكتب:

$$e^{rx}v'' + (2re^{rx} + Pe^{rx})v' = 0.$$

ومنه، نستخرج $e^{rx}$ كعامل مشترك:

$$e^{rx}[v'' + (2r + P)v'] = 0.$$

وبما أن التابع الأسّي $e^{rx}$ لا ينعدم أبداً، نحصل على المعادلة:

$$v'' + (2r + P)v' = 0.$$

نعلم أن $r$ هو جذر مضاعف، وقيمته هي $r = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-P}{2}$. هذا يعني أن:

$$2r + P = 0.$$

ومنه، تؤول المعادلة ببساطة إلى:

$$v'' = 0.$$

بمكاملة المعادلة الأخيرة مرتين، نجد:

$$v(x) = K_1x + K_2,$$

حيث $K_1$ و $K_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.
للحصول على حل خاص ثانٍ وبسيط، نختار $K_1 = 1$ و $K_2 = 0$. وعليه:

$$v(x) = x.$$

وبالتالي، الحل الثاني المستقل خطياً عن $y_1$، هو:

$$y_2(x) = xe^{rx}.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية على $I$، هو:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = e^{rx}(c_1 + c_2x),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**3)** $\Delta < 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (7) تقبل حلين عقديين مترافقين:

$$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta,$$

حيث $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

ومنه، نحصل على حلين عقديين للمعادلة التفاضلية

$$z_1(x) = e^{r_1x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)],$$

$$z_2(x) = e^{r_2x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)].$$

ومن ثم يمكن إستنتاج حلين حقيقيين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

حيث $y_1$ هو الجزء الحقيقي لـ $z_1$ و $y_2$ هو الجزء التخيلي لـ $z_1$.

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية على $I$، هو:

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\big),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

| المميز ($\Delta$) | الجذور ($r$) | الأساس $\{y_1, y_2\}$ | الحل العام $y$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ | $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$ | $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ |
| $\Delta = 0$ | $r = -\frac{b}{2a}$ | $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ | $y = e^{rx}(c_1 + c_2 x)$ |
| $\Delta < 0$ | $r = \alpha \pm i\beta$ | $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$ | $y = e^{\alpha x}\big[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\big]$ |

جدول 1.3: ملخص حلول المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة.

### 5.1.3 دراسة معادلة أولر-كوشي

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \ x \in I, \tag{8}$$

حيث $I \subset (0, +\infty)$ أو $I \subset (-\infty, 0)$.

إنّ التابع المجهول $y$ هو تابع للمتغير $x$. ونلاحظ أن معاملات المعادلة التفاضلية (8) عبارة عن قوى للمتغير $x$ متناسبة في كل حد، مع رتبة اشتقاق التابع المجهول $y$.

تسمى المعادلة التفاضلية (8) معادلة أولر-كوشي.

في هذه الحالة، لتعيين حلين مستقلين خطيا للمعادلة التفاضلية (8)، على المجال المختار، نفترض أولا أن $x > 0$ ونرشح التابع $y(x) = x^r$ مع $r \in \mathbb{R}$.

لدينا:

$$y'(x) = rx^{r-1}, \ y''(x) = r(r-1)x^{r-2}.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على:

$$ar(r-1)x^{r-2}x^2 + brxx^{r-1} + cx^r = 0.$$

ومنه،

$$(ar^2 + (b-a)r + c)x^r = 0.$$

للتبسيط، نضع $d = b - a$ وبما أن $x^r \neq 0$، نحصل على المعادلة الجبرية المميزة:

$$ar^2 + dr + c = 0. \tag{9}$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية، لحلها نحسب المميز $\Delta = d^2 - 4ac$.

**ملاحظة 3.3.3: ملاحظة هامة حول استعمال القيمة المطلقة $|x|$:**

حسب المعطيات، المجال $I$ الذي نُعرّف عليه المعادلة **لا يحوي** النقطة 0. هذا يعني أن $x$ ذات إشارة ثابتة على كل المجال $I$.

- إذا كان $I \subset (0, +\infty)$ فإن $|x| = x$. ومنه، $\ln|x| = \ln(x)$، والتابع $x^r$ معرف جيدا.
- إذا كان $I \subset (-\infty, 0)$ فإن $|x| = -x$. ومنه، $\ln|x| = \ln(-x)$. وفي هذه الحالة، لتفادي مشكل تعريف القوة $x^r$ لعدد سالب، نعوض $x$ بـ $|x|$.

لأخذ الحالتين بعين الإعتبار وتعميم الحلول على أي مجال لا يحوي الصفر، نستعمل دائما $|x|$ في كتابة الحل العام $y$.

ومنه نميز ثلاث حالات:

**1)** $\Delta > 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (9) تقبل حلين متمايزين $r_1$ و $r_2$.

ومنه، المعادلة التفاضلية تقبل حلين مستقلين خطيا (باستعمال القيمة المطلقة للتعميم):

$$y_1(x) = |x|^{r_1},\ y_2(x) = |x|^{r_2}.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية (8) على $I$، هو:

$$y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**2)** $\Delta = 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (9) تقبل **حلا مضاعفا** $r$. وعليه، نحصل على حل واحد حقيقي للمعادلة التفاضلية على المجال $I$، وهو (باستعمال التعميم):

$$y_1(x) = |x|^r.$$

لتبسيط حسابات تخفيض الرتبة، سنفترض مؤقتا أن $x > 0$ (أي $y_1(x) = x^r$). لنبحث عن حل $y_2$ يكون مستقلاً خطيًا عن $y_1$، ومن الشكل:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^r,$$

حيث $x \mapsto v(x)$ تابع مجهول يطلب تعيينه.

لدينا:

$$y_2'(x) = v'x^r + rvx^{r-1}, \quad y_2''(x) = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + r(r-1)vx^{r-2}.$$

بتعويض $y_2$، $y_2'$ و $y_2''$ في المعادلة التفاضلية الأصلية (8) $\left(ax^2y'' + bxy' + cy = 0\right)$، نجد:

$$ax^2\Big(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + r(r-1)vx^{r-2}\Big) + bx\Big(v'x^r + rvx^{r-1}\Big) + c\Big(vx^r\Big) = 0.$$

بتبسيط القوى المشتركة $x^r$ وتجميع الحدود المضروبة في $v''$ و $v'$ و $v$، نحصل على:

$$x^r\left[ax^2v'' + xv'(2ar+b) + v\underbrace{\big(ar(r-1) + br + c\big)}_{=0}\right] = 0.$$

- الحد المضروب في $v$ هو تماماً $ar^2 + (b-a)r + c = 0$، وهو معدوم لأن $r$ حل للمعادلة المميزة.
- بالنسبة لمعامل $xv'$، وهو $(2ar+b)$: بما أن $r$ جذر مضاعف للمعادلة الجبرية $ar^2+(b-a)r+c = 0$، فإن قيمته هي $r = -\frac{b-a}{2a}$.

ومنه،

$$2ar + b = 2a\left(-\frac{b-a}{2a}\right) + b = -(b-a) + b = -b + a + b = a.$$

وبما أن $x^r \neq 0$، تتبسط المعادلة التفاضلية إلى:

$$ax^2v'' + axv' = 0.$$

وبما أن $a \neq 0$، نقسم على $a$ لنحصل على المعادلة البسيطة:

$$x^2v'' + xv' = 0.$$

نضع $w = v'$، لتصبح المعادلة:

$$x^2w' + xw = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2w' = -xw \quad \Longrightarrow \quad \frac{w'}{w} = -\frac{1}{x} \quad (\text{لأن } x \neq 0).$$

بمكاملة الطرفين، نجد:

$$\ln|w| = -\ln(x) + c_0 \implies w = v' = \frac{K_1}{x}.$$

بالمكاملة مرة ثانية، نجد:

$$v(x) = K_1 \ln(x) + K_2.$$

باختيار $K_1 = 1$ و $K_2 = 0$، نحصل على:

$$v(x) = \ln(x).$$

ومنه الحل الثاني هو:

$$y_2(x) = x^r \ln(x).$$

وبالتالي، بتعميم الحل على المجال $I$ (باستبدال $x^r$ بـ $|x|^r$ و $\ln(x)$ بـ $\ln|x|$)، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = |x|^r(c_1 + c_2 \ln|x|),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

**3)** $\Delta < 0$

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (9) تقبل حلين عقديين مترافقين

$$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta.$$

ومنه، المعادلة التفاضلية تقبل حلين عقديين:

$$z_1(x) = |x|^{r_1} = |x|^{\alpha+i\beta} = |x|^\alpha |x|^{i\beta} = |x|^\alpha e^{i\beta \ln|x|}.$$

بتطبيق قاعدة أولر، نجد:

$$z_1(x) = |x|^\alpha(\cos(\beta \ln|x|) + i \sin(\beta \ln|x|)).$$

وبنفس الطريقة نحصل على الحل العقدي الثاني المرافق لـ $z_1$:

$$z_2(x) = |x|^{r_2} = |x|^{\alpha-i\beta} = |x|^\alpha e^{-i\beta \ln|x|}.$$

ومنه،

$$z_2(x) = |x|^\alpha(\cos(\beta \ln|x|) - i \sin(\beta \ln|x|)).$$

ومن ثم نستنتج حلين حقيقيين مستقلين خطيا:

$$y_1(x) = |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|),\ y_2(x) = |x|^\alpha \sin(\beta \ln|x|).$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

أي:

$$y(x) = |x|^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|)],$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

| المميز ($\Delta$) | الجذور ($r$) | الأساس $\{y_1, y_2\}$ | الحل العام $y$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ | $\{\|x\|^{r_1}, \|x\|^{r_2}\}$ | $y = c_1\|x\|^{r_1} + c_2\|x\|^{r_2}$ |
| $\Delta = 0$ | $r = -\frac{b-a}{2a}$ | $\{\|x\|^r, \|x\|^r \ln\|x\|\}$ | $y = \|x\|^r(c_1 + c_2 \ln\|x\|)$ |
| $\Delta < 0$ | $r = \alpha \pm i\beta$ | $\{\|x\|^\alpha \cos(\beta\ln\|x\|), \|x\|^\alpha \sin(\beta\ln\|x\|)\}$ | $y = \|x\|^\alpha\big[c_1 \cos(\beta \ln\|x\|) + c_2 \sin(\beta \ln\|x\|)\big]$ |

جدول 2.3: ملخص لحلول معادلة أولر-كوشي (Euler-Cauchy) في الحالات الثلاث.

## 2.3 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية غير المتجانسة

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية غير المتجانسة التالية:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x), \quad x \in I, \tag{10}$$

حيث $P$، $Q$، و $g$ توابع مستمرة على مجال $I \subset \mathbb{R}$.

إن الحل العام للمعادلة التفاضلية (10) يُكتب على الشكل:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

حيث:

- $y_h$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة بها:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

• $y_p$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (10).

حسب ما رأينا في الفصل السابق، الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة هو:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

حيث $y_1$ و $y_2$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة المتجانسة، و $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.
نبحث الآن عن حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (10)، ولذلك نستخدم **طريقة تغيير الثوابت.**

## مبدأ طريقة تغيير الثوابت

في طريقة تغيير الثوابت، نبحث عن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة يكتب على الشكل التالي:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

حيث $x \mapsto c_1(x)$ و $x \mapsto c_2(x)$ تابعان مجهولان نعينهما باتباع الخطوات الموالية:

**الخطوة 1: حساب المشتق الأول $y_p'$**

من أجل كل $x$ من $I$، لدينا:

$$y_p'(x) = [c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x)] + [c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x)].$$

نُعيد ترتيب الحدود لنجمع التوابع $c_1, c_2$ وحدها، ومشتقاتها $c_1', c_2'$ وحدها:

$$y_p'(x) = \underbrace{c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)}_{\text{الجزء الأول}} + \underbrace{c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)}_{\text{الجزء الثاني}}$$

**الخطوة 2: فرض الشرط الأول (لتفادي المشتقات من الرتبة الثانية)**

لو قمنا باشتقاق $y_p'$ كما هي الآن مرة أخرى لنحصل على $y_p''$، فإن "الجزء الثاني" سيولد لنا المشتقات $c_1''(x)$ و $c_2''(x)$. ظهور المشتقات الثانية للثوابت المجهولة سيجعل حل المسألة معقداً جداً.
لذلك، **نفرض** أن "الجزء الثاني" يساوي صفراً. وهذا هو **الشرط الأول**:

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

بفضل هذا الشرط، تُصبح عبارة المشتق الأول بسيطة جداً:

$$y_p'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

**الخطوة 3: حساب المشتق الثاني ($y_p''$)**

الآن، نشتق العبارة المُبسطة لـ $y_p'$ لنحصل على المشتق الثاني (وهنا لن تظهر $c_1''$ و $c_2''$):

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x).$$

نُعيد الترتيب مرة أخرى:

$$y_p''(x) = [c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)] + [c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)].$$

**الخطوة 4: التعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية**

بتعويض $y_p$، $y_p'$ و $y_p''$ في (10) بالعبارات التي وجدناها، نجد:

$$(c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2') + P(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = g(x).$$

نستخرج $c_1(x)$ و $c_2(x)$ كعوامل مشتركة، فنحصل على:

$$c_1(x)\underbrace{[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]}_{=0} + c_2(x)\underbrace{[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]}_{=0} + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x).$$

**الخطوة 5: استنتاج الشرط الثاني**

بما أن $y_1$ و $y_2$ هما حلان للمعادلة المتجانسة $(y'' + Py' + Qy = 0)$، فإن المقادير بين العارضتين تساوي الصفر.

ما يتبقى من المعادلة هو **الشرط الثاني**:

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x).$$

**الخلاصة:**

من خلال هذا التسلسل المنطقي، نكون قد حصلنا على جملة معادلتين ذات المجهولين $x \mapsto c_1'(x)$ و $x \mapsto c_1'(x)$ (الشرط الأول الذي فرضناه لتبسيط الاشتقاق، والشرط الثاني الذي استنتجناه من التعويض):

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{cases} \tag{11}$$

**تعيين التابعين $c_1$ و $c_2$**

نكتب الجملة (11) على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

ومحدد هذه المصفوفة هو محدد رونسكي:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

وبما أن $y_1$ و $y_2$ مستقلان خطياً، فإن:

$$\forall x \in I,\ W(x) \neq 0.$$

باستخدام طريقة كرامر (Cramer)، نجد:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}.$$

وبعد المكاملة من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s.$$

وعليه، فإن التابع:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s,$$

حل خاص للمعادلة (10) على المجال $I$.

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (10) على $I$، هو:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).$$

**ملاحظة 4.3.3:** لقد قمنا بتفصيل خطوات إيجاد الحل لتوضيح أن الشرطين في الجملة (11) لم يتم اختيارهما عشوائياً. يُمكّننا الشرط الأول من التخلص من الحدود التي تظهر فيها المشتقات من الرتبة الثانية $c_1''$ و $c_2''$. ومن ثم تُرجع المسألة إلى جملة خطية بسيطة

تتعلق بالمشتقات من الرتبة الأولى $c_1'$ و $c_2'$ فقط، مما يسمح بحلها بسهولة عن طريق المكاملة.

لندرس المثال التالي.

**مثال :**

نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية التالية:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x}, \qquad x > 0. \tag{12}$$

إن المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بها، هي:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, \qquad x > 0.$$

نلاحظ أن التابع

$$y_1(x) = x^2$$

حل واضح للمعادلة التفاضلية المتجانسة على $]0, +\infty[$.

باستخدام طريقة تخفيض الرتبة، وباتباع نفس الخطوات التي درسناها في الفقرة السابقة، نحصل على حل ثان $y_2$ للمعادلة التفاضلية ومستقل خطيا مع $y_1$، وهو معرف على $]0, +\infty[$ بـ:

$$y_2(x) = x.$$

وعليه، فإن الثنائية $(y_1, y_2) = (x^2, x)$ تشكل أساسا لمجموعة حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة.

بالفعل، من أجل كل $x \in ]0, +\infty[$، لدينا:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 - 2x \cdot x = -x^2 \neq 0, \ \forall x > 0.$$

وهذا ما يؤكد أن $y_1$ و $y_2$ مستقلان خطيا على $]0, +\infty[$.

وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة على $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = x(c_1 x + c_2),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

لنعين الآن، حلا خاصا للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة باستخدام طريقة تغيير الثوابت. أي نبحث عن حل خاص $y_p$ من الشكل:

$$y_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)x.$$

حيث $x \mapsto c_1(x)$ و $x \mapsto c_2(x)$ تابعان معرفان على $]0, +\infty[$ ويحققان الجملة:

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\dfrac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \\ c_2'(x) = \dfrac{y_1(x)g(x)}{W(x)}. \end{cases}$$

لدينا:

$$c_1'(x) = -\frac{x \cdot \frac{1}{x}}{-x^2} = \frac{1}{x^2}, \qquad c_2'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}}{-x^2} = -\frac{1}{x}.$$

وبمكاملة الطرفين من $x_0$ إلى $x$، نجد:

$$c_1(x) = -\frac{1}{x} + K_1, \qquad c_2(x) = -\ln x + K_2,$$

حيث $K_1$ و $K_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

نختار $K_1 = K_2 = 0$، فيكون لدينا:

$$c_1(x) = -\frac{1}{x}, \qquad c_2(x) = -\ln x.$$

وعليه، فإن حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة على $]0, +\infty[$، هو:

$$y_p(x) = x^2\left(-\frac{1}{x}\right) + x(-\ln x) = -x - x\ln x.$$

وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة على $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x - x\ln x - x$$

أي:

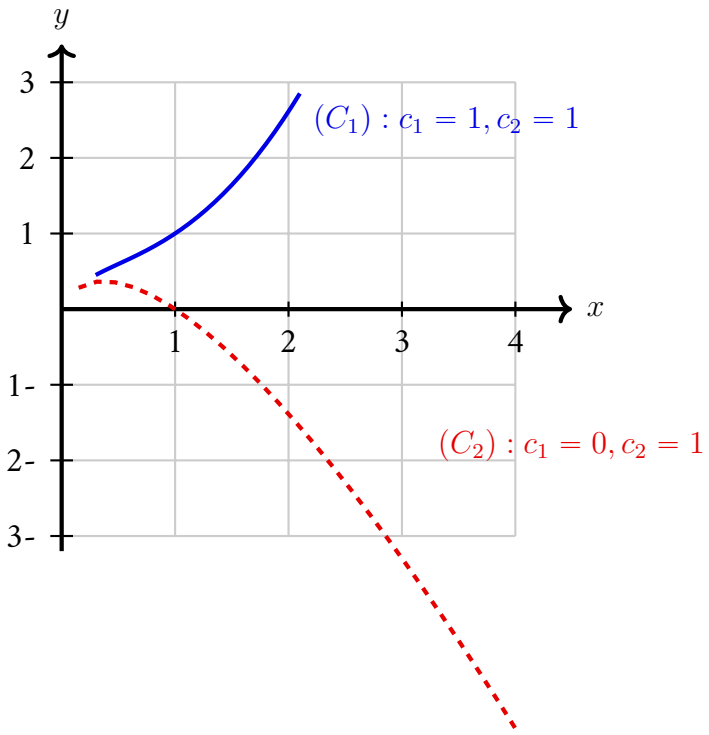
$$y(x) = c_1x^2 + (c_2 - 1)x - x\ln x.$$

**ملاحظة للتبسيط:** بما أن $c_2$ ثابت حقيقي كيفي، فإن المقدار $(c_2 - 1)$ هو أيضاً ثابت كيفي يمكننا

دمجه وإعادة تسميته بـ $c_3$. وبذلك يُكتب الحل العام بأبسط صورة له على النحو التالي:

$$y(x) = c_1x^2 + c_3x - x\ln x,$$

حيث $c_1$ و $c_3$ ثابتان حقيقيان كيفيان.




شكل 2.3: تمثيل بياني لحلين مختلفين للمعادلة التفاضلية (12).

## 3.3 المسائل الحدية

تستخدم المعادلات التفاضلية العادية في نمذجة ظواهر طبيعية وفيزيائية. لكن، المعادلة التفاضلية وحدها لا تكفي لدراسة ظاهرة فيزيائية بطريقة جيدة، وعلينا دراسة مسألة تحوي إضافة إلى المعادلة التفاضلية، معلومات حول التابع المجهول.

سوف نخصص الفقرة التالية لمسائل معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية.

نميز نوعين من المسائل:

- **مسألة كوشي** : تتمثل هذه المسألة في تعيين حل $y$ لمعادلة تفاضلية عادية على مفتوح $(a,b) \subset \mathbb{R}$ أو على $\mathbb{R}$ بأكمله، ويحقق هو ومشتقاته، عددا من الشروط الابتدائية عند $x_0 \in (a,b)$، وهذا على حسب رتبة المعادلة التفاضلية.

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، نضيف شرطاً واحداً.

$$y(x_0) = y_0,$$

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية، نضيف شرطين ابتدائيين:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

بصفة عامة، إذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة $n$، نضيف $n$ شرطاً ابتدائيا من الشكل:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

إنّ مسألة كوشي تحدد الحل انطلاقا من وضعه الابتدائي عند نقطة واحدة.

- **المسائل الحدية** : تتمثل المسألة الحدية في البحث عن حلول معادلة تفاضلية على مجال متراص $[a, b]$ ويحقق شروطا موضوعة على حدود المتراص أي عند النقطتين $a$ و $b$.

هناك ثلاثة أنواع شهيرة من الشروط:

**1. شروط ديريكليه (Conditions Dirichlet ):**

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{13}$$

**2. شروط نيومان ( Conditions Neumann):**

$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta. \tag{14}$$

**3. الشروط المختلطة أو شروط روبين ( Conditions Robin ):** إنّ الشروط المختلطة عبارة عن مزيج بين شروط نيومان وديريكليه، وتُكتب على الشكل:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{15}$$

حيث $\alpha_1$ و $\beta_1$ لا ينعدمان معا وكذلك $\alpha_2$ و $\beta_2$.

نمر الآن إلى دراسة المسائل الحدية، والتي تتمثل في دراسة الوجود، الوحدانية وحساب الحل.

## 1.3.3 دراسة المسائل الحدية

نعتبر المسألة الحدية التالية على المجال $[a,b]$:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \ x \in ]a,b[ \\ \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = c_1, \\ \gamma_b y'(b) + \delta_b y(b) = d_1, \end{cases} \tag{16}$$

حيث $\alpha_a, \beta_a, c_1, \gamma_b, \delta_b, d_1$ ثوابت حقيقية موجبة معطاة.

**ملاحظة 5.3.3:**

- إذا $\alpha_a = \gamma_b = 0$، فإن الشروط الحدية للمسألة هي شروط ديريكليه.
- إذا $\beta_a = \delta_b = 0$، فإن الشروط الحدية للمسألة هي شروط نيومان.
- أما إذا كانت $\alpha_a, \ \beta_a, \ \gamma_b, \ \delta_b > 0$، فإن شروط المسألة الحدية مختلطة.

إن المسألة المتجانسة المرفقة للمسألة الحدية (16)، هي:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \ x \in ]a,b[, \\ \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) = 0, \\ \gamma_b y'(b) + \delta_b y(b) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

**ملاحظة 6.3.3:**

لاحظ في المسألة الحدية المتجانسة، أن الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية معدوم وكذلك الطرف الثاني للشروط الحدية يكون معدوماً.

لنكتب المسألة (16) على شكل مكافئ يسهل علينا دراسة وجود ووحدانية الحل (شكل ستورم-ليوفيل).

لدينا:

$$\left(e^{-A(x)}y'\right)' = a(x)e^{-A(x)}y' + e^{-A(x)}y'' = e^{-A(x)}\left(y'' + a(x)y'\right),$$

حيث $A(x) = -\int_a^x a(s)\ \mathrm{d}s$.

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية للمسألة (16) في المقدار $-e^{-A(x)}$، يمكننا كتابتها على الشكل المكافئ التالي:

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = g(x),\ x \in [a,b], \tag{18}$$

حيث:

$$P(x) = e^{-A(x)} > 0,\ \forall x \in [a,b], \qquad Q(x) = -e^{-A(x)}b(x), \qquad g(x) = -e^{-A(x)}f(x).$$

إنّ المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بها، هي:

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = 0. \tag{19}$$

لإنشاء الشروط الحدية المناسبة للمعادلة التفاضلية (18)، نضرب طرفي المعادلة التفاضلية المتجانسة (19) في التابع $y$ ونكامل على المجال $[a,b]$، فنجد:

$$-\int_a^b y(x)(Py')'(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b Q(x)y^2(x)\ \mathrm{d}x = 0. \tag{20}$$

باستخدام المكاملة بالتجزئة لحساب الحد الأول للمساواة الأخيرة، نجد:

$$\int_a^b y(Py')'\ \mathrm{d}x = [P(x)y'(x)y(x)]_a^b - \int_a^b P(x)(y')^2\ \mathrm{d}x.$$

عندئذ، بتعويضها في العلاقة (20) (مع الانتباه لإشارة الناقص)، تكتب على الشكل:

$$-\left([P(x)y'(x)y(x)]_a^b - \int_a^b P(x)(y')^2\ \mathrm{d}x\right) + \int_a^b Q(x)y^2\ \mathrm{d}x = 0.$$

ومنه، وبترتيب الحدود، نجد العلاقة التالية:

$$\int_a^b P(x)(y')^2\ \mathrm{d}x + \int_a^b Q(x)y^2\ \mathrm{d}x = [P(x)y'(x)y(x)]_a^b = P(b)y'(b)y(b) - P(a)y'(a)y(a).$$

وعليه، فإن الشروط الحدية المرفقة بالمعادلة التفاضلية (19)، تكتب بدلالة:

$$P(a),\ y'(a),\ y(a),\ P(b),\ y'(b),\ y(b).$$

لكن، نذكر أن:

$$P(x) = e^{-A(x)},\ A(x) = \int_a^x a(s)\mathrm{d}s.$$

ومنه:

$$P(a) = e^{-A(a)} = e^0 = 1.$$

وعليه فإن الشروط الحدية الطبيعية التي ترفق المعادلة التفاضلية (19)، تكتب بدلالة:

$$y(a),\ y'(a),\ y(b),\ P(b)y'(b).$$

أي أن شكلها العام، هو:

$$\alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = c,$$

$$\alpha_b y(b) + \beta_b P(b)y'(b) = d.$$

نمر الآن إلى كتابة الشروط الحدية باستخدام الدوال الجيبية، حيث يمكننا دئما التعبير عن أي ثنائية $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\ \{(0,0)\}$ باستخدام الإحداثيات قطبية، وتكون العلاقة على الشكل:

$$(\alpha, \beta) = \rho(\cos\theta, \sin\theta),\ \rho > 0,\ \theta \in [0, \pi).$$

لنطبق هذه النتيجة الأخيرة على الشروط الحدية.

**عند** $x = a$.

لدينا:

$$(\alpha_a, \beta_a) = \rho_a(-\cos\theta_a, \sin\theta_a).$$

ومنه، يكتب الشرط:

$$\alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = c,$$

على الشكل:

$$\rho_a(-y(a)\cos\theta_a + y'(a)\sin\theta_a) = c.$$

بقسمة الطرفين على $\rho_a$ (حيث $c_1 = \frac{c}{\rho_a}$)، نجد:

$$y'(a)\sin\theta_a - y(a)\cos\theta_a = c_1.$$

**عند** $x = b$.

لدينا:

$$(\alpha_b, \beta_b) = \rho_b(-\cos\theta_b, \sin\theta_b).$$

ومنه، يصبح الشرط:

$$\alpha_b y(b) + \beta_b P(b)y'(b) = d,$$

على الشكل:

$$\rho_b(-y(b)\cos\theta_b + P(b)y'(b)\sin\theta_b) = d.$$

ومنه بقسمة الطرفين على $\rho_b$ (حيث $d_1 = \frac{d}{\rho_b}$)، نجد:

$$P(b)y'(b)\sin\theta_b - y(b)\cos\theta_b = d_1.$$

وعليه، نحصل على الصيغة المعممة التالية:

$$\begin{cases} -(P(x)y')' + Q(x)y = g(x), \ x \in ]a,b[, \\ y'(a)\sin\theta_a - y(a)\cos\theta_a = c_1, \\ P(b)y'(b)\sin\theta_b - y(b)\cos\theta_b = d_1, \end{cases} \tag{21}$$

حيث $P$ و $Q$ توابع مستمرة على $[a,b]$ مع $P(x) > 0$ من أجل كل $x \in [a,b]$، و $\theta_a, \theta_b \in [0,\pi)$.

الجدول التالي يوضح العلاقة بين القيم التي تأخذها الزاوية $\theta$ ونوع الشروط الحدية:

| قيمة الزاوية $\theta$ | صيغة الشرط الحدي | نوع الشرط (التسمية) |
|---|---|---|
| $\theta = 0$ | $y(a) = 0$ (أو $y(b) = 0$) | ديريكليه (Dirichlet) |
| $\theta = \frac{\pi}{2}$ | $y'(a) = 0$ (أو $y'(b) = 0$) | نيومان (Neumann) |
| $\theta \in (0,\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$ | $\alpha y + \beta y' = 0$ | مختلطة / روبين (Robin) |

جدول 3.3: العلاقة بين الزاوية $\theta$ ونوع الشروط الحدية في الصيغة المعممة.

## 2.3.3 دراسة وجود ووحدانية حل مسألة حدية

يمكن لمسألة حدية ألا تقبل أي حل، ويمكنها أن تقبل حلاً وحيداً، كما يمكنها أن تقبل عدداً لانهائياً من الحلول. وهذا ما أشرنا إليه سابقاً وسنلاحظه بوضوح من خلال الأمثلة الموالية.

**مثال :**

نعتبر المسألة الحدية لديريكليه التالية:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, & x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \\ y(0) = -2, & y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10. \end{cases} \tag{22}$$

إنّ المعادلة:

$$y'' + 4y = 0,$$

تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية. لتعيين حلها العام، يكفي تعيين حلين مستقلين خطياً لها. وبما أن معاملاتها ثابتة، نرشح التابع $y(x) = e^{rx}$. بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على المعادلة المميزة (الجبرية):

$$r^2 + 4 = 0,$$

وهي تقبل حلين عقديين مترافقين:

$$r_1 = -2i, \quad r_2 = 2i.$$

ومنه، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان نعينهما باستخدام الشروط الحدية للمسألة.

لدينا:

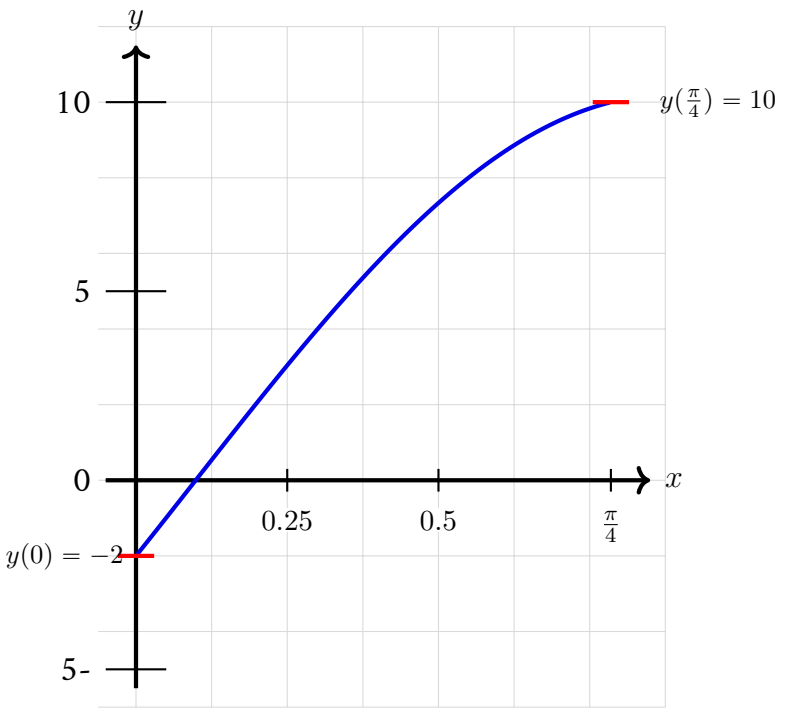
$$y(0) = -2 \implies c_1 = -2,$$

و

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 &\implies c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 \\ &\implies c_2(1) = 10 \\ &\implies c_2 = 10. \end{aligned}$$

وبالتالي، فإن حل المسألة الوحيد على المجال $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ هو:

$$y(x) = -2\cos(2x) + 10\sin(2x).$$




شكل 3.3: التمثيل البياني لحل المسألة الحدية (22).

**مثال :**

نعتبر المسألة الحدية ذات الشروط المختلطة (مسألة روبين) التالية:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos x, & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ y'(0) = 5, & y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3}. \end{cases} \tag{23}$$

إن حلول المسألة (23) هي حلول المعادلة التفاضلية:

$$y'' + 9y = \cos x,$$

التي تحقق الشرطين الحديين $y'(0) = 5$ و $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3}$.

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية في المسألة (23) خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. حلها العام من الشكل:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

حيث $y_h$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المرفقة:

$$y'' + 9y = 0. \tag{24}$$

إنّ المعادلة (24) تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية، معاملاتها ثوابت. لحلها، نرشح التابع $y(x) = e^{rx}$. بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على المعادلة المميزة:

$$r^2 + 9 = 0,$$

وهي تقبل حلين عقديين مترافقين: $r_1 = -3i$ و $r_2 = 3i$.

إذن:

$$y_1(x) = \cos(3x) \quad \text{و} \quad y_2(x) = \sin(3x),$$

هما حلان أساسيان للمعادلة المتجانسة.

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (24) هو:

$$y_h(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

نبحث الآن عن حل خاص $y_p$ للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة باستخدام طريقة تغيير الثوابت.

أي نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = c_1(x)\cos(3x) + c_2(x)\sin(3x).$$

نحسب أولاً محدد رونسكي للحلين الأساسيين:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x) = 3.$$

تُعطى مشتقات التوابع $c_1(x)$ و $c_2(x)$ بالعلاقتين:

$$c_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)} = \frac{-\sin(3x)\cos x}{3},$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} = \frac{\cos(3x)\cos x}{3}.$$

لإيجاد $c_1(x)$ و $c_2(x)$، نستخدم دساتير التحويل المثلثية:

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \implies \sin(3x)\cos x = \frac{1}{2}[\sin(4x)+\sin(2x)],$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \implies \cos(3x)\cos x = \frac{1}{2}[\cos(4x)+\cos(2x)].$$

إذن، نكامل $c_1'(x)$، فنجد:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -\frac{1}{6}[\sin(4x)+\sin(2x)]\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)\right] \\ &= \frac{1}{24}\cos(4x)+\frac{1}{12}\cos(2x). \end{aligned}$$

ونكامل $c_2'(x)$، فنجد:

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{1}{6}[\cos(4x)+\cos(2x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{2}\sin(2x)\right] \\ &= \frac{1}{24}\sin(4x)+\frac{1}{12}\sin(2x). \end{aligned}$$

نعوض الآن في عبارة الحل الخاص $y_p(x)$:

$$y_p(x) = \left[\frac{1}{24}\cos(4x)+\frac{1}{12}\cos(2x)\right]\cos(3x)+\left[\frac{1}{24}\sin(4x)+\frac{1}{12}\sin(2x)\right]\sin(3x).$$

بالنشر وتجميع الحدود المتشابهة، وباستخدام الدستور

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b,$$

يكون لدينا:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{24}[\cos(4x)\cos(3x) + \sin(4x)\sin(3x)] + \frac{1}{12}[\cos(2x)\cos(3x) + \sin(2x)\sin(3x)] \\ &= \frac{1}{24}\cos(4x - 3x) + \frac{1}{12}\cos(3x - 2x) \\ &= \frac{1}{24}\cos x + \frac{1}{12}\cos(-x) \\ &= \left(\frac{1}{24} + \frac{2}{24}\right)\cos x = \frac{3}{24}\cos x = \frac{1}{8}\cos x. \end{aligned}$$

وعليه، فإن حل خاص للمعادلة غير المتجانسة، هو:

$$y_p(x) = \frac{1}{8}\cos x.$$

وبالتالي، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة هو:

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{1}{8}\cos x,$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان نعينهما الآن باستخدام الشروط الحدية.
لدينا:

$$y'(x) = -3c_1\sin(3x) + 3c_2\cos(3x) - \frac{1}{8}\sin x.$$

من الشرط الحدي الأول للمسألة، نستنتج:

$$y'(0) = 5 \implies 3c_2 = 5 \implies c_2 = \frac{5}{3}.$$

ومن الشرط الحدي الثاني، نجد:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3} \implies c_1\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3}.$$

بما أن $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$، فإن المعادلة تصبح:

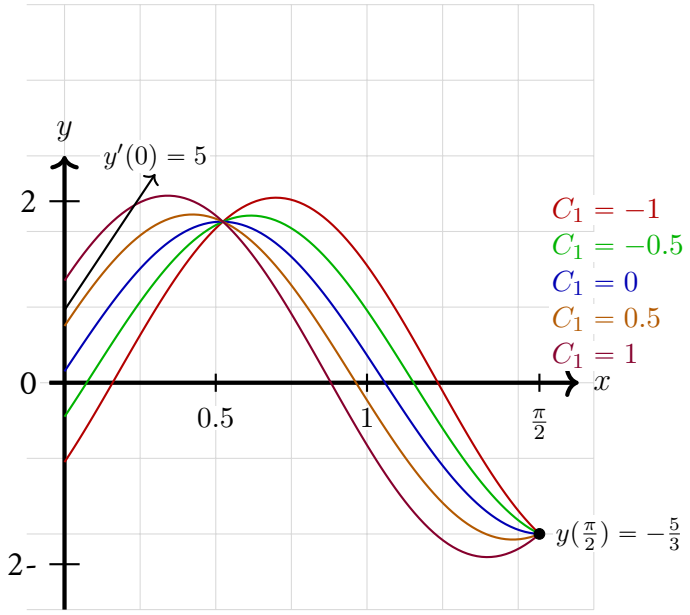
$$-c_2 = -\frac{5}{3} \implies c_2 = \frac{5}{3}.$$

نلاحظ أن الشرطين الحديين يعطيان نفس القيمة للثابت $c_2$، في حين يبقى الثابت $c_1$ حراً (يمكنه أخذ أي قيمة حقيقية).

وبالتالي، فإن المسألة الحدية (23) تقبل عدداً غير منتهٍ من الحلول على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$، وتكون من الشكل:

$$y(x) = c_1 \cos(3x) + \frac{5}{3}\sin(3x) + \frac{1}{8}\cos x,$$

حيث $c_1$ ثابت حقيقي كيفي.




شكل 4.3: التمثيل البياني لبعض حلول المعادلة التفاضلية (23)

**مثال :**

نعتبر المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, & x \in ]0, 2\pi[, \\ y(0) = -2, & y(2\pi) = 3. \end{cases} \tag{25}$$

يمكن إثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 4y = 0,$$

هو:

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

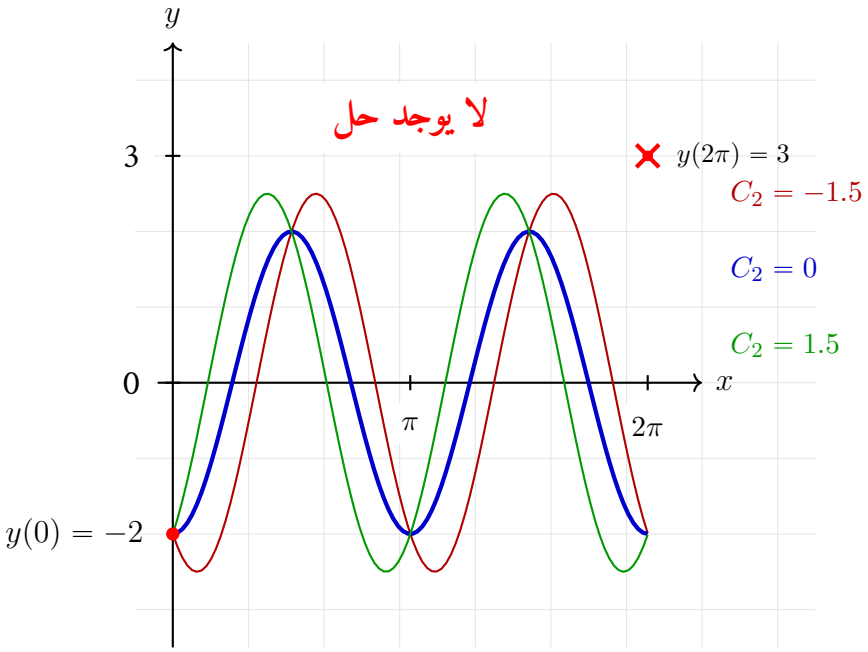
باستخدام الشروط الحدية المرفقة بالمسألة، نجد:

$$y(0) = -2 \implies c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = -2 \implies c_1 = -2,$$

و

$$y(2\pi) = 3 \implies c_1 \cos(4\pi) + c_2 \sin(4\pi) = 3 \implies c_1(1) + c_2(0) = 3 \implies c_1 = 3.$$

نلاحظ أن الشروط الحدية للمسألة تعطي قيمتين مختلفتين لنفس الثابت $c_1$ ($c_1 = -2$ و $c_1 = 3$ في آن واحد)، وهذا يعني استحالة تحقق الشرطين معاً. وبالتالي، فإن المسألة الحدية (25) لا تقبل أي حل.




شكل 5.3: التمثيل البياني لبعض حلول المعادلة التفاضلية (25) التي تحقق الشرط الحدي الأول فقط.

نقدم فيما يلي شروطاً كافية لوجود ووحدانية حل مسألة حدية.
لدينا المبرهنة التالية:

**مبرهنة 1.3.3 :**

نعتبر المسألة الحدية غير المتجانسة التالية:

$$(26)\qquad \begin{cases} -(P(x)y')' + Q(x)y = g(x), \quad x \in ]a,b[, \\ y'(a)\sin\theta_a - y(a)\cos\theta_a = \gamma_a, \\ P(b)y'(b)\sin\theta_b - y(b)\cos\theta_b = \gamma_b, \end{cases}$$

حيث:

$$P \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ \forall x \in [a,b],\ P(x) > 0, \quad Q \in \mathcal{C}([a,b]),$$

و $\gamma_a$ و $\gamma_b$ ثوابت حقيقية.

إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

(أ) من أجل كل تابع $g \in \mathcal{C}([a,b])$ وأياً كانت الثوابت $\gamma_a$ و $\gamma_b$، فإن المسألة الحدية (21) تقبل حلاً وحيداً.

(ب) المسألة الحدية المتجانسة المرفقة بها (المتجانسة في المعادلة والشروط):

$$(27)\qquad \begin{cases} -(P(x)y')' + Q(x)y = 0, \quad x \in ]a,b[, \\ y'(a)\sin\theta_a - y(a)\cos\theta_a = 0, \\ P(b)y'(b)\sin\theta_b - y(b)\cos\theta_b = 0, \end{cases}$$

تقبل التابع المعدوم $y \equiv 0$ حلاً وحيداً لها.

النتيجة التي تقدمها لنا المبرهنة، هي أن المسألة الحدية غير المتجانسة كلياً (26) تقبل حلاً وحيداً إذا وفقط إذا كانت المسألة المتجانسة المرفقة بها (27) تقبل التابع المعدوم $y \equiv 0$ حلاً وحيداً.

**السؤال المطروح الآن:** متى تقبل المسألة الحدية المتجانسة (27) التابع المعدوم $y \equiv 0$ حلاً وحيداً لها؟ للإجابة على ذلك، نميز حالتين.

**الحالة 1. الشروط الحدية لديريكليه.**

نفرض أن:

$$\theta_a = \theta_b = 0,$$

أي أن الشروط الحدية المتجانسة تصبح:

$$y(a) = y(b) = 0.$$

في هذه الحالة نستخدم مبدأ الذروة لإثبات وجود ووحدانية حل المسألة المتجانسة (27). نقدم هذا المبدأ في المبرهنة التالية:

**مبرهنة 2.3.3 (مبدأ الذروة) :**

إذا كان $\theta_a = \theta_b = 0$ (أي الشروط لديريكليه)، وإذا كان:

$$\forall x \in ]a,b[, \quad Q(x) > 0,$$

فإن المسألة المتجانسة (27) تقبل التابع المعدوم $y \equiv 0$ حلاً وحيداً لها.

لندرس المثال الموالي.

**مثال :**

نعتبر المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} -(e^{2x}y')' + (e^{-x}\sin x)y = \cos x, & x \in ]0,\pi[, \\ y(0) = 2, \quad y(\pi) = 1. \end{cases} \tag{28}$$

إن المسألة (28) هي مسألة حدية لديريكليه غير متجانسة، وهي تقبل حلاً وحيداً إذا وفقط إذا كان الحل الوحيد للمسألة المتجانسة المرفقة بها:

$$\begin{cases} -(e^{2x}y')' + (e^{-x}\sin x)y = 0, & x \in ]0,\pi[, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

هو التابع المعدوم $y \equiv 0$.

ولذلك، وبما أن الأمر يتعلق بمسألة ديريكليه، نتأكد من تحقق شروط مبدأ الذروة.

نلاحظ أن:

$$Q(x) = e^{-x}\sin x > 0, \quad \forall x \in ]0,\pi[.$$

ولذلك، وحسب مبدأ الذروة، فإن الحل الوحيد للمسألة المتجانسة (29) هو التابع المعدوم $y \equiv 0$.

ومنه، فإن مسألة ديريكليه غير المتجانسة (28) تقبل حلاً وحيداً على المجال $[0,\pi]$.

**الحالة 2. الشروط الحدية المختلطة.**

نفترض أن:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_b < \pi, \qquad 0 \leqslant \theta_a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

أي أن الشروط الحدية من نوع نيومان أو روبين. في هذه الحالة، نستعمل مبدأ "تكامل الطاقة" (مبدأ الطاقة).

**مبرهنة 3.3.3 (مبدأ تكامل الطاقة) :**

نفرض أن:

$$\forall x \in [a,b], \quad Q(x) \geqslant 0,$$

ونفرض أن الشروط الحدية مختلطة، أي:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_b < \pi, \qquad 0 \leqslant \theta_a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

عندئذ، المسألة الحدية المتجانسة (27) تقبل التابع المعدوم $y \equiv 0$ حلاً وحيداً لها، إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

(أ) يوجد نقطة $c \in [a,b]$ بحيث:

$$Q(c) > 0.$$

(ب) $\theta_a = 0$. يعني هذا الشرط أن الشرط الحدي الأول عند النقطة $a$ هو شرط ديريكليه (أي $y(a) = 0$).

## 3.3.3 مسألة شتورم-ليوفيل (Sturm-Liouville)

تمثل مسألة شتورم-ليوفيل مسألة حدية تتعلق بوسيط حقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$.

شكلها العام هو الآتي:

$$\begin{cases} -(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda y, & x \in ]a,b[, \\ y'(a)\sin\theta_a - y(a)\cos\theta_a = 0, \\ P(b)y'(b)\sin\theta_b - y(b)\cos\theta_b = 0, \end{cases} \tag{30}$$

حيث $P$ و $Q$ تابعان مستمران على $[a,b]$ مع $P(x)>0$ من أجل كل $x\in[a,b]$، و $\theta_a,\theta_b\in[0,\pi[$.

تتمثل دراسة مسألة شتورم-ليوفيل في تعيين العناصر الذاتية لها (القيم الذاتية والتوابع الذاتية المرفقة بها).

لدينا التعريف التالي:

**تعريف 1.3.3 :**

نقول عن $\lambda\in\mathbb{R}$ إنها قيمة ذاتية للمسألة (30) إذا قبلت المسألة الحدية من أجلها حلاً غير تافه (غير مطابق للتابع المعدوم).
في هذه الحالة، تسمى $\lambda$ قيمة ذاتية، ويسمى الحل غير المعدوم الذي وجدناه (بعد تعويض $\lambda$ في المعادلة) بالتابع الذاتي المرفق بالقيمة $\lambda$.

لتوضيح هذا التعريف وكيفية حساب القيم والتوابع الذاتية عملياً، نستعرض المثال المفصل التالي:

**مثال :**

نعتبر المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in]0,1[,\\ y(0)=0,\\ y(1)+y'(1)=0. \end{cases} \tag{31}$$

إن المسألة (31) هي مسألة حدية متجانسة مختلطة.

إنّ المعادلة التفاضلية:

$$y''+\lambda y=0,$$

هي معادلة خطية متجانسة من الرتبة الثانية، ويمكن كتابتها على شكل شتورم-ليوفيل:

$$-(1\cdot y')'=\lambda y \implies -(y')'=\lambda y.$$

لحلها، نكتب المعادلة المميزة المرفقة:

$$r^2+\lambda=0. \tag{32}$$

نميز ثلاث حالات:

**الحالة 1:** $\lambda < 0$.
نضع $\lambda = -\alpha^2$ مع $\alpha > 0$. المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين $r = \pm\alpha$.
ومنه، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x).$$

من الشرط الحدي الأول $y(0) = 0$، نستنتج أن $c_1 = 0$.
إذن،

$$y(x) = c_2 \sinh(\alpha x).$$

باشتقاق عبارة $y$، نجد:

$$y'(x) = c_2 \alpha \cosh(\alpha x).$$

من الشرط الحدي الثاني $y(1) + y'(1) = 0$، نجد:

$$c_2\big(\sinh(\alpha) + \alpha \cosh(\alpha)\big) = 0.$$

بما أن $\alpha > 0$، فإن $\sinh(\alpha) > 0$ و $\cosh(\alpha) > 0$.

وعليه، المقدار بين قوسين موجب تماماً ولا يمكن أن ينعدم. ينتج عن ذلك بالضرورة أن $c_2 = 0$.

وبالتالي الحل هو التابع المعدوم $y \equiv 0$. وهذا يعني أنه لا توجد قيم ذاتية سالبة للمسألة.

**الحالة 2:** $\lambda = 0$.
في هذه الحالة، المعادلة الجبرية (32) تقبل حلاً مضاعفاً $r = 0$. وعليه، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 x.$$

نعين الثوابت باستخدام الشروط الحدية:

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0,$$

و

$$y(1) + y'(1) = 0 \implies c_2(1) + c_2 = 0 \implies 2c_2 = 0 \implies c_2 = 0.$$

ومن ثم فإن $y \equiv 0$. ومنه، $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة.

**الحالة 3:** $\lambda > 0$.
نضع $\lambda = \alpha^2$ مع $\alpha > 0$.

بالتعويض في المعادلة المميزة، نحصل على:

$$r^2 + \alpha^2 = 0 \implies r = \pm i\alpha.$$

ومنه، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x).$$

بتطبيق الشرط الحدي الأول، نجد:

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0.$$

إذن الحل يصبح من الشكل

$$y(x) = c_2 \sin(\alpha x).$$

وبالاشتقاق، يكون لدينا:

$$y'(x) = c_2\alpha \cos(\alpha x).$$

بتطبيق الشرط الحدي الثاني $y(1) + y'(1) = 0$، نجد:

$$c_2 \sin(\alpha) + c_2\alpha \cos(\alpha) = 0 \implies c_2\big(\sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)\big) = 0.$$

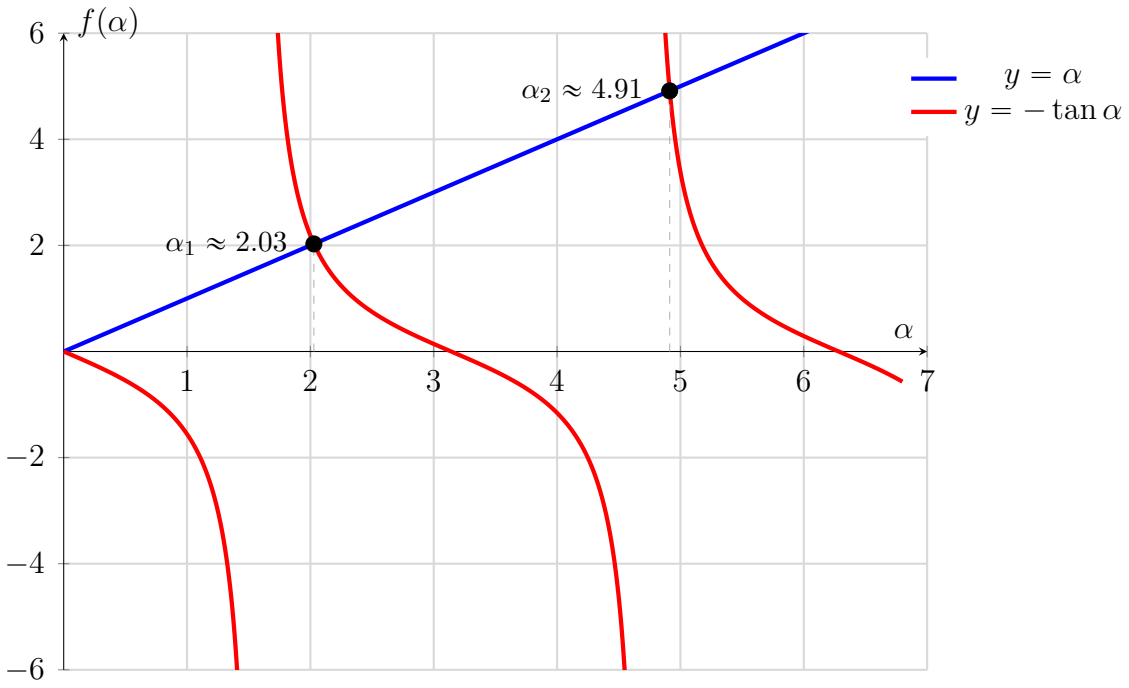
للحصول على حل غير تافه، يجب أن يكون $c_2 \neq 0$، مما يقتضي:

$$\sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha) = 0.$$

بما أن $\cos(\alpha)$ لا يمكن أن ينعدم (وإلا انعدم $\sin(\alpha)$ في نفس الوقت وهذا مستحيل رياضياً حيث أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ )، يمكننا القسمة على $\cos(\alpha)$:

$$\tan(\alpha) + \alpha = 0 \implies \alpha = -\tan(\alpha).$$

وبالتالي، القيم الذاتية للمسألة الحدية (31) هي $\lambda_n = \alpha_n^2$، حيث $\alpha_n$ هي الحلول الموجبة للمعادلة المثلثية $x = -\tan x$.




شكل 6.3: التمثيل البياني لأول حلين موجبين للمعادلة $x = -\tan x$.

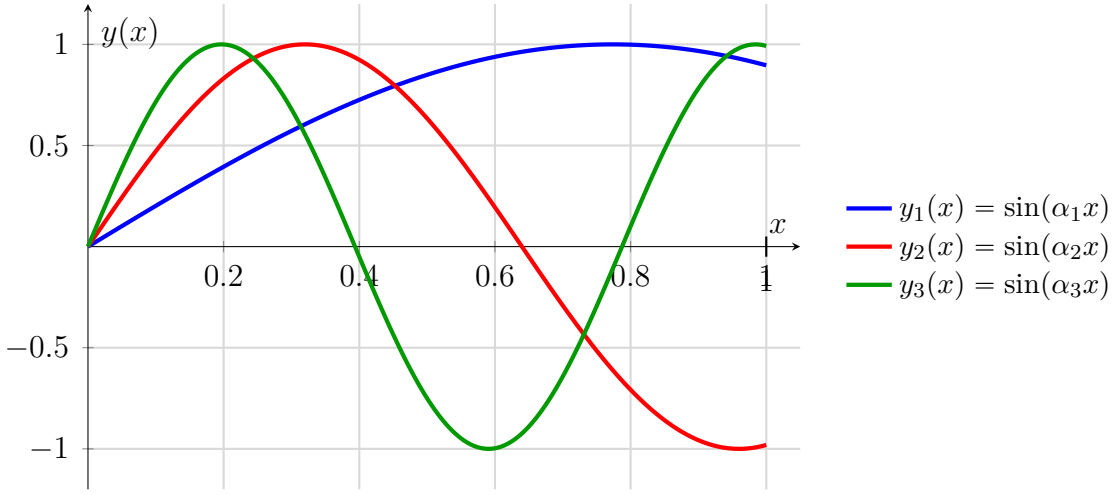
والتوابع الذاتية المرفقة بها هي:

$$y_n(x) = c_n \sin(\alpha_n x),$$

حيث $c_n$ ثابت حقيقي كيفي غير معدوم.

أدناه، تمثيل بياني للتابع الذاتي $y(x) = \sin(\alpha x)$ على المجال $[0, 1]$، من أجل القيم التقريبية:

$$\alpha_1 \approx 2.03, \quad \alpha_2 \approx 4.91, \quad \alpha_3 \approx 7.98.$$




شكل 7.3: تمثيل بياني لبعض التوابع الذاتية للمسألة (31)

لدينا المبرهنة التالية:

**مبرهنة 4.3.3 :**

نعتبر مسألة شتورم-ليوفيل:

$$\begin{cases} -(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda y, & x \in ]a,b[, \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

حيث $P$ و $Q$ تابعان مستمران على $[a,b]$، مع $P(x) > 0$ من أجل كل $x \in [a,b]$، و $\alpha_1$، $\beta_1$، $\alpha_2$ و $\beta_2$ ثوابت حقيقية (حيث $\alpha_1, \beta_1$ ليسا معدومين معاً، وكذا $\alpha_2, \beta_2$).

إن القيم الذاتية للمسألة (33) حقيقية (ليست عقدية صرفة)، والتوابع الذاتية المرفقة بها متعامدة مثنى مثنى.

**إثبات المبرهنة:**

**1. إثبات أن القيم الذاتية للمسألة (33) حقيقية.**

نضع:

$$L(y) = -(P(x)y')' + Q(x)y,$$

وهو مؤثر تفاضلي.

لتكن $\lambda$ قيمة ذاتية للمسألة (33) و $y$ تابعاً ذاتياً مرفقاً بها. أي أن:

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = \lambda y.$$

بأخذ المرافق العقدي للطرفين، وبما أن المتغير $x$ حقيقي (مما يسمح بتبديل المرافق العقدي مع المشتقة)، نجد:

$$-\left(\overline{P(x)}\,\overline{y'}\right)' + \overline{Q(x)}\,\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y}.$$

وباستخدام خواص المرافق العقدي للجداء، تُكتب المعادلة على الشكل:

$$-\left(\overline{P(x)}\,\bar{y}'\right)' + \overline{Q(x)}\,\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y}.$$

بما أن التابعين $P$ و $Q$ يأخذان قيماً حقيقية، فإن مرافقهما يساوي التابعين نفسيهما، أي $\overline{P(x)} = P(x)$ و $\overline{Q(x)} = Q(x)$. بتعويض ذلك في المعادلة، نحصل على:

$$-(P(x)\bar{y}')' + Q(x)\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y}.$$

وهذا يعني بالضبط أن:

$$L(\bar{y}) = \bar{\lambda}\bar{y}.$$

لدينا:

$$\bar{y}L(y) - yL(\bar{y}) = (\lambda - \bar{\lambda})y\bar{y}.$$

بمكاملة الطرفين من $a$ إلى $b$، نجد:

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b y\bar{y}\ \mathrm{d}x = \int_a^b (\bar{y}L(y) - yL(\bar{y}))\ \mathrm{d}x. \tag{34}$$

**ملاحظة 7.3.3:**

نذكر بما يلي: ليكن التابع $y : [a,b] \to \mathbb{C}$. من أجل كل $x \in [a,b]$، لدينا:

$$y(x)\bar{y}(x) = |y(x)|^2.$$

وعليه،

$$\int_a^b y(x)\bar{y}(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b |y(x)|^2\ \mathrm{d}x.$$

لنحسب الطرف الأيمن من العلاقة (34):

$$I = \int_a^b (\bar{y}L(y) - yL(\bar{y}))\ \mathrm{d}x.$$

لدينا:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \bar{y}\left[-(P(x)y')' + Q(x)y\right]\ \mathrm{d}x - \int_a^b y\left[-(P(x)\bar{y}')' + Q(x)\bar{y}\right]\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b (P(x)y')'\bar{y}\ \mathrm{d}x + \int_a^b (P(x)\bar{y}')'y\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\int_a^b (Py')'\bar{y}\ \mathrm{d}x = [P\bar{y}y']_a^b - \int_a^b Py'\bar{y}'\ \mathrm{d}x,$$

و

$$\int_a^b y(P\bar{y}')'\ \mathrm{d}x = [Py\bar{y}']_a^b - \int_a^b Py'\bar{y}'\ \mathrm{d}x.$$

بطرح المعادلتين، تختزل التكاملات المتبقية ونحصل على:

$$I = \left[P(x)(y\bar{y}' - \bar{y}y')\right]_a^b.$$

**تطبيق الشروط الحدية:**

بما أن الثابتين $\alpha_1$ و $\beta_1$ حقيقيان، فإن الشرط الحدي عند النقطة $a$، مع مرافقه العقدي، يعطياننا جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} y(a)\alpha_1 + y'(a)\beta_1 = 0, \\ \bar{y}(a)\alpha_1 + \bar{y}'(a)\beta_1 = 0. \end{cases} \tag{35}$$

يمكننا كتابة هذه الجملة على شكل مصفوفي، حيث نعتبر الثابتين $\alpha_1$ و $\beta_1$ هما المجهولين:

$$\begin{pmatrix} y(a) & y'(a) \\ \bar{y}(a) & \bar{y}'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من شروط مسألة شتورم-ليوفيل، نعلم أن الثابتين $\alpha_1$ و $\beta_1$ ليسا معدومين معاً (أي $|\alpha_1|+|\beta_1| \neq 0$). هذا يعني أن الجملة الخطية المتجانسة تقبل حلاً غير تافه.

حسب مبرهنات الجبر الخطي، لكي تقبل جملة خطية متجانسة حلاً غير تافه، يجب أن يكون محددها معدوما. أي:

$$\det = \begin{vmatrix} y(a) & y'(a) \\ \bar{y}(a) & \bar{y}'(a) \end{vmatrix} = 0$$

ومنه،

$$y(a)\bar{y}'(a) - \bar{y}(a)y'(a) = 0.$$

وبنفس الطريقة تماماً عند النقطة $b$ (باعتبار أن $\alpha_2$ و $\beta_2$ ليسا معدومين معاً)، نجد:

$$y(b)\bar{y}'(b) - \bar{y}(b)y'(b) = 0.$$

وبالعودة إلى عبارة $I$، نجد:

$$I = [P(x)(y\bar{y}' - \bar{y}y')]_a^b = P(b)\underbrace{(y(b)\bar{y}'(b) - \bar{y}(b)y'(b))}_{=0} - P(a)\underbrace{(y(a)\bar{y}'(a) - \bar{y}(a)y'(a))}_{=0}$$

وعليه، فإن $I = 0$. وتصبح العلاقة (34):

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |y(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

بما أن $y$ تابع ذاتي (وبالتالي فهو غير معدوم)، فإن التكامل موجب تماماً:

$$\int_a^b |y(x)|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

وبالتالي، يتحتم أن يكون $\lambda - \bar{\lambda} = 0$، مما يعني أن $\lambda = \bar{\lambda}$. إذن، القيمة الذاتية $\lambda$ حقيقية ($\lambda \in \mathbb{R}$).

**2. إثبات أن التوابع الذاتية متعامدة مثنى مثنى.**

ليكن $y_n$ و $y_m$ تابعين ذاتيين مرفقين بالقيمتين الذاتيتين $\lambda_n$ و $\lambda_m$ على التوالي، حيث $\lambda_n \neq \lambda_m$. بمعنى:

$$L(y_n) = \lambda_n y_n, \tag{36}$$

$$L(y_m) = \lambda_m y_m. \tag{37}$$

بضرب المعادلة (36) في $y_m$ والمعادلة (37) في $y_n$ وبطرح المعادلة الثانية من الأولى، نجد:

$$y_m L(y_n) - y_n L(y_m) = (\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m.$$

بمكاملة الطرفين من $a$ إلى $b$ واستخدام نفس خطوات المكاملة بالتجزئة التي قمنا بها في الجزء الأول، نحصل على متطابقة لاغرانج identity Lagrange's التكاملية:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n y_m \, \mathrm{d}x = [P(x)(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b . \tag{38}$$

**تطبيق الشروط الحدية:**

بما أن التابعين $y_n$ و $y_m$ هما حلان لمسألة شتورم-ليوفيل، فإنهما يحققان نفس الشروط الحدية. عند النقطة $a$.

أي:

$$\begin{cases} y_n(a)\alpha_1 + y'_n(a)\beta_1 = 0, \\ y_m(a)\alpha_1 + y'_m(a)\beta_1 = 0. \end{cases}$$

باعتبار $\alpha_1$ و $\beta_1$ هما المجهولين، وبما أنهما ليسا معدومين معاً حسب الفرض، فإن هذه الجملة الخطية المتجانسة تقبل حلاً غير تافه.

وبالتالي،

$$\begin{vmatrix} y_n(a) & y'_n(a) \\ y_m(a) & y'_m(a) \end{vmatrix} = y_n(a)y'_m(a) - y_m(a)y'_n(a) = 0.$$

وبتطبيق نفس الخطوات عند النقطة $b$ (بواسطة الثابتين $\alpha_2$ و $\beta_2$)، نجد:

$$y_n(b)y'_m(b) - y_m(b)y'_n(b) = 0.$$

بالتعويض في الطرف الأيمن من العلاقة (38)، نجد أن:

$$[P(x)(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b = 0.$$

وعليه، تصبح المعادلة:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b y_n(x)y_m(x) \, \mathrm{d}x = 0. \tag{39}$$

لكننا فرضنا أن القيمتين الذاتيتين مختلفتان $(\lambda_n \neq \lambda_m)$، مما يعني أن $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$. فبقسمة طرفي (39) على $\lambda_n - \lambda_m$، نحصل على:

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

وبالتالي، التوابع الذاتية المرفقة بقيم ذاتية مختلفة هي توابع متعامدة مثنى مثنى بالنسبة للجداء السلمي

في الفضاء $L^2(]a,b[)$.

لدينا النتيجة التالية:

**نتيجة 1.3.3 :**

تقبل مسألة شتورم-ليوفيل متتالية من القيم الذاتية المحدودة من الأسفل والمتزايدة $(\lambda_k)_{k=1,2,\ldots,n}$.

أي:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

و $\lim_{k\to+\infty} \lambda_= + \infty$.

## 4.3 تمارين محلولة

**تمرين 1.3.3 :**

1. احسب حل المسألة التالية:

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 3 = 0; & x > 0, \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = \dfrac{3}{2}. \end{cases} \tag{40}$$

**حل التمرين 1.3 :**

نضع $v(x) = y'(x)$.

بالتعويض في (40)، نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$x^2v' + 3xv - 3 = 0. \tag{41}$$

إنّ المعادلة (41) تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وغير متجانسة. لحلها، يمكن استخدام طريقة المعامل التكاملي.

نكتبها أولاً على الشكل:

$$v' + \frac{3}{x}v = \frac{3}{x^2}. \tag{42}$$

نضع:

$$\mu(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{3}{s}\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(3\int_1^x \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(3\ln(x)\right).$$

**ملاحظة:** بما أن $x > 0$ فإن $\ln(x)$ معرف جيداً.

ومنه،

$$\mu(x) = x^3.$$

بضرب طرفي (42) في $\mu$، نجد:

$$(x^3v(x))' = 3x. \tag{43}$$

بمكاملة طرفي (43) من 1 إلى $x$، نجد:

$$\int_1^x (s^3 v(s))' \, \mathrm{d}s = 3 \int_1^x s \, \mathrm{d}s.$$

ومنه،

$$\left[s^3 v(s)\right]_1^x = 3 \left[\frac{s^2}{2}\right]_1^x \implies x^3 v(x) - v(1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}.$$

بما أن $v(1) = y'(1) = \frac{3}{2}$، بالتعويض نجد:

$$x^3 v(x) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \implies x^3 v(x) = \frac{3}{2}x^2 \implies v(x) = \frac{3}{2x}.$$

ومنه، بما أن $v(x) = y'(x)$، يأتي:

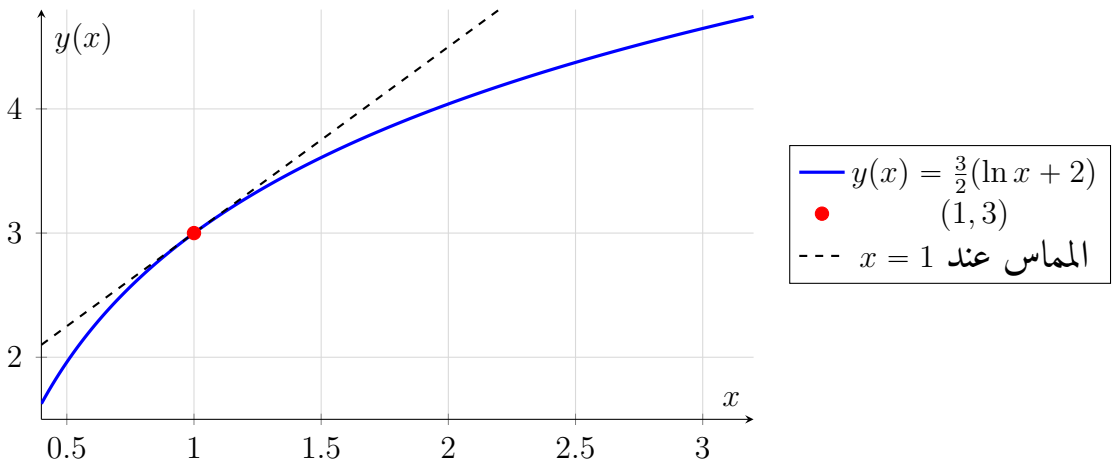
$$\int_1^x y'(s) \, \mathrm{d}s = \int_1^x v(s) \, \mathrm{d}s = \int_1^x \frac{3}{2s} \, \mathrm{d}s.$$

وعليه:

$$y(x) - y(1) = \frac{3}{2}\ln(x) \implies y(x) = 3 + \frac{3}{2}\ln(x).$$

إذن فإن حل المسألة (40) على $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = \frac{3}{2}(\ln(x) + 2).$$




شكل 8.3: التمثيل البياني لحل المسألة الحدية (40).

فيما يلي، مخطط يلخص المراحل المتبعة لحل المسألة (40)

**تمرين 2.3.3 :**

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2y'' + 8xy' + 12y = 0, \quad x \in ]0, +\infty[, \tag{44}$$

علماً أن $y_1(x) = \frac{1}{x^3}$ حل للمعادلة (44)، احسب حلاً ثانياً $y_2$ مستقل خطياً عن $y_1$، باستخدام طريقة خفض الرتبة.

**حل التمرين 2.3 :**

إن المعادلة:

$$x^2y'' + 8xy' + 12y = 0, \quad x \in ]0, +\infty[,$$

تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ومتجانسة، معاملاتها قوى لـ $x$. فهي معادلة أولر-كوشي.

نعلم أن $y_1(x) = \frac{1}{x^3}$ حل للمعادلة. لنبحث عن حل ثان $y_2$ مستقل خطياً عن $y_1$ باستخدام طريقة خفض الرتبة. هذا يعود إلى البحث عن $y_2$ من الشكل:

$$y_2(x) = C(x)y_1(x).$$

من أجل $x \in ]0, +\infty[$، لدينا:

$$y_2'(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x).$$

و

$$y_2''(x) = C''(x)y_1(x) + 2C'(x)y_1'(x) + C(x)y_1''(x).$$

بالتعويض في المعادلة، نجد:

$$x^2[C''(x)y_1(x) + 2C'(x)y_1'(x) + C(x)y_1''(x)]$$

$$+8x[C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x)] + 12[C(x)y_1(x)] = 0.$$

بما أن $y_1$ حل للمعادلة، فإن الحدود المضروبة في $C(x)$ تنعدم، ويتبقى لدينا:

$$-C'(x)[2x^2y_1'(x) + 8xy_1(x)] = x^2y_1(x)C''(x).$$

ومنه:

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -\frac{2x^2y_1'(x) + 8xy_1(x)}{x^2y_1(x)}.$$

أي أن:

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -\frac{8}{x} - 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}.$$

بمكاملة الطرفين، نجد:

$$\ln|C'(x)| = -8\ln(x) - 2\ln|y_1(x)|.$$

بإدخال التابع الأسي على الطرفين، واستخدام خواص اللوغاريتم، نجد:

$$C'(x) = x^{-8}y_1^{-2}(x).$$

بما أن $y_1(x) = x^{-3}$، فإن $y_1^{-2}(x) = x^6$. بالتعويض نجد:

$$C'(x) = x^{-8}x^6 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

بمكاملة $C'(x)$، نجد:

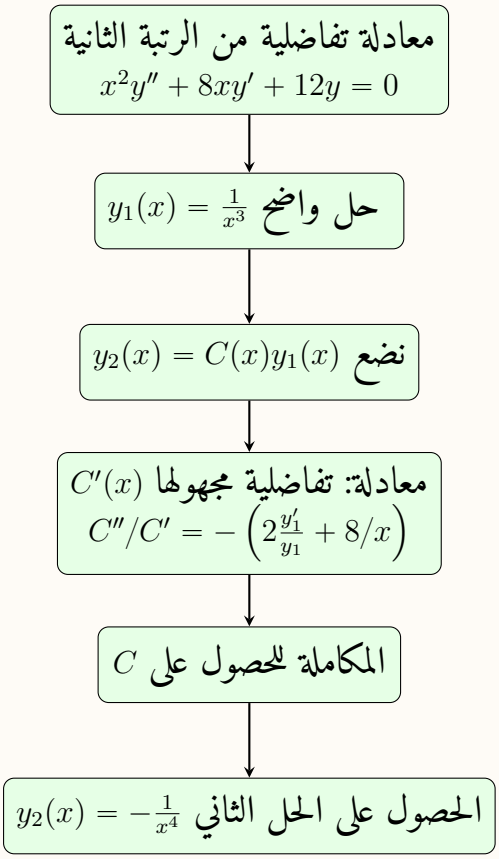
$$C(x) = -\frac{1}{x}.$$

وبالتالي:

$$y_2(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{x^4}.$$

وهو المطلوب.

فيما يلي، نقدم مخططاً يلخص أهم المراحل المتبعة لحل التمرين.



### تمرين 3.3.3 :

ادرس المسألة التالية:

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0, & x \in ]1, e[; \\ y(1) = 0, \quad y(e) = 0. \end{cases} \tag{45}$$

### حل التمرين 3.3 :

المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة أولر-كوشي. لحلها، نرشح التابع:

$$y(x) = x^r$$

حيث $r$ ثابت يُطلب تعيينه.
بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نحصل على المعادلة المميزة (الجبرية):

$$r(r-1) + 3r + \lambda = 0 \implies r^2 + 2r + \lambda = 0.$$

مميز هذه المعادلة هو:

$$\Delta = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda).$$

وبالتالي، دراسة المسألة تتطلب التمييز بين ثلاث حالات حسب إشارة $\Delta$:

**الحالة 1:** $\lambda < 1$ **(أي** $\Delta > 0$**)**
نضع $1 - \lambda = \alpha^2$ مع $\alpha > 0$. المعادلة الجبرية تقبل حلين حقيقيين متمايزين:

$$r_1 = -1 - \alpha, \quad r_2 = -1 + \alpha.$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_1 x^{-1-\alpha} + c_2 x^{-1+\alpha}.$$

باستخدام الشروط الحدية:

$$y(1) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \implies c_2 = -c_1.$$

$$y(e) = 0 \implies c_1 e^{-1-\alpha} + c_2 e^{-1+\alpha} = 0 \implies c_1(e^{-1-\alpha} - e^{-1+\alpha}) = 0.$$

بما أن $\alpha > 0$ فإن $e^{-1-\alpha} \neq e^{-1+\alpha}$، مما يقتضي أن $c_1 = 0$، ومنه $c_2 = 0$. إذن $y \equiv 0$. وبالتالي

لا توجد قيم ذاتية في المجال $\lambda < 1$.

**الحالة 2:** $\lambda = 1$ **(أي** $\Delta = 0$**)**

في هذه الحالة، المعادلة الجبرية تقبل حلاً مضاعفاً $r_0 = -1$. نحصل على حلين مستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية: $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ و $y_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = \frac{1}{x}(c_1 + c_2 \ln(x)).$$

باستخدام الشروط الحدية:

$$y(1) = 0 \implies \frac{1}{1}(c_1 + c_2 \ln(1)) = 0 \implies c_1 = 0.$$

ومنه:

$$y(e) = 0 \implies \frac{1}{e}(c_2 \ln(e)) = 0 \implies \frac{c_2}{e} = 0 \implies c_2 = 0.$$

أي أن $y \equiv 0$. وبالتالي $\lambda = 1$ ليست قيمة ذاتية للمسألة.

**الحالة 3:** $\lambda > 1$ **(أي** $\Delta < 0$**)**

نضع $\lambda - 1 = \alpha^2$ مع $\alpha > 0$. في هذه الحالة، تقبل المعادلة الجبرية حلين عقديين مترافقين:

$$r_1 = -1 - i\alpha, \quad r_2 = -1 + i\alpha.$$

المعادلة التفاضلية تقبل حلين حقيقيين مستقلين خطياً، مستنتجين من الصيغة العقدية

$$x^{-1\pm i\alpha} = \frac{1}{x} e^{\pm i\alpha \ln(x)} :$$

$$y_1(x) = \frac{1}{x}\cos(\alpha \ln(x)), \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\sin(\alpha \ln(x)).$$

ومنه، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[c_1 \cos(\alpha \ln(x)) + c_2 \sin(\alpha \ln(x))\right].$$

باستخدام الشروط الحدية:

$$y(1) = 0 \implies \frac{1}{1}\left[c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)\right] = 0 \implies c_1 = 0.$$

يتبقى لدينا،

$$y(x) = c_2 \frac{1}{x} \sin(\alpha \ln(x)).$$

بتطبيق الشرط الثاني، نجد:

$$y(e) = 0 \implies c_2 \frac{1}{e} \sin(\alpha \ln(e)) = 0 \implies \frac{c_2}{e} \sin(\alpha) = 0.$$

للحصول على حلول غير معدومة (توابع ذاتية)، يجب أن يكون $c_2 \neq 0$. هذا يقتضي أن:

$$\sin(\alpha) = 0 \implies \alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

**ملاحظة.** نأخذ $k \in \mathbb{N}^\star$ وليس $\mathbb{Z}^\star$ لأننا فرضنا $\alpha > 0$.

وبالتالي، المسألة تقبل قيماً ذاتية $\lambda_k > 1$ من الشكل:

$$\lambda_k = 1 + \alpha^2 = 1 + k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

والتوابع الذاتية المرفقة بها (بتعويض $\alpha$ بقيمتها) هي:

$$y_k(x) = c_k \frac{1}{x} \sin(k\pi \ln(x)),$$

حيث $c_k$ ثوابت حقيقية كيفية غير معدومة.

### تمرين 4.3.3 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية والمعروفة بمعادلة أولر-كوشي:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x \in ]0, +\infty[ \tag{46}$$

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

أثبت أن $y(x) = x^r$ حل للمعادلة (46) إذا وفقط إذا كان:

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

## حل التمرين 4.3 :

إنّ المعادلة (46) تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية.
ليكن $x \in ]0, +\infty[$. من أجل التابع $y(x) = x^r$، لدينا:

$$y'(x) = rx^{r-1}, \quad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}.$$

يكون التابع $y$ حلاً للمعادلة التفاضلية، إذا وفقط إذا حقق المعادلة.
بتعويض عبارات $y, y'$ و $y''$ في المعادلة، نجد:

$$x^2[r(r-1)x^{r-2}] + \alpha x[rx^{r-1}] + \beta x^r = 0.$$

ومنه:

$$r(r-1)x^r + \alpha r x^r + \beta x^r = 0.$$

باستخراج $x^r$ كعامل مشترك، نجد:

$$x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta] = 0.$$

بتبسيط ما بداخل القوسين، نحصل على:

$$x^r[r^2 - r + \alpha r + \beta] = 0 \implies x^r[r^2 + (\alpha - 1)r + \beta] = 0.$$

بما أن $x \in ]0, +\infty[$، فإن التابع الأسي $x^r = e^{r\ln(x)}$ لا ينعدم أبداً $(x^r \neq 0)$.
لذلك، فإن الجداء السابق ينعدم إذا وفقط إذا انعدم القوس الثاني، أي:

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.$$

وهو المطلوب.

## تمرين 5.3.3 :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

**1.** $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0, \quad x > 0.$

**2.** $y'' + 4y' + 4y = 0.$

## حل التمرين 5.3 :

**1.** نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2y'' + 5xy' - 5y = 0, \tag{47}$$

على المجال $]0, +\infty[$.

إنّ المعادلة (47) تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية وهي معادلة أولر-كوشي. لحلها، يكفي تعيين حلين مستقلين خطياً لها.

وبما أن معاملاتها عبارة عن قوى لـ $x$ تتناسب في كل حد مع رتبة اشتقاق المجهول $y$، يكفي ترشيح التابع $y(x) = x^r$ مع $r \in \mathbb{R}$. لدينا:

$$y'(x) = rx^{r-1}, \quad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نجد:

$$x^2(r(r-1)x^{r-2}) + 5x(rx^{r-1}) - 5x^r = r(r-1)x^r + 5rx^r - 5x^r = x^r[r(r-1) + 5r - 5] = 0.$$

بتبسيط ما داخل القوسين (وبما أن $x^r \neq 0$ من أجل $x > 0$)، نحصل على المعادلة الجبرية:

$$r^2 + 4r - 5 = 0. \tag{48}$$

لحلها، نحسب المميز:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36.$$

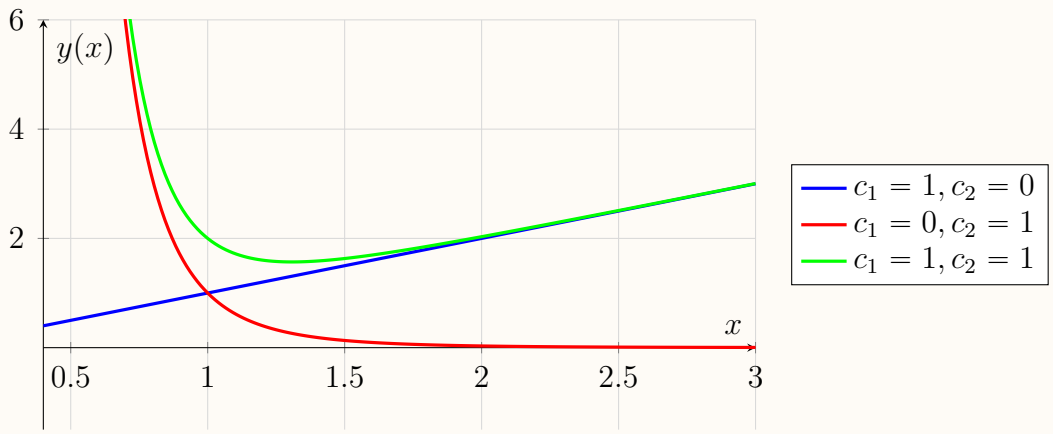
ومنه، المعادلة الجبرية (48) تقبل حلين حقيقيين متمايزين:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -5.$$

وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية (47) على $]0, +\infty[$، هو:

$$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} = c_1x + c_2x^{-5},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.




شكل 9.3: التمثيل البياني لبعض حلول المعادلة التفاضلية (47)

**2.** نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{49}$$

إنّ المعادلة (49) تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية. لحلها، يكفي تعيين حلين مستقلين خطياً. وبما أن معاملاتها ثابتة، نرشح الحل:

$$y(x) = e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة (49)، نجد:

$$e^{rx}[r^2 + 4r + 4] = 0.$$

ومنه، (بما أن $e^{rx} \neq 0$) نحصل على المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية:

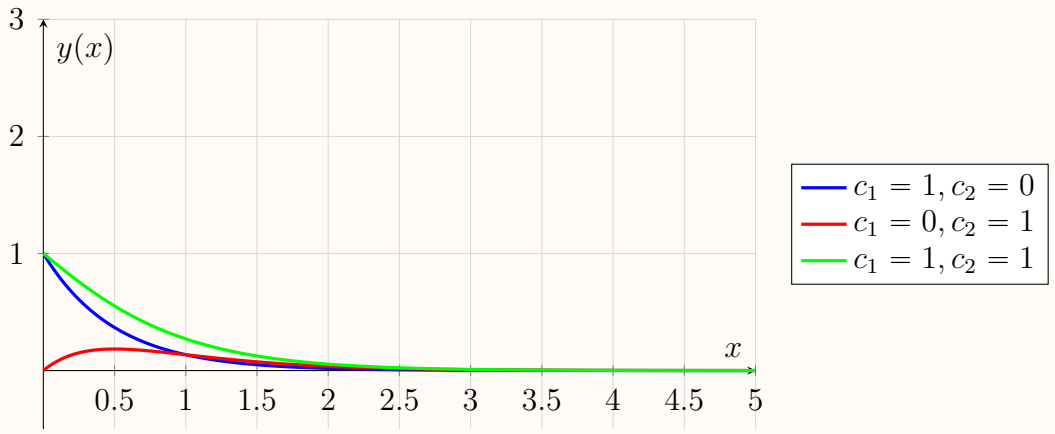
$$r^2 + 4r + 4 = 0. \tag{50}$$

لحلها، نحسب المميز $\Delta$ فنجد $\Delta = 0$.

وبالتالي، المعادلة الجبرية تقبل حلاً مضاعفاً $r_1 = r_2 = -2$. إذن، الحل العام للمعادلة (49) على $\mathbb{R}$، هو:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x},$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان.




شكل 10.3: التمثيل البياني لبعض حلول المعادلة التفاضلية (49)

### تمرين 6.3.3 :

احسب الحل الدقيق للمسائل التالية:

1.

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' - 2y = 0, \ x \in ]0, +\infty[, \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1. \end{cases} \tag{51}$$

2.

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \ -1 < x < 1, \\ y(0) = 3, \ y'(0) = -4. \end{cases} \tag{52}$$

### حل التمرين 6.3 :

1. نعتبر مسألة كوشي (51).

إنّ المعادلة التفاضلية لـ(51)، خطية متجانسة من الرتبة الثانية من نوع أولر-كوشي.

لحلها على المجال $]0, +\infty[$، نرشح حالتابع $y(x) = x^r$ حيث $r \in \mathbb{R}$.

لدينا:

$$y'(x) = rx^{r-1}, \quad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نجد:

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} - x \cdot rx^{r-1} - 2x^r = 0,$$

أي:

$$x^r \left[r(r-1) - r - 2\right] = 0.$$

وبما أن $x > 0$ فإن $x^r \neq 0$، نحصل على المعادلة الجبرية:

$$r^2 - 2r - 2 = 0. \tag{53}$$

حساب المميز المختصر $\Delta'$:

$$\Delta' = (-1)^2 - (1)(-2) = 1 + 2 = 3 > 0.$$

ومنه تقبل المعادلة المميزة حلين حقيقيين متمايزين:

$$r_1 = 1 - \sqrt{3}, \quad r_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية على المجال $]0, +\infty[$ هو:

$$y(x) = c_1 x^{1-\sqrt{3}} + c_2 x^{1+\sqrt{3}},$$

حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
نعين الثابتين $c_1$ و $c_2$ باستخدام الشروط الابتدائية. لدينا المشتق الأول:

$$y'(x) = c_1(1-\sqrt{3})x^{-\sqrt{3}} + c_2(1+\sqrt{3})x^{\sqrt{3}}.$$

تطبيق الشروط عند $x = 1$:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \implies c_1 = -c_2, \\ y'(1) = 1 \implies c_1(1-\sqrt{3}) + c_2(1+\sqrt{3}) = 1. \end{cases}$$

نعوض $c_1 = -c_2$ في المعادلة الثانية:

$$-c_2(1-\sqrt{3}) + c_2(1+\sqrt{3}) = 1 \implies 2\sqrt{3}c_2 = 1 \implies c_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ومنه:

$$c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

بالتالي، حل مسألة كوشي (51) على $]0, +\infty[$ هو:

$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(x^{1+\sqrt{3}} - x^{1-\sqrt{3}}\right).$$

2. نعتبر مسألة كوشي (52).

نلاحظ أن $y_1(x) = x$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية المتجانسة $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ لأن:

$$y_1'(x) = 1, \quad y_1''(x) = 0 \implies (1-x^2)(0) + 2x(1) - 2(x) = 0.$$

نبحث عن حل ثانٍ $y_2$ مستقل خطياً عن $y_1$ باستعمال طريقة تخفيض الرتبة، فنضع $y_2(x) = v(x) \cdot x$.

لدينا:

$$y_2' = v'x + v, \quad y_2'' = v''x + 2v'.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية، نجد:

$$(1-x^2)(v''x + 2v') + 2x(v'x + v) - 2vx = 0,$$

ومنه،

$$x(1-x^2)v'' + 2v' = 0.$$

بوضع $w = v'$، نجد معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى:

$$\frac{w'}{w} = \frac{-2}{x(1-x^2)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

حلها العام، هو:

$$w(x) = \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 1.$$

ومنه:

$$v(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx = -\frac{1}{x} - x.$$

إذن: $y_2(x) = v(x) \cdot x = -1 - x^2$.

الحل العام للمعادلة التفاضلية على $]-1,1[$، هو:

$$y(x) = c_1 x + c_2(1+x^2),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتين حقيقيين كيفيين.

**عزيزي القاريء، بدون شك أنك تتساءل عن سبب إختفاء الإشارة – من عبارة $y_2$! السبب بسيط. بما أن الثابت $c_2$ حقيقي كيفي، فإنه يمتص الإشارة السالبة.**

باستخدام الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \implies C_2(1) = 3 \implies C_2 = 3, \\ y'(0) = -4 \implies C_1 + 2C_2(0) = -4 \implies C_1 = -4. \end{cases}$$

وبالتالي، حل مسألة كوشي (52) على المجال $]-1,1[$ هو:

$$y(x) = -4x + 3(1+x^2) = 3x^2 - 4x + 3.$$

### تمرين 7.3.3 :

بين أن المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0, \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{54}$$

تقبل عدداً غير منتهٍ من الحلول، وأعطِ صيغتها.

### حل التمرين 7.3 :

إنّ معادلة المسألة (54) تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية. لحلها، يكفي تعيين حلين

مستقلين خطياً. وبما أن معاملات المعادلة ثابتة، نرشح التابع:

$$y(x) = e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة، نجد:

$$r^2e^{rx} + 2re^{rx} + 5e^{rx} = 0 \implies e^{rx}(r^2 + 2r + 5) = 0.$$

وبما أن $e^{rx} \neq 0$، نحصل على المعادلة المميزة (الجبرية):

$$r^2 + 2r + 5 = 0. \tag{55}$$

لحلها، نحسب المميز:

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = 16i^2.$$

وعليه، فإن المعادلة الجبرية تقبل حلين عقديين مترافقين:

$$r_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i, \quad r_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i.$$

ومنه، المعادلة التفاضلية تقبل حلين عقديين مستقلين خطياً:

$$z_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-x}[\cos(2x) - i\sin(2x)],$$

و

$$z_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-x}[\cos(2x) + i\sin(2x)].$$

وعليه، فإنّ المعادلة التفاضلية تقبل حلين حقيقيين مستقلين خطياً، هما:

$$y_1(x) = \mathrm{Re}(z_2(x)) = e^{-x}\cos(2x), \quad y_2(x) = \mathrm{Im}(z_2(x)) = e^{-x}\sin(2x).$$

بما أن الشروط الحدية معطاة عند النقطتين 0 و $\pi/2$، فإننا نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية على المجال المفتوح $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$، وهو:

$$y(x) = e^{-x}[c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)],$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان نعينهما باستخدام الشروط الحدية. لدينا:

$$y(0) = 0 \implies e^0[c_1\cos(0) + c_2\sin(0)] = 0 \implies c_1 = 0.$$

يتبقى لدينا $y(x) = c_2e^{-x}\sin(2x)$. بتطبيق الشرط الحدي الثاني:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies c_2e^{-\pi/2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies c_2e^{-\pi/2}\sin(\pi) = 0.$$

بما أن $\sin(\pi) = 0$، فإن هذه العلاقة الأخيرة $(0 = 0)$ محققة دوماً مهما كان الثابت الحقيقي الكيفي $c_2$.

وبالتالي، المسألة (54) تقبل عدداً غير منتهٍ من الحلول المعرفة على المجال المغلق $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، وصيغتها تعطى بالعلاقة:

$$y(x) = ce^{-x}\sin(2x),$$

حيث $c$ ثابت حقيقي كيفي.

### تمرين 8.3.3 :

احسب القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمسألتين التاليتين:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{56}$$

### حل التمرين 8.3 :

نعتبر المسألة الحدية (56):

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

نميز ثلاث حالات حسب إشارة $\lambda$.

**الحالة 1.** $\lambda = 0$
في هذه الحالة، الحل العام للمعادلة هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 x,$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان نعينهما باستخدام الشروط الحدية.
لدينا:

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0. \quad y(\pi) = 0 \implies c_2\pi = 0 \implies c_2 = 0.$$

وهكذا، فإن حل المسألة على $[0, \pi]$، هو التابع المعدوم $y \equiv 0$.
وعليه، $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة (56).

**الحالة 2.** $\lambda = -\alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$
في هذه الحالة، الحل العام للمعادلة هو:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}.$$

باستخدام الشروط الحدية، نجد جملة معادلات تؤدي حتماً إلى $c_1 = c_2 = 0$، أي أن حل المسألة هو التابع المعدوم $y \equiv 0$. ومنه لا توجد قيم ذاتية سالبة.

**الحالة 3.** $\lambda = \alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$
في هذه الحالة، الحل العام للمعادلة هو:

$$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان نعينهما باستخدام الشروط الحدية.
لدينا:

$$y(0) = 0 \implies c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \implies c_1 = 0.$$

و

$$y(\pi) = 0 \implies c_2 \sin(\alpha\pi) = 0.$$

للحصول على حل غير معدوم، يجب أن يكون $c_2 \neq 0$. ومنه،

$$\sin(\alpha\pi) = 0 \implies \alpha\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

وعليه، القيم الذاتية للمسألة (56) هي $\lambda_n = \alpha^2 = n^2$ مع $n \in \mathbb{N}^\star$، والتوابع الذاتية المرفقة بها هي:

$$y_n(x) = c_n \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^\star,$$

حيث $c_n$ ثابت حقيقي كيفي غير معدوم.

**تمرين 9.3.3 :**

احسب القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمسألتين التاليتين:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{57}$$

**حل التمرين 9.3 :**

نعتبر المسألة الحدية (57)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

بما أن المعادلة التفاضلية للمسألة الحدية (57) من الرتبة الثانية، فإنه يظهر في عبارة حلها العام، ثابتان كيفيان فقط ($c_1$ و $c_2$). في المقابل، المسألة (57) تفرض ثلاثة شروط حدية، وهو ما يُعرف رياضياً بمسألة حدية متعددة النقاط (**value boundary Multipoint problem**). في الحالات العادية، فرض ثلاثة شروط على معادلة بثابتين يؤدي إلى نظام مفرط التحديد (**system Overdetermined** ) لا يقبل بصفة عامة سوى الحل التافه المعدوم $y \equiv 0$.

لكن، بما أننا بصدد دراسة مسألة "شتورم ليوفيل"، فإن الوسيط $\lambda$ يلعب هنا دورًا "مجهولًا ثالثًا" نبحث عنه. وبالتالي، فإن الهدف هو إيجاد القيم الاستثنائية للوسيط $\lambda$ التي تجعل هذه الشروط الثلاثة متوافقة خطياً (أي يصبح الشرط الثالث محققاً تلقائياً بمجرد تحقق الشرطين الأولين). هذا التوافق هو ما يكسر حالة "التحديد المفرط" ويسمح بوجود حلول غير معدومة تمثل التوابع الذاتية للمسألة.

نميز ثلاث حالات حسب قيم $\lambda$.

**الحالة 1.** $\lambda = 0$

تصبح المعادلة التفاضلية $y'' = 0$. حلها العام، هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 x,$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان كيفيان، نعينهما باستخدام الشروط الحدية.

لدينا:

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0.$$

و

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies c_2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \implies c_2 = 0.$$

ومنه الحل هو $y \equiv 0$. نستنتج أن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية للمسألة.

**الحالة 2.** $\lambda > 0$

نضع $\lambda = \alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$. الحل العام هو:

$$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x).$$

لدينا:

$$y(0) = 0 \implies c_1 = 0.$$

إذن، الحل يكتب على الشكل:

$$y(x) = c_2 \sin(\alpha x).$$

بتطبيق الشرطين المتبقيين:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies c_2 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0.$$

$$y(\pi) = 0 \implies c_2 \sin(\alpha\pi) = 0.$$

للحصول على حل غير معدوم نفرض $c_2 \neq 0$، ومنه:

$$\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0 \implies \frac{\alpha\pi}{2} = k\pi \implies \alpha = 2k, \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

نلاحظ أن الشرط الثاني

$$\sin(\alpha\pi) = \sin(2k\pi) = 0$$

محقق تلقائياً.

وبالتالي، المسألة (57) تقبل قيماً ذاتية موجبة تماماً من الشكل $\lambda_k = 4k^2$ مع $k \in \mathbb{N}^\star$ والتوابع الذاتية المرفقة لها هي $y_k(x) = c_k \sin(2kx)$.

**الحالة 3.** $\lambda < 0$

نضع $\lambda = -\alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$. تكتب المعادلة على الشكل $y'' - \alpha^2 y = 0$، وحلها العام هو:

$$y(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}.$$

لدينا:

$$y(0) = 0 \implies C + D = 0 \implies D = -C.$$

ومنه،

$$y(x) = C(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) = 2C \sinh(\alpha x).$$

الشرط الثاني هو

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

لكن التابع $t \mapsto \sinh(t)$ ينعدم فقط عند $t = 0$.

وبما أن $\alpha > 0$ فإن $\frac{\alpha\pi}{2} > 0$. ومنه،

$$\sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \neq 0.$$

إذن حتماً $C = 0$. وعليه، $y \equiv 0$. أي أنه لا توجد قيم ذاتية سالبة.

### تمرين 10.3.3 :

احسب القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ \ x \in ]0, \pi[, \\ 2y(0) - y(\pi) = 0, \\ 2y'(0) + y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

## حل التمرين 10.3 :

نميز ثلاث حالات حسب إشارة $\lambda$.

**الحالة 1.** $\lambda = 0$

تصبح المعادلة:

$$y'' = 0,$$

وحلها العام، هو:

$$y(x) = A + Bx.$$

لدينا:

$$2y(0) - y(\pi) = 0 \implies 2A - (A + B\pi) = 0 \implies A - B\pi = 0 \implies A = B\pi.$$

و

$$2y'(0) + y(\pi) = 0 \implies 2B + (A + B\pi) = 0.$$

بتعويض $A = B\pi$ في المعادلة الثانية، نجد:

$$2B + (B\pi + B\pi) = 0 \implies 2B + 2B\pi = 0 \implies 2B(1 + \pi) = 0 \implies B = 0.$$

ومنه $A = 0$.

إذن الحل هو $y \equiv 0$ و $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية.

**الحالة 2.** $\lambda < 0$

نضع $\lambda = -\alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$.

في هذه الحالة، الحل العام للمعادلة هو:

$$y(x) = A\cosh(\alpha x) + B\sinh(\alpha x).$$

لدينا:

$$y(0) = A, \quad y'(0) = \alpha B, \quad y(\pi) = A\cosh(\alpha\pi) + B\sinh(\alpha\pi).$$

بتطبيق الشروط الحدية، نجد الجملة الخطية المتجانسة:

$$2y(0) - y(\pi) = 0 \implies (2 - \cosh(\alpha\pi))A - \sinh(\alpha\pi)B = 0,$$

$$2y'(0) + y(\pi) = 0 \implies \cosh(\alpha\pi)A + (\sinh(\alpha\pi) + 2\alpha)B = 0.$$

ولكي تقبل الجملة حلولاً غير معدومة، يجب أن ينعدم محددها $(\det = 0)$:

$$\det = \begin{vmatrix} 2-\cosh(\alpha\pi) & -\sinh(\alpha\pi) \\ \cosh(\alpha\pi) & \sinh(\alpha\pi)+2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \ (2-\cosh(\alpha\pi))(\sinh(\alpha\pi)+2\alpha) - [-\sinh(\alpha\pi)\cosh(\alpha\pi)] = 0$$

بالنشر والتبسيط، نحصل على المعادلة التي تحدد القيم الذاتية:

$$\sinh(\alpha\pi) + \alpha(2-\cosh(\alpha\pi)) = 0. \tag{59}$$

**لندرس الآن المعادلة (59):**

النقطة التي ينعدم فيها الحد $(2-\cosh(\alpha\pi))$، هي:

$$\alpha_0 = \frac{\operatorname{arccosh}(2)}{\pi}.$$

بما أن $\sinh(\alpha_0\pi) \neq 0$، فإن $\alpha_0$ ليس حلاً للمعادلة (59). وبالتالي، يمكننا إعادة كتابة المعادلة على المجال $]0,\alpha_0[\cup]\alpha_0,+\infty[$ على الشكل:

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{حيث} \quad \varphi(\alpha) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\cosh(\alpha\pi)-2}.$$

- **على المجال** $]0,\alpha_0[$: لدينا $\cosh(\alpha\pi) - 2 < 0 \Longrightarrow \cosh(\alpha\pi) < 2$. بما أن $\sinh(\alpha\pi) > 0$ من أجل $\alpha > 0$، فإن $\varphi(\alpha) < 0$. ولكن $\alpha > 0$، إذن المعادلة $\varphi(\alpha) = \alpha$ مستحيلة الحل في هذا المجال.
- **على المجال** $]\alpha_0,+\infty[$: نعتبر التابع $h(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$.

لدينا:

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\pi(1-2\cosh(\alpha\pi))}{(\cosh(\alpha\pi)-2)^2}.$$

من أجل $\alpha > \alpha_0 > 0$، لدينا $1 - 2\cosh(\alpha\pi) < 0 \Longrightarrow \cosh(\alpha\pi) > 2$. إذن $\varphi'(\alpha) < 0$ ومعه $h'(\alpha) = \varphi'(\alpha) - 1 < -1 < 0$.

وهذا يعني أن $h$ مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]\alpha_0,+\infty[$.

النهايات: لما $\alpha \to \alpha_0^+$، نجد $h(\alpha) \to +\infty$. ولما $\alpha \to +\infty$، فإن $\varphi(\alpha) \to 1$ ومنه $h(\alpha) \to -\infty$.

وبالتالي، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $h(\alpha) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha^\star \in ]\alpha_0,+\infty[$.

**النتيجة للحالة 2:** المسألة تقبل قيمة ذاتية سالبة وحيدة $\lambda^\star = -(\alpha^\star)^2$.
التابع الذاتي المرفق بها هو:

$$y_\star(x) = c\left[\sinh(\alpha^\star\pi)\cosh(\alpha^\star x) + (2-\cosh(\alpha^\star\pi))\sinh(\alpha^\star x)\right], \quad c \in \mathbb{R}^\star.$$

**الحالة 3.** $\lambda > 0$
نضع $\lambda = \alpha^2$ مع $\alpha \in ]0,+\infty[$.
في هذه الحالة، الحل العام هو:

$$y(x) = C\cos(\alpha x) + D\sin(\alpha x).$$

لدينا:

$$y(0) = C, \quad y'(0) = \alpha D, \quad y(\pi) = C\cos(\alpha\pi) + D\sin(\alpha\pi).$$

باستخدام الشروط الحدية وانعدام المحدد، نحصل على المعادلة:

$$g(\alpha) = \sin(\alpha\pi) + \alpha(2-\cos(\alpha\pi)) = 0. \tag{60}$$

**إثبات عدم وجود حلول موجبة للمعادلة (60):**
ندرس إشارة التابع $g(\alpha)$ من أجل $\alpha > 0$:

1. **على المجال** $\alpha \in ]0,1[$: لدينا $\sin(\alpha\pi) > 0$ و $2-\cos(\alpha\pi) > 1 > 0 \implies \cos(\alpha\pi) < 1$.
   بما أن $\alpha > 0$، فإن الحد الثاني موجب تماماً. إذن $g(\alpha) > 0$.

2. **من أجل** $\alpha = 1$:

$$g(1) = \sin(\pi) + 1\cdot(2-\cos(\pi)) = 0 + 1\cdot(2-(-1)) = 3 > 0.$$

3. **من أجل** $\alpha > 1$: بما أن $\cos(\alpha\pi) \leqslant 1$ فإن $2-\cos(\alpha\pi) \geqslant 1 \implies \alpha(2-\cos(\alpha\pi)) \geqslant \alpha$. وبما أن $\sin(\alpha\pi) \geqslant -1$، نجد:

$$g(\alpha) \geqslant -1 + \alpha > 0.$$

**النتيجة للحالة 3:** التابع $g(\alpha) > 0$ دوماً على $]0,+\infty[$، وبالتالي المعادلة $g(\alpha) = 0$ لا تقبل أي جذر موجب. إذن، **لا توجد قيم ذاتية موجبة** لهذه المسألة الحدية.

**خلاصة عامة:** المسألة تقبل قيمة ذاتية سالبة وحيدة $\lambda^\star = -(\alpha^\star)^2 < 0$.

### تمرين 11.3.3 :

نعتبر المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \ x \in ]0,1[, \\ y'(0) = 0, \\ y(1) + y'(1) = 0. \end{cases} \tag{61}$$

1. اثبت أن المسألة (61) لا تقبل قيم ذاتية سالبة.
2. اثبت أن المسألة (61) لا تقبل قيم ذاتية عقدية (غير حقيقية).

### حل التمرين 11.3 :

1. **إثبات أن المسألة (61) لا تقبل قيماً ذاتية سالبة:**

نضع $\lambda = -\alpha^2$ مع $\alpha \in ]0, +\infty[$.
في هذه الحالة، الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - \alpha^2 y = 0$ على المجال $]0,1[$ يكتب على الشكل:

$$y(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x),$$

حيث $c_1$ و $c_2$ ثابتان حقيقيان.
من أجل كل $x \in ]0, +\infty[$، لدينا:

$$y'(x) = \alpha \left[ c_1 \sinh(\alpha x) + c_2 \cosh(\alpha x) \right].$$

من الشرط الحدي الأول:

$$y'(0) = 0 \implies \alpha c_2 = 0 \implies c_2 = 0 \quad (\text{لأن } \alpha > 0).$$

إذن يصبح الحل: $y(x) = c_1 \cosh(\alpha x)$.
الآن، باستخدام الشرط الحدي الثاني $y(1) + y'(1) = 0$، نجد:

$$c_1 \cosh(\alpha) + c_1 \alpha \sinh(\alpha) = 0 \implies c_1 \left[ \cosh(\alpha) + \alpha \sinh(\alpha) \right] = 0.$$

بما أن $\alpha > 0$، فإن:

$$\alpha \sinh(\alpha) > 0. \quad \text{و} \quad \cosh(\alpha) \geqslant 1 > 0$$

أي أن:

$$\cosh(\alpha) + \alpha \sinh(\alpha) > 0.$$

هذا يستلزم بالضرورة أن $c_1 = 0$.

وبالتالي، $y \equiv 0$. ومنه **لا توجد قيم ذاتية سالبة للمسألة** (61).

2. **إثبات أن المسألة** (61) **لا تقبل قيماً ذاتية عقدية غير حقيقية:**

نبرهن بالخلف ونفرض أن $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ قيمة ذاتية غير حقيقية للمسألة (61) و $y$ التابع الذاتي المرفق بها $(y \not\equiv 0)$.

ليكن $\overline{\lambda}$ مرافق $\lambda$ و $\overline{y}$ التابع الذاتي المرفق به.

نعتبر المؤثر $L(y) = -y''$. لدينا:

$$L(y) = \lambda y \implies -y'' = \lambda y, \tag{62}$$

$$L(\overline{y}) = \overline{\lambda}\overline{y} \implies -(\overline{y})'' = \overline{\lambda}\overline{y}. \tag{63}$$

بضرب الطرفين في المعادلة الأولى بـ $\overline{y}$ وفي الثانية بـ $y$ ثم أخذ الفرق بينهما، نجد:

$$\overline{y}L(y) - yL(\overline{y}) = (\lambda - \overline{\lambda})y\overline{y}.$$

بمكاملة الطرفين من 0 إلى 1:

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 y(x)\overline{y}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 y''\overline{y}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (\overline{y})''y\,\mathrm{d}x.$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة لكل حد من الطرف الأيمن:

$$-\int_0^1 y''\overline{y}\,\mathrm{d}x = -y'(1)\overline{y}(1) + y'(0)\overline{y}(0) + \int_0^1 y'(\overline{y})'\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 (\overline{y})''y\,\mathrm{d}x = (\overline{y})'(1)y(1) - (\overline{y})'(0)y(0) - \int_0^1 (\overline{y})'y'\,\mathrm{d}x.$$

بما أن $y'(0) = 0$ و $(\overline{y})'(0) = 0$، فإن:

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 |y(x)|^2\,\mathrm{d}x = (\overline{y})'(1)y(1) - y'(1)\overline{y}(1).$$

لدينا من الشروط الحدية للمسألة، أن $y'(1) = -y(1)$. وبالتالي، $(\overline{y})'(1) = -\overline{y}(1)$.
بالتعويض نجد:

$$(\overline{y})'(1)y(1) - y'(1)\overline{y}(1) = (-\overline{y}(1))y(1) - (-y(1))\overline{y}(1) = 0.$$

إذن:

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 |y(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

بما أن التابع الذاتي غير معدوم $(y \not\equiv 0)$، فإن التكامل موجب تماماً:

$$\int_0^1 |y(x)|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

ما يعني بالضرورة أن

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0 \implies \lambda = \overline{\lambda}.$$

أي $\lambda \in \mathbb{R}$.
وبالتالي، نستنتج أن المسألة (61) **لا تقبل أي قيمة ذاتية عقدية غير حقيقية.**

# الباب 4

# المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

**تعريف 1.4.4 :**

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية، هي:

$$\begin{aligned} &a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + g(x,y)u = f(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

حيث المعاملات $a, b, c, d, e, g$ والطرف الثاني $f$ دوال مستمرة:

$$a, b, c, d, e, g, f \in \mathcal{C}^0(\Omega), \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

مع $\Omega$ مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^2$، و $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ هي الدالة المجهولة.

**ملاحظة 1.4.4:** نكتفي في هذا الفصل باعتبار المعاملات $a, b, c, d, e, g$ في المعادلة (1) ثوابت حقيقية.

## 1.4 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية، هي معادلة من الشكل:

$$\mathcal{L}u = f, \tag{2}$$

حيث $\mathcal{L}$ مؤثر تفاضلي خطي مكتوب بدلالة مشتقات جزئية رتبتها أقل أو تساوي 2.

حسب شكل المعادلة التفاضلية، يمكننا تحديد طبيعتها للتمكن من فهم سلوك الحلول ومعرفة الطرائق اللازم استخدامها لدراستها، وهذا يعتمد على طبيعة المتغيرات التي تظهر في المعادلة.

نميز حالتين أساسيتين:

**الحالة 1: معادلة تفاضلية جزئية تتعلق فقط بمتغيرات مكانية (متغيرات الفضاء).**

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية بالنسبة لمتغيرين $x$ و $y$ التالية:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f(x,y), \tag{3}$$

حيث $a, b, c$ ثوابت حقيقية لا تنعدم في آن واحد. (في دراسة التصنيف، نكتفي بالاهتمام بالحدود الرئيسية ذات الرتبة الثانية أي المعاملات $a, b, c$، لأنها المسؤولة حصرياً عن تحديد نوع المعادلة).

نربط هذه المعادلة (3) بكثير الحدود المتجانس من الدرجة الثانية (ويسمى الرمز الرئيسي):

$$ax^2 + bxy + cy^2. \tag{4}$$

إذا اعتبرنا أن (4) هو كثير حدود من الدرجة الثانية بالنسبة لـ $x$ (باعتبار $y$ ثابتاً)، فإنّ مميزه هو $y^2(b^2 - 4ac)$. وبالمثل، إذا اعتبرناه كثير حدود بالنسبة لـ $y$، يكون مميزه $x^2(b^2 - 4ac)$.

ونلاحظ في الحالتين أن إشارة هذا المميز هي نفسها إشارة المقدار $(b^2 - 4ac)$.

وعليه، يتعلق تصنيف المعادلة (3) بإشارة المميِّز $\Delta$ المعرف بـ:

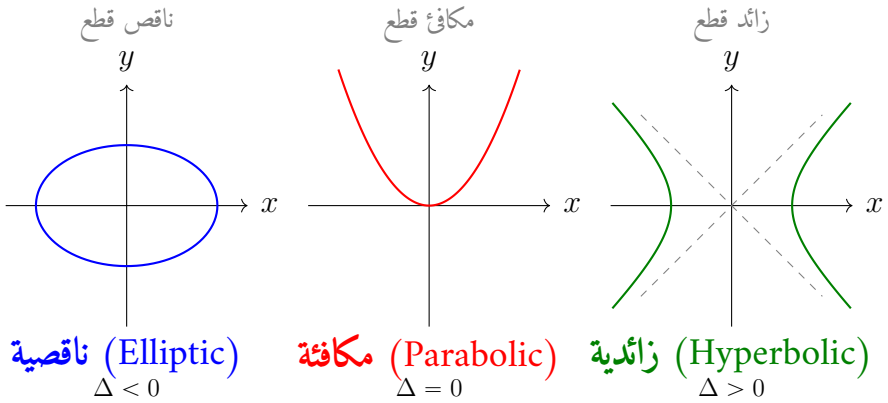
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

يوضح الجدول التالي التصنيفات الأساسية لمعادلة تفاضلية خطية جزئية من الرتبة الثانية:

لتوضيح هذا التصنيف النظري، نستعرض فيما يلي بعض الأمثلة الكلاسيكية الشهيرة التي تُترجم هذه الحالات هندسياً وفيزيائياً.

| إشارة $\Delta = b^2 - 4ac$ | نوع المعادلة التفاضلية | التسمية باللاتينية |
|---|---|---|
| $\Delta < 0$ | ناقصية | Elliptic |
| $\Delta = 0$ | مكافئة | Parabolic |
| $\Delta > 0$ | زائدية | Hyperbolic |

جدول 1.4: جدول تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية حسب إشارة المميّز




شكل 1.4: التفسير الهندسي لتسمية المعادلات (علاقة المميّز بالقطوع المخروطية).

- **معادلة ناقصية : (Elliptic Equation)**

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

والتي تسمى **معادلة لابلاس (Laplace's Equation)**.

بالمطابقة مع الشكل العام (3)، نضع:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

ومنه نحسب المميّز:

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0.$$

بما أن $\Delta < 0$، فإن معادلة لابلاس هي معادلة **ناقصية**.

**ملاحظة:** إذا كانت المعادلة غير متجانسة (أي بوجود طرف ثانٍ $f(x,y)$)، فإنها تُكتب على الشكل $\Delta u = f$، وتأخذ اسماً خاصاً وهو **معادلة بواسون (Poisson's Equation)**.

- **معادلة زائدية : (Hyperbolic Equation)**

تُكتب على الشكل التالي (في حالة متغيرين مكانيين):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

بالمطابقة مع الشكل العام (3)، نضع:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1.$$

ومنه نحسب المميّز:

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(-1) = 4 > 0.$$

بما أن $\Delta > 0$، فإن المعادلة (5) هي معادلة **زائدية**.

تُعرف هذه المعادلة (سواء كانت متجانسة أم غير متجانسة) بـ **معادلة الأمواج (Wave Equation)**.

- **معادلة مكافئة : (Parabolic Equation)**

وهي معادلة ينعدم فيها أحد المشتقين من الرتبة الثانية، مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

بالمطابقة مع الشكل العام (3)، نجد أن المعاملات هي:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

(لاحظ أن $c = 0$ لأن المشتق $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ غير موجود).

ومنه نحسب المميّز:

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(0) = 0.$$

بما أن $\Delta = 0$، فإن المعادلة **مكافئة**.

تُعرف هذه المعادلة في الفيزياء بـ **معادلة الحرارة (Heat Equation)**، وتُدرس غالباً بوجود طرف ثانٍ يمثل مصدر الحرارة $f(x, y)$.

### الحالة 2: معادلة تفاضلية جزئية تتعلق بمتغير الزمن ومتغيرات الفضاء.

عندما يظهر متغير الزمن (والذي يُرمز له عادة بـ $t$ حيث $t \geqslant 0$) في المعادلة، يمكننا تعميم طريقة التصنيف السابقة باعتبار $t$ متغيراً مستقلاً إضافياً (مثل $y$). ومع ذلك، جرت العادة في الفيزياء

والنمذجة الرياضية على استنتاج صنف هذه المعادلات مباشرة بناءً على رتبة المشتق الزمني الأعلى ظهوراً:

**أ- إذا ظهر في المعادلة مشتق من الرتبة الأولى فقط بالنسبة للزمن:**

في هذه الحالة، تكون المعادلة **مكافئة (Parabolic)**. رياضياً، هذا يوافق حالة المميِّز معدوم $(\Delta = 0)$ إذا طبقنا القاعدة العامة.

**ب- إذا ظهر في المعادلة مشتق من الرتبة الثانية بالنسبة للزمن:**

في هذه الحالة، تكون المعادلة **زائدية (Hyperbolic)**. رياضياً، هذا يوافق حالة المميِّز الموجب $(\Delta > 0)$.

### أمثلة كلاسيكية:

**1. معادلة الحرارة : (Heat Equation)**

تُنمذج هذه المعادلة انتشار الحرارة في وسط معين بمرور الزمن. نعتبر الثابت $k > 0$ (والذي يمثل معامل الانتشار الحراري للوسط):

- **في بُعد مكاني واحد (متغير فضائي $x$ فقط):** (تُنمذج مثلاً انتشار الحرارة في قضيب معدني رفيع) تُكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

- **في بُعدين مكانيين (متغيرين فضائيين $x$ و $y$):** تُكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{8}$$

في كلتا الحالتين، نلاحظ أن أعلى رتبة للمشتق بالنسبة للزمن $t$ هي 1. وعليه، فإن معادلة الحرارة هي معادلة **مكافئة**.

**2. معادلة الأمواج : (Wave Equation)**

تُنمذج هذه المعادلة انتشار الأمواج. نعتبر الثابت $c > 0$ (حيث يمثل $c$ سرعة انتشار الموجة في الوسط):

- **في بُعد مكاني واحد (متغير فضائي $x$ فقط):** (تُنمذج مثلاً اهتزاز وتر مشدود) تُكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{9}$$

- **في بُعدين مكانيين (متغيرين فضائيين $x$ و $y$):** (تُنمذج مثلاً اهتزاز غشاء مرن) تُكتب المعادلة على الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{10}$$

في كلتا الحالتين، نلاحظ أن أعلى رتبة للمشتق بالنسبة للزمن $t$ هي 2. وعليه، فإن معادلة الأمواج هي معادلة **زائدية**.

## 2.4 دراسة أهم نماذج المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

نهتم في هذه الفقرة بدراسة الخصائص الفيزيائية والرياضية للأنماط الثلاثة الأساسية:

### 1- المعادلات الناقصية

أبسط مؤثر تفاضلي ناقصي هو مؤثر لابلاس:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{11}$$

تعد معادلة لابلاس نموذجاً أساسياً للمعادلات الناقصية.

**الخصائص:**

- لا يظهر فيها الزمن صراحة، فهي تمثل حالة استقرار **(Steady State)**.
- تصف أنظمة في حالة توازن فيزيائي.
- **التفسير الهندسي:** النظام يكون في حالة توازن، وأي تأثير (مثل تغيير شرط حدي) ينتقل آنياً داخل المجال وتتأثر به كل النقاط.

**أمثلة عن بعض الظواهر الفيزيائية التي تنمذج بمعادلة ناقصية:**

- توزيع الجهد الكهربائي في الكهروستاتيكا.
- انسياب الموائع غير القابلة للضغط في نظام مستقر.
- توزيع درجة الحرارة في حالة التوازن الحراري.
- التشوهات المرنة الساكنة للأجسام الصلبة.

## 2- المعادلات المكافئة

إن أبسط مؤثر تفاضلي مكافئ، هو مؤثر الحرارة:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u. \tag{12}$$

تعد معادلة الحرارة نموذجا أساسيا للمعادلات المكافئة، ويمثل العدد الحقيقي الموجب $c^2$ معامل الانتشار الحراري، وهو يصف سرعة استجابة المادة للتغير في درجة الحرارة.

**نرمز للمعامل الحراري بـ $c^2$ للتأكيد على أنه موجب.**

**الخصائص:**

- يظهر فيها مشتق من الرتبة الأولى بالنسبة للزمن $\frac{\partial u}{\partial t}$.
- تمثل ظواهر تطورية وانتشارية غير عكوسة **(Irreversible)**.

**تفسير فيزيائي ورياضي (لماذا الظاهرة غير عكوسة؟):** فيزيائياً، هذا يعني أن الظاهرة تمتلك "سهماً للزمن" (Arrow of time). أي أن الحرارة تنتشر دائماً من الجسم الساخن إلى الجسم البارد ولا يمكن أن تتجمع تلقائياً لتعود إلى حالتها الابتدائية (زيادة الإنتروبيا). أما رياضياً، فيعود ذلك لكون المشتق الزمني من **الرتبة الأولى** $\frac{\partial u}{\partial t}$. فإذا قمنا بعكس الزمن رياضياً (أي تعويض $t$ بـ $-t$)، فإن إشارة المعادلة ستتغير ولن تعود كما كانت، وتصبح المسألة رياضياً سيئة الطرح (Ill-posed). (هذا عكس المعادلات الزائدية التي تمتلك مشتقاً زمنياً من الرتبة الثانية $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$، حيث لا تتأثر إشارتها بعكس الزمن $-t$، فتكون ظواهرها عكوسة).

- **السلوك:** النظام يتطور مع الزمن ويتجه تدريجياً نحو حالة توازن.

**أمثلة فيزيائية:**

- انتقال الحرارة (الانتشار الحراري).
- انتشار المواد الكيميائية.
- انتشار الملوثات في الهواء أو الماء.
- نمذجة بعض الظواهر البيولوجية (مثل ديناميكا السكان).

## 3- المعادلات الزائدية

أبسط مؤثر زائدي هو مؤثر الأمواج أو مؤثر دالامبير **(D'Alembert)**:

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u. \tag{13}$$

تعد معادلة الأمواج نموذجا أساسيا للمعادلات الزائدية، ويمثل العدد الحقيقي الموجب $a^2$ سرعة الموجة.

**الخصائص:**

- يظهر فيها مشتق من الرتبة الثانية بالنسبة للزمن.
- تصف ظواهر اهتزازية وموجية تحافظ على الطاقة (في غياب الاحتكاك).
- **التفسير الفيزيائي:** ينتقل التأثير على شكل موجات بسرعة محددة (سرعة الموجة $a$) وليس آنياً.

**أمثلة فيزيائية:**

- انتشار الأمواج الميكانيكية.
- الأمواج الصوتية.
- الأمواج الكهرومغناطيسية (معادلات ماكسويل).
- اهتزاز الأوتار والأغشية.

| نوع المعادلة | النموذج الفيزيائي | طبيعة الظاهرة | سرعة الانتقال |
|---|---|---|---|
| **ناقصية** (Elliptic) | معادلة لابلاس $\Delta u = 0$ | حالات **التوازن** والاستقرار (Steady State). | **آنية:** التأثير ينتقل فوراً. |
| **مكافئة** (Parabolic) | معادلة الحرارة $u_t = c^2 \Delta u$ | ظواهر **الانتشار** والتبدد (غير عكوسة). | **لانهائية:** (رياضياً) ينتشر التأثير بسرعة كبيرة. |
| **زائدية** (Hyperbolic) | معادلة الأمواج $u_{tt} = a^2 \Delta u$ | ظواهر **الاهتزاز** والموجات (عكوسة). | **محدودة:** ينتقل التأثير بسرعة الموجة $a$. |

جدول 2.4: ملخص الخصائص الفيزيائية للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية.

## دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة الأساسية

تُصنف المعادلات التفاضلية الجزئية عموماً بحسب طبيعة الظاهرة المدروسة. في هذه الفقرة، سنسلط الضوء تحديداً على **النسخة المتجانسة** من أشهر هذه المعادلات (أي بافتراض أن الطرف الثاني معدوم $f \equiv 0$).

**1. مسائل التطور الزمني (Evolution Problems):**

وهي معادلات تصف ظواهر حركية أو حرارية تتغير مع مرور الزمن. من أجل التبسيط، سنقتصر على دراستها في **بُعد مكاني واحد** (1D Space)، أي أن التابع المجهول $(x,t) \mapsto u(x,t)$ يتعلق بمتغير فضائي واحد $x$ ومتغير الزمن $t$. تُدرس هذه المعادلات على $\Omega = [a,b] \times [0,T]$، حيث $T > 0$ و $a, b \in \mathbb{R}$. وتضم:

- **معادلة الحرارة المتجانسة (مكافئة):**

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{14}$$

- **معادلة الأمواج المتجانسة (زائدية):**

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{15}$$

**2. مسائل الاستقرار والتوازن (Steady-State Problems):**

وهي معادلات تصف أنظمة مستقرة توازنية لا تتغير مع الزمن (أي مستقلة عن المتغير $t$). لدراسة هذه الحالة بشكل مفيد، ننتقل إلى **بُعدين مكانيين** (2D Space)، حيث يكون التابع المجهول $(x,y) \mapsto u(x,y)$ متعلقاً بالمتغيرين الفضائيين $x$ و $y$. تُدرس هذه المعادلة على مجموعة $D \subset \mathbb{R}^2$ (على سبيل المثال، مستطيل $[a,b] \times [c,d]$). وتضم:

- **معادلة لابلاس المتجانسة (ناقصية):**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

### منهجية حل مسائل التطور الزمني (Evolution Problems):

لدراسة مسألة تطورية، نتبع الخطوات التالية:

**دراسة الوجود:**

في مستوانا هذا، نبحث عن حلول كلاسيكية، أي إثبات وجود حل $u$ من الصنف $\mathcal{C}^2$ داخل المفتوح $(a,b)\times(0,T)$ ومستمر على المغلق $\Omega=[a,b]\times[0,T]$. يمكننا إثبات ذلك بطريقة بنائية (Constructive Method) بالاعتماد على سلاسل فوريه. لذلك، نخطوة منهجية، سنفرض أن الحل موجود لنتمكن من دراسة وحدانيته، ثم نقوم ببنائه فعلياً في خطوة لاحقة.

**الوحدانية:**

نفرض وجود حلين $u_1$ و $u_2$ لهذه المسألة. نضع $u=u_1-u_2$. نظراً لخطية المعادلة، فإن التابع $u$ يحقق المعادلة المتجانسة مع شروط حدية وابتدائية **معدومة** (صفرية). وباستخدام "طريقة تكامل الطاقة" (Energy Method)، نُبين أن طاقة الجملة معدومة، ومنه نستنتج أن $u\equiv 0$، أي أن $u_1=u_2$ والحل وحيد.

**بناء الحل العام انطلاقاً من حلول ذات متغيرين منفصلين (Separated Solutions):**

لبناء الحل الذي فرضنا وجوده، نستعمل طريقة فصل المتغيرات (Separation of Variables) ونبحث أولاً عن حلول **(غير معدومة)** على شكل "جداء" لدالتين:

$$u(x,t)=X(x)\,T(t). \tag{17}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية، نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين: معادلة مجهولها التابع $x\mapsto X(x)$، وبإضافة الشروط الحدية للمسألة، تصبح لدينا مسألة ستورم-ليوفيل مجهولها التابع $X$، ومعادلة تفاضلية أخرى مجهولها التابع $t\mapsto T(t)$.

بعد تعيين $X$ و $T$ (مما يعطينا عائلة من الحلول الأساسية)، نستخدم مبدأ **التركيب الخطي** (Superposition Principle) لجمع هذه الحلول، ومن ثم بتطبيق الشروط الابتدائية للمسألة، نحصل على المعاملات المجهولة وعبارة الحل العام والنهائي $u$.

**ملاحظة 2.4.4: لماذا نشترط أن يكون الحل غير معدوم؟** لأن انعدام إحدى الدالتين، مثلاً $X\equiv 0$ أو $T\equiv 0$، سيؤدي إلى الحل التافه (المعدوم) $u(x,t)=0$. هذا الحل، وإن كان يحقق المعادلة المتجانسة والشروط الحدية الصفرية، فإنه **يستحيل أن يحقق الشروط الابتدائية** للمسألة. لذلك، من الضروري رياضياً البحث عن حلول حيث $X\neq 0$ و $T\neq 0$.

**ملاحظة 3.4.4:**

وتُطبق مبادئ مشابهة على مسائل الاستقرار والتوازن، مع الاستغناء عن الشروط الابتدائية.

## 3.4 دراسة مسألة الحرارة

نعتبر مسألة الحرارة المختلطة التالية (شرط ديريكليه عند $x=0$ وشرط روبن عند $x=1$):

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<1,\ t>0, \\ u(t,0)=0, & t>0, \\ u(t,1)+\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1)=0, & t>0, \\ u(0,x)=f(x), & 0<x<1. \end{cases}$$

نبدأ أولاً بتحديد الشروط الحدية والشروط الابتدائية للمسألة (18):

**الشروط الحدية:**

$$u(t,0)=0, \qquad u(t,1)+\frac{\partial u}{\partial x}(t,1)=0,\ t>0.$$

**الشرط الابتدائي:**

$$u(0,x)=f(x),\ 0<x<1.$$

### حساب حل خاص للمسألة (18)

باستخدام طريقة فصل المتغيرين، نبحث عن حل خاص غير معدوم من الشكل:

$$u(x,t)=X(x)\,T(t).$$

**المرحلة 1: فصل المتغيرين.**

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية، نجد:

$$X(x)\,T'(t)=c^2X''(x)\,T(t).$$

بفرض أن الحل غير معدوم، نقسم طرفي المعادلة على $c^2XT$، فنجد:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

بما أن الطرف الأيمن للمساواة الأخيرة متعلق فقط بـ $t > 0$، والطرف الأيسر متعلق فقط بـ $x \in [0,1]$، والطرفين متساويان مهما يكن $x$ و $t$، فهذا يعني أنه يوجد ثابت حقيقي غير معدوم $\lambda \in \mathbb{R}^*$، بحيث:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{و} \quad \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

**نستخدم $-\lambda$ عوض $\lambda$ لتسهيل عملية البحث عن القيم الذاتية الموجبة في المرحلة الموالية.**

باستخدام الشروط الحدية المتجانسة:

$$u(t,0) = 0 \implies X(0) = 0,$$

و

$$u(t,1) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \implies X(1) + X'(1) = 0.$$

نستنتج أن $X$ يحقق مسألة شتورم-ليوفيل (Sturm-Liouville) التالية:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(1) + X'(1) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

و $T$ يحقق المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى:

$$T'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0. \tag{20}$$

### المرحلة 2: تعيين العناصر الذاتية للمسألة (19) والحل العام للمعادلة (20).

نبدأ أولاً بحل مسألة شتورم-ليوفيل (19)، والتي يعود حلها إلى تعيين عناصرها الذاتية (القيم الذاتية والتوابع الذاتية المرفقة بها). بعدها، ننتقل إلى المعادلة التفاضلية (20)، لنعوض $\lambda$ بالقيم الذاتية للمسألة (19)، ومن ثمة نعين حلها العام $T$.

باستخدام نفس الطرق المستخدمة في الفصل الثالث، نجد أن المسألة (19) تقبل متتالية قيم ذاتية

موجبة تماماً $\lambda_n = \alpha_n^2$ حيث $\alpha_n > 0$ يحقق المعادلة $\tan(\alpha_n) = -\alpha_n$، والتوابع الذاتية المرفقة لها على $[0,1]$، هي: $X_n(x) = \sin(\alpha_n x),\ n = 1, 2, \ldots$

وعليه، نمر الآن إلى حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى:

$$T'(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0, \tag{21}$$

حيث $\lambda_n$ هي القيم الذاتية للمسألة (19).

نعلم أن الحل العام للمعادلة (21)، يُكتب على الشكل:

$$T_n(t) = B_n e^{-\lambda_n c^2 t}, \quad t \geqslant 0. \tag{22}$$

### المرحلة 3: التركيب الخطي (Superposition)

نضع:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(x).$$

لدينا:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x)\, e^{-\alpha_n^2 c^2 t}. \end{aligned}$$

حيث $A_n$ ثوابت حقيقية كيفية، نعينها باستخدام الشرط الابتدائي $u(x,0) = f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x) = f(x). \tag{23}$$

بضرب طرفي المعادلة (23) في $\sin(\alpha_m x)$ (حيث $m \geqslant 1$) ومكاملة الطرفين بالنسبة إلى $x$ من 0 إلى 1، نجد:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \int_0^1 \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\alpha_m x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \sin(\alpha_m x)\ \mathrm{d}x.$$

ومنه، باستخدام تعامد التوابع الذاتية مثنى مثنى في الفضاء $L^2(0,1)$ (حيث التكامل ينعدم من

أجل $n \neq m$)، نجد عبارة الثوابت:

$$A_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\alpha_n x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(\alpha_n x)\,\mathrm{d}x}.$$

## دراسة وحدانية حل مسألة الحرارة

نستخدم "طريقة الطاقة" (Energy Method). نفرض وجود حلين $u_1$ و $u_2$ ونضع $w = u_1 - u_2$.
إن التابع $w$ يحقق المسألة المتجانسة التالية:

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(t,0) = 0, & t > 0, \\ w(t,1) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,1) = 0, & t > 0, \\ w(0,x) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

نُعرف دالة الطاقة، بـ:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

لدينا من أجل كل $t \geqslant 0$،

$$E'(t) = \int_0^1 w\frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}x = c^2\int_0^1 w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x.$$

بالمكاملة بالتجزئة، نجد:

$$E'(t) = c^2\left(\left[w\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\right).$$

باستخدام الشروط الحدية:

- عند $x = 0$: $w(t,0) = 0$.
- عند $x = 1$: $\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,1) = -w(t,1)$.

نصل إلى العلاقة:

$$E'(t) = c^2 \left( -w^2(t,1) - \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x \right) \leqslant 0.$$

هذا يعني أن الطاقة $E$ **متناقصة.**

ومن جهة أخرى، باستعمال الشرط الابتدائي $w(0,x) = 0$، نجد أن الطاقة الابتدائية معدومة: $E(0) = 0$. بما أن الدالة $E$ موجبة دوماً $(E \geqslant 0)$ ومتناقصة $(E' \leqslant 0)$ وتبدأ من الصفر، فإنه لدينا حتماً:

$$E(t) = 0, \ \forall t \geqslant 0.$$

ومنه نستنتج أن:

$$w(x,t) = 0, \quad \forall (x,t).$$

وهذا يثبت أن $u_1 = u_2$، ومنه وحدانية الحل.

## 4.4 دراسة مسألة الأمواج

نعتبر مسألة الأمواج التالية (والتي تنمذج ظاهرة اهتزاز وتر مثبت من الطرفين):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, \ 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = f(x), & 0 < x < l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{25}$$

### دراسة وحدانية حل مسألة الأمواج

نفرض وجود حلين $u_1$ و $u_2$ للمسألة (25). نضع $w = u_1 - u_2$.

إن التابع $w$ يحقق المسألة المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,l) = 0, & t > 0, \\ w(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = 0, & 0 < x < l. \end{cases} \tag{26}$$

لإثبات أن $w \equiv 0$، نستخدم "طريقة الطاقة". نُعرف الطاقة الكلية (مجموع الطاقة الحركية والكامنة للوتر) بالعبارة التالية:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x.$$

من أجل كل $t > 0$، لدينا:

$$J'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\right).$$

بما أن الدوال ملساء (Smooth) بالكفاية، يمكننا الاشتقاق تحت رمز التكامل:

$$J'(t) = \int_0^l \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

نعوض $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ بما يساويها من المعادلة التفاضلية $(a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$:

$$J'(t) = a^2\int_0^l \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

نُخرج $a^2$ كعامل مشترك، فنجد:

$$J'(t) = a^2\left[\underbrace{\int_0^l \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x}_{I_2}\right].$$

نكامل الحد الأول $I_1$ بالتجزئة، فنجد:

$$I_1 = \left[\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

نلاحظ من جهة، أن:

$$\int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x = -I_2.$$

من جهة أخرى، باستخدام الشروط الحدية:

$$w(t,0) = 0 \implies \frac{\partial w}{\partial t}(t,0) = 0.$$

و

$$w(t,l)=0 \implies \frac{\partial w}{\partial t}(t,l)=0.$$

يكون لدينا:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^l=\frac{\partial w}{\partial t}(t,l)\frac{\partial w}{\partial x}(t,l)-\frac{\partial w}{\partial t}(t,0)\frac{\partial w}{\partial x}(t,0)=0.$$

بالتعويض في عبارة $J'(t)$، نجد:

$$J'(t)=a^2\left[\left(0-\int_0^l\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x\right)+\int_0^l\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\,\mathrm{d}x\right]=0.$$

بما أن $J'(t)=0$، فهذا يعني أن الطاقة $J$ ثابتة.

من الشروط الابتدائية:

$$w(0,x)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0,x)=0,$$

نجد أن:

$$J(0)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[(0)^2+a^2(0)^2\right]\mathrm{d}x=0.$$

وهكذا فإن $J$ ثابت وينعدم عند نقطة. وهو ما يعني أن:

$$J(t)=0, \quad \forall t\geqslant 0.$$

بما أن $J$ هو تكامل مجموع حدين موجبين (مربعات)، فإن انعدام التكامل يقتضي انعدام الدالة داخله، أي:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0.$$

هذا يعني أن $w$ دالة ثابتة. وبما أن $w(0,x)=0$، نستنتج أن:

$$w(x,t)=0, \quad \forall (x,t).$$

وهذا يثبت وحدانية الحل.

## حساب الحل العام بطريقة فصل المتغيرات

نبحث عن حل غير معدوم للمسألة (25) يُكتب على الشكل:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

**المرحلة 1: فصل المتغيرات.**
بالتعويض في معادلة الأمواج، نجد:

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t).$$

بقسمة الطرفين على $a^2X(x)T(t)$، نحصل على:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

بما أن الطرف الأيسر تابع لـ $x$ فقط والطرف الأيمن تابع لـ $t$ فقط، فإنهما يساويان ثابتاً مشتركاً نرمز إليه بـ $-\lambda$. هذا يعني:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{و} \quad \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

باستخدام الشروط الحدية للمسألة، نجد:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

نستنتج أن $X$ يحقق مسألة شتورم-ليوفيل:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in ]0,l[, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

و $T$ يحقق المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{28}$$

**المرحلة 2: تعيين العناصر الذاتية والحلول الخاصة.**
نبدأ أولاً بحل مسألة شتورم-ليوفيل (27). نجد أن المسألة تقبل متتالية قيم ذاتية موجبة تماماً

$\lambda_n = \omega_n^2$، مع:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

والتوابع الذاتية المرفقة بها على $[0, l]$، هي:

$$X_n(x) = a_n \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, \dots$$

حيث $(a_n)$ ثوابت حقيقية كيفية.

نمر الآن إلى حل المعادلة التفاضلية (28) بتعويض $\lambda$ بالقيم الذاتية $\lambda_n$:

$$T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0 \implies T''(t) + (a\omega_n)^2 T(t) = 0. \tag{29}$$

نجد أن حل المعادلة (29) على $[0, +\infty[$ يُكتب بدلالة التردد الزاوي $a\omega_n$:

$$T_n(t) = b_n \cos(a\omega_n t) + c_n \sin(a\omega_n t), \tag{30}$$

حيث $b_n$ و $c_n$ ثابتان حقيقيان كيفيان.

### المرحلة 3: التركيب الخطي (Superposition)

يُكتب الحل العام للمسألة (25) على الشكل:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n x) \left[ A_n \cos(a\omega_n t) + B_n \sin(a\omega_n t) \right], \end{aligned}$$

حيث $A_n = a_n b_n$ و $B_n = a_n c_n$.

لتعيين الثوابت $(A_n)$ و $(B_n)$، نستخدم الشروط الابتدائية وتعامد التوابع الذاتية مثنى مثنى في الفضاء $L^2(0, l)$، والذي يُعطى بالعلاقة:

$$\int_0^l \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m x) \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{l}{2} & : n = m, \\ 0 & : n \neq m. \end{cases} \tag{31}$$

- **حساب $A_n$:**

باستخدام الشرط الابتدائي الأول $u(x, 0) = f(x)$، نجد (بتعويض $t = 0$ ينعدم الحد الذي فيه

( sin):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x) = f(x).$$

بضرب طرفي المساواة في $\sin(\omega_m x)$ والمكاملة على المجال $[0,l]$، وباستخدام خاصية التعامد، تبقى فقط الحالة التي يكون فيها $n = m$:

$$A_m \int_0^l \sin^2(\omega_m x)\mathrm{d}x = \int_0^l f(x)\sin(\omega_m x)\mathrm{d}x.$$

بما أن $\int_0^l \sin^2(\omega_m x)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$، ينتج لدينا:

$$A_m \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l f(x)\sin(\omega_m x)\mathrm{d}x.$$

وبالتالي (باستبدال الدليل $m$ بـ $n$):

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\omega_n x)\mathrm{d}x. \qquad (32)$$

• **حساب $B_n$:**

نشتق الحل العام بالنسبة للزمن $t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n x)\left[-A_n(a\omega_n)\sin(a\omega_n t) + B_n(a\omega_n)\cos(a\omega_n t)\right].$$

نستخدم الشرط الابتدائي الثاني $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ (بتعويض $t = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(a\omega_n)\sin(\omega_n x) = g(x).$$

بنفس طريقة التعامد السابقة، نجد:

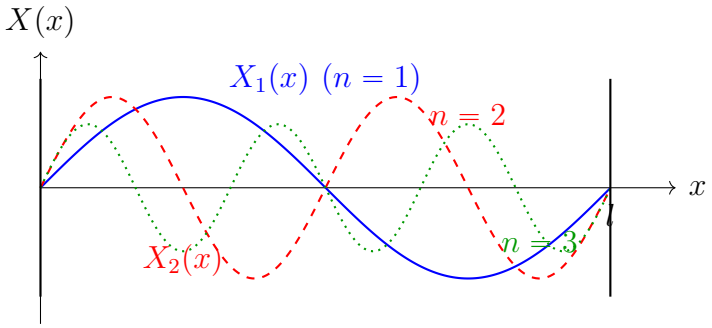
$$(B_m a\omega_m)\cdot\frac{l}{2} = \int_0^l g(x)\sin(\omega_m x)\mathrm{d}x.$$

ومنه:

$$B_m = \frac{1}{a\omega_m}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\omega_m x)\mathrm{d}x.$$

وبما أن $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ (أي $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$)، فإنه لدينا أخيراً:

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin(\omega_n x)\mathrm{d}x. \tag{33}$$




شكل 2.4: التمثيل البياني للتوابع الذاتية الأولى $X_n(x) = \sin(\omega_n x)$.

## 5.4 دراسة مسألة لابلاس

نعتبر مسألة ديريكليه لمعادلة لابلاس على المستطيل $D = ]0,a[\times]0,b[$ التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, & 0 < y < b, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < a, \\ u(x,b) = f(x), & 0 < x < a. \end{cases} \tag{34}$$

نبدأ أولا بتحديد شروط المسألة. بما أن المسألة (34) مستقرة لا تتعلق بالزمن، فإن جميع شروطها هي شروط حدية مكانية:

**الشروط الحدية المتجانسة:**

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0,\ 0 < y < b.$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 < x < a.$$

**الشرط الحدي غير المتجانس:**

$$u(x,b) = f(x),\ 0 < x < a.$$

## حساب حل خاص للمسألة (34)

باستخدام طريقة فصل المتغيرين، نبحث عن حل خاص غير معدوم من الشكل:

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y).$$

**المرحلة 1: فصل المتغيرين.**

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية، نجد:

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0.$$

بفرض أن الحل غير معدوم، نقسم طرفي المعادلة على $X(x)Y(y)$، فنجد:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

بما أن الطرف الأيسر للمساواة الأخيرة متعلق فقط بـ $x \in [0,a]$، والطرف الأيمن متعلق فقط بـ $y \in [0,b]$، والطرفين متساويين مهما يكن $x$ و $y$، فهذا يعني أنه يوجد ثابت حقيقي $\lambda \in \mathbb{R}^\star$، بحيث:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{و} \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

باستخدام الشروط الحدية المتجانسة:

$$u(0,y) = 0 \implies X(0) = 0,$$
$$u(a,y) = 0 \implies X(a) = 0.$$

و

$$u(x,0) = 0 \implies Y(0) = 0.$$

نستنتج أن $X$ يحقق مسألة ستورم-ليوفيل التالية:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(a) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

و $Y$ يحقق المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0. \tag{36}$$

**المرحلة 2: تعيين العناصر الذاتية للمسألة (35) والحل العام للمعادلة التفاضلية (??).**

نبدأ أولا بحل مسألة ستورم ليوفيل (35)، والتي يعود حلها إلى تعيين عناصرها الذاتية (القيم الذاتية والتوابع الذاتية المرفقة بها). بعدها، ننتقل إلى المعادلة التفاضلية (36)، نعوض $\lambda$ بالقيم الذاتية للمسألة (35)، لنقم في الأخير بحساب حلها العام.

باستخدام نفس الطريقة المستخدمة في المسائل السابقة، نجد أن المسألة (35) تقبل متتالية قيم ذاتية موجبة تماما $\lambda_n = \omega_n^2$ مع:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

والتوابع الذاتية المرفقة بها على $[0, a]$، هي $X_n(x) = \sin(\omega_n x),\ n = 1, 2, \dots$.

وعليه، نمر الآن إلى حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0, \tag{37}$$

حيث $\lambda_n$ هي القيم الذاتية للمسألة (35).

نعلم أن حل المعادلة (37) يكتب بدلالة الدوال الزائدية على الشكل:

$$Y_n(y) = A_n \cosh(\omega_n y) + B_n \sinh(\omega_n y). \tag{38}$$

باستخدام الشرط $Y_n(0) = 0$:

$$A_n \cosh(0) + B_n \sinh(0) = 0 \implies A_n = 0.$$

ومنه:

$$Y_n(y) = B_n \sinh(\omega_n y). \tag{39}$$

**المرحلة 3: تركيب الحلول (Superposition)**

نضع

$$u_n(x, y) = X_n(x) \cdot Y_n(y).$$

لدينا:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\omega_n y) \sin(\omega_n x). \end{aligned}$$

حيث $B_n$ ثوابت حقيقية كيفية، نعينها باستخدام الشرط الحدي غير المتجانس $u(x,b) = f(x)$، فنجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\omega_n b) \sin(\omega_n x) = f(x). \tag{40}$$

بضرب طرفي (40) في $\sin(\omega_m x)$ ومكاملة الطرفين بالنسبة إلى $x$ من 0 إلى $a$، نجد:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [B_n \sinh(\omega_n b)] \int_0^a \sin(\omega_n x) \cdot \sin(\omega_m x)\ \mathrm{d}x = \int_0^a f(x) \sin(\omega_m x)\ \mathrm{d}x.$$

ومنه، باستخدام تعامد التوابع الذاتية مثنى مثنى في $L^2(0,a)$، نجد:

$$B_n \sinh(\omega_n b) \cdot \frac{a}{2} = \int_0^a f(x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x.$$

وبالتالي:

$$B_n = \frac{2}{a \sinh(\omega_n b)} \int_0^a f(x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x.$$

## دراسة وحدانية حل مسألة لابلاس

نستخدم "طريقة الطاقة". نفرض وجود حلين $u_1$ و $u_2$ للمسألة (34) ونضع $w = u_1 - u_2$.

إن $w$ يحقق المسألة المتجانسة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ w(0,y) = 0, \quad w(a,y) = 0, & 0 < y < b, \\ w(x,0) = 0, \quad w(x,b) = 0, & 0 < x < a. \end{cases} \tag{41}$$

نعرف دالة الطاقة (تكامل طاقة ديريكليه)، بـ:

$$E = \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

لدينا المتطابقة التالية (المستنتجة من الجداء $w\Delta w$):

$$w \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right].$$

بما أن $w$ يحقق معادلة لابلاس، فإن الطرف الأيسر معدوم. بمكاملة الطرفين على المستطيل $D$، نجد:

$$\int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^b \left[ w \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a} \mathrm{d}y + \int_0^a \left[ w \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} \mathrm{d}x.$$

باستخدام الشروط الحدية المتجانسة للمسألة (41) (حيث $w = 0$ على كل حدود المستطيل):

- عند $x = 0$ و $x = a$: $w(0, y) = 0$ و $w(a, y) = 0$.
- عند $y = 0$ و $y = b$: $w(x, 0) = 0$ و $w(x, b) = 0$.

نصل إلى العلاقة:

$$E = 0 + 0 = 0.$$

بما أن $E$ هو تكامل مزدوج لمجموع حدين موجبين (مربعات) ويساوي الصفر، فإن انعدام التكامل يقتضي انعدام الدالة داخله، أي:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

هذا يعني أن $(x, y) \mapsto w(x, y)$ دالة ثابتة. وبما أن $w(0, y) = 0$ (من الشروط الحدية)، نستنتج أن الثابت هو صفر. أي:

$$w(x, y) = 0, \quad \forall (x, y).$$

وهذا يثبت أن $u_1 = u_2$، وبالتالي وحدانية الحل.

## 6.4 مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة

إن الكثير من الظواهر الطبيعية تُنمذج باستخدام مسائل تفاضلية جزئية غير متجانسة (سواء باحتواء المعادلة على مصدر خارجي، أو بوجود شروط حدية غير متجانسة).

نعتبر النموذج التالي لدراسة كيفية حساب حل مسألة تفاضلية جزئية غير متجانسة، وكل الجمل التفاضلية الجزئية غير المتجانسة المشابهة يتم حلها بنفس الطريقة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = A, & t > 0, \\ u(l,t) = B, & t > 0. \end{cases} \tag{42}$$

### تفكيك الحل (Superposition Principle):

نبحث عن حل للمسألة على الشكل (تفكيك الحل إلى جزء عابر وجزء مستقر):

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x).$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية غير المتجانسة للمسألة (42)، نجد:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + U''(x) \right) + F(x).$$

إذا اخترنا $U$ يحقق المعادلة التفاضلية العادية غير المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$a^2 U''(x) + F(x) = 0, \tag{43}$$

فإن التابع $v$ سيحقق المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{44}$$

باستخدام الشروط الحدية، نجد:

$$u(x,0) = v(x,0) + U(x) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

$$u(0,t) = v(0,t) + U(0) = A,$$

$$u(l,t) = v(l,t) + U(l) = B.$$

### دراسة الجزء المستقر $U(x)$ (Steady-State Solution):

لكي نجعل الشروط الحدية للتابع $v$ متجانسة (أي $v(0,t) = 0$ و $v(l,t) = 0$)، نفرض على

$x \mapsto U(x)$ أن يحقق مسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} a^2U''(x) + F(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ U(0) = A, \\ U(l) = B. \end{cases} \tag{45}$$

وهي مسألة تفاضلية عادية يمكن حلها بسهولة بالمكاملة مرتين وتعيين الثوابت باستخدام الشروط الحدية $A$ و $B$.

### دراسة الجزء العابر $v(x,t)$ (Transient Solution):

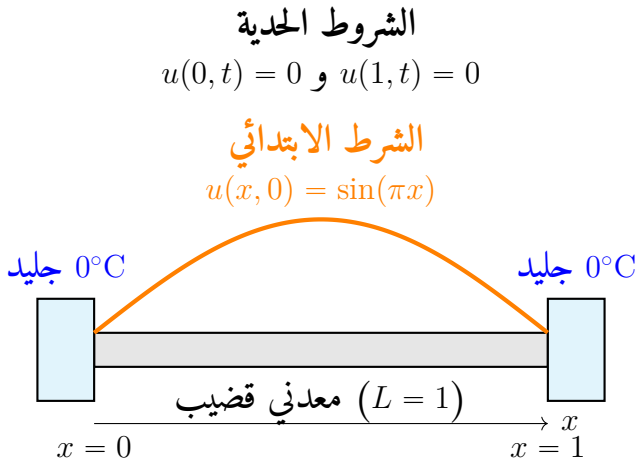
أما بالنسبة للتابع $(x,t) \mapsto v(x,t)$، فهو يحقق المسألة المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ v(x,0) = f(x) - U(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v(0,t) = 0, & t > 0, \\ v(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{46}$$

وندرس هذه المسألة (بعد أن أصبحت متجانسة بالكامل من حيث المعادلة والشروط الحدية) بنفس الطريقة التي تم عرضها في الفقرات السابقة (طريقة فصل المتغيرات).

**مثال تطبيقي :**

نعتبر قضيباً معدنياً طوله $L = 1$ حيث معامل الناقلية الحرارية فيه $c^2 = 1$. نريد دراسة تطور درجة الحرارة $u(x,t)$ إذا علمنا أن درجة الحرارة الابتدائية للقضيب هي $f(x) = \sin(\pi x)$، ودرجة حرارة أطرافه تساوي $0°C$.




## 1. وصف الظاهرة الفيزيائية.

تخيل قضيباً طوله $L$ أطرافه ملامسة للجليد (درجة حرارتهما 0)، وقمنا بتسخينه من المنتصف فقط حتى وصلت درجة حرارة مركزه إلى $1°C$.

يمثل الشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\sin(\pi x),$$

توزيع درجة الحرارة لحظة البدء $(t=0)$.

هندسياً، يأخذ التوزيع شكل "قوس جيبية" تبدأ من الصفر عند الأطراف وتصل إلى ذروتها $(1°C)$ في منتصف القضيب $(x=0.5)$. هذا يعني أن القضيب مسخن في مركزه تدريجياً بينما أطرافه باردة، وهو توزيع ينسجم تماماً مع الشروط الحدية للمسألة:

$$u(0,t)=u(1,t)=0.$$

## 2. نمذجة الظاهرة الفيزيائية بمسألة رياضياتية.

نمذج الظاهرة الفيزيائية التي تم وصفها أعلاه بمسألة انتشار الحرارة في البعد 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0, & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{47}$$

### تبرير اختيار النموذج:

لقد تم اختيار النموذج (47) بناءً على المبادئ الفيزيائية التالية:

1. **المعادلة متجانسة:** لأننا فرضنا **عدم وجود مصدر حرارة داخلي** (Internal Heat Source).

   ملاحظة هامة: المصدر الداخلي هو ما يولد الطاقة من "داخل" القضيب (مثل تفاعل كيميائي، نشاط إشعاعي، أو مرور تيار كهربائي). بما أن القضيب لا يولد طاقة ذاتية، فإن الطرف الأيمن للمعادلة يكون صفراً.

2. **الشروط الحدية متجانسة:** لأن الأطراف مثبتة عند الصفر. فيزيائياً، هذا يعني عدم وجود **مصدر حرارة خارجي** (External Heat Source) يضخ الحرارة من الأطراف؛ بل على العكس، الأطراف تعمل كـ "خزانات باردة" تسحب الحرارة من القضيب.

3. **معامل الانتشار ($c^2 = 1$):** يعبر عن مدى سرعة استجابة المادة للتغيرات الحرارية. تم تثبيته عند القيمة 1 لتبسيط الحسابات الرياضية مع الحفاظ على الخصائص الفيزيائية للانتشار.

### حساب حل خاص للمسألة (47)

**المرحلة 1: فصل المتغيرات.**
نبحث عن حل على الشكل:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية، نجد:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

بقسمة الطرفين على $X(x)T(t)$، نحصل على علاقة حيث الطرف الأيسر يتعلق فقط بـ $t$ والطرف الأيمن يتعلق فقط بـ $x$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

بما أن الطرفين متساويان وهما يعتمدان على متغيرات مستقلة، فلا بد أن يساوي كل منهما ثابتاً مشتركاً نرمز له بـ $-\lambda$.

وعليه، نحصل على مسألة شتورم-ليوفيل:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0, \end{cases} \tag{48}$$

ومعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{49}$$

**ملاحظة بيداغوجية هامة:** لماذا لا نستخدم الشرط الابتدائي

$$u(x,0) = \sin(\pi x)$$

في هذه المرحلة؟ لأنه لو فعلنا ذلك وعوضنا في:

$$u(x,0) = X(x)T(0),$$

لحصلنا على

$$X(x)T(0) = \sin(\pi x).$$

مما يقتضي أن

$$T(0) = \frac{\sin(\pi x)}{X(x)}.$$

هذا **تناقض رياضي صريح**، لأن $T(0)$ يجب أن يكون مقداراً ثابتاً ولا يمكن أبداً أن يتعلق بالمتغير $x$. هذا يبرر رياضياً ضرورة الاحتفاظ بالشرط الابتدائي غير المتجانس إلى غاية الانتهاء من تركيب الحلول (Superposition).

**المرحلة 2: تعيين العناصر الذاتية والحلول الخاصة.**

نبدأ بحل مسألة شتورم-ليوفيل (48). وحلها يعود إلى تعيين العناصر الذاتية لها. وباتباع نفس الطريقة التي تم تفصيلها خلال الفقرات السابقة، نجد أن القيم الذاتية هي:

$$\lambda_n = (n\pi)^2,$$

والتوابع الذاتية المرفقة لها، هي:

$$X_n(x) = a_n \sin(n\pi x),$$

حيث $(a_n)$ ثوابت حقيقية كيفية.

أما الحل العام للمعادلة التفاضلية (49)، فهو:

$$T_n(t) = b_n e^{-(n\pi)^2 t},$$

حيث $b_n$ ثابت حقيقي كيفي.

وعليه، تكتب الحلول الخاصة من الشكل $u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$، أي:

$$u_n(x,t) = B_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}, \quad \forall n \geqslant 1$$

حيث $(B_n)$ ثوابت حقيقية كيفية (مع وضع $B_n = a_n b_n$).

**المرحلة 3: تركيب الحلول.**

نضع:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t).$$

لدينا:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}.$$

وباستخدام الشرط الابتدائي $u(x,0) = \sin(\pi x)$، نجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) \cdot e^0 = \sin(\pi x).$$

أي أن:

$$B_1 \sin(\pi x) + B_2 \sin(2\pi x) + B_3 \sin(3\pi x) + \ldots = \sin(\pi x).$$

بالمطابقة بين الطرفين حداً لحد، نستنتج أن:

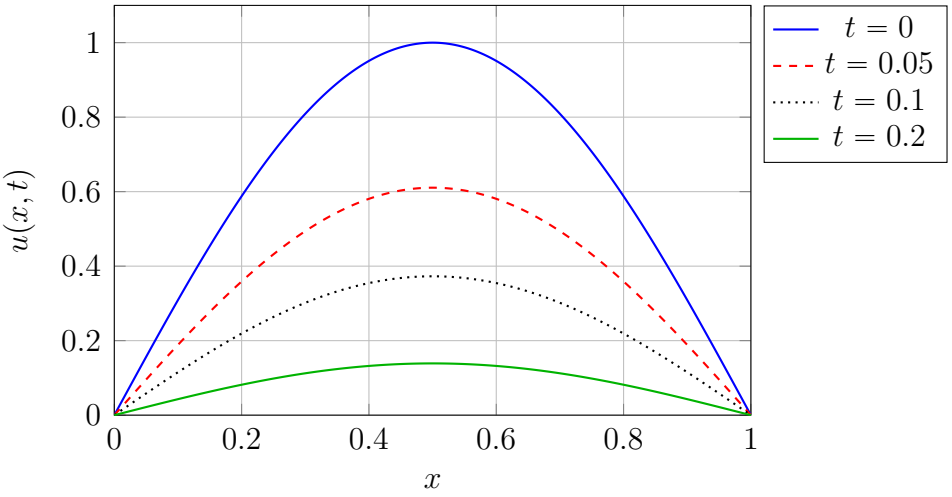
- من أجل $n = 1$: $B_1 = 1$.
- من أجل $n > 1$: $B_n = 0$.

وعليه، فإن حل المسألة (47) على $[0,1] \times \mathbb{R}_+$، هو:

$$u(x,t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

## التمثيل البياني والتفسير الفيزيائي للحل

- **التلاشي الأسي:** نلاحظ أن درجة الحرارة تتناقص مع مرور الوقت (بسبب وجود العامل $e^{-\pi^2 t}$). وهذا يعكس ضياع الحرارة عبر الأطراف الباردة.
- **حالة التوازن:** عندما $t \to +\infty$، فإن $u(x,t) \to 0$. فيزيائياً، هذا يعني أن القضيب سيصل حتماً إلى درجة حرارة المحيط (الدرجة صفر).




شكل 3.4: التمثيل البياني لتطور درجة الحرارة $u$ في القضيب المعدني عند لحظات زمنية مختلفة. يظهر التناقص الأسي لقمة المنحنى مع مرور الزمن.

- **ثبات النمط:** بما أن الشرط الابتدائي كان مطابقاً للتابع الذاتي الأول $(n = 1)$، فإن التوزيع يحافظ على شكله الجيبي ويتلاشى بانتظام دون تشوه.

## 7.4 تمارين محلولة

**تمرين 1.4.4 :**

برهن أن التوابع $u$ التي من الشكل:

$$u(t,x) = f(t) + g(x),$$

حيث $f$ و $g$ تابعان من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}$، حلول للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\partial_t \partial_x u(t,x) = 0,$$

في $\mathbb{R}^2$.

**حل التمرين 1.4 :**

ليكن التابع $u$ المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$u(t,x) = f(t) + g(x),$$

حيث $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ومنه، $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
لدينا:

- **المشتق الجزئي من الرتبة الأولى لـ $u$ بالنسبة لـ $t$ هو:**

$$\partial_t u(t,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t) + g(x)\right) = f'(t),$$

لأن التابع $g$ لا يتعلق بـ $t$.

- **المشتق الجزئي من الرتبة الأولى لـ $u$ بالنسبة لـ $x$ هو:**

$$\partial_x u(t,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(t) + g(x)\right) = g'(x),$$

وهذا لأن التابع $f$ لا يتعلق بـ $x$.

بما أن $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$، فإن $f', g' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

- **لنحسب الآن** $\partial_t \partial_x u$:

لدينا:

$$\partial_t \partial_x u(t,x) = \partial_t(\partial_x u(t,x)) = \partial_t(g'(x)).$$

لكن التابع $x \mapsto g'(x)$ لا يتعلق بـ $t$. وعليه، مشتقها بالنسبة لـ $t$ معدوم:

$$\partial_t(g'(x)) = 0.$$

وبهذا، يكون لدينا:

$$\partial_t \partial_x u(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

أي أن التوابع التي من الشكل:

$$u(t,x) = f(t) + g(x), \quad f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$\partial_t \partial_x u = 0$$

في $\mathbb{R}^2$.

**تمرين 2.4.4 :**

برهن أن التوابع $u$ من الشكل:

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

حيث $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$، هي حلول للمعادلة التفاضلية:

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0,$$

حيث $c \in \mathbb{R}$.

## حل التمرين 2.4 :

نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة التالية:

$$\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{50}$$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ثابت معطى.

تسمى المعادلة التفاضلية (50) بـ **معادلة النقل** (Transport Equation) أو **معادلة الحمل** (Advection Equation).

**1. إثبات أن التابع $(x,t) \mapsto u(x,t) = f(x-ct)$ هو حل للمعادلة (50):**

بما أن التابع $(x,t) \mapsto x - ct$ من الصنف $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ و $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$، فإن التابع المركب $u$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$.

لنحسب الآن المشتقات الجزئية للتابع $u$. نضع:

$$\xi = x - ct.$$

بالنسبة للمتغير $t$، لدينا:

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t(f(\xi)) = \partial_t(x-ct) \cdot f'(\xi) = -cf'(\xi) = -cf'(x-ct).$$

و بالنسبة للمتغير $x$، لدينا:

$$\partial_x u(x,t) = \partial_x(f(\xi)) = \partial_x(x-ct) \cdot f'(\xi) = 1 \cdot f'(\xi) = f'(x-ct).$$

بتعويض عبارتي $\partial_t u(x,t)$ و $\partial_x u(x,t)$ في المعادلة التفاضلية (50)، نجد:

$$\partial_t u + c\partial_x u = (-cf'(x-ct)) + c\,(f'(x-ct)) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

أي أن كل تابع من الشكل $(x,t) \mapsto u(x,t) = f(x-ct)$ هو حل للمعادلة (50).

### تمرين 3.4.4 :

1. برهن أن التابع $u$ المعرف على $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ بـ :

$$u(x,y)=\frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$$

حل للمعادلة:

$$\Delta u=0.$$

2. هل يمكن تمديد الحل بالاستمرار عند النقطة $(1,0)$؟

### حل التمرين 3.4 :

نعتبر التابع $u$ المعرف على $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ بـ:

$$u(x,y)=\frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2},\qquad (x,y)\neq(1,0).$$

نلاحظ أنه يمكننا كتابة المقام، على الشكل:

$$1-2x+x^2+y^2=(x-1)^2+y^2,$$

والذي ينعدم عند النقطة $(1,0)$.

**1. إثبات أن $\Delta u=0$:**

لتبسيط الحسابات وتجنب الاشتقاقات المعقدة والمطولة للكسر، من الأفضل إعادة كتابة التابع $u$ بشكل أذكى، من خلال إظهار عبارة المقام في البسط، وهذا ممكن في حالتنا هذه.

لدينا:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{-(x^2-2x+1+y^2)-2x+2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{-((x-1)^2+y^2)-2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} \\ &= -1-2\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

بما أن مشتق الثابت $(-1)$ معدوم، يكفي دراسة التابع $v$ المعرف على $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$، بـ:

$$v(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

لنحسب المشتقات الجزئية لـ $v$. لدينا:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1\cdot((x-1)^2+y^2)-(x-1)\cdot 2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{0-(x-1)\cdot 2y}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

بالاشتقاق مرة ثانية، نجد:

$$v_{xx} = \frac{2(x-1)((x-1)^2-3y^2)}{((x-1)^2+y^2)^3}.$$

و

$$v_{yy} = \frac{-2(x-1)((x-1)^2-3y^2)}{((x-1)^2+y^2)^3}.$$

نلاحظ بوضوح، أن:

$$v_{xx}+v_{yy}=0.$$

وبما أن $u=-1-2v$، فإن:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \implies \Delta u=0, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}.$$

نقول في هذه الحالة إن $u$ **دالة توافقية** (Harmonic Function) على ميدان تعريفها.

**2. دراسة سلوك التابع $u$ في جوار النقطة $(1,0)$:**

للتأكد من إمكانية التمديد بالاستمرار، نستخدم الإحداثيات القطبية المتمركزة في $(1,0)$. نضع:

$$x = 1 + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

حيث $r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} > 0$ و $\theta \in [0, 2\pi[$.

من جهة، يكتب مقام التابع $u$، على الشكل:

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2.$$

ومن جهة أخرى، يكتب بسط التابع $u$ على الشكل:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 &= 1 - (1 + r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 \\ &= 1 - (1 + 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta) - r^2\sin^2\theta \\ &= -2r\cos\theta - r^2. \end{aligned}$$

وعليه،

$$u(r,\theta) = \frac{-2r\cos\theta - r^2}{r^2} = -\frac{2\cos\theta}{r} - 1.$$

دراسة النهاية لما $(x,y) \to (1,0)$ تكافئ دراسة النهاية لما $r \to 0^+$ من أجل $\theta$ كيفي. ومنه، نميز الحالات التالية:

- إذا اخترنا المسار $\theta = 0$، يكون لدينا $u(r,0) = -\frac{2}{r} - 1$. ولما $r \to 0^+$، فإن $u \to -\infty$.
- إذا اخترنا المسار $\theta = \pi$، يكون لدينا $u(r,\pi) = \frac{2}{r} - 1$. ولما $r \to 0^+$، فإن $u \to +\infty$.
- إذا اخترنا المسار $\theta = \frac{\pi}{2}$، يكون لدينا $u(r,\pi/2) = -1$ ثابتاً، والنهاية هي $-1$.

**الخلاصة:**

بما أن النهاية تعتمد على المسار المتبع (الزاوية $\theta$) وتأخذ قيماً مختلفة (بل وتتباعد نحو المالانهاية)، فإن نهاية التابع $u$ عند النقطة $(1,0)$ **غير موجودة**. وهذا يعني أنه **لا يمكن تمديد التابع $u$ بالاستمرار** عند النقطة $(1,0)$.

### تمرين 4.4.4 :

ليكن $u$ تابعاً من الصنف $\mathcal{C}^2$ على $\mathbb{R}^2$.

**1.** باستخدام الإحداثيات القطبية، احسب:

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

**2.** باتباع طريقة فصل المتغيرات، احسب حل المعادلة:

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0.$$

### حل التمرين 4.4 :

**1. كتابة مؤثر لابلاس باستعمال الإحداثيات القطبية:**

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. إذا كتبنا $x$ و $y$ باستخدام الإحداثيات القطبية، يكون:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

حيث $r > 0$ و $\theta \in [0, 2\pi[$.

ليكن $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$، وليكن التابع $U$ المعرف على $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ بـ:

$$U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

المشتقات الجزئية لكل من $x$ و $y$ بالنسبة للمتغيرين $r$ و $\theta$ هي:

$$x_r = \cos\theta, \quad x_\theta = -r\sin\theta.$$

$$y_r = \sin\theta, \quad y_\theta = r\cos\theta.$$

باستعمال قاعدة الاشتقاق للدوال المركبة، نحسب المشتقات الجزئية الأولى لـ $U$:

$$U_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta,$$

$$U_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -r\sin\theta\, u_x + r\cos\theta\, u_y.$$

نمر الآن إلى حساب المشتقات الجزئية الثانية لـ $U$. بالنسبة لـ $r$:

$$U_{rr} = \partial_r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta) = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta.$$

أما بالنسبة لـ $\theta$، وبتطبيق مشتق جداء دالتين، نجد:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} &= \partial_\theta(-r\sin\theta\, u_x + r\cos\theta\, u_y) \\ &= r^2\big(u_{xx}\sin^2\theta - 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\cos^2\theta\big) - r(u_x\cos\theta + u_y\sin\theta). \end{aligned}$$

نلاحظ بوضوح أن الحد الأخير هو $(-rU_r)$. إذن:

$$U_{\theta\theta} = r^2\big(u_{xx}\sin^2\theta - 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\cos^2\theta\big) - rU_r.$$

ومنه،

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = u_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + u_{yy}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = u_{xx} + u_{yy}.$$

وبالتالي، عبارة مؤثر لابلاس بدلالة الإحداثيات القطبية، هي:

$$\Delta u(x,y) = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

---

### 2. حل المعادلة $\Delta u = 0$ بطريقة فصل المتغيرات:

نبحث عن حلول غير معدومة للمعادلة التوافقية، باستخدام طريقة فصل المتغيرين. فهو من الشكل:

$$U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

بالتعويض في معادلة لابلاس، نحصل على:

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0.$$

بما أن

$$U_r = R'(r)\Theta(\theta), \quad U_{rr} = R''(r)\Theta(\theta), \quad U_{\theta\theta} = R(r)\Theta''(\theta),$$

وبالقسمة على الجداء $R(r)\Theta(\theta) \neq 0$، نجد:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

بضرب طرفي المعادلة في $r^2$ وفصل المتغيرين، نحصل على:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

ومنه، يوجد ثابت حقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

**تعيين التابع $\Theta$:**

إن $\Theta$ يحقق المعادلة التفاضلية المتجانسة $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$. في الإحداثيات القطبية، الزاويتان $\theta$ و $\theta + 2\pi$ تمثلان نفس النقطة الفيزيائية في المستوي. لذلك، لكي يكون الحل $u$ مستمراً، يجب أن يكون التابع $\Theta$ دورياً، أي يخضع للشروط الدورية التالية:

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \quad \Theta'(\theta + 2\pi) = \Theta'(\theta).$$

وعليه، نحصل على مسألة ستورم-ليوفيل دورية. لحلها، نميز ثلاث حالات للثابت $\lambda$:

- **الحالة 1 ($\lambda < 0$):** نضع $\lambda = -k^2$ حيث $(k > 0)$. في هذه الحالة، الحل العام هو:

$$\Theta(\theta) = Ae^{k\theta} + Be^{-k\theta}.$$

الدوال الأسية ليست دوالاً دورية (فهي تتزايد أو تتناقص نحو اللانهاية). لكي يتحقق شرط الدورية $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ يجب بالضرورة أن يكون $A = B = 0$. وبالتالي، $\Theta \equiv 0$ وهذا يعطينا الحل المعدوم المرفوض.

- **الحالة 2 ($\lambda = 0$):** تصبح المعادلة على الشكل $\Theta'' = 0$، وحلها العام هو عبارة عن دالة تآلفية:

$$\Theta(\theta) = A_0 + B_0\theta.$$

بتطبيق شرط الدورية $\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$، نجد:

$$A_0+B_0(\theta+2\pi)=A_0+B_0\theta \implies 2\pi B_0=0 \implies B_0=0.$$

وعليه، الحل غير المعدوم المقبول في هذه الحالة هو ثابت:

$$\Theta_0(\theta)=A_0.$$

- **الحالة 3 $(\lambda>0)$:** نضع $\lambda=\mu^2$ حيث $(\mu>0)$. في هذه الحالة، الحل العام هو:

$$\Theta(\theta)=A\cos(\mu\theta)+B\sin(\mu\theta).$$

لكي تكون دوال الجيب وجيب التمام دورية بدور قدره $2\pi$، يجب أن يحقق التردد $\mu$ العلاقة $\mu\cdot 2\pi=2n\pi$. ومنه نستنتج أن $\mu=n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.
إذن القيم الذاتية هي $\lambda=n^2$. الحل العام يكتب:

$$\Theta_n(\theta)=A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta).$$

**تعيين التابع $R$:**
إن $R$ يحقق معادلة أولر-كوشي (Euler-Cauchy):

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0.$$

لحلها، نرشح التابع $R(r)=r^m$ مع $m\in\mathbb{R}$. بالاشتقاق والتعويض، نحصل على المعادلة المميزة:

$$m^2-\lambda=0.$$

- **إذا كان** $\lambda=0$: في هذه الحالة، المعادلة المميزة تقبل جذراً مضاعفاً $m=0$. وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$R_0(r)=C_0+D_0\ln r.$$

- **إذا كان** $\lambda=n^2$: في هذه الحالة، المعادلة الجبرية تقبل جذرين متمايزين $m=n$ و $m=-n$. وبالتالي، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}.$$

**تركيب الحلول (الحل العام):**

بدمج الحلول $\Theta_n$ و $R_n$ واستخدام مبدأ التركيب الخطي، نجد أنالحل العام لمعادلة لابلاس في الإحداثيات القطبية يكتب على الشكل:

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[ r^n \big(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\big) + r^{-n} \big(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta\big) \Big].$$

**تمرين 5.4.4 :**

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ معادلة الأمواج التالية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{51}$$

بإجراء تبديل المتغير:

$$\begin{cases} x = \xi + \eta, \\ t = \xi - \eta, \end{cases}$$

نضع $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x,t)$.

**1.** برهن أن:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta}(\xi,\eta) = 0. \tag{52}$$

**2.** استنتج أن التابع $u$ المعرف بـ:

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t),$$

هو حل للمعادلة (51).

## حل التمرين 5.4 :

إن المعادلة (51) هي معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة من الرتبة الثانية (معادلة الأمواج). نضع:

$$x = \xi + \eta, \quad t = \xi - \eta.$$

ومنه نستنتج أن:

$$x_\xi = 1, \quad x_\eta = 1, \quad t_\xi = 1, \quad t_\eta = -1.$$

**1. إثبات أن** $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta}(\xi, \eta) = 0$ **:**

لدينا باستعمال قاعدة السلسلة لاشتقاق الدوال المركبة بالنسبة لـ $\eta$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(1) + \frac{\partial u}{\partial t}(-1) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

الآن، نشتق هذا المقدار بالنسبة لـ $\xi$، مع الانتباه الشديد للاشتقاق الضمني لكل حد بالنسبة لـ $x$ و $t$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(1)\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(1) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(1)\right).\end{aligned}$$

بما أن التابع $u$ من الصنف $\mathcal{C}^2$، فإن المشتقات المختلطة متساوية حسب مبرهنة شفارتز (Schwarz's Theorem)، أي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}.$$

وبالتالي،

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

وبما أن $u$ حل لمعادلة الأمواج (51)، فإن ما بداخل القوس معدوم.

وعليه،

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta}(\xi, \eta) = 0. \tag{53}$$

وهو المطلوب.

---

### 2. استنتاج شكل الحل $u$:

انطلاقاً من النتيجة السابقة $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0$، نقوم بالتكامل بالنسبة للمتغير $\xi$. بما أن المشتقة معدومة بالنسبة لـ $\xi$، فإن النتيجة هي دالة تتعلق فقط بالمتغير $\eta$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = C(\eta).$$

الآن نكامل هذه النتيجة بالنسبة للمتغير $\eta$:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int C(\eta)\, d\eta + F(\xi).$$

إذا وضعنا $G(\eta) = \int C(\eta)\, d\eta$، نحصل على الشكل العام:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

نعود الآن إلى المتغيرات الأصلية $(x, t)$. لدينا من الفرض:

$$x = \xi + \eta \quad \text{و} \quad t = \xi - \eta.$$

بجمع المعادلتين، نجد:

$$2\xi = x + t \implies \xi = \frac{x+t}{2}.$$

وبطرحهما، نجد:

$$2\eta = x - t \implies \eta = \frac{x-t}{2}.$$

بتعويض قيمتي $\xi$ و $\eta$ في عبارة $\tilde{u}$، نحصل على:

$$u(x,t) = F\left(\frac{x+t}{2}\right) + G\left(\frac{x-t}{2}\right).$$

بوضع $f(s) = F\left(\frac{s}{2}\right)$ و $g(s) = G\left(\frac{s}{2}\right)$، نستنتج أخيراً أن:

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

وهي الصيغة الشهيرة لحل دالمبير (D'Alembert's Formula).

**تمرين 6.4.4 :**

باتباع طريقة فصل المتغيرات، احسب حل مسألة الحرارة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(1,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{54}$$

هل الحل وحيد؟

**حل التمرين 6.4 :**

**1. حساب حل خاص للمسألة (54):**

نستخدم طريقة فصل المتغيرات، وهذا يعود إلى البحث عن حل خاص من الشكل:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية الجزئية، نجد:

$$X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(t).$$

بقسمة الطرفين على الجداء $X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ هو ثابت الفصل. نحصل بذلك على معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{55}$$

و

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{56}$$

باستخدام الشروط الحدية المتجانسة، نجد:

$$u(0,t) = 0 \implies X(0) \cdot T(t) = 0 \implies X(0) = 0.$$

$$u(1,t) + u_x(1,t) = 0 \implies X(1)T(t) + X'(1)T(t) = 0 \implies X(1) + X'(1) = 0.$$

وعليه، نحصل على مسألة ستورم-ليوفيل التالية:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(1) + X'(1) = 0. \end{cases} \tag{57}$$

**المرحلة الثانية: حل مسألة (57) والمعادلة (56) :**

نبدؤ بدراسة المسألة (57)، ونجد أنها تقبل قيما ذاتية موجبة $\lambda_n = \alpha_n^2$ حيث $\alpha_n$ هي حلول المعادلة $\tan(\alpha) = \alpha$، والتوابع الذاتية المرفقة بها، هي: $X_n(x) = \sin(\alpha_n x)$.

وعليه، الحل العام للمعادلة التفاضلية (56)، هو:

$$T_n(t) = C_n \exp(-\alpha_n^2 t).$$

**المرحلة الثالثة: تركيب الحلول:**

لدينا،

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(\alpha_n x) \exp(-\alpha_n^2 t).$$

نعين المعاملات $A_n$ باستخدام الشرط الابتدائي $u(x,0) = f(x)$، فنجد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(\alpha_n x).$$

باستخدام خاصية تعامد التوابع الذاتية لمسألة شتورم-ليوفيل مثنى مثنى على المجال $[0,1]$، نحصل على:

$$A_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(\alpha_n x)\ \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(\alpha_n x)\ \mathrm{d}x}.$$

---

### 2. دراسة وحدانية الحل (باستخدام تكامل الطاقة):

نفرض أن المسألة تقبل حلين مختلفين $u_1$ و $u_2$. نضع $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. بفضل خطية المعادلة، يحقق $w$ المسألة المتجانسة بالكامل (بما فيها الشرط الابتدائي):

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) + w_x(1,t) = 0, \\ w(x,0) = 0. \end{cases} \tag{58}$$

نعرف تابع "الطاقة" بـ:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

من أجل كل $t > 0$، لدينا:

$$I'(t) = \int_0^1 w(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \mathrm{d}x.$$

باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$I'(t) = \left[w\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\ \mathrm{d}x.$$

لكن،

$$\left[w\frac{\partial w}{\partial x}\right]_0^1 = w(1,t)w_x(1,t) - w(0,t)w_x(0,t).$$

وعليه، باستخدام الشروط الحدية، نجد:

$$I'(t) = -w(1,t)^2 - \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\ \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

هذا يثبت أن التابع $I$ متناقص.

من جهة أخرى، لدينا من الشرط الابتدائي $w(x,0)=0$:

$$I(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,0)\,\mathrm{d}x=0.$$

بما أنه من أجل كل $t\geqslant 0$، $I(t)\geqslant 0$ وهو متناقص مع $I(0)=0$،
فإنه حتماً:

$$\forall t\geqslant 0,\quad I(t)=0.$$

ولأن $w^2$ تابع موجب ومستمر، فإن تكامله المعدوم يقتضي أن التابع نفسه معدوم:

$$\forall t\geqslant 0,\forall x\in]0,1[,\quad w(x,t)=0\implies u_1(x,t)=u_2(x,t).$$

وهذا يثبت وحدانية الحل.

### تمرين 7.4.4 :

نعتبر المسألة الحدية التالية:

$$\begin{cases} u_{tt}=k^2u_{xx}+\sin x, & 0<x<\pi,\ t>0,\\ u(0,t)=1,\\ u(\pi,t)=2\pi+1,\\ u(x,0)=1-\sin x,\\ u_t(x,0)=0. \end{cases} \tag{59}$$

1. عين نمط المعادلة التفاضلية للمسألة (59).
2. ادرس وجود ووحدانية حل المسألة (59).
3. احسب حلاً خاصاً (الحل العام) للمسألة.

## حل التمرين 7.4 :

### 1. تعيين نمط المعادلة:

إن معادلة المسألة (59) هي معادلة تفاضلية جزئية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية.
بالمطابقة مع الشكل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} = F,$$

نستنتج أن:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -k^2.$$

لنحسب المميز $\Delta$. لدينا:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1)(-k^2) = 4k^2 > 0.$$

بما أن المميز موجب تماماً $(\Delta > 0)$، فإن المعادلة **زائدية** (Hyperbolic).

---

### 2. دراسة وجود ووحدانية حل المسألة (59):

- **الوحدانية:**

نفرض وجود حلين $u_1$ و $u_2$ للمسألة (59). نضع $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ولنبين أن $\forall (x,t),\ w(x,t) = 0$.
بفضل الخطية، فإن $w$ يحقق المسألة المتجانسة المرافقة:

$$\begin{cases} w_{tt} = k^2 w_{xx}, \\ w(0,t) = 0, \quad w(\pi,t) = 0, \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{60}$$

نعرف تكامل الطاقة للمسألة كما يلي:

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + k^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \mathrm{d}x.$$

من أجل كل $t > 0$، لدينا:

$$I'(t) = \int_0^\pi \left[ \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] \mathrm{d}x.$$

لدينا من المعادلة التفاضلية، أن $w_{tt} = k^2 w_{xx}$. وعليه،

$$\begin{aligned} I'(t) &= k^2 \int_0^\pi \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] \mathrm{d}x \\ &= k^2 \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \\ &= k^2 \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right]_0^\pi \\ &= k^2 \left( w_t(\pi,t) w_x(\pi,t) - w_t(0,t) w_x(0,t) \right). \end{aligned}$$

من الشروط الحدية $w(0,t) = 0$ و $w(\pi,t) = 0$ (وباشتقاقها بالنسبة للزمن $t$)، نستنتج أن:

$$w_t(0,t) = 0 \quad \text{و} \quad w_t(\pi,t) = 0.$$

إذن،

$$\forall t \geqslant 0,\ I'(t) = 0.$$

هذا يعني أن التابع $I(t)$ ثابت، أي $I(t) = C$.

الآن نستخدم **الشروط الابتدائية** لحساب الثابت $C$. لدينا $w(x,0) = 0 \implies w_x(x,0) = 0$، ولدينا أيضاً $w_t(x,0) = 0$. إذن:

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[ 0^2 + k^2 (0)^2 \right] \mathrm{d}x = 0 \implies C = 0.$$

أي أن:

$$\forall t \geqslant 0,\ I(t) = 0.$$

بما أن $I(t)$ هو تكامل لمقدار موجب تماماً (مجموع مربعين)، فإن ما داخل التكامل يجب أن يكون معدوماً. أي:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

وعليه، التابع $w$ ثابت وبما أن $w(0,t) = 0$ فإن الثابت هو صفر:

$$\forall (x,t),\ w(x,t) = 0 \implies u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

وهذا يثبت الوحدانية بشكل قاطع.

---

### 3. حساب حل المسألة (59):

بما أن المسألة غير متجانسة، فإننا نبحث عن حل من الشكل:

$$u(x,t) = U(x) + v(x,t).$$

حيث $U$ يحقق المسألة المستقلة عن الزمن (الاستقرار):

$$\begin{cases} k^2 U''(x) + \sin x = 0, \\ U(0) = 1, \\ U(\pi) = 2\pi + 1. \end{cases} \tag{61}$$

و $v$ يحقق المسألة المتجانسة:

$$\begin{cases} v_{tt} = k^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = 1 - \sin x - U(x), \\ v_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{62}$$

**أولاً: إيجاد** $x \mapsto U(x)$**:**

لدينا:

$$U''(x) = -\frac{1}{k^2}\sin x.$$

بمكاملة الطرفين مرتين، نجد:

$$U(x) = \frac{1}{k^2}\sin x + C_1 x + C_2.$$

بتطبيق الشروط الحدية:

$$U(0) = 1 \implies 0 + 0 + C_2 = 1 \implies C_2 = 1.$$

و

$$U(\pi) = 2\pi + 1 \implies 0 + C_1\pi + 1 = 2\pi + 1 \implies C_1 = 2.$$

نحصل على:

$$U(x) = \frac{1}{k^2}\sin x + 2x + 1.$$

**ثانياً: إيجاد** $(x,t) \mapsto v(x,t)$**:**

بتعويض $U$ في الشرط الابتدائي لـ $v$، نجد:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= 1 - \sin x - \left(\frac{1}{k^2}\sin x + 2x + 1\right) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\sin x - 2x. \end{aligned}$$

باتباع طريقة فصل المتغيرات لمعادلة الأمواج بشروط حدية متجانسة، نحصل على العبارة العامة:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)\left[a_n \cos(nkt) + b_n \sin(nkt)\right].$$

الشرط $v_t(x,0) = 0$ يعطي مباشرة $b_n = 0$ من أجل كل $n$.

ومنه، نكتب الشرط الابتدائي $v(x,0)$ على الشكل:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) = \underbrace{-\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\sin x}_{\text{الجزء الأول}} \quad \underbrace{-\ 2x}_{\text{الجزء الثاني}}.$$

هنا، لكي نحسب المعاملات $a_n$، نستفيد من **خطية سلاسل فوريه** ومبدأ **المطابقة**:

- **بالنسبة للجزء الأول** $\left[-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sin x\right]$: هذا الحد مكتوب بدلالة $\sin(1\cdot x)$. بناءً على خاصية التعامد لدوال الجيب، فإن هذا الحد سيؤثر **فقط** على المعامل $a_1$ ولن يساهم في المعاملات الأخرى $(n \geqslant 2)$.
- **بالنسبة للجزء الثاني** $(-2x)$: لا يمكن مطابقته مباشرة، لذلك يجب نشره على شكل سلسلة فوريه جيبية. نسمي معاملات هذا النشر $A_n$ ونحسبها بالتكامل:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-2x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\ \mathrm{d}x.$$

باستخدام المكاملة بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\sin(nx)\ \mathrm{d}x &= \left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\ \mathrm{d}x \\ &= -\pi\frac{(-1)^n}{n} + 0 = \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

ومنه:

$$A_n = -\frac{4}{\pi}\left(\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{4(-1)^n}{n}.$$

الآن، نجمع مساهمات الجزأين معاً لنحصل على $a_n$:

- **من أجل** $n = 1$: نجمع مساهمة الجزء الأول والثاني.

$$a_1 = -\left(1+\frac{1}{k^2}\right) + A_1 = -\left(1+\frac{1}{k^2}\right) - 4 = -\left(5+\frac{1}{k^2}\right).$$

- **من أجل** $n \geqslant 2$: الجزء الأول لا يساهم (معدوم)، فنأخذ فقط مساهمة الجزء الثاني.

$$a_n = A_n = \frac{4(-1)^n}{n}.$$

وبالتالي، الحل العام للمسألة (59)، هو:

$$u(x,t) = \underbrace{\left(\frac{1}{k^2}\sin x + 2x + 1\right)}_{U(x)} \underbrace{- \left(5+\frac{1}{k^2}\right)\sin(x)\cos(kt) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n}\sin(nx)\cos(nkt)}_{v(x,t)}.$$

# المصادر


[1] مقران عبد الحفيظ، مطبوعة في المعادلات التفاضلية، المدرسة العليا للأساتذة، القبة.

[2] Arnold, Vladimir I. *Ordinary Differential Equations.* MIT Press, 1992.

[3] Boyce, William E. and DiPrima, Richard C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Wiley, 2012.

[4] Coddington, Earl A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, 1989.

[5] Haberman, Richard. *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems.* Pearson, 2012.

[6] Logemann, Hartmut and Ryan, Eugene P. *Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control.* Springer, 2014.

[7] Pazy, Amnon. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 1983.

[8] Simmons, George F. *Differential Equations with Applications and Historical Notes.* McGraw-Hill, 2016.

[9] Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, 1985.

[10] Zill, Dennis G. *Differential Equations with Boundary-Value Problems.* Cengage Learning, 2017.