ل.م.د.

الرياضيات والإعلام الآلي

L.M.D. MI

****

التحليل 1 (السداسي الأول)

الجزء 1

المتتاليات والدوال الوحيدة المتغيّر

أبو بكر خالد سعد الله

المدرسة العليا للأساتذة، القبة

LMD MI

****

ANALYSE I (Semestre I)

—————————

Tome I

Suites
et fonctions à une variable

———————————————

Boubaker-Khaled Sadallah
Ecole Normale Supérieure, Kouba

مقدمة

يسعى هذا الكتاب إلى تقديم مادة في التحليل الرياضي تُعنىَ بمواضيع السنة الأولى لفائدة طلبة نظام ل.م.د. (ليسانس/ماستر/دكتوراه) في الرياضيات والإعلام الآلي. والكتاب ليس كتابا للدرس وحده، ولا للتمارين وحدها، وإنما يمزج بين الاثنين.

ومن عادة المؤلفين في الرياضيات تصميم كتبهم على أن تغطي أحد الاثنين وليس الاثنين معا (كتاب للدرس بدون تمارين أو كتاب للتمارين مع عرض موجز للدرس). وهذا الاختيار يمليه عموما ضيق المكان لأن حجم الكتب لا تسع لبراهين النظريات وحلول التمارين.

أما هنا فقد صممنا الكتاب ليحتوي تفاصيل الدرس كله دون براهين النظريات التي عوضت في كل مرة بتعقيبات وأمثلة من شأنها أن تأخذ بيد الطالب موضحة بعض الجوانب التي قد تغيب عن ذهنه عند الاطلاع على نظرية أو تعريف. وسيلاحظ القارئ أن تلك التعقيبات قد أخذت حيزا معتبرا من الكتاب.

ثم إن الكتاب اتبع بعد ذلك ما درج على تقديمه جلّ المؤلفين : التمارين المحلولة. وهكذا يقع هذا الجزء في ثلاثة فصول تغطي دراسة مجموعة

الأعداد الحقيقية والمتتاليات العددية والتعاريف الأساسية للدوال الوحيدة المتغيّر، وكذا خواصها ذات الصلة بالاستمرار. وقد أرجأنا تناول اشتقاق الدوال ومكاملتها إلى الجزء الثاني من هذا الكتاب.

نشير في الأخير إلى أن ترتيب مادة الكتاب هي كالتالي : قدمنا الجانب النظري (الدرس) لكل هذه الفصول في بداية الكتاب. تلتها قوائم نصوص التمارين لكافة الفصول بالترتيب. وينتهي الكتاب بتقديم حلول تلك التمارين مرتبة أيضا حسب الفصول. ويجد القارئ في آخر الكتاب قائمة (ثلاثية اللغات) بأهم المصطلحات المستخدمة في هذا الجزء.

نأمل أن يفيد هذا العمل، بوجه خاص، طلبة النظام الجديد بالجزائر.

أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

الفهـــــــــــرس

الفصل الثالث : الدوال الحقيقية الوحيدة المتغيّر

****

الفصل الأول

الأعداد الحقيقية والأعداد العُقَدِيَّة

العناوين

1. مقدمة

ينقسم هذا الدرس إلى ثلاثة أقسام، نستعرض في أولها تقديما وجيزا لكيفية إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية معتبرين أن القارئ ملم بمفاهيم الزمرة والحلقة والحقل وكذا بما تيسّر من مفهوم الفضاء الشعاعي. وفي موضوع الأعداد، نعتبر أنه ملمّ بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (وهي : 0، 1، 2، 3، ...) ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ (وهي : ... ‎-2 ، ‎-1 ، 0 ، ‎+1 ، ‎+2 ، ...)، وكذا حقل الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ (وهي مجموعة الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح و q عدد طبيعي غير منعدم). وما يهمنا كثيرا في هذا القسم هو التلميح إلى حاجة الرياضيات إلى تعريف مجموعة أعداد أوسع من مجموعة الأعداد الناطقة وإلى صعوبة وضع القواعد الكفيلة بتعريف مجموعة الأعداد الحقيقية انطلاقا من مجموعة الأعداد الناطقة.

وحتى نؤكد على الحاجة إلى تعريف مجموعة أعداد أوسع من $\mathbb{Q}$ يكفي أن نقول إن حل فئة كبيرة من المعادلات لا يمكن أن يتم بدون هذا التوسيع. خذ مثلا المعادلة $x^2 = 2$: إنها لا تقبل حلا في $\mathbb{Q}$ لأنه لو كتبنا x على الشكل $x = \frac{p}{q}$ لكان $p^2 = 2q^2$. فكّك p^2 إلى عوامل أولية وكذلك $2q^2$ وستلاحظ التناقض في هذا التفكيك المتمثل في أس العدد الأولي 2. فهذا الأس سيكون زوجيا في الطرف الأيسر وفرديا في الطرف الأيمن. وهكذا يتطلب حلّ هذه المعادلة البسيطة إدخال مجموعة أخرى من الأعداد

تكون فيها أعداد "غير ناطقة"، وهي التي نصفها بـــ "الصماء" مثل العدد $\sqrt{2}$ أو $-\sqrt{2}$ (وهما حلا المعادلة المذكورة).

أما في القسم الثاني فنتناول الخواص الطبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية ونتطرق في هذا السياق للجوارات والمجالات وملاصقة جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية ولكثافة مجموعة الأعداد الناطقة في مجموعة الأعداد الحقيقية. والملاحظ أن كل تلك المفاهيم تؤدي دورا بارزا في بقية دروس التحليل اللاحقة ... بل إنها تمثل حجر الزاوية لكل دراسة تحليلية تتناول مجموعة الأعداد الحقيقية. ولهذه الأسباب سنركز على هذا القسم.

أما في القسم الثالث فنستعرض بإيجاز موضوع الأعداد العقدية (= المركبة) : يمكن القول إن الرياضيين نالوا مبتغاهم بعد إنشاء مجموعة الأعداد المركبة، خلافا لما حدث لهم عند إنشاء مختلف المجموعات العددية السابقة الذكر. لقد نال الرياضيون مبتغاهم لأن المعادلات التي تكتب على شكل كثيرات حدود صارت طيّعة في حقل مجموعة الأعداد المركبة، ولا تخفي حلولا. وعلى سبيل المثال فإن معادلة من الدرجة الثانية يمكن ألا تتمتع بحل في مجموعة الأعداد الحقيقية لكن عدد حلولها في مجموعة الأعداد المركبة هو دائما 2. وبصفة عامة فكل معادلة من الدرجة n لها n حلا (تلك هي "نظرية الجبر الأساسية").

ويعتبر حقل الأعداد المركبة امتدادا لحقل الأعداد الحقيقية، لكن هذا الأخير له علاقة ترتيب تنسجم مع عمليتيه الداخليتين، بينما لا نجد هذه الخاصية في مجموعة الأعداد المركبة. وهذا أحد عيوب الأعداد المركبة. ومن

ميزات هذه الأعداد أنها تتمتع بخواص جبرية وتحليلية ثريّة جعلت تطبيقها ينتشر في مختلف فروع الرياضيات والفيزياء... فلا يمكن تصوّر دراسة النسبية أو ميكانيكا الكم دون استخدام الأعداد المركبة.

ومن المعلوم أن الأعداد المركبة ظهرت خلال القرن 16م على أيدي الرياضيين الإيطاليين ... وحاجتهم في ذلك كانت البحث عن حلول المعادلات ذات الدرجة الثالثة. ثم تطور الربط بين الأعداد العقدية والهندسة بدءا من القرن 19م.

وكما نعلم فإن المعادلة البسيطة من الدرجة الثانية $x^2+1=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ لأن إضافة -1 لطرفيها يؤدي إلى المساواة $x^2=-1$، ونحن نعلم أنه لا يوجد عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}$ يحقق هذه المساواة. سوف لن نتعرض بإسهاب لهذه المجموعة لأن تفاصيلها مقررة في مادة الجبر وإنما نقدمها بإيجاز للتمكن من استخدامها عند الحاجة في الدروس الموالية.

2. مجموعة الأعداد الحقيقية

1.2 الإنشاء الجبري لمجموعة الأعداد الحقيقية

لنبدأ بتمهيدات لا بد منها كي نستعرض الإنشاء الجبري لمجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف (المجموعة المرتبة)

لتكن E مجموعة. تسمى كل علاقة "$\le$" على E انعكاسية (أي : $x \le x$ من أجل كل x في E) وضد متناظرة (أي : إذا كان $x \le y$ و $y \le x$ من أجل كل x و y في E فإن $x = y$) ومتعدية (أي: إذا كان $x \le y$ و $y \le z$ فإن $x \le z$ من أجل من أجل x و y و z في E) علاقة ترتيب.

نقول عن E إنها مرتبة كليا إذا استطعنا كتابة $x \le y$ أو $y \le x$ من أجل كل عنصرين x و y في E. وإذا وجد عنصران (أو أكثر) x و y في E بحيث تكون العلاقتان $x \le y$ و $y \le x$ خاطئتين معا قلنا إن ترتيب E ترتيب جزئي.

مثال

* $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعات مرتبة ترتيبا كليا بعلاقة الترتيب المألوفة.

* لتكن E مجموعة و $\wp(E)$ مجموعة أجزائها. لنعرف علاقة ترتيب "$\le$" على $\wp(E)$ بـــ $A \le B$ إن كان $A \subset B$. إنها علاقة ترتيب جزئية لأن هناك أجزاء من E بحيث $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$ في آن واحد.

تعريف (الحواد العليا، الدنيا؛ القيم العظمى، الصغرى)

ليكن A جزءا من مجموعة مرتبة E بترتيب نرمز إليه بـــ"$\leq$" .

1) نقول عن A إنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر a من E بحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \leq a.$$

2) إذا كانت A محدودة من الأعلى وكان حاد من الأعلى a لها ينتمي إلى A فإننا نسمي a قيمة عظمى لـــ A ، أي أن عنصرا a يمثل القيمة العظمى لـــ A (التي نرمز إليها بـــ $\max A$) إذا حقق :

$$a \in A, \ \forall x \in A, \quad x \leq a.$$

3) نقول إن لـــ A حدا أعلى إذا قبلت مجموعة الحواد العليا قيمة صغرى، تسمى (عند وجودها) الحد الأعلى لـــ A، ونرمز إليه بـــ $\sup A$.

4) نقول عن A إنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر b من E بحيث :

$$\forall x \in A, \quad x \geq b.$$

5) إذا كانت A محدودة من الأدنى وكان حاد من الأدنى b لها ينتمي إلى A فإننا نسمي b قيمة صغرى لـــ A، أي أن عنصرا b يمثل القيمة الصغرى لـــ A (التي نرمز إليها بـــ $\min A$) إذا حقق :

$$b \in A, \ \forall x \in A, \quad x \geq b.$$

6) نقول إن لـــ A حدا أدنى إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا قيمة عظمى، تسمى (عند وجودها) الحد الأدنى لـــ A، ورمزه $\inf A$.

تعقيب

يمكن ألا يكون الحد الأعلى موجودا وكذلك الحال فيما يخص الحد الأدنى والقيمة العظمى والقيمة الصغرى. لكن عند وجود أيّ من هذه القيم فستكون وحيدة. الأمر ليس كذلك فيما يخص الحواد العليا والحواد الدنيا.

أمثلة

1) مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأدنى بـــ 0 ولدينا $\min \mathbb{N} = \inf \mathbb{N} = 0$، لكنها ليست محدودة من الأعلى. مجموعة الأعداد الصحيحة ليست محدودة من الأدنى ولا محدودة من الأعلى.

2) إذا اعتبرنا المجال $[1,3]$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن $\min[1,3] = \inf[1,3] = 1$ و $\max[1,3] = \sup[1,3] = 3$.

3) إذا اعتبرنا المجال $]1,3[$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن $\inf]1,3[= 1$ لكن $\min]1,3[$ غير موجود و $\max]1,3] = \sup]1,3] = 3$.

4) لتكن E مجموعة و $\wp(E)$ مجموعة أجزائها. نعرّف على $\wp(E)$ علاقة ترتيب "$\le$" بـــ $A \le B$ إن كان $A \subset B$. ليكن $A = \{\{x\}, x \in E\}$.
من الواضح أن A جزء من $\wp(E)$.

نلاحظ أن A محدودة من الأعلى بـــ E لأن

$$\forall \{x\} \in A, \quad \{x\} \subset E.$$

لكن $E \notin A$. إذن $E \neq \max A$.

لاحظ أن $\inf \wp(E) = \min \wp(E) = \varnothing$ و $\sup \wp(E) = \max \wp(E) = E$.

لنقدم الآن الطريقة المسلّمية لإنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف (إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية)

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة نرمز لها بـــ $\mathbb{R}$ نعرف عليها علاقة ترتيب "$\leq$" وقانونين داخليين هما الجمع "+" والضرب "." تحقق المسلمات التالية :

1) $(\mathbb{R},+,.)$ حقل تبديلي نرمز بـــ 0 و 1 للعنصرين الحياديين لقانوني الجمع والضرب على التوالي.

2) $(\mathbb{R},+,.)$ المزود بعلاقة الترتيب "$\leq$" حقل مرتب كليا. إذا كان $x \leq y$ مع $x \neq y$ نكتب $x < y$. إذا كان $x < 0$ قلنا أن x سالب (أو سالب تماما) وإذا كان $0 < x$ قلنا أن x موجب (أو موجب تماما)، وإذا كان $x = 0$ قلنا أن x منعدم.

3) مسلمة الحد الأعلى : كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومحدود من الأعلى يقبل حدا أعلى.

تعقيبات

1) لاحظ أن المسلمتين الأولى والثانية ($(\mathbb{R},+,.)$ حقل تبديلي مرتب كليا) تنطبقان على مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. وما يميّز $\mathbb{R}$ عن $\mathbb{Q}$ هو مسلمة الحد الأعلى التي لا يحققها الحقل التبديلي المرتب كليا $\mathbb{Q}$. مثال ذلك : $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$ هو جزء غير خال ومحدود من $\mathbb{Q}$، ويمكن حساب الحد الأعلى $\sup A$ فنجده $\sup A = \sqrt{3}$ علما أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. وهكذا نستخلص أن الحد الأعلى لـــ A غير موجود في $\mathbb{Q}$ وموجود في $\mathbb{R}$.

2) هناك إنشاء لمجموعة الأعداد الحقيقية انطلاقا من معرفتنا لمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ يتم فيه التأكد من وجود مجموعة تتحقق فيها المسلمات السابقة. وهذا الإنشاء ينطلق من إنشاء مجموعات جزئية من $\mathbb{Q}$ تسمى "مقاطع". والمقطع هو كل جزء A غير خال من $\mathbb{Q}$ يتمتع بالخاصية التالية :

$$\forall x \in A,\ \exists x' \in \mathbb{Q} : x' < x \ \Rightarrow\ x' \in A .$$

ثم نعرف "المقطع المفتوح" وهو المقطع

$$\forall x \in A,\ \exists x' \in A : x' > x .$$

(مثال : $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$ مقطع مفتوح في $\mathbb{Q}$).

ثم يصطلح على تسمية كل مقطع مفتوح عددا حقيقيا. وبالتالي فمجموعة المقاطع هي مجموعة الأعداد الحقيقية المطلوب إنشاؤها عبر المسلمات السالفة الذكر. وهذه الطريقة في إنشاء $\mathbb{R}$ تكافئ طريقة أخرى تسمى طريقة ديدكيند Dedekind تعتمد على ثنائيات أجزاء من $\mathbb{Q}$. فعندما يكون A و B جزءين من $\mathbb{Q}$ يحققان الشروط الثلاثة :

1) $A \cap B = \varnothing$

2) $A \cup B = \mathbb{Q}$

3) A مقطع

نقول إن الثنائية (A,B) قُطاعة ديدكيندية (نسبة لديدكيند). العدد الحقيقي في إنشاء ديدكيند هو قُطاعة ديدكندية ومجموعة القطاعات الديدكيندية هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

3) **مبدأ أرخميدس** : المسلمة المعروفة باسم "مبدإ أرخميدس" محققة في $\mathbb{R}$. يقول هذا المبدأ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : \mathrm{n} > x .$$

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (بصفتها جزءا من $\mathbb{R}$) ليست محدودة من الأعلى.

تعريف (القيمة المطلقة والمجالات)

1) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإننا نعرّف القيمة المطلقة لــ x، بــ

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0, \\ -x & : x < 0. \end{cases}$$

2) إذا كان $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ فإن المجموعات التالية

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\},$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\},$$
$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\},$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\},$$

تسمى على التوالي مجالا مغلقا، مفتوحا، نصف مغلق (أو نصف مفتوح)، نصف مغلق (أو نصف مفتوح).

3) كما نتبنى الرموز التالية :

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},$$
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\},$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq b\},$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\},$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\}.$$

هناك نظرية تعرف بمبدأ كانتور Cantor للمجالات المتداخلة نقدمها هنا على أن نعود إليها في فصل المتتاليات لإضافة بعض التفاصيل بشأنها.

نظرية (المجالات المتداخلة)

نعتبر متتالية مجالات متداخلة، أي مجالات $[a_n, b_n]$ تحقق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

عندئذ يكون $\bigcap_{n\infty\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

تعقيب

1) لاحظ، كما سنؤكد لاحقا (الفصل الموالي) أن نتيجة النظرية تسقط في حال المجالات غير المغلقة.

2) تفيد هذه النظرية في الكثير من البراهين. فعلى سبيل المثال، يمكن من خلالها إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير عدودية، أي أنه لا يوجد تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية.

نظرية (العدودية)

1) نقول عن مجموعة إنها عدودية إذا استطعنا إيجاد تقابل بينها وبين $\mathbb{N}$.

2) إن $\mathbb{R}$ ليس عدوديا.

تعقيب

إذا استطعنا إيجاد تقابل بين $\mathbb{R}$ ومجموعة قلنا أن لهذه المجموعة "قوة المستمر" أو "قدرة المستمر". لاحظ أن المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ عدودية وبالتالي فليس لها قوة المستمر.

تعريف (العدد الجبري، العدد المتسامي)

1) تسمى كل معادلة، ذات المجهول x، من الشكل :

$$a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

حيث $(a_p)_{p=0,...,n}$ أعداد طبيعية، معادلة جبرية.

2) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نقول عن x إنه عدد جبري إذا كان جذرا لمعادلة جبرية.

3) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نقول إن x عدد متسام إن لم يكن عددا جبريا.

أمثلة

1) كل عدد ناطق عدد جبري.

2) الأعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\frac{1}{\sqrt{5}}$ أعداد جبرية لأنها حلول للمعادلات الجبرية $x^2 - 2 = 0$، $x^2 - 3 = 0$، $x^2 - \frac{1}{5} = 0$، على التوالي، وهي ليست ناطقة.

3) العدد π عدد متسام.

4) أساس اللوغاريتم النبيري $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ عدد متسام.

نظرية (الأعداد الجبرية، الأعداد المتسامية)

1) مجموعة الأعداد الجبرية الحقيقية مجموعة عدودية.
2) مجموعة الأعداد المتسامية الحقيقية مجموعة غير عدودية.

تعقيب

ينتج من هذه النظرية أن عدد الأعداد المتسامية أكبر بكثير من عدد الأعداد الجبرية.

لنتعرف على الجزء الصحيح لعدد حقيقي. من أجل ذلك نلاحظ قيام المساواة $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$ (تأكد من ذلك).

تعريف (الجزء الصحيح)

نكتب $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[$. وليكن $x \in \mathbb{R}$. يوجد عدد صحيح وحيد n_0 يحقق $n_0 \le x < n_0 + 1$. يسمى هذا العدد الجزء الصحيح للعدد x ونرمز إليه عادة بـــ $n_0 = [x]$ أو $n_0 = E(x)$.

تعقيب

من الواضح أن كل عدد حقيقي x يكتب على الشكل $x = [x] + \alpha$ حيث α عدد حقيقي يحقق $0 \le \alpha < 1$.

2.2 الخواص الطبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية

إن دراسة المتتاليات والدوال العددية وخواصها مثل خاصية الاستمرار أو قابلية الاشتقاق أو المكاملة تتطلب معرفة نمط معين من المفاهيم

والخواص - تسمى الخواص الطبولوجية - التي تتمتع بها مجموعة الأعـــداد الحقيقية.

تعريف (المجموعة المفتوحة)

1) ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه جزء مفتوح من $\mathbb{R}$ إذا تحقق الشرط التالي :
من أجل كل عنصر x من A، يوجد مجال $I(a,\alpha)$ مركزه x ونصف طوله α بحيث $A \supset I(x,\alpha)$.
2) المجموعة الخالية مجموعة مفتوحة.

تعقيب

كيف نثبت أن جزءا من $\mathbb{R}$ ليس مفتوحا؟ يكفي أن نجد عنـــصرا x من A بحيث مهما كان العدد الموجب α فإن $I(x,\alpha) \not\subset A$.

أمثلة

1) كل مجال مفتوح $]a,b[$ يعتبر مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ذلك أنه من أجل كل عنصر x من $]a,b[$ يكفي اختيار α في التعريف السابق أصغر العددين $\frac{x-a}{2}$ و $\frac{b-x}{2}$ فيتبيّن أن $]a,b[\supset I(x,\alpha)$.

2) من المجالات المفتوحة أيضا تلك التي تكتب على الشكل $]-\infty,a[$ أو $]b,+\infty[$.

3) المجال $]a,b[$ ليس مفتوحا لأن $a \in]a,b[$ والمجال $I(a,\alpha)$ ليس محتويا في $]a,b[$.

4) ليكن $a \in \mathbb{R}$. إن $\{a\}$ ليس مفتوحا. ذلك أنه مهما كان العدد الموجب α فإن $I(a,\alpha) \not\subset \{a\}$.

5) $\mathbb{R}$ مفتوح لأن : مهما كان $x \in \mathbb{R}$ يوجد عدد $\alpha > 0$ بحيث $I(x,\alpha) \subset \mathbb{R}$. الواقع أن الاحتواء السابق محقق هنا من أجل كل عدد α.

نظرية (اتحاد والتقاطع المفتوحات)

> 1) كل اتحاد مفتوحات مجموعة مفتوحة.
>
> 2) كل تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة.

تعقيب

1) لاحظ أن تقاطع عدد غير منته من المفتوحات ليس دائما مفتوحا، مثل المجالات $I(a,\frac{1}{n}) = \left]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right[$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

لتوضيح ذلك نلاحظ أن $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I(a,\frac{1}{n})$ ونتساءل عن وجود عنصر آخر ينتمي إلى هذا التقاطع. لنفرض جدلا أنه يوجد x يختلف عن a بحيث $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I(a,\frac{1}{n})$. هذا يعني أن $x \in I(a,\frac{1}{n})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.
لكن هذا غير صحيح للأسباب التالية :

2) إذا كان $x-a>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_0 بحيث $x-a>\frac{1}{n_0}$ (يكفي اختيار n_0 مساويا لـ $\left[\frac{1}{x-a}\right]+1$ حيث يرمز $\left[\frac{1}{x-a}\right]$ للجزء الصحيح لـ $\frac{1}{x-a}$). وعندئذ يكون $x\notin I(a,\frac{1}{n_0})$. ومنه $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I(a,\frac{1}{n})$.

3) إذا كان $x-a<0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_1 بحيث $x-a<-\frac{1}{n_1}$ (يكفي اختيار n_1 مساويا لـ $\left[\frac{1}{a-x}\right]+1$ حيث يرمز $\left[\frac{1}{a-x}\right]$ للجزء الصحيح لـ $\frac{1}{a-x}$). وعندئذ يكون $x\notin I(a,\frac{1}{n_1})$. ومنه $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I(a,\frac{1}{n})$.

خلاصة القول هي إذن أن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I(a,\frac{1}{n})=\{a\}$. وقد وضحنا في الأمثلة السابقة أن المجموعة $\{a\}$ ليست مفتوحة.

تعريف (الجوار)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و $V\subset\mathbb{R}$. نقول عن V إنه جوار لـ x إذا وجد مفتوح U بحيث $x\in U\subset V$.

مثال

ليكن $]a,b[$ مجالا مفتوحا و $x\in]a,b[$. لاحظ الكتابة البديهية $x\in]a,b[\subset]a,b[$ التي تثبت حسب التعريف السابق أن $]a,b[$ جوار لـ x. نستخلص أن كل مجال مفتوح هو جوار لكل نقطة منه.

ليكن U مفتوحا من $\mathbb{R}$ و $x \in U$. لاحظ الكتابة البديهية $x \in U \subset U$ التي تثبت حسب التعريف السابق أن U جوار لـ x. نستخلص أن كل مفتوح من $\mathbb{R}$ يمثل جوارا لكل نقطة منه.

نظرية (اتحاد وتقاطع الجوارات)

ليكن $x \in \mathbb{R}$. نرمز بـ $V(x)$ لمجموعة جوارات x. لدينا:

1) $\forall V \in V(x),\ x \in V$.

2) $\left.\begin{array}{l} V \in V(x), \\ V \subset W \end{array}\right\} \Rightarrow W \in V(x)$.

3) تقاطع عدد منته من الجوارات لـ x جوار لـ x.

4) كل اتحاد لجوارات لـ x هو جوار لـ x.

تعقيب

لاحظ أنه يمكن اختيار U في التعريف السابق مساويا لمجال مفتوح. ومن الناحية العملية فإن الجوارات التي نستخدمها في معظم الأحيان هي المجالات المفتوحة.

تعريف (النقطة الملاصقة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن نقطة x من $\mathbb{R}$ إنها نقطة ملاصقة لـ A إذا كان :

$$\forall V \in V(x),\ V \cap A \neq \varnothing .$$

مجموعة النقاط الملاصقة للجزء A من $\mathbb{R}$ تسمى ملاصقة A، ونرمز لها عادة بـ $\overline{A}$.

مثال

ملاصقة المجال $]a,b[$ هي $[a,b]$ ذلك أنه إذا كان x عنصرا من $[a,b]$ وكان V جوارا لـــ x فإنه يوجد مجال $V \supset I(x,\alpha)$. لاحظ أن $I(x,\alpha)\cap]a,b[\neq \varnothing$: لتوضيح ذلك نقول إن هناك 3 حالات هي :

– إما $a < x < b$. عندئذ فإن $x \in I(x,\alpha)\cap]a,b[$ ... الواقع أن لدينا أكثر من ذلك : $]c,d[\subset I(x,\alpha)\cap]a,b[$ حيث c هو أكبر العددين a و $-\alpha$، و d هو أصغر العددين b و α. وبالتالي : $I(x,\alpha)\cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.

– وإما $x = a$. عندئذ فإن $]a,d[\subset I(x,\alpha)\cap]a,b[$ حيث d هو أصغر العددين b و α. وبالتالي : $I(x,\alpha)\cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.

– وإما $x = b$. عندئذ فإن $]c,b[\subset I(x,\alpha)\cap]a,b[$ حيث c هو أكبر العددين b و α. وبالتالي : $I(x,\alpha)\cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.

وهكذا يتضح أن $[a,b]$ محتوي في المجموعة الملاصقة لـــ $]a,b[$. ومن جهة أخرى إذا كان x عنصرا لا ينتمي إلى $[a,b]$، مثلا $x < a$ فإن الجوار V لـــ x المتمثل في المجال المفتوح $I(x,\alpha)$ لا يلتقي بـــ $]a,b[$ عندما يكون $\alpha = \frac{x+a}{2}$، أي أن $I(x,\alpha)\cap]a,b[= \varnothing$. ومنه فإن كل $x < a$ لا ينتمي إلى ملاصقة $]a,b[$. بنفس الطريقة نبين أن كل $x > b$ لا ينتمي إلى ملاصقة

$]a,b[$ (نأخذ $\alpha = \frac{x+b}{2}$ بدل $\alpha = \frac{x+a}{2}$). خلاصة القول إن ملاصقة المجال $]a,b[$ هي $[a,b]$.

لاحظ أن استدلالا مماثلا يبيّن أن ملاصقة المجال $[a,b[$ هي $[a,b]$. وكذلك الأمر فيما يخص $]a,b]$.

نظرية (الملاصقة والاحتواء)

ليكن A ، B جزءين من $\mathbb{R}$ و $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ملاصقتاهما. لدينا :

1) $A \subset \overline{A}$.

2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

تعريف (المجموعة المغلقة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه جزء مغلق من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\complement_{\mathbb{R}} A$ متممته في $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة.

تعقيب

لما كانت متممة متممة مجموعة هي المجموعة ذاتها ($A = \complement_{\mathbb{R}}(\complement_{\mathbb{R}} A)$) فإن متممة مغلق جزء مفتوح، أي أن لدينا في واقع الأمر الاستلزمان :

A مفتوح $\Leftarrow$ $\complement_{\mathbb{R}} A$ مغلق.

A مغلق $\Leftarrow$ $\complement_{\mathbb{R}} A$ مفتوح.

أمثلة

1) نعلم – تعريفا — أن $\varnothing$ جزء مفتوح. وبالتالي فإن متممته $\complement_{\mathbb{R}}\varnothing$ مغلقة. وهذه المتممة هي $\mathbb{R}$. إذن $\mathbb{R}$ مغلق. إذن فإن $\mathbb{R}$ مفتوح ومغلق في آن واحد.

2) يأتي مما سبق – بالمرور إلى المتممة – أن المجموعة الخالية $\varnothing$ هي أيضا مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

3) نعلم أن $]a,b[$ مفتوح. إذن $\complement_{\mathbb{R}}]a,b[$ مغلق، أي أن الاتحاد $]-\infty,a]\cup[b,+\infty[$ جزء مغلق من $\mathbb{R}$.

4) نعلم أن $]-\infty,a[$ و $]b,+\infty[$ مفتوحان. وبالتالي فإن الاتحاد $]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$. ومنه يأتي أن متممة الاتحاد $\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]b,+\infty[\right)$ مغلقة. لاحظ أن

$$[a,b]=\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]b,+\infty[\right).$$

ومنه $[a,b]$ مغلق.

5) كل مجال من الشكل $]-\infty,a]$ أو $[b,+\infty[$ مجال مغلق لأن متممة $]-\infty,a]$ (وهي $]a,+\infty[=\complement_{\mathbb{R}}]-\infty,a]$) مفتوحة، وكذلك متممة $[b,+\infty[$ (وهي $]-\infty,b[=\complement_{\mathbb{R}}[b,+\infty[$) مفتوحة.

6) كل مجموعة $\{a\}$ مجموعة مغلقة ذلك أن

$$\{a\}=\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]a,+\infty[\right)$$

علما أن $]-\infty,a[$ و $]a,+\infty[$ مفتوحان وكذلك $]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$.

نظرية (اتحاد وتقاطع المغلقات)

> 1) كل اتحاد منته لمجموعات مغلقة مجموعة مغلقة.
>
> 2) كل تقاطع (منته أو غير) من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.

تعقيب

كنا لاحظ أن تقاطع عدد غير منته من المفتوحات ليس دائما مفتوحا. وضربنا مثلا على ذلك بالمجالات $I(a,\frac{1}{n}) = \left]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right[$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ حيث a نقطة من $\mathbb{R}$. إن مثيلة هذه التعقيب فيما يخص المغلقات هي أن اتحاد عدد غير منته من المغلقات ليس دائما مغلقا. مثال ذلك الاتحاد $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

لاحظ أن كل عدد x من المجال $[0,1[$ ينتمي إلى أحد المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ (الواقع أنه ينتمي إلى كل المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ التي يكون فيها $n > \frac{1}{1-x}$). ومنه $[0,1[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. لاحظ بعد ذلك أن أي عدد x لا ينتمي إلى $[0,1[$ لا يمكن أن ينتمي لأحد المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ مهما كان العدد الطبيعي $n \neq 0$. ولذا فإن $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. خلاصة القول إن $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1[$ مع التعقيب أن $[0,1[$ ليس مغلقا.

لدينا في الواقع النظرية التالية التي تربط بين الاتحاد والتقاطع والملاصقة :

نظرية (الاتحاد والتقاطع والملاصقة)

ليكن A و B جزئين من $\mathbb{R}$. لدينا :

1) A مغلق $\Leftrightarrow$ $A=\overline{A}$،

2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$،

3) $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

تعقيب

لاحظ أن $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$. خذ مثلا $A=]0,1[$ و $B=]1,2[$. فستجد أن $\overline{A}=[0,1]$ و $\overline{B}=[1,2]$. ومنه $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$.
ومن جهة أخرى $A\cap B=\varnothing$، وعليه $\overline{A\cap B}=\varnothing$ لأن $\varnothing$ مجموعة مغلقة. خلاصة القول في هذا المثال أن $\overline{A}\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$.

تعريف (المجموعات المحدودة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه محدود إن وجد مجال $[a,b]$ بحيث $A\subset[a,b]$.

أمثلة

1) كل مجال مغلق من الشكل $[a,b]$ جزء محدود.

2) $\mathbb{N}$ ليس محدودا.

3) $[1,+\infty[$ مجال (مغلق) غير محدود.

نظرية (المحدودية)

لدينا :

1) كل اتحاد منته لمجموعات محدودة مجموعة محدودة.

2) ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و B جزءا محدودا (من $\mathbb{R}$) بحيث $A \subset B$.
عندئذ يكون A محدودا.

3) إذا كان A جزءا محدودا فإن ملاصقته $\overline{A}$ محدودة أيضا.

نظرية (الخاصية المميزة)

ليكن A جزءا محدودا من $\mathbb{R}$ و $a = \sup A$ و $b = \inf A$. عندئذ :

1) لدينا الخاصية المميزة للحد الأعلى :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : \ a - \varepsilon < x \le a .$$

2) لدينا الخاصية المميزة للحد الأدنى :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A : \ b \le y < b + \varepsilon .$$

3. الأعداد العقدية

من الطرق الشهيرة في إنشاء مجموعة الأعداد المركبة نذكر :

1.3 الإنشاء باستخدام الجداء الديكارتي $\mathbb{R}^2$

نعتبر المجموعة $\mathbb{R}^2$ ونزودها بالعمليتين التاليتين، الجمع والضرب :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,$$
$$(a,b)+(c,d) = (a+b, c+d)$$
$$(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

من السهل إثبات أن $\mathbb{R}^2$ المزود بهاتين العمليتين حقل تبديلي (العنصران الحياديان هما على التوالي $(0,0)$ و $(1,0)$) وأن التطبيق

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (x,0)$$

تماثل حقول وأنه تباين، وهو ما يسمح بالمطابقة بين $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R})$، أننا نضع

$$\mathbb{R} \ni x \equiv (x,0) \in \mathbb{R}^2 .$$

ثم إننا نضع $i=(0,1)$ فيصبح : $a+ib = (a,0)+(0,1)b = (a,b)$.

وبذلك تصبح مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي :

$$\mathbb{C} = \left\{ a+ib : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

2.3 الإنشاء باستخدام كثيرات الحدود

نعتبر مجموعة كثيرات الحدود على $\mathbb{R}$، التي نرمز لها عادة بـــ $\mathbb{R}[X]$، ثم نعرّف علاقة التكافؤ R التالية على $\mathbb{R}[X]$:

من أجل كثيري حدود P و Q، يكون PRQ إذا وفقط إذا كان باقي قسمة P على كثير الحدود X^2+1 الأقليدية يساوي باقي قسمة Q على كثير الحدود X^2+1 الأقليدية. يمكن اعتبار مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حقلا متشاكلا مع حقل النسبة $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. يكفي اعتبار عدد مركب $a+ib$، وإرفاقه بكثير الحدود $a+bX$. ولما كان باقي قسمة كل كثير الحدود P على X^2+1 يكتب على الشكل $a+bX$ فإننا نستطيع تعريف التطبيق

$$f:\mathbb{C} \to \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$$
$$a+ib \mapsto (P)$$

حيث يمثل (P) صنف التكافؤ الذي باقي قسمة كل عنصر منه على X^2+1 يساوي $a+bX$. ومن ثم نطابق $a+ib \equiv (P)$. فعلى سبيل المثال فإن $0 \equiv (X^2+1)$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود X^2+1 على X^2+1 يساوي $0+0.X$، أي 0)، $1 \equiv (1)$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود الثابت 1 على X^2+1 يساوي $1+0.X$، أي 1)، $i \equiv (X)$ (لأن باقي قسمة كثير الحدود X على X^2+1 يساوي $0+1.X$).

3.3 الإنشاء باستخدام المصفوفات

نعتبر مجموعة المصفوفات 2×2 من الشكل $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ حيث تمسح (a,b) الجداء $\mathbb{R}^2$. إذا رمزنا لهذه المجموعة بـــ M وزودناها بعمليتي جمع وضرب المصفوفات فإننا نلاحظ أن العمليتين داخليتان في M وأن

$(M,+,\times)$ يصبح حقلا. على سبيل المثال فإن مقلوب $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. نطابق بعد ذلك بين $\mathbb{C}$ و M من خلال التشاكل :

$$\begin{aligned} f:\mathbb{C} &\to M \\ a+ib &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

فنلاحظ مثلا أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ تمثل i وأن المصفوفة $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ تمثل $a-ib$ (مرافق $a+ib$).

4.3 كتابة الأعداد المركبة

هناك طريقتان لكتابة الأعداد المركبة هما الكتابة الجبرية، وهي التي سبق ذكرها المتمثلة في كتابة عدد مركب على الشكل $a+ib$، وهناك أيضا الكتابة المثلثية المتمثلة في إدخال زاوية (عمدة) $\vartheta\in[0,2\pi[$ وطويلة $r\in\mathbb{R}^+$ وكتابة $a+ib=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ في حالة $a+ib\in\mathbb{C}^*$. وهذا يعني أن

$$\begin{cases} a = r\cos\vartheta, \\ b = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

ونلاحظ أن التعبير عن r بدلالة a و b هو $r=\sqrt{a^2+b^2}$. أما التعبير عن ϑ بدلالة a و b فيعرّف بالعلاقة (علما أن $\vartheta\in[0,2\pi[$)

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

كما نلاحظ أن العمدة تحقق العلاقة $\operatorname{tn}\vartheta = \frac{b}{a}$ عندما يكون $a \neq 0$.

أما إذا كان $a = 0$ فإن $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ أو $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ حسب إشارة b.

ويتم التعبير عن الأعداد المركبة بالشكل الأسي فنكتب

$$a + ib = r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right) = re^{i\vartheta}.$$

يعتبر هذا التمثيل مهمًّا في استعمالات كثيرة، مثل الهندسة (في التحويلات النقطية، مثلا) والفيزياء (سيما الإلكترونيك).

نلاحظ أيضا أن العلاقة $\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$ تؤدي إلى دستوري أولر Euler (1707–1783) :

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \\ \sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}. \end{cases}$$

والواقع أن التعريف الدقيق للدوال المثلثية يتم بعد تعريف الدالة الأسية بواسطة السلاسل الصحيحة. ونستفيد في هذا الانتقال من الدالة الأسية إلى الدوال المثلثية من العلاقتين السابقتين. ونستنتج من ذلك دستور دي موافر de Moivre (1667–1774) حيث يمكن تبرير الكتابة :

$$\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)^n = \left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$$

أي أن :

$$\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta.$$

5.3 الرؤية الهندسية للأعداد العقدية

نزود المستوي التآلفي بمعلم متعامد ومتجانس ونعتبر عنصرا $z = x + iy \in \mathbb{C}$. ثم نرفق $z = x + iy$ بالنقطة $M(x, y)$ في المستوي فننشئ بذلك تقابلا بين مجموعة الأعداد المركبة ومجموعة النقاط في المستوي. نلاحظ مثلا أن صورة المرافق $\bar{z} = x - iy$ لـــ z هي النقطة $M'(x, -y)$. وبالتالي فإن صورتي z ومرافقه متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل. ويمكن استنتاج كثير من الخواص التي تربط الأشعة بالأعداد المركبة، وهي خواص تثبت السهولة في الحصول على العديد من العلاقات الهندسية عند استخدام الأعداد المركبة (مثل جمع الأشعة وضربها في الأعداد السلمية ...).

****

الفصل الثاني

المتتاليات

العناوين

1. **مقدمة**
2. **تعاريف خواص أولية**
3. **نظريات أساسية**
4. **المتتاليات الكوشية**
5. **المتتاليات التدريجية**
6. **تطبيقات على المتتاليات**

1.6 الدالة الأسية

2.6 الدالتان الجيب وجيب التمام

3.6 خواص الدوال المعرفة آنفا

4.6 خواص أخرى

5.6 الدالة اللوغاريتمية

1. مقدمة

تعتبر المتتاليات من أهمّ الأدوات المستخدمة في الرياضيات. ذلك أنها تتميز بصفة "التقطع" الناجمة عن ارتباط المتتاليات بالأعداد الطبيعية التي يدركها فكرنا أكثر مما يدرك الأعداد الأخرى كالأعداد الحقيقية أو المركبة (العقدية). والدليل على ذلك ظهور واستخدام الأعداد الطبيعية قبل سائر أنماط الأعداد الأخرى.

والرياضيون ليسوا الوحيدين الذين يفضلون عموما العمل بالمتتاليات بدل الأدوات الأخرى (كالدوال مثلا). أنظر إلى الجغرافيين والإحصائيين والفيزيائيين وغيرهم من العاملين في حقول المعرفة المختلفة ... إنهم جميعا يستخدمون المتتاليات ولا يلجئون إلى الدوال إلا عند الضرورة. ومن لم يسمع مثلا بمتتالية فيبوناتشي Fibonacci (1170–1250)، أي المتتالية التي يكون أي عنصر منها يساوي مجموع العنصرين السابقين له، مع العلم أن العنصرين الأول والثاني معلومان)؟ إنها متتالية تدخل في توزيع وتنظيم مواقع ورق بعض النباتات حول الأغصان. والأغرب من ذلك أن هذا التوزيع يضمن وصول أشعة الشمس بأكبر قدر ممكن إلى أوراق هذه النباتات. وقد أثبت جونس R. Jones عام 1975 بأن عناصر هذه المتتالية تمثل جذورا لكثيرات حدود من الدرجة الخامسة.

كما أن لهذه المتتاليات صلة بقانون توالد بعض الحيوانات كالأرانب. ومن المعلوم أن فيبوناتشي أثبت أن متتاليته تمثل حلا للمسألة التالية : كم

زوجًا من الأرانب يمكن الحصول عليها خلال سنة عندما يكون لنا في البداية زوج واحد وإذا علمنا أن كل زوج يلد زوجًا آخر كل شهر؟

وقد تسائل بعضهم عن إمكانية إنشاء متتالية فيبوناتشية مكوّنة من الأعداد الأولية. لكن غراهام Graham أثبت قضية أخرى تقول إنه بالإمكان إنشاء متتالية فيبوناتشية لا يظهر فيها أي عدد أولي باستثناء الأول والثاني.

أين نجد المتتاليات في الرياضيات؟ إنها موجودة على سبيل المثال في :

– مفهوم الكثافة : كثافة مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي في نفس الفضاء أو فضاء آخر. فأنت إذا أردت مثلا إثبات مساواة أو متباينة في مجموعة الأعداد الحقيقية يكفيك في أغلب الأحيان أن تثبتها في مجموعة الأعداد الناطقة، وهذا بفضل كثافة هذه المجموعة الأخيرة في مجموعة العداد الحقيقية.

– دراسة المعادلات التفاضلية : نحصل على حلول هذه المعادلات في الكثير من الأحيان كنهايات متتاليات تقربنا شيئا فشيئا من الحل الدقيق.

– في الحساب (أو التحليل) العددي : التقريبات وتقديرات الأخطاء تتم عموما عبر المتتاليات.

– تعريف مفاهيم رياضية أخرى : الانتقال مثلا من تعريف مفهوم المكاملة لدالة معرفة على مجال حقيقي وتأخذ قيمها في فضاء مجرد – فضاء باناخي Banach (1892–1945) مثل $\mathbb{R}^n$ – يمرّ عبر المتتاليات.

وكتطبيق على المتتاليات سنوضح كيف يمكن تعريف بعض الدوال المتداولة التي ألفها الأساتذة والتلاميذ باستخدام المتتاليات وخواصها دون

سواها. وسيلاحظ القارئ أن التعريف الذي لا يستعمل سوى المتتاليات يعطي تدريجيا جميع الخواص التي تتمتع بها تلك الدوال. وسنكتفي في هذا المقام بعيّنة من الدوال تتمثل في :

- الدالة الأسية،
- الدالة المثلثية جب sin ،
- الدالة المثلثية تجب cos .

غير أن دراسة هذه الدوال والإلمام بخواصها (باستعمال المتتاليات، لا غير) تمكننا من الحصول بصفة مباشرة على تعريف دوال أخرى بالمتتاليات، نذكر منها : الدالة اللوغاريتمية ln (بوصفها الدالة العكسية للدالة الأسية)، والدالة المثلثية ظل tan (بوصفها نسبة للدالتين المثلثيتين جب و تجب).

2. تعاريف وخواص أولية

تعريف (المتتالية)

1) يسمى كل تطبيق

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ متتالية حقيقية.

2) يسمى كل تطبيق

$$\mathbb{N} \to \mathbb{C}$$
$$n \mapsto u_n$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد عقدية (أو المركبة) $\mathbb{C}$ متتالية عقدية.

رمز المتتاليات

نرمز عادة لمتتالية بـــ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو اختــصارا بـــــ(u_n) إن كانــت مجموعة تعريفها واضحة ... لأنه من الجائز أن تكون متتالية معرفة على جزء فقط من $\mathbb{N}$. سنتبنى هذا الرمز من الآن فصاعدا.

مثال

إليك بعض العبارات التي تعرف متتاليات : $u_n = (-1)^n$ ، $u_n = \sqrt{n}$ ، $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ ، $u_n = -\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ ، $u_n = (-1)^n i + \dfrac{n^2}{n^3+1}$.

تعريف (المحدودية والرتابة)

1) يسمى كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة أعداد (طبيعية أو صحيحة أو ناطقة أو حقيقية أو عقدية) متتالية عددية.

2) نقول عن متتالية حقيقية (u_n) إنها متزايدة (متناقصة، على الترتيب) إذا كان $u_n \leq u_{n+1}$ ($u_n \geq u_{n+1}$ على الترتيب) من أجل كل n في مجموعة الأعداد الطبيعية.

3) نقول عن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا وجد ثابت M موجب بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq M\ .$$

4) نقول عن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأدنى إذا وجد ثابت M بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geq M\ .$$

5) نقول عن متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا وجد ثابت M موجب بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leq M\ .$$

احذر

لا يجوز أن نتحدث عن رتابة متتالية إذا أخذت قيما عقدية (مركبة) غير حقيقية ... ذلك أن المجموعة $\mathbb{C}$ غير مرتبة (بالترتيب المعرّف على $\mathbb{R}$)!

تعقيب

1) يمكن إثبات أن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة في آن واحد من الأعلى ومن الأدنى.

2) يمكن دائما ردّ تقارب متتالية عقدية إلى تقارب متتالية حقيقية ... يكفي اعتبار الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

سوف نعتبر، في كل ما يلي، المتتاليات معرفة على كامل مجموعة الأعداد الطبيعية إلا إذا أشرنا إلى عكس ذلك.

مثال

1) المتتالية $u_n=(-1)^n$ غير رتيبة.

2) المتتالية $u_n=\sqrt{n}$ متزايدة.

3) المتتالية $u_n=\dfrac{1}{n+2}$ متناقصة.

4) المتتالية $u_n=-\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ متزايدة.

5) المتتالية $u_n=(-1)^n i+\dfrac{n^2}{n^3+1}$ غير رتيبة (لأنها عقدية).

تعريف (التقارب)

1) نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها متقاربة إذا وجد عدد u بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-u|=0$ أي :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \ n\geq n_0\ \Rightarrow\ \ |u_n-u|<\varepsilon\,.$$

2) نقول عن متتالية إنها متباعدة عندما لا تكون متقاربة.

تعميم :

1) نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا كان :

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \ge n_0 \ \Rightarrow\ u_n > A\ .$$

2) نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا كان :

$$\forall A < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \ge n_0 \ \Rightarrow\ u_n < A\ .$$

لكننا لا نقول في الحالتين الأخيرتين إن المتتالية متقاربة، بل نقول إنها متباعدة.

تعقيب

1) في التعريف ... غالبا ما يعبّر الرياضيون عن " $\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \ge n_0$ " بالقول "من أجل n كبيرا" أو " ابتداء من رتبة معينة".

2) نكتفي عادة في المتتاليات بكتابة $\lim_n |u_n - u| = 0$ بدل $\lim_{n\to+\infty} |u_n - u| = 0$ لأن n يؤول دائما إلى $+\infty$ في موضوع المتتاليات.

3) إذا تقاربت متتالية عددية فإن نهايتها وحيدة.

إليك هذه الخواص المتعلقة بالتقارب، والتي نطلب منك التمرن على إثباتها :

عندما تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متقاربتين فإن :

1) $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$ ،

2) $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n$ ،

3) $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n$ ،

4) من أجل كل عدد λ (حقيقي أو عقدي) :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ،

5) عندما يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$ ،

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right|$ ،

7) إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n \leq v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

تعقيب

نستخلص من الخاصية 7) أن :

$$u_n \leq 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} u_n \leq 0$$
$$u_n \geq 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0,$$

وتصدُق هاتان العلاقتان حتى إن تحقق طرفاها الأولان ابتداء من رتبة معينة ليست بالضرورة الرتبة 0 .

احذر

إذا كان $u_n > 0$ ابتداء من أول رتبة أو ابتداء من رتبة معينة فهـــذا يؤدي إلى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$ ... ولا يؤدي بالضرورة إلى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$. لنتأكد من ذلك خذ $u_n = \dfrac{1}{n}$ الموجبة تماما لكن ذلك لم يمنع انعدام نهايتها.

نظرية (التقارب والمحدودية)

كل متتالية عددية متقاربة متتالية محدودة. والعكس غير صحيح.

أمثلة

1) المتتالية $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة). يمكن تبرير ذلك بالخلف، كما يلي : نفرض وجود نهاية u لهذه المتتالية. تستفيد من العلاقة

$$(0) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u| < \varepsilon$$

باعتبار أولا n زوجيا فيأتي :

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |1 - u| < \varepsilon \, .$$

عندئذ نلاحظ أن (1) تستلزم $u = 1$.

ثم باعتبار n فرديا يأتي :

$$(2) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |-1 - u| < \varepsilon \, .$$

عندئذ نلاحظ أن (2) تستلزم $u = -1$.

وبما إننا لا نستطيع الحصول على $u = 1$ و $u = -1$ في آن واحد نستنتج أن العلاقة (0) مستحيلة. وبالتالي فالمتتالية متباعدة.

2) المتتالية $u_n = \sqrt{n}$ متباعدة. يمكن ملاحظة أنها تؤول إلى $+\infty$ (وهذا لا يعني أنها متقاربة لأن التقارب يستوجب أن تكون النهاية في $\mathbb{R}$ ... و $+\infty$ لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$).

كيف نبرّر أنها تؤول إلى $+\infty$؟ خذ أي عدد ε موجبا (مهما كان كبيرا). يوجد دوما عدد طبيعي n_ε بحيث يكون $\sqrt{n} > \varepsilon$ عندما $n \geq n_\varepsilon$. يكفي مثلا اختيار $n_\varepsilon = ([\varepsilon] + 2)^2$. تأكد من ذلك.

3) المتتالية $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4) المتتالية $u_n = -\frac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو 3. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.

5) المتتالية $u_n = (-1)^n i + \frac{n^2}{n^3+1}$ غير متقاربة. تأكد من ذلك بالاستفادة من تباعد المتتالية $u_n = (-1)^n i$.

تعريف (المتتالية المستخرجة)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. نقول عن متتالية (v_n) إنها مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (أو إنها جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) إذا وجد تطبيق $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايد تماما بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{f(n)}.$$

يمكن إثبات الخواص التالية ذات الصلة بالمتتاليات الجزئية :

1) إن كانت متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد u ، فكل متتالية مستخرجة منها متقاربة نحو u.

2) القضية العكسية للقضية السابقة خاطئة.

3) **نظرية بولزانو – فيرستراش** Bolzano-Weierstrass : كل متتالية محدودة تقبل متتالية جزئية متقاربة.

3. نظريات أساسية

نقدم في ما يلي نتائج متداولة الاستعمال عندما يتعلق الأمر بتعيين طبيعة المتتاليات.

نظرية (الحصر)

إذا كانت لدينا ثلاث متتاليات حقيقية بحيث :

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim v_n = \lim w_n = k \\ k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

فإن (u_n) متقاربة ونهايتها هي k.

نظرية (تقارب المتتاليات الرتيبة)

كل متتالية حقيقية رتيبة ومحدودة متتالية متقاربة، ولدينا :

1) إذا كانت متزايدة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأعلى للمتتالية.

2) إذا كانت متناقصة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأدنى للمتتالية.

تعريف (المتتاليات المتجاورة)

نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، وكانت نهاية متتالية الفرق $(u_n - v_n)$ متقاربة نحو 0.

مثال

المتتاليتان $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة، وفرقهما (المساوي لــ $v_n - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$) يؤول إلى الصفر.

نظرية (التجاور والتقارب)

> كل متتاليتين متجاورتين متتاليتان متقاربتان نحو نفس النهاية.

نظرية (المجالات المتداخلة)

> نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المجال المغلق $I_n = [a_n, b_n]$ من $\mathbb{R}$.
> نفرض أن $I_{n+1} \subset I_n$ من أجل كل n. عندئذ :
> 1) يكون التقاطع $\bigcap_n I_n$ لكل المجالات I_n قطعة مستقيمة I (ومنه فإن التقاطع غير خال).
> 2) إذا كان $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) تكونان متقاربتين نحو نفس النهاية، و $I = \{c\}$ حيث $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = c$.

تعقيب

لو استبدلنا في النظرية السابقة المجالات المغلقة $I_n = [a_n, b_n]$ بالمجالات المفتوحة $I_n =]a_n, b_n[$ لسقطت نتيجة النظرية. مثال ذلك : $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$.

لاحظ أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ ورغم ذلك $\bigcap_n I_n = \phi$.

تعريف (نقطة تراكم)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و a نقطة من $\mathbb{R}$ (تنتمي أو لا تنتمي إلى A). نقول عن a إنها نقطة تراكم للمجموعة A إذا كان كل مجال مفتوح يشمل a يشمل بالضرورة نقطة من A تختلف عن a.

مثال

1) كل نقاط مجال مفتوح نقاط تراكم له.

2) كل نقطة a من $\mathbb{R}$ نقطة تراكم لـــ $\mathbb{Q}$ لأن كل مجال من الشكل $]a, a+\varepsilon[$ يحوي عددا ناطقا بفضل كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ (لاحظ أن هذا العدد يختلف عن a).

نظرية (التراكم والنهاية)

كل نقطة تراكم لمجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تمثل نهاية لمتتالية نقاط من A.

تعقيب

يتضح من النظرية السابقة أن قبول مجموعة A لنقطة تراكم يـــستلزم أنها مجموعة غير منتهية. تعالج النظرية الموالية القضية العكسية.

نظرية (بولزانو — فيرستراش Bolzano-Weierstrass)

1) تقبل كل متتالية محدودة متتالية جزئية متقاربة (سبق ذكرها).

2) كل مجموعة غير منتهية ومحدودة في $\mathbb{R}$ تقبل نقطة تراكم.

تعقيب

النظرية خاطئة في حالة المجموعات غير المحدودة ... تلك حال مجموعة الأعداد الطبيعية (وكذا مجموعة الأعداد الصحيحة) التي لا تقبل نقاط تراكم في $\mathbb{R}$.

حول الأس النبيري

حتى نرى قوة المتتاليات في دراسة الدوال نقدم النتائج الثلاث التالية كتمهيد لتعريف الأس النبيري:

النتيجة 1

ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم مثبتا.
إن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{1}{n^p} C_n{}^p$ (حيث $C_n{}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$) متقاربة ونهايتها $\frac{1}{p!}$.

لنوضح ذلك بالتفصيل. لدينا :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n}) \\
&= \frac{1}{p!} \times \frac{(n-1)(n-2)...(n-(p-1))}{p^{p-1}} \times \frac{(n-p)...2.1}{(n-p)...2.1} \\
&= \frac{1}{p!} \times \frac{n!}{n^p} \times \frac{1}{(n-p)!} \\
&= \frac{1}{n^p} C_n{}^p = u_n.
\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى :

$$\forall j = 1,..., p-1: \quad 1-\frac{j}{n} \le 1,$$

ومنه :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1} \le (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n}).$$

وبالتالي :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1} \frac{1}{p!} \le u_n \le \frac{1}{p!}.$$

لاحظ أن $\lim\limits_{n}\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1} = 1$ (تأكد من ذلك بتطبيق التعريف).

ولذلك عندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة السابقة (مع ترك p مثبتا) نحصل على المطلوب، وهو أن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $\frac{1}{p!}$.

النتيجة 2

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـــ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

إن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة، ونهايتها محصورة بين 2.7 و 3 .

لنوضح ذلك : من السهل أن نرى بأن المتتالية (u_n) متزايدة. ثم إننا نستطيع التأكد بالتراجع من أن :

$$\forall p \geq 1, \qquad \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} \\ &= 1 + \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^p \\ &\leq 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

إذن فالمتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى. ولذا فهي متقاربة حسب نظرية تقارب المتتاليات الرتيبة. ولدينا : $\lim_n u_n \leq 3$. كما أن :

$$2.7 \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = u_4 \leq u_n \leq \lim_n u_n .$$

النتيجة 3

> المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة ونهايتها تساوي نهايـــة المتتاليـــة (u_n) علما أن (u_n) و (v_n) هما المعرفتان آنفا، أي :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

لرؤية ذلك نكتب، حسب دستور ثنائي الحد :

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^{\ p},$$

$$v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^{\ p}.$$

نعلم أن (تأكد من ذلك) :

$$\forall \mathrm{p} \leq \mathrm{n}: \qquad \frac{1}{n^p} C_n{}^p \leq \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}{}^p .$$

ومنه :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n{}^p, \\ v_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} C_{n+1}^{n+1} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}{}^p \\ &\geq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n{}^p \\ &\geq v_n . \end{aligned}$$

إذن المتتالية (v_n) متزايدة.

ومن جهة أخرى فإن :

$$\forall p \leq n, \qquad \frac{1}{n^p} C_n{}^p \leq \frac{1}{p!} .$$

ومن ثم :

$$v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n{}^p \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = u_n ,$$

مع العلم أن $u_n \leq 3$ حسب ما أوضحنا في النتيجة 2. لذلك فإن المتتالية (v_n) محدودة. وبما أنها متزايدة فهي متقاربة.

وحتى نثبت تساوي نهايتي المتتاليتين نعتبر الآن عددين طبيعيين m و n بحيث $m > n \geq 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} v_m &= \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{m^p} C_m{}^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{m^p} C_m{}^p \\ &\geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{m^p} C_m{}^p . \end{aligned}$$

عندما نجعل m يؤول إلى $+\infty$ نحصل على :

$$\lim_{m\to+\infty} v_m \geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} = u_n .$$

ثم نجعل n يؤول إلى لانهاية في هذه المتباينة، فيأتي : $\lim_{m\to+\infty} v_m \geq \lim_{n\to+\infty} u_n$.

ولما كان $v_n \leq u_n$ ينتج :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n .$$

ومنه نستخلص النتيجة $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

تعريف (الأس النبيري e)

نرمز لنهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n) المشتركة بالحرف e (ويرمز إليه بالحرف هـــ بالعربية)، أي أننا نضع تعريفا :

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = e .$$

تعقيبات

1) هذه النهاية ستـــكون أساس اللوغريتم النبيري (ولذا رمزنا لها بـــ e)، وهي التي ستمكننا من إنشاء الدالة الأسية عن طريق المتتاليات.

2) يبدو أن الأسكتلندي جون نابيي Napier (1550–1617) المسمى أيضا نبير Neper هو أول من شعر بوجود العدد الأس e وقد كان

له الفضل في ابتكار اللوغاريتم النبيري (نسبة إلى اسمه). بل وعرّف اللوغريتم $\log_n$ ذا الأساس n بــ $\log_n n^x = x$ وحدث ذلك تعميما لتعريف اللوغاريتم ذي الأساس 2.

وينسب الغرب – ومن حذا حذوهم – ابتكار اللوغاريتمات إلى العالمين الأنكليزيين جون نبير وكذا هنري بريكس Briggs (1556م–1630م)، ويضيف بعضهم الساعاتي السويسري جوست بورجي Burgi (1552م–1632م). فالأول عمل في المتواليات الهندسية والحسابية، وأتى بلفظ "لوغاريتم"، عندما واجه مسائل حسابية معقدة مرتبطة بالتجارة وعلم الفلك واقتنع أنه من الأفضل إيجاد سبيل يسمح بتحويل عملية ضرب الأعداد إلى جمعها. وكان نبير ينظر إلى اللوغاريتم بأنه وسيلة تسمح بإنشاء جداول تكون في أحد أعمدتها جداءات يقابلها عمود يحمل مجاميع. أما بريكس فقام بعملية اختصار، حيث ارتأى من الأفضل استخدام النظام العشري في بعض الحسابات. ثم أتى بورجي فطوّر جداول نبير.

وعندما ينظر المرء إلى ما قام به ابن حمزة الجزائري (القرن 10هــ/16م) في دراسة المتواليات الهندسية والحسابية ويقارنها بعمل نبير فسيجد فيها الكثير من نقاط الالتقاء، علما أن عمل ابن حمزة سبق عمل نبير بأزيد من عقدين. وفي هذا السياق يقول مؤرخ العلوم قدري حافظ طوقان (في كتابه تراث العرب العلمي في الرياضيات، دار الشروق، بيروت، 1968، ص. 86): "ولو أن ابن حمزة استعمل مع المتوالية الهندسية المذكورة المتوالية العددية التي تبدأ بالصفر، ... لكان اخترع اللوغاريتمات التي

أوجدها نبير وبورجي بعده — أي بعد ابن حمزة — بأربع وعشرين سنة" ثم يضيف : "ما دار بخلدي أني سأجد بحوثا لعالم عربي كابن حمزة هي في حد ذاتها الأساس والخطوة الأولى في وضع أصول اللوغاريتم.".

وكان الرياضي السويسري ليونهارد أولر Euler (1707–1783) قد سمى e بالاسم المعروف الآن خلال القرن الثامن عشر. واتضح أن هذا الثابت لا يستخدم في الرياضيات فحسب بل دخل عددا كبيرا من المجالات منها الاقتصاد وقياس تكاثر الخلايا الحية في جسم. كما يدخل في توزيع الأعداد الأولية في قائمة الأعداد الطبيعية. ومن المعلوم أن العدد e مثل π عدد أصم (أي غير ناطق) ومتسام (أي أنه ليس حلا لمعادلة جبرية ذات معاملات ناطقة). ولذا لا يمكن تحديد هذا العدد بدقة مع العلم أن الأرقام العشرية غير منتهية وليست دورية. ومن ثمّ انكب بعض الرياضيين على تعيين الأرقام العشرية وقد توصلوا الآن إلى أكثر من مليار وربع المليار رقم بعد الفاصلة ... ولا شك أنهم سيجدون المزيد والمزيد من هذه الأرقام مستقبلا.

نظرية (الأس مرة أخرى)

ليكن $n_0 \in \mathbb{N}^*$. إن المتتالية (v_n) المعرفة بـــ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = (1 + \frac{n_0}{n})^n$$

متقاربة.

4. المتتاليات الكوشية

هناك خاصية بالغة الأهمية تتمتع بها فئة من المتتاليات تمكننا من معرفة طبيعة متتالية دون النظر إلى نهايتها.

تعريف (المتتالية الكوشية)

نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها كوشية، أو لكوشي Cauchy، إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \quad \wedge \quad m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u_m| < \varepsilon .$$

تعقيب

1) يمكن أيضا التعبير عن هذه العلاقة بالكتابة

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \quad \wedge \quad p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon .$$

2) البرهان على تقارب متتالية باستخدام التعريف يعني إيجاد عدد طبيعي n_0 بدلالة ε يحقق العلاقة الواردة في التعريف. ومن ناحية عملية ننطلق من العبارة $|u_n - u|$ ونسعى إلى إيجاد عبارة أو عبارات أكبر منها إلى أن نصل إلى عبارة بسيطة بدلالة n فنكتب عندئذ أنها أصغر من ε. ثم من المتباينة الأخيرة نستخرج (غالبا ما يكون في شكل متباينة) العدد الطبيعي n بدلالة ε. وأخيرا يحق لنا أن نسمي ذلك العدد الطبيعي n_0. لاحظ أن العدد الطبيعي المحصل عليه ليس وحيدا ... فإن حددت قيمة له فكل القيم الأكبر منه يمكن أن تكون أيضا n_0.

إليك مثالين على ذلك :

مثال 1

كيف نبيّن تقارب المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{1}{n}$ نحو 0؟

نكتب $|u_n - u| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. وهذا يـــؤدي إلى $n > \frac{1}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ، مثلا : $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. وكما أشرنا فإن أي عـــدد طبيعي أكبر من $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ صالح أن يكون قيمة لـــ لـــــ n_0 لأنـــه يحقـــق بالضرورة التعريف.

مثال 2

كيف نبين أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ متقاربة نحو 3؟

نكتب :

$$|u_n - u| = \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{-1-3}{n+1}\right| = \frac{4}{n+1} < \frac{4}{n} < \varepsilon .$$

ومنه يأتي أن $n > \frac{4}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$، مثلا $n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$.

نقدم النظرية التالية التي تعبّر عن تمام فضاء الأعداد الحقيقية وكذا فضاء الأعداد المركبة.

نظرية (تمام الفضاءين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$)

تكون متتالية عددية متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشية.

تعقيب

1) تعود أهمية هذه النظرية إلى أنها تسمح بدراسة طبيعة متتالية (أي معرفة ما إذا كانت متقاربة أم لا) دون معرفة نهايتها (في حال تقاربها).

2) يعمم تعريف المتتاليات الكوشية إلى فضاءات أوسع من $\mathbb{R}$ ومن $\mathbb{C}$ ... إلى فضاءات مجردة، يطلق عليها اسم الفضاءات المترية. وحينئذ تظهر أهمية المتتاليات الكوشية لأن هناك فضاءات مترية تصدق فيها النظرية السابقة (كل المتتاليات الكوشية متتاليات متقاربة وكل المتتاليات المتقاربة كوشية) وهناك فضاءات مترية أخرى نجد فيها متتاليات كوشية غير متقاربة ! تسمى فئة الفضاءات المترية التي تصدق فيها النظرية السابقة الفضاءات التامة.

وكمثال على فضاء غير تام (أي يحتوي على متتاليات كوشية غير متقاربة) يمكن إعطاء فضاء الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. لنعتبر عددا $x \notin \mathbb{Q}$. نعلم أن $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$، ولذا من أجل كل عدد طبيعي n، يوجد عدد ناطق x_n ينتمي إلى $\left]x-\frac{1}{n},x\right[$. لاحظ أن المتتالية الناطقة (x_n) متقاربة نحو العدد غير الناطق x (لأن $x-\frac{1}{n} \le x_n \le x$ والمرور إلى النهاية في طرفي هذه العلاقة يثبت المطلوب). ومن جهة أخرى، ما دامت المتتالية (x_n) متقاربة في $\mathbb{R}$ فهي كوشية في $\mathbb{R}$. فمن البديهي إذن أنها كوشية أيضا في $\mathbb{Q}$. ما الفائدة من هذا الكلام؟ الفائدة أن وحدانية النهاية تؤدي بنا في هذه الحالة إلى القول بأننا أنشأنا متتالية من $\mathbb{Q}$، كوشية في $\mathbb{Q}$ لكنها غير متقاربة في $\mathbb{Q}$ إذ أن نهايتها $x \notin \mathbb{Q}$. وهكذا نكون قد بيّنا أن $\mathbb{Q}$ غير تام خلافا لـــ $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$.

5. المتتاليات التدريجية

نتحدث عن متتالية عددية تدريجية إذا كان تعريفها يعطي حدها من الرتبة n بدلالة حد (أو عدة حدود) من رتبة أقل من n. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات الحقيقية عندما يكون الحد u_n من الرتبة معطى بدلالة الحد من الرتبة $n-1$ على النحو التالي :

ننطلق من تابع $f : U \subset \mathbb{R} \to U$ ونعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = a \in U, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

حيث a عنصر معطى في U. لماذا نفترض أن مجموعة وصول f هي U : ذلك حتى تكون للعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ معنى.

في هذه الحالة يمكن ردّ رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى رتابة التابع f. لدينا النتيجة التالية :

نظرية (الرتابة)

1) إذا كان f متزايدا فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة : متزايدة إن كان $f(u_0) \geq u_0$ ومتناقصة إذا كان $f(u_0) \leq u_0$.
2) إذا كان f متناقصا فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة : المتتاليتان الجزئيتان (u_{2n+2}) و (u_{2n+1}) من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتان، إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

تعقيب

عندما يكون f مستمرا ورتيبا فإن تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو u يؤدي إلى العلاقة $f(u)=u$. تفيد هذه الملاحظة في دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتعيين نهايتها. فعلى سبيل المثال إن كانت المعادلة $f(u)=u$ ذات المجهول u لا تقبل حلا نستنتج أن المتتالية متباعدة ... وإن تعددت حلولها فلا شك أن نهاية المتتالية ستكون عنصرا من مجموعة تلك الحلول.

مثال

لندرس طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

للقيام بذلك نلاحظ أن التابع المعتبر هنا هو

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ & x \mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

علما أنه متزايد ومستمر. بتطبيق ما سبق يمكن تلخيص الحالات الممكنة في ما يأتي :

أولا : حالة $a>1$. في هذه الحالة يكون $\sqrt{a}\leq a$، أي $f(u_0)\leq u_0$. وبالتالي فالمتتالية متناقصة، مع التعقيب أنها محدودة من الأدنى بـــ1 (يمكن رؤية ذلك بالتدريج). إذن فهي متقاربة ونهايتها $u\geq 1$. عندما نحل المعادلة $f(x)=x$ نجد أن لها حلين هما $x=0$ و $x=1$. وبما أن $u\geq 1$ فإن النهاية المطلوبة هي $u=1$.

ثانيا : حالة $a > 1$. في هذه الحالة يكون $\sqrt{a} \ge a$، أي $f(u_0) \ge u_0$. وبالتالي فالمتتالية متزايدة، مع الملاحظة أنها محدودة من الأعلى بـــ 1 (يمكن رؤية ذلك بالتدريج). إذن فهي متقاربة ونهايتها $u \le 1$. عندما نحل المعادلة $f(x) = x$ نجد أن لها حلين، كما أسلفنا، وهما $x = 0$ و $x = 1$. وبما أن $u \le 1$ فإن النهاية المطلوبة هي $u = 1$.

ثالثا : حالة $a = 1$. في هذه الحالة نلاحظ أن المتتالية المعطاة ثابتة $u_n = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

6. تطبيقات على المتتاليات

لنر كيف يمكن إدخال بعض الدوال الشهيرة باستخدام المتتاليات دون غيرها، وهذه الطريقة تعد من أمتن طرق تعريف هذه الدوال المألوفة.

1.6 الدالة الأسية

لندخل الدالة الأسية :

نظرية (الأس بالمتتاليات)

> ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ مثبتا. إن المتتالية $(v_n(x))$ المعرفة بـــ :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$$
>
> متقاربة.

إليك التعريف التالي الذي يعمّم السابق علما أنه يمكن إثبات بأن النهايتين $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}$ موجودتان ومتساويتان من أجل كل $x\in\mathbb{C}$:

تعريف (الدالة الأسية)

من أجل كل $x\in\mathbb{C}$، نعرف الدالة الأسية كما يلي :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}.$$

تعقيب

ينتج من هذا التعريف ومن تعريفنا للعدد e أن :

$$e^0 = 1,$$
$$e^1 = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

نذكّر أنه لا يجوز لنا استخدام العلاقة $e^{x+y}=e^xe^y$ الآن لأننا لم نثبتها و لم نتطرق لها بعد ... انطلاقا من تعريفنا للدالة الأسية.

2.6 الدالتان الجيب وجيب التمام

نأتي الآن إلى تعريف الدوال المثلثية :

تعريف (الجيب وجيب التمام)

ليكن $x\in\mathbb{R}$. نعرّف الدالتين جب sin و تجب cos عند x بوضع : $\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$ و $\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ حيث يرمز Re (Im، على الترتيب) إلى الجزء الحقيقي (التخيلي، على الترتيب).

تعقيب

يعني هذا التعريف أن : $e^{ix}=\cos x+i.\sin x$.

نظرية (المتتاليات والجيب وجيب التمام)

ليكن $x\in\mathbb{R}$. إن المتتاليتين $\left(c_n(x)\right)$ و $\left(s_n(x)\right)$ المعرفتين بـــ :

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ، \quad c_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

متقاربتان. ولدينا : $\lim_n c_n(x)=\cos x$ و $\lim_n s_n(x)=\sin x$.

تعقيب

نحصل على العلاقتين المعروفتين $\cos 0=1$ و $\sin 0=0$ مباشرة من $\lim_{n\to+\infty} c_n(x)=\cos x$ و $\lim_{n\to+\infty} s_n(x)=\sin x$ لأن $c_n(0)=1$ و $s_n(0)=0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

3.6 خواص للدوال المعرفة آنفا

نتناول في هذه الفقرة خواص الدوال التي عرفناها آنفا :

نظرية (جمع الأس وأس الأس)

1) لدينا العلاقة التالية، حيث يشير $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد العقدية :

$$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C},\qquad e^{z_1+z_2}=e^{z_2}\times e^{z_2}.$$

2) ليكن n عددا صحيحا. لدينا : $e^n=(e^1)^n$.

تعقيب

1) يتم التأكد من النتيجة الثانية بالتراجع انطلاقا من النتيجة الأولى التي تعطي العلاقات :

$$e^2=e^{1+1}=e^1.e^1=\left(e^1\right)^2$$

$$1=e^0=e^{1-1}=e^1.e^{-1} \;\Rightarrow\; e^{-1}=\left(e^1\right)^{-1}$$

$$e^{n+1}=e^n.e^1=\left(e^1\right)^n.e^1=\left(e^1\right)^{n+1}$$

2) لنبرهن انطلاقا مما سبق على أن :

أ) من أجل كل عدد حقيقي x

$$\left|e^{ix}\right|=1 \quad \wedge \quad \cos^2 x+\sin^2 x=1 .$$

ب) من أجل كل $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b,$$

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b.$$

ينبغي الإجابة عن السؤالين بناء على التعريفات والنتائج السابقة لا غير.

أ) حسب خواص الأعداد المركبة :

$$\left|e^{ix}\right|^2=\left(\cos x+i\sin x\right)\left(\cos x-i\sin x\right)$$

$$=\cos^2 x+\sin^2 x .$$

ومن جهة أخرى، لدينا :

$$1=e^{ix}.e^{-ix}=\left(\cos x+i\sin x\right)\left(\cos(-x)+i\sin(-x)\right).$$

لكننا نلاحظ في تعريفنا للدالتين المثلثيتين أن الجيب دالة فردية وجيب التمام دالة زوجية. ومن ثم نستنتج أن :

$$\begin{aligned}1&=e^{ix}.e^{-ix}\\&=(\cos x+i\sin x)(\cos x-i\sin x)\\&=\cos^2 x+\sin^2 x.\end{aligned}$$

ومنه تأتي العلاقتان.

ب) لدينا :

$$e^{i(a+b)}=\cos(a+b)+i\sin(a+b),$$

كما أن :

$$\begin{aligned}e^{ia}\times e^{ib}&=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\&=(\cos a.\cos b-\sin a.\sin b)+i(\sin a.\cos b+\cos a.\sin b).\end{aligned}$$

ولما كان $e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib}$ فإن مقارنة العلاقات الواردة أعلاه تؤدي إلى النتيجة المطلوبة.

نظرية (متباينات)

لدينا، من أجل كل عدد عقدي z :

$$|e^z-1|\le|z|e^{|z|} \quad \text{و} \quad |e^z-1-z|\le|z|^2e^{|z|}$$

تعقيب

بوضع $u_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}|u_n(x)-x|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\\&=x^2\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k+1)!}\right|\end{aligned}$$

$$\leq x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{2k-1}}{(2k-1)!}$$
$$\leq |x|^2 e^{|x|}.$$

ونجعل n يؤول إلى لانهاية نحصل على المتباينة :

$$x \in \mathbb{R}, |\sin x - x| \leq |x|^2 e^{|x|}.$$

ومن جهة أخرى، لدينا :

$$|\cos x - 1| = \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right|$$
$$\leq x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-2}}{(2k)!}$$
$$\leq x^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$
$$\leq x^2 e^{|x|}.$$

ومنه تأتي العلاقة :

$$x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x - 1| \leq x^2 e^{|x|}.$$

4.6 خواص أخرى

نتابع تقديم بعض الخواص للتأكيد على أن الكثير منها تأتي من خلال تقديم الدوال السابقة الذكر باستخدام المتتاليات :

1. نعلم أن $e^x = \lim_n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. وبالتالي $0 \leq e^x$ لأن $0 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ عندما يكون n كبيرا. وإذا تذكرنا بأن $1 = e^x . e^{-x}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ أدركنا

بأن $e^x \neq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ (نرى ذلك بالخلف). وهكذا تنتج الخاصية التالية :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0.$$

كما أن العلاقة $1 = e^x . e^{-x}$ تستلزم :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

2. الدالة الأسية متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية. ذلك لأن

$$\begin{aligned} x>y \ &\Rightarrow \ x-y>0 \\ &\Rightarrow \ \frac{e^x}{e^y}=e^x e^{-y}=e^{x-y}>e^0=1. \end{aligned}$$

ومنه يأتي تزايد الدالة الأسية.

3. بما أن $0 \le \lim_{x\to 0}\left|e^x - 1\right| \le \lim_{x\to 0} xe^x = 0$ فإن $\lim_{x\to 0} e^x = 1$.

4. لما كان $\left|\sin x - x\right| \le x^2 e^{|x|}$ فإن :

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \le \lim_{x\to 0}\left|x\right| e^{|x|} = 0.$$

ومنه : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

5. بما أن $\left|\cos x - 1\right| \le x^2 e^{|x|}$ فإن :

$$0 \le \left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}\left|x\right| e^{|x|} = 0 .$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0 \ .$$

6. لدينا من أجل كل $m \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0 .$$

لرؤية ذلك يكفي أن نكتب من أجل $m \le n$ (حيث m مثبّت) :

$$\forall x>0, \quad \sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} .$$

ومنه :

$$\forall x>0, \quad \frac{1}{x^m}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x}{(m+1)!} .$$

بجعل n يؤول إلى لانهاية في الطرفين فنجد :

$$\forall x>0, \quad \frac{e^x}{x^m}\ge\frac{x}{(m+1)!}$$

وبجعل x يؤول إلى لانهاية في الطرفين نحصل على :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty .$$

ومن جهة أخرى، باعتبار $x<0$ وكتابة : $x^m e^x=(-1)^m\frac{(-x)^m}{e^{-x}}$

نستنتج بوضع $-x=y$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^m}{e^{-x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^m}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y^m}}=0$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0$.

7. باعتبار $m=0$ في النهايتين السابقتين :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0$$

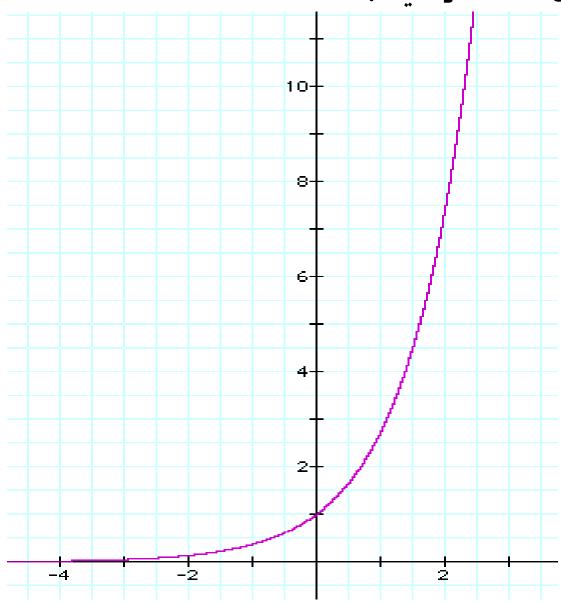
نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} e^x=0 .$$

وبناء على ذلك وعلى المعلومات السابقة ننشئ جدول تغيرات الدالة الأسية :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		$+$
e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

ومن ثم يأتي بيان الدالة الأسية :



بيان الدالة الأسية

5.6 الدالة اللوغاريتمية

رأينا بأن الدالة الأسية مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$. ولهذا فهي تقبل دالة عكسية متزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$.

تعريف (الدالة اللوغاريتمية)

تسمى الدالة العكسية للدالة الأسية الدالة اللوغاريتمية النبيرية. نرمز لهذه الدالة بـــ $x \mapsto \ln x$. وهناك من يرمز لها بـــ $x \mapsto \mathrm{Log}x$.

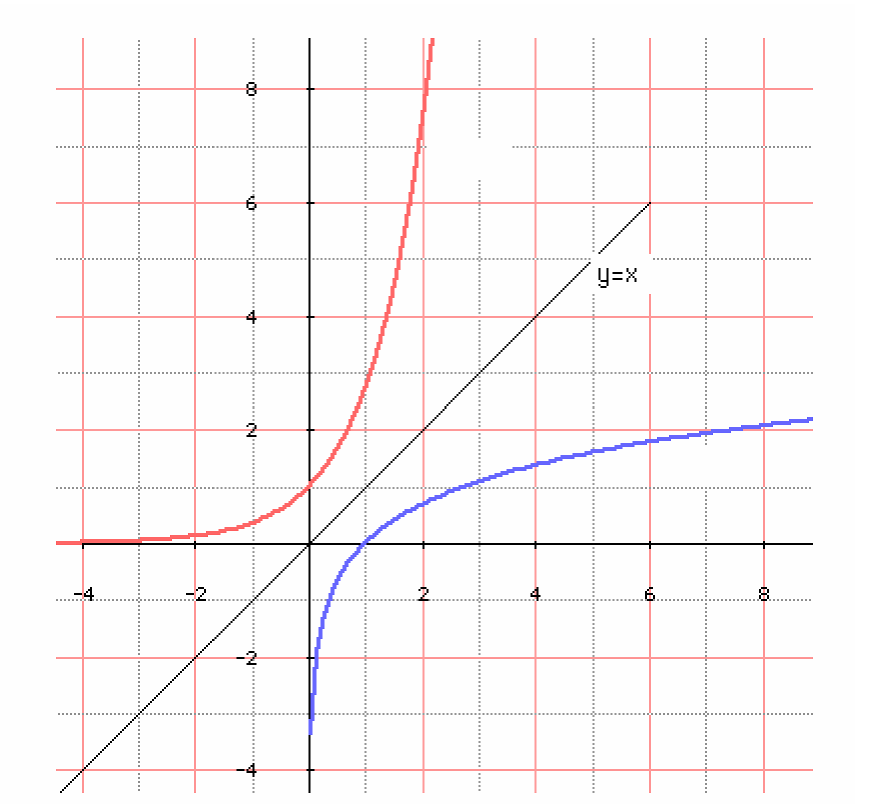
ينتج جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية من جدول تغـــيرات الدالـــة الأسية :

x	0	$+\infty$
$(\ln x)'$	$+$	
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ومن ثم يمكن رسم بيان الدالة اللوغاريتمية :

بيان الدالة اللوغاريتمية النبيرية

إليك أيضا بياني الدالتين الأسية واللوغاريتمية في نفس المعلم :



كما يمكننا استنتاج خواص الدالة اللوغاريتمية انطلاقا من خواص الدالة الأسية، ومن بينها :

$$\forall x\,,\ \forall y\,,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

لأن :

$$\forall x\,,\ \forall y\,,\ xy = e^{\ln(xy)} \wedge e^{\ln x} \times e^{\ln y} = xy\ .$$

وهناك العلاقة التالية :

$$\forall x\,,\ \forall y\,,\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$$

التي نستنتجها من كون :

$$\forall x\,,\ \forall y\,,\ \frac{x}{y} = e^{\ln(\frac{x}{y})} \ \wedge\ e^{\ln x} \times e^{-\ln y} = e^{\ln x} \times \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{x}{y}$$

لدينا أيضا : $\ln 1 = 0$ لأنها تكافئ $e^{\ln 1} = e^{0} = 1$ $1 =$.

كما يمكننا الحصول على

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} = 0 \ \wedge\ \lim_{x\to-\infty} x(\ln x)^m = 0\ .$$

ذلك أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln e^y)^m}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(y)^m}{e^y} 0\ .$$

أما $\lim_{x\to-\infty} x(\ln x)^m = 0$ فنستنتجها باستبدال x بـــ $\frac{1}{x}$ في $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^m}{x} = 0$.

****

الفصل الثالث

الدوال الحقيقية الوحيدة المتغيّر

العناوين

1. مقدمة
2. عموميات على الدوال
3. النهايات
4. خواص شهيرة للنهايات
5. الاستمرار
6. الاستمرار المنتظم
7. نظرية النقطة الصامدة
8. دوال شهيرة

1. مقدمة

نهتم في هذا الدرس بمفهوم النهاية سيما بجوانبه المرتبطة بالاستمرار. وفي هذا السياق فلا بد لنا من التذكير بجملة من التعاريف والإحاطة ببعض النظريات والنتائج المتعلقة بالاستمرار. وقبل كل ذلك فقد قدمنا تعاريف ونتائج عامة في موضوع الدوال.

كما اهتممنا بالاستمرار المنتظم وبالنتائج الهامة المترتبة عنه كتلك المتعلقة بالاستمرار في المجالات المتراصة. ومن جهة أخرى، أوجزنا تقديم الدوال المثلثية ودوالها العكسية مع رسم بياناتها.

ومن بين النتائج الهامة المرتبطة بالاستمرار ما يعرف بنظرية (أو نظريات) النقطة الصامدة. لقد عرفت نظرية النقطة الصامدة خلال تطورها، على مرّ قرابة قرن من الزمن، العديد من الصيغ، وهو ما جعلها أداة رياضية فعالة في حل المسائل المختلفة. والظاهر أن برامجنا التعليمية في حقل الرياضيات لا تولي هذه النظرية العناية التي تستحقها.

دعنا نتحدث قليلا عن هذه النظرية كي نسد جانبا من هذه الثغرة : إن المكتشف "الرسمي" لنظرية النقطة الصامدة هو الرياضي الهولندي لويتزن يان بروور Brouwer (1881–1966). غير أن الواقع يقتضي منا إضافة أسماء عديدة أخرى إلى شهادة ميلاد هذه النظرية. ذلك أنها عرفت عدة نصوص وبراهين مختلفة فاتت العشرين خلال فترات متقطعة تمتدّ من نهاية القرن التاسع عشر إلى منتصف القرن العشرين. وسبب هذا الإحياء المتجدد لنظرية

النقطة الصامدة يعود بالدرجة الأولى إلى تجاوز أهمية هذه النظرية السياق الهندسي البحت.

فبفضل هذه النظرية نستطيع الإجابة عن أسئلة تتعلق بأبعاد الفضاءات. كما تسمح نظرية النقطة الصامدة بإثبات وجود حلول للمعادلات الفيزيائية. لقد بلغ سن هذه النظرية قرابة مئة سنة، لكنها لا تبدو بهذا العمر : فسواء درسْتَ الأشكال الهندسية المسماة الأشكال الفركتالية (الكسورية) أو مجريات عمليات البورصات أو تأكدت من دقة العدّاد الكهربائي فإنك ستلتقي دوما بنقاط صامدة.

كان بروور يبحث عام 1910 عن حل مسألة أساسية طرحها جورج كنتور Cantor (1845-1918) عام 1878 حين تمكّن هذا الأخير من إنشاء تطبيق تقابلي بين المستوي والمستقيم. وهكذا صارت تلك العلاقة بين هاتين المجموعتين من النقاط (المستقيم والمستوي) تطرح مسألة جوهرية تتعلق بمفهوم بُعد الفضاء : لماذا نعتبر كائنين رياضيين أنهما مختلفان إن تمكّنا من تحويل أحدهما إلى الآخر؟

لقد أدرك الرياضيون بسرعة بأن التطبيق التقابلي لكنتور ليس مستمرا، وهذا يعني أنه تحويل "يشتّت" النقاط : تكون صورة مجموعة نقاط "متلاصقة" على المستقيم مجموعة نقاط "مبعثرة" على المستوي. بينما تعوّد الرياضيون على التعامل مع التحويلات المستمرة، ذلك أن جلّ قوانين الطبيعة قوانين مستمرة. كما يلاحظ أن التحويلات غير المستمرة كائنات رياضية غير منسجمة ويصعب تحديد خواصها العامة.

والواقع أن افتقاد تقابل كنتور لخاصية الاستمرار قد طمأن الرياضيين في موضوع سلامة فكرة التمييز بين فضاءات مختلفة الأبعاد. ورغم ذلك ظل السؤال مطروحا : صحيح أن هذا التقابل غير مستمر، لكن ألا يوجد تحويل آخر مستمر بين المستوي والمستقيم، أو (بصفة أعمّ) بين فضاءين أقليديين مختلفي البعدين؟ للبرهان على أن هذا الاحتمال غير وارد أدخل بروور تقنيات جديدة أحدثت فيما بعد هزة في حقل الطبولوجيا: إنها نظرية النقطة الصامدة.

أما الرياضي الفرنسي بوانكري Poincaré (1854−1912) فكان منشغلا عام 1883 بالمسألة المفتوحة المتعلقة باستقرار النظام الشمسي. وكان السؤال المطروح هو : هل تتحرك ثلاثة أجرام سماوية على مدارات دورية عندما تتجاذب فيما بينها عبر قوة الجاذبية ؟ كان بوانكري يحتاج إلى تعميم نظرية القيم الوسطى فقام بذلك باعتبار دوال متعددة المتغيرات وتوصل إلى نتيجة تعمم نظرية النقطة الصامدة لبروور.

لقد منحت جائزة نوبل في الاقتصاد عام 1994 إلى جون هارسانيي Harsanyi (1920−2000) وجون ناش Nash (1928−؟) ورينهارد سلتن Selten (1930−؟) وذلك لتحديدهم مفهوم التوازن في ما يعرف بنظرية "الألعاب غير التعاونية". وكانت تلك النتيجة مبنية على نظرية النقطة الصامدة.

إن تطبيقات نظرية النقطة الصامدة لباناخ وبروور وتعميماتها عديدة ومتنوعة. فهي لا تقتصر على الميكانيكا السماوية أو الاقتصاد أو نظرية

الألعاب. ذلك أن جلّ مبرهنات وجود حلّ لمختلف المعادلات تتطلب استخدام هذه النظرية. ومن الصعب العثور على عدد من أعداد مجلة رياضية مخصص للمعادلات التفاضلية أو التكاملية أو التفاضلية الجزئية بدون أن نجد فيها مقالا يعتمد على نظرية من نظريات النقطة الصامدة.

2. عموميات على الدوال

نقدم في هذا المقطع بعض التعاريف المرتبطة بمفهوم الدالة (أو التابع) بشكل موجز لأن معظمها معروف لدى القارئ منذ المرحلة الثانوية.

تعريف (جمع وضرب الدوال)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$، والدالتان $f:A\to\mathbb{R}$ و $g:A\to\mathbb{R}$. نعرّف:

مجموع دالتين $f+g:A\to\mathbb{R}$

وجداء الدالتين $f.g:A\to\mathbb{R}$

وجداء دالة في عدد λ $\lambda.f:A\to\mathbb{R}$

ونسبة الدالتين $\dfrac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$ (في حالة عدم انعدام g)

بالعلاقات :

$$\forall x\in A,\ \ (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$\forall x\in A,\ \ (f.g)(x)=f(x).g(x),$$
$$\forall x\in A,\ \ (\lambda.f)(x)=\lambda.f(x),$$
$$\forall x\in A,\ \ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

تعقيب

مجموعة الدوال المزودة بقانوني جمع الدوال وضرب الدوال في الأعداد يجعل منها فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$. أما قانونا الجمع وضرب الدوال فيما بينها فيزود مجموعة الدوال ببنية حلقة تبديلية واحدية.

تعريف (تركيب الدوال)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$ و $g:B\to\mathbb{R}$ دالتين.
نعرّف دالة التركيب $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$\forall x\in A,\quad \big(g\circ f\big)(x)=g\big(f(x)\big).$$

تعريف (التطبيق المطابق)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. يسمى التطبيق $f:A\to A$ المعرف بـــ

$$\forall x\in A,\ \ f(x)=x$$

التطبيق المطابق على A. نرمز للتطبيق المطابق على A عموما بـــ I_A.

تعريف (التطبيق العكسي)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$. إذا كان $f:A\to B$ تقابلا يمكن تعريف الدالة العكسية $f^{-1}:B\to A$ بـــ $f^{-1}(y)=x$ عندما يكون $y=f(x)$.

تعريف (الدالة المحدودة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و $f:A\to\mathbb{R}$. نقول عن الدالة f إنها محدودة إذا وجد ثابت $0<M$ بحيث :

$$\forall x\in A,\quad |f(x)|\le M.$$

تعقيب

1) عندما تكون f محدودة فإن المجموعة $f(A)$ محدودة. وهي إذن تقبل حدا أدنى وحدا أعلى نرمز لهما على التوالي بـــ $\inf f$ و $\sup f$.

2) يتّضح من الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى أن :

$$m = \inf_{x\in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \ m \le f(x), \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A\ :\ f(a) < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$$M = \sup_{x\in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ \ f(x) \le M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in A\ :\ M - \varepsilon < f(b). \end{cases}$$

لاحظ أن m و M لا ينتميان بالضرورة إلى $f(A)$. يكفي التأمل في الحالات البسيطة التالية :

أ) نعتبر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sin(x) = -1 \in f(\mathbb{R}) = [-1,1],$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sin(x) = 1 \in f(\mathbb{R}) = [-1,1].$$

ب) نعتبر $f : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\inf_{x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 0 \notin f(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[\,,$$

$$\sup_{x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 1 \notin f(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[\,.$$

جـــ) نعتبر $f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\inf_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 0 \in f(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[) = [0,1[\,,$$

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 1 \notin f(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[) = [0,1[.$$

تعريف (الدالة الزوجية والدالة الفردية)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـــ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$.

1) نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = f(-x) .$$

2) نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = -f(-x) .$$

أمثلة

1) الدالتان f و g المعرفتـــان علـــى $\mathbb{R}$ بـــــ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = |x|$ دالتان زوجيتان.

2) الــــدالتان f و g المعرفتـــان علـــى $\mathbb{R}$ بـــــ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^3$ دالتان فرديتان.

3) الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـــــ $f(x) = \sin x + \cos x$ و $g(x) = |x| + x$ دالتان غير زوجيتين وغير فرديتين.

نظرية (كتابة دالة كمجوع دالتين زوجية وفردية)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـــ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$.

تكتب f على شكل مجموع دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية.

تعقيب

لدينا فعلا المساواة التالية مهما كان $x \in A$

$$f(x) = \left(\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) + \left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right).$$

لاحظ أن الدالة $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوجية وأن الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ فردية وذلك مهما كانت الدالة المعرفة على الجزء A المتناظر بالنسبة لـــ 0.

تعريف (الدالة الدورية)

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1) نقول عن الدالة f إنها دورية إذا وجد عدد حقيقي φ غير منعدم يحقق العلاقة :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x+\varphi).$$

2) يسمى φ دورة لـــ f. غالبا ما نسمي دورة f أصغر عدد (إن وجد) موجب تماما φ يحقق العلاقة السابقة

أمثلة

1) الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=\cos x$ دورية ودورها 2π.

2) الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=\cos 2x$ دورية ودورها π.

3) الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=\cos 2\pi x$ دورية ودورها 1.

4) الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=\cos\frac{2\pi}{a}x$، حيث a عـــدد حقيقي موجب تماما، دورية ودورها a.

تعقيب

قد يستغرب القارئ في عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق لأنه ألِفَ الدوال الدورية من نمط الدوال المثلثية.

لتوضيح أن هناك دوال دوريـــة ليس لها أصغر دورة نسوق المثال التالي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q},\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

خذْ $\varphi=\frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم وستلاحظ أن :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x+\frac{1}{n})\ .$$

يرجع ذلك إلى قيام الخاصية التالية :

$$\begin{aligned} x\in\mathbb{Q} &\Rightarrow x+\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}\\ &\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=1,\\ x\notin\mathbb{Q} &\Rightarrow x+\frac{1}{n}\notin\mathbb{Q}\\ &\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=0.\end{aligned}$$

ومن ثمّ نلاحظ أن كل عدد من الشكل $\frac{1}{n}$ (حيث n عدد طبيعي) هو دورة للدالة. ما هي أصغر دورة؟

لاحظ أن $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=0$، وهو ما يبرر وجود عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق.

تعريف (الدالة الرتيبة)

لتكن دالة $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) نقول إن f متزايدة تماما إذا كان $f(x) < f(y)$ لما $x < y$.

2) نقول إن f متناقصة تماما إذا كان $f(x) < f(y)$ لما $x > y$.

3) نقول عن f إنها رتيبة إن كانت متزايدة أو متناقصة.

إذا استبدلنا فيما سبق > و < على التوالي بـــ ≤ و ≥ فإنه ينبغي حذف لفظ "تماما".

أمثلة

1) الدالة $f: \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x) = x^2$ متزايدة تماما.

2) الدالة $g: \mathbb{R}^{-} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـــ $g(x) = x^2$ متناقصة تماما.

3) الدالة $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـــ $h(x) = x^2$ ليست رتيبة.

4) الدالة $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـــ $u(x) = x^2 + 1$ ليست رتيبة.

نظرية (الرتابة والتقابل)

لتكن دالة $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ متزايدة تماما (متناقصة تمامـــا، علـــى الترتيب) حيث I مجال. عندئذ :

1) يكون $f: I \longrightarrow f(I)$ تقابلا.

2) يكون $f^{-1}: f(I) \longrightarrow I$ متزايدة تماما (متناقصة تماما، على الترتيب).

تعريف (الاقتصار والتمديد)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ بحيث $B \subset A$ و $f : A \to \mathbb{R}$ و $g : B \to \mathbb{R}$.

نقول عن الدالة f إنها امتداد (أو تمديد) للدالة g إذا كان :

$$\forall x \in B,\ f(x) = g(x)\ .$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة g اقتصارا للدالة f.

نعبّر عن ذلك عموما بالرمز $g = f_{|B}$.

3. النهايات

نقدم في هذا المقطع تعاريف أساسية وبعض القضايا الخاصة بالنهايات دون كثير من التركيز. وسنؤجل بعض التعاليق والملاحظات التي كان بالإمكان إدراجها هنا إلى المقطع اللاحق الخاص بمفهوم الاستمرار.

تعريف (النهاية)

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$، أي إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - c| < \varepsilon\ .$$

تعقيب

من حق α، في التعريف السابق، أن يتعلق بـــ ε و a. وكما ذكرنا في حالة المتتاليات المتقاربة فإن إثبات أن $\lim_{x\to a} f(x)=c$ باستخدام التعريف يتمثل في تحديد α بدلالة ε و a.

مثال

لإثبات أن $\lim_{x\to 3} x^2=9$ باستخدام التعريف نلاحظ بعد اختيـــار ε كيفيا أنه يكفي أن نكتب :

$$\begin{aligned} |x^2-9| &\le |x+3||x-3| \\ &< \alpha|x+3| \\ &< 7\alpha < \varepsilon, \end{aligned}$$

وذلك باعتبار أن x مجاور لـــ 3. وبالتالي فهو لن يكون مثلا أكبر من 4. وهكذا يتضح أنه يكفي اختيار $\alpha < \frac{\varepsilon}{7}$ للحصول على صحة :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0:\ |x-3|<\alpha \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon\ .$$

إن التعريف الموالي يكافئ السابق.

تعريف (تعريف آخر للنهاية)

لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إن لها نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط: من أجل كل مجال C مركزه c يوجد مجال A مركزه a بحيث :

$$f(A\cap I)\subset C\ .$$

نظرية (المتتاليات والنهايات)

لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. تكون للدالة f نهاية منتهية c عند النقطة a إذا وفقط إذا كان : مهما كانت المتتالية (x_n) من I المتقاربة نحو a فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=c$.

نظرية (وحدانية النهاية)

لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. إذا قبلت الدالة f نهاية فهي وحيدة.

تعقيب

نتحدث عن النهاية من اليمين إذا استبدلنا في ما سبق الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x\xrightarrow{x>a}a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليمين على المحور الحقيقي)، ونتحدث عن النهاية من اليسار إذا استبدلنا الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x\xrightarrow{x<a}a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليسار على المحور الحقيقي).

تعريف (اللانهاية والنهاية)

لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a.

1) نقول عن f إنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A>0,\ \exists\alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)>A.$$

2) نقول عن f إنها تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A>0,\ \exists\alpha>0:\ |x-a|<\alpha \Rightarrow f(x)<-A.$$

4. خواص شهيرة للنهايات

1. نهاية مجموع دالتين $f+g$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x)=\ \rightarrow$ / $\lim_{x\to a} g(x)=\downarrow$	c	$+\infty$	$-\infty$
c'	$c+c'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

مثال

لدينا :

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+1}{x^4+3}+\frac{2x^2}{x+3}\right)=\frac{10}{84}+\frac{18}{6}=\frac{5}{42}+3 .$$

2. نهاية جداء دالتين $f\times g$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x)=\ \rightarrow$ / $\lim_{x\to a} g(x)=\downarrow$	$c>0$	$c<0$	$c=0$	$+\infty$	$-\infty$
$c'>0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$c'<0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$c'=0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

مثال

لدينا :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x^4+3}\times\frac{2x^2}{x+3}=\frac{10}{84}\times\frac{18}{6}=\frac{5}{14}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x^2-5)\times\sin x=\frac{\pi}{2}-5 .$$

3 . نهاية جداء دالة وعدد $\lambda.f$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a}\lambda.f(x)$ بدلالة قيم النهاية $\lim_{x\to a}f(x)$ والعدد λ :

$\lim_{x\to a}f(x) = \rightarrow$ / $\lambda =\downarrow$	c	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\times c$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\times c$	$-\infty$	$+\infty$

مثال

$\lim_{x\to 3}2(x^2-5)=8$ ، $\lim_{x\to+\infty}-2(x^2-5)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}2(x^3-5)=-\infty$.

4 . نهاية مقلوب دالة $\frac{1}{f}$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$ بدلالة قيم النهاية $\lim_{x\to a}f(x)$:

$\lim_{x\to a}f(x)$	$c\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{c}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

مثال

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}=+\infty$.

5. حالات عدم تعيين : هناك في حساب النهايات حالات لا نتمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بالمزيد من التحري كالحالات الموالية المسماة حـــالات عدم تعيين :

*** الحالة** $0\times\infty$

مثل ذلك : حساب $\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)$. عندما نكتب :

$$\lim_{x\to 0}x^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=0\times(+\infty)$$

فإننا لا نستطيع البت، لكننا نـــستطيع رفـــع عـــدم التعـــيين وحـــساب $\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)$ كما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0}|x|=0\,.$$

مثال آخر : حساب $\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{2x^2}\right)$. عندما نكتب :

$$\lim_{x\to 0}x^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=0\times(+\infty)$$

فإننا لا نستطيع البت، ورغم ذلك نستطيع كتابة :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $0\times\infty$ هي حالة عدم تعيين.

* **الحالة** $\frac{\infty}{\infty}$

مثل ذلك : حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$. عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^3}=\frac{+\infty}{+\infty}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

مثال آخر : حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$. عندما نكتب :

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2+1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)=3+0=3\,.$$

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{\infty}{\infty}$ هي حالة عدم تعيين.

* **الحالة** $\frac{0}{0}$

مثل ذلك : حساب $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2}{x^2}$. عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to0}4x^2}{\lim\limits_{x\to0}x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2}{x^2}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}4=4\,.$$

مثال آخر : حساب $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$. عندما نكتب $\frac{\lim_{x\to 0} x^2}{\lim_{x\to 0} 5x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\,.$$

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{0}{0}$ هي حالة عدم تعيين.

* **حالة** $\infty-\infty$

مثال ذلك : حساب $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)$. عندما نكتب :

$$\lim_{x\to +\infty} x^2-\lim_{x\to +\infty} 2x^2=+\infty-(+\infty)$$

فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)$ كما يلي :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim_{x\to +\infty}(-x^2)=-\infty\,.$$

مثال آخر : حساب $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-x^2\right)$. عندما نكتب

$$\lim_{x\to +\infty} x^2-\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty-(+\infty)$$

فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-x^2\right)$ كما يلي :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim_{x\to +\infty} 0=0\,.$$

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين، ولذا فالحالة حالة عدم تعيين.

5. الاستمرار

ما معنى استمرار (أو اتصال) دالة ؟ نستطيع أن نقرّب فكرة الاستمرار بالقول إننا نتحدث في اللغة العامة عن استمرار وضعية إذا تواصلت دون حدوث انقطاعات مفاجئة في مسيرتها. وبنفس المنظور نقول عن دالة "$y = f(x)$" إنها مستمرة إن كان أي تغيّر طفيف يطرأ على المتغير x يواكبه سلوك مماثل – أي تغير طفيف– لـ y. كيف نعبّر بالدقة الرياضية اللازمة عن هذا المفهوم؟

تعريف (الاستمرار)

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها مستمرة عند a إذا تحقق الشرطان :

1) النهاية $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة (في $\mathbb{R}$)،

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

تعقيب

1) إذا استبدلنا في التعريف السابق العلاقة $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ بالعلاقة $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليمين عند a. وإذا استبدلنا تلك العلاقة بالعلاقة $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليسار عند a.

2) نعبّر عن هذا التعريف رمزيا (يسميه البعض التعريف بــ $\varepsilon-\delta$ أو $\varepsilon-\alpha$) بطريقة كوشي (1789–1857) – شفارتز (1843–1921) Cauchy-Schwarz بــ :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: |x-a|<\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon\ .$$

ونعرّف الاستمرار على المجال I إن كانت الدالة مستمرة عند كل نقطة من I. ونعرّف الاستمرار من جهة واحدة (من اليمين أو من اليسار) بتقييد مآل x نحو a بالقيد $x>a$ أو $x<a$ (على الترتيب). وبطبيعة الحال فإن الاستمرار عند نقطة يعني أن هناك استمرارا من جهتي تلك النقطة.

كيف نفسّر العلاقة $\varepsilon-\alpha$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0: |x-a|<\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

التي تعبّر عن استمرار f عند a؟

نلاحظ أولا أن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ تعني بأن $f(x)$ تنتمي إلى مجال مركزه $f(a)$، وهو $]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. كما أن $|x-a|<\alpha$ تعني أن x ينتمي إلى مجال مركزه a، وهو $]a-\alpha,a+\alpha[$. وبالتالي فالعلاقة المعبِّرة عن الاستمرار تقول:

مهما كان المجال الذي مركزه $f(a)$ فإنه يوجد مجال مركزه a صورته محتواة في المجال الذي مركزه $f(a)$.

وهذا يعني :

الصورة العكسية لأي مجال مركزه $f(a)$ تحتوي مجالا مركزه a.

وما دمنا نعرّف جوار نقطة على أنه مجموعة تحتوي مجالا مركزه تلك النقطة فإننا نستطيع القول بأن :

استمرار f عند a يعني الصورة العكسية لكل جوار لـ $f(a)$ هو جوار لـ a.

تعقيب

من المهم أن يكون المجال I مفتوحا في التعريف السابق. وإن لم يكن الأمر كذلك فلا بد أن نضيف في التعريف شرطا يقول إن النقطة a تنتمي إلى مجال مفتوح محتوى في I. وبدون ذلك فإن الكتابة $x \longrightarrow a$ الظاهرة تحت الرمز lim في الشرطين الواردين في التعريف قد تؤدي إلى تناقض. ويتمثل هذا التناقض في عدم ضمان مكوث قيم x في مجموعة تعريف f عندما يقترب x من a. فكيف يجوز لنا في هذه الحالة كتابة $f(x)$!!؟

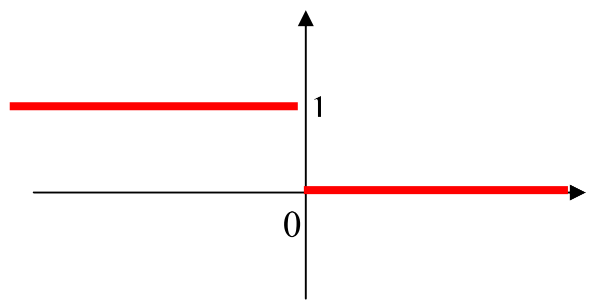
ورغم الطابع المنطقي والحدسي لمفهوم النهاية والاستمرار فإن التجربة تثبت أنه مفهوم صعب الإدراك لدى الطلبة، كما أن التجربة التي مرت بها الرياضيات قبل عهد كوشي- شفارتز تؤكد ذلك إذ ظل الرياضيون عدة قرون ينظّرون قبل الاهتداء إلى ما وصلنا إليه بخصوص هذا المفهوم.

ولعل البعض يعتبر أن كل الدوال مستمرة (مثـــل دوال كـــثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام المثلثيتين والدالة اللوغاريتميـــة والدالـــة الأسية، ...) وإن وجدنا بعضا منها غير مستمرة فعدم استمرارها لا يحدث إلا في نقاط معدودات أو في مجموعة قابلة للعد. إليك بعض الأمثلة في هذا السياق :

مثال 1

الدالة المعرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases}0 & : x>0\\ 1 & : x\leq 0.\end{cases}$$



بيان الدالة f

مستمرة في كل مكان سوى في النقطة 0.

مثال 2

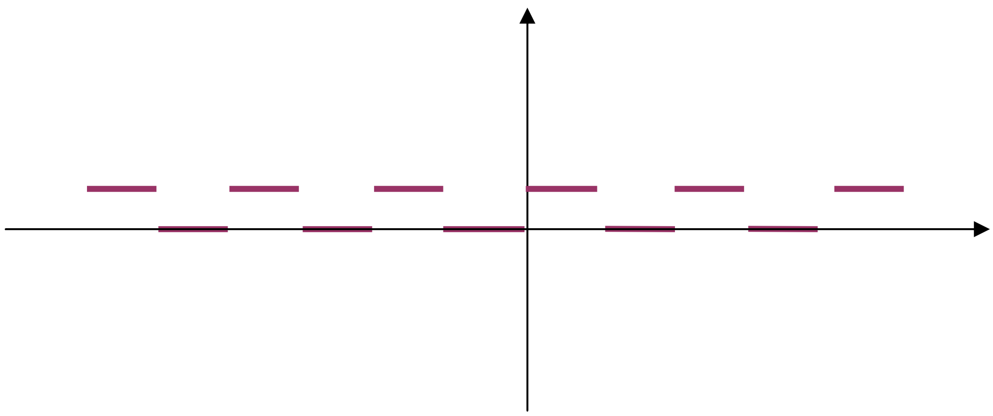
تصور الآن أننا نعيد النظر في المثال السابق ونكرر ما حـــدث في 0 عند كل قيمة لـــ x تساوي عددا صحيحا.

هذا يعني أننا نعتبر الدالة المعرفة مثلا كما يلي (حيث يشير n لعنصر كيفي من مجموعة الأعداد الصحيحة):

$g(x)=1$ من أجل $x\in[2n,2n+1[$

$g(x)=0$ من أجل $x\in[2n+1,2n+2[$.

إنها دالة غير مستمرة عند عدد غير منته من النقاط. مجموعة هذه النقاط هي مجموعة الأعداد الصحيحة.



بيان الدالة

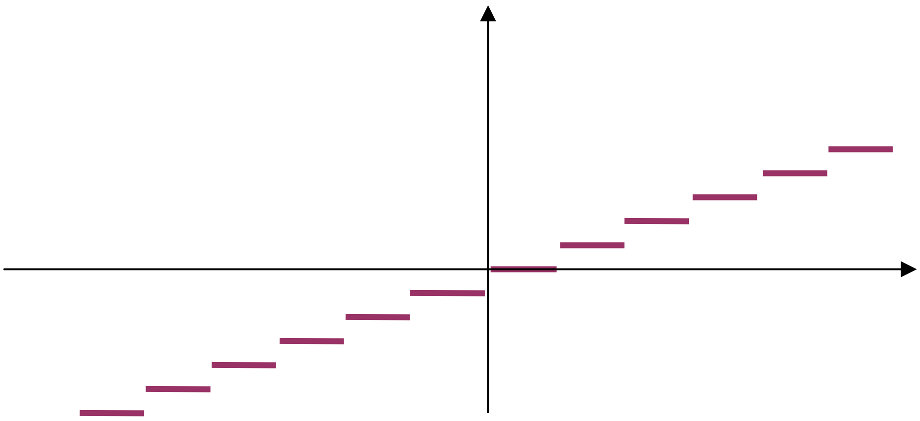
مثال 3

لديك مثلا آخر في الدالة المساوية للظل على كامل مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء المضاعفات الفردية لـــ $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ والمساوية لـــ 0 (مثلا) عند تلك المضاعفات. ارسم بيان هذه الدالة. نحصل بهذا الشكل على دالـــة مستمرة في كل مكان ما عدا عند المضاعفات الفردية لـــ $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$.

مثال 4

يمكن أيضا التفكير في الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كالتالي حيث يشير $[x]$ إلى الجزء الصحيح لــ x : $u(x)=[x]$.

إن الدالة u مستمرة ما عدا عند قيم مجموعة الأعداد الصحيحة.



بيان الدالة u

مثال 5

نطرح السؤال التالي : هل توجد دالة ليست مستمرة في أية نقطة على $\mathbb{R}$؟ هذا السؤال ليس وليد اليوم ولذا بحث فيه أسلافنا واهتدوا إلى إنشاء دالة من هذا القبيل. خذ مثلا الدالة التالية حيث يرمز $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الناطقة :

$$v(x)=\begin{cases}0 & : \ x\in\mathbb{Q}\\ 1 & : \ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

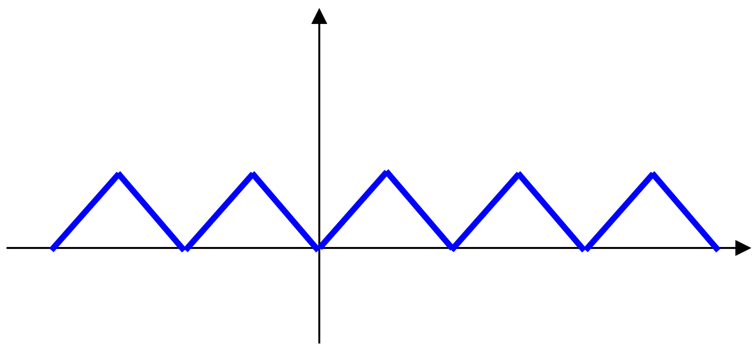
لاحظ أنها دالة لا يمكن رسم بيانها وهي غير مستمرة عند أية نقطة من $\mathbb{R}$.

مثال 6

نطرح السؤال التالي على الرغم من أننا لم نتعرّف بعد على مفهـــوم الاشتقاق (لأننا نعلم أن القارئ كان درسه في المرحلة الثانوية) : هل توجد دالة مستمرة في كل مكان ولا تقبل الاشتقاق في أية نقطة على $\mathbb{R}$؟

لقد أنشأ أسلافنا دالة من هذا القبيل، وتسمى هذه الدالة دالة فـــان ديرفاردن Van der Waerden (1903−1996)، مستمرة في كل مكان مـــن $\mathbb{R}$، لكنها لا تقبل الاشتقاق في أية نقطة على $\mathbb{R}$. لتوضيح ذلك نعتبر الدالة المستمرة والدورية f ذات الدورة 1 المعرّفة على المجال $[0,1]$ بـــ :

$$f(x)=\begin{cases} x & : x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ 1-x & : x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$



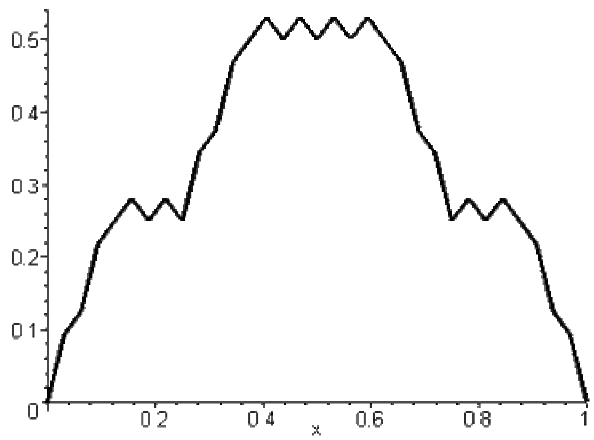
بيان الدالة f

وانطلاقا منها نعرّف الدالة g، دالة فان ديرفاردن Van der Waerden، كنهاية للمتتالية $(u_N(x))$ المعرفة بـــ $u_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\dfrac{f(4^n x)}{4^n}$: $g(x)=\sum_{n\geq 0}\dfrac{f(4^n x)}{4^n}$.

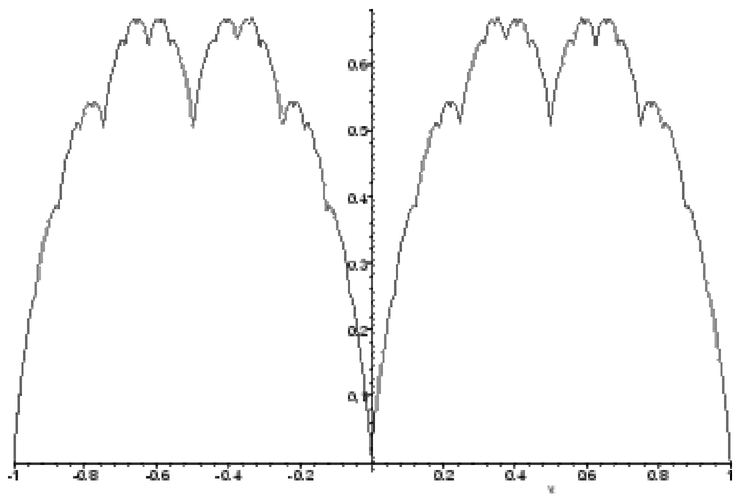
نلاحظ أن نفس الخاصية تتمتع بها الدالة w المعرفة بـــ:

$$w(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f(10^n x)}{10^n} .$$

يمكن إثبات أن هاتين الدالتين لا تقبلان الاشتقاق في أية نقطة من $\mathbb{R}$ علـــى الرغم من أنهما مستمرتان في كل مكان.



بيان اقتصار الدالة g على المجال $[0,1]$



بيان اقتصار الدالة w على المجال $[-1,1]$

دعنا ننهي هذا المقطع بتقديم النظرية الأساسية التالية :

نظرية (استمرار تركيب الدوال)

> ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f: A \to B$ و $g: B \to \mathbb{R}$ دالتين و a نقطة من A.
>
> نفرض قيام الشرطين :
>
> 1) f مستمر عند a،
>
> 2) g مستمر عند $f(a)$.
>
> عندئذ تكون الدالة $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ مستمرة عند a.

مثال

الدالة $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $u(x) = \sin|x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$ بوصفها تركيب $u = g \circ f$ للدالتين المستمرين $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ و $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = |x|$ و $g(y) = \sin y$.

6. الاستمرار المنتظم

نتناول فيما يلي مفهوم الاستمرار المنتظم الذي يؤدي دورا هاما في قيام عديد النتائج البارزة في التحليل، والتي سنقدم البعض منها في هذا المقام.

تعريف

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال I. نقول عن f إنها مستمرة بانتظام على المجال I إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : \forall x, \forall y \in I, |x - y| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

تعقيب

لاحظ أن الاستمرار المنتظم يتعلق بمجال التعريف بأكمله وليس بنقطة منه. ما الفرق بين استمرار دالة على مجال واستمرارها المنتظم على نفس المجال؟ الفرق يتعلق بالعدد الموجب α : فإذا استطعنا إثبات بأن هذا العدد لا يتغيّر بتغيّر النقطة التي ندرس فيها الاستمرار فإن الاستمرار منتظم. أما إذا برهنا بأنه لا يمكن اختيار نفس العدد α لجميع نقاط المجال I بعد اختيارنا لـ ε فإن الاستمرار غير منتظم.

مثال 1

نعتبر الدالة الجيبية $f(x) = \sin x$ المعرّفة على $\mathbb{R}$. نذكّر بالعلاقة المثلثية المحققة من أجل كل عددين حقيقيين x و y :

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2} \ .$$

ومنها نستنتج :

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin y| &= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|.\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\\ &\le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\\ &\le |x-y|.\end{aligned}$$

ومن ثم يتضح أن تطبيق التعريف السابق على الدالة الجيبية يتحقق بمجرد اختيار α مساويا لـــ ε. وهذا يعني أن α مستقل عن النقاط التي يمكن أن ندرس عند ا الاستمرار. وبالتالي فالدالة الجيبية مستمرة بانتظام.

مثال 2

نعتبر دالة f تحقق الخاصية التالية، المسماة شرط ليبشيتز Lipschitz $(1832-1903)$:

يوجد ثابت K موجب تماما بحيث من أجل كل عنصرين x و y ينتميان إلى مجموعة تعريف f فإن :

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|.$$

تسمى دالة تحقق هذا الشرط دالة ليبشيتزية.

نلاحظ أن كل دالة ليبشيتزية دالة مستمرة بانتظام إذ يكفي اختيار (في تعريف الاستمرار المنتظم) $\alpha=\frac{\varepsilon}{K}$.

عندما يكون الثابت K ينتمي إلى المجال $]0,1[$ نقول إن f تقلـــيص contraction. سوف نعود إلى هذا التعريف لاحقا.

مثال 3

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,1]$ بـ $g(x)=\frac{1}{x}$. ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم. نضع $x=\frac{2}{n}$ و $y=\frac{1}{n}$ ونلاحظ أن x و y ينتميان إلى $]0,1]$ من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم. ثم نحسب :

$$|x-y|=\frac{1}{n}$$

$$|g(x)-g(y)|=\frac{n}{2}.$$

ومن ثمّ يتبّن عندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ أن $|x-y|$ يؤول إلى 0 بينما يؤول $|g(x)-g(y)|$ إلى $+\infty$.

وهذا يتنافى مع الاستمرار المنتظم الذي يتطلب قيام الاستلزام :

$$|x-y|\longrightarrow 0 \quad\Rightarrow\quad |g(x)-g(y)|\longrightarrow 0.$$

وبالتالي فإن g غير مستمر بانتظام على المجال $]0,1]$ رغم أنه مستمر على نفس المجال.

لاحظ أن إثباتنا عدم انتظام استمرار g كان يركّز على النقطة 0 وجوارها لأننا جعلنا n يؤول إلى $+\infty$ وهذا يعني أن x و y يؤولان إلى 0.

ولذا نستطيع القول إن عدم انتظام الاستمرار ناتج من الطرف 0 من مجال التعريف $]0,1]$. ومما يؤكد ذلك النظرية التالية التي تهتم بالاستمرار على المجالات المتراصة :

نظرية (نظرية هاين Heine)

كل دالة $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة على مجال $I = [a,b]$ متــراص (أي مغلق ومحدود) دالة مستمرة بانتظام على I.

نظرية (إدراك الحدين الأعلى والأدنى)

كل دالة f مستمرة على متراص $[a,b]$ دالة محدودة وتدرك حدّيْها الأعلى والأدنى.

تعقيب

لاحظ أن محدودية المجال مهمة في هذه النظرية. للتأكد من ذلك خذ مثلا إحدى الدالتين : دالة الظل على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ أو الدالة g المعرفـــة على $]0,1]$ بـــ $g(x)=\frac{1}{x}$.

لاحظ أيضا أن غلق المجال مهم في النظرية السابقة. للتأكد من ذلك اعتبر كمثال الدالة g أو الدالة h المعرفة على المجال $[1,2[$ بـــ $h(x)=x$ فهي لا تدرك حدها الأعلى في المجال المعتبر.

من النظريات المهمة أيضا في موضوع الدوال المستمرة النتيجة التالية، وهي نظرية القيم الوسطى التي تم البرهان عليها لأول مرة خلال الربع الأول من القرن التاسع عشر التشيكي بولزانو والفرنسي كوشي. تقــول هــذه النظرية – بتعبير بسيط – إننا لا نستطيع المرور من ضفة إلى أخرى عبر نهر بدون قفز ودون أن تبتلّ أقدامنا!!

ونعبّر عن ذلك رياضيا بالقول : إذا أخذت دالة مستمرة لمتغير واحد إشارتين مختلفتين عند قيمتين a و b فإن هذه الدالة تنعدم، على الأقل مـــرة واحدة، بين a و b. وهو ما يقول النص المألوف التالي :

نظرية (القيم الوسطى)

لتكن f دالة مـــستمرة علـــى مجـــال متـــراص $[a,b]$. إن كـــان $f(a).f(b)<0$ فإنه توجد نقطة c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

نستنتج من ذلك التعميم الموالي (لاحـــظ في النظريـــة الـــسابقة أن $f(a).f(b)<0$ يعني أن 0 يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ... في النظرية المواليـــة سنعوّض 0 بنقطة d) :

نظرية (القيم الوسطى، تعميم)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة على مجال كيفي I. ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـــ f حيث $x_1<x_2$.

عندئذ من أجل كل عنصر d محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجـــد عنصر c من المجال $]x_1,x_2[$ يحقق $f(c)=d$.

تعقيب

ينتج من ذلك أن صورة مجال عبر دالة مستمرة هي أيضا مجال. كما ينتج من هذه النظرية والتي سبقتها في حالة تراص المجال $[a,b]$ أن صورة هذا المجال هي المجال $\left[\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right]$.

نظرية (الاستمرار والتباين والرتابة)

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ومتباينة على مجال كيفي I.
عندئذ تكون f رتيبة تماما.

هناك خواص أخرى تتمتع بها الدوال المستمرة تربطها بكثيرات الحدود التي تعتبر من أبسط الدوال المستمرة. ومن تلك النتائج نسوق اثنتين هما :

نظرية (تقريب فيرشتراس Weierstrass)

لتكن دالة $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة حيث I مجال متراص.
عندئذ توجد متتالية كثيرات حدود P_n تتقارب بانتظام نحو f، أي:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in I} \left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon .$$

أما النتيجة الثانية فهي تعبّر عن نفس الفكرة لكنها تحدّد متتالية كثيرات الحدود التي تتقارب بانتظام نحو أية دالة f مستمرة على المجال $[0,1]$. يحتاج تقديم نصها إلى التعريف التالي:

تعريف (كثير حدود برنشتين Bernstein)

لتكن f دالة مستمرة على المجال $[0,1]$. نعرّف، من أجل كل عدد طبيعي n، كثير الحدود $B_n(f)$ المتعلق بـ f على النحو :

$$B_n(f)(t) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right)(1-t)^{n-p} t^p$$

حيث $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

تسمى المتتالية $B_n(f)$ متتالية كثيرات حدود برنـــشتين Bernstein (1880−1968).

نظرية (كثير حدود برنشتين والتقارب المنتظم)

من أجل كل دالة f مستمرة على المجال $[0,1]$ فإن متتالية كـــثيرات حدود برنشتين تتقارب بانتظام نحو f في المجال $[0,1]$، أي أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - (B_n f)(x) \right| < \varepsilon .$$

7. نظرية النقطة الصامدة

النقطة الصامدة لتطبيق هي نقطة تظل ثابتة عبر هذا التطبيق، أي أنها نقطة تتطابق مع صورها. مثال ذلك : نعتبر مجموعة نقاط من الفضاء تشكل كرة ونقوم بتحويلها إلى الكرة ذاتها غبر واحد من التطبيقات الثلاث التالية :

التطبيق **1** : التطبيق الذي يحوّل كل نقطة من الكرة إلى نظيرها بالنسبة إلى مقطع استوائي. إنه تناظر بالنسبة لمستوٍ استوائي للكرة. نلاحظ أن كل نقاط مستوي التناظر نقاط صامدة.

التطبيق **2** : التطبيق المتمثل في دوران حول محور يمرّ بمركز الكرة. كل نقاط محور الدوران نقاط صامدة.

التطبيق **3** : التطبيق الذي يحوّل كل نقطة إلى نظيرتها بالنسبة إلى مركز الكرة. هناك نقطة صامدة وحيدة هي مركز الكرة.

تتجلّى بعض مميزات النقطة الصامدة عندما نقرنها بمفهوم الاستمرار. ما دور الاستمرار هنا؟ لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون لكل تطبيق، يحوّل الكرة إلى الكرة ذاتها، نقاط صامدة. للتأكد من ذلك نعتبر التطبيق 3 الوارد أعلاه مع تعديل طفيف يتمثّل في تحويل مركز الكرة إلى نقطة أخرى تختلف عن المركز : بذلك يفقد التحويل نقطته الصامدة الوحيدة.

ماذا حدث؟ لقد فقدَ هذا التطبيق الجديد خاصية الاستمرار بجوار مركز الكرة. إن مفهوم الاستمرار يضع حدا فاصلا بين التطبيقات التي تتمتع دوما بنقاط صامدة وتلك التي قد لا تتوفر فيها هذه الخاصية.

نظرية (النقطة الصامدة)

ليكن $f:[a,b]\to[a,b]$ تابعا مستمرا. توجد على الأقل نقطة (تسمى النقطة الصامدة) $x\in[a,b]$ تحقق $f(x)=x$.

تعقيبات

1) لهذه النظرية عدة صيغ وتعميميات إلى فضاءات مجردة، وهي كلها تصل في الأخير إلى وجود نقطة x صامدة، أي بحيث $f(x)=x$ ... التي تكون وحيدة إن أضيفت شروط أخرى على التابع f .

2) المعنى الهندسي للنقطة الصامدة وللنظرية السابقة هو أن بيان التابع يلتقي على الأقل مرة واحدة مع المنصف الأول ... ونقطة التقاطع هي النقطة الصامدة.

3) كانت مسألة أبعاد الفضاء التي طرحها كنتور (انظر مقدمة هذا الفصل) تبدو بعيدة المنال لدى ظهور نص نظرية النقطة الصامدة. فقد كان بروور يعتبر أن الصلة بين حل مسألة البعد وبين نظريته المتعلقة بالنقطة الصامدة صلة ضعيفة على الرغم من أن هناك صلة مباشرة بينهما. وفي عام 1988 برهن ولاديسلاو Wladyslaw وتورزانسكي Turzansky باستخدام نظرية بروور على عدم تغيّر البعد عندما يتعلق الأمر بتطبيق مستمر.

4) تثبت نظرية النقطة الصامدة أنه توجد على الأقل نقطة صامدة، لكن كم يبلغ عدد تلك النقاط؟ وفي أية حالة تكون هذه النقطة، مثلا، وحيدة؟ لقد بحث الرياضيون منذ فترة طويلة — سواء عن قصد أو عن غير قصد — في خواص التطبيق ومجموعة النقاط التي نجري عليها التحويل الضامن لوحدانية النقطة الصامدة. من أقدم النتائج المتعلقة بالنقطة الصامدة تلك المرتبطة بالتقليص :

نظرية (التقليص والنقطة الصامدة)

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تقليصا، أي أنه يوجد ثابت موجب $K<1$ بحيث :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad |f(x)-f(y)|\le K|x-y|.$$

عندئذ يقبل f نقطة صامدة وحيدة.

تعقيب

1) يمكن تعويض $\mathbb{R}$ بـ $\mathbb{C}$ في النظرية السابقة. كما يمكن تعميم النتيجة إلى فضاءات أخرى.

2) يمكن أن نلاحظ ما يلي باعتبار أن التقليص له صلة بتكرار عملية التركيب : نعتبر مثلا الدالة جيب التمام cos ونستخدم الآلة الحاسبة. فهذه الدالة ليست تقليصا لكنها تقبل مثل التقليصات نقطة صامدة. إنها تحوّل مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد المحصورة بين 1− و 1+. عندما نضغط بصفة متوالية في الآلة الحاسبة على الزر cos انطلاقا من قيمة عددية a فإننا نحصل على سلسلة قيم هـــي :

$$\cos a \text{ ، } \cos(\cos a) \text{ ، } \cos(\cos(\cos a)) \text{ ، } \ldots$$

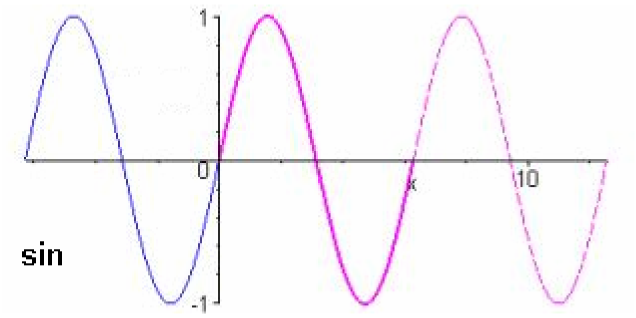
التي تتقارب نحو القيمة 0.739085133 . يمثل هذا العدد القيمة التقريبية بعشر أرقام بعد الفاصلة للنقطة الصامدة للتطبيق cos، أي العدد x الممثل لحل المعادلة $\cos x = x$ وهو حل يستحيل أن نجد له عبارة دقيقة.

8. دوال شهيرة

كنا عرّفنا في الفصل الثاني الدالتين الجيب sin وجيب التمام cos. نقدم هنا بإيجاز مجموعات تعريف الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكـــسية وبياناتها.

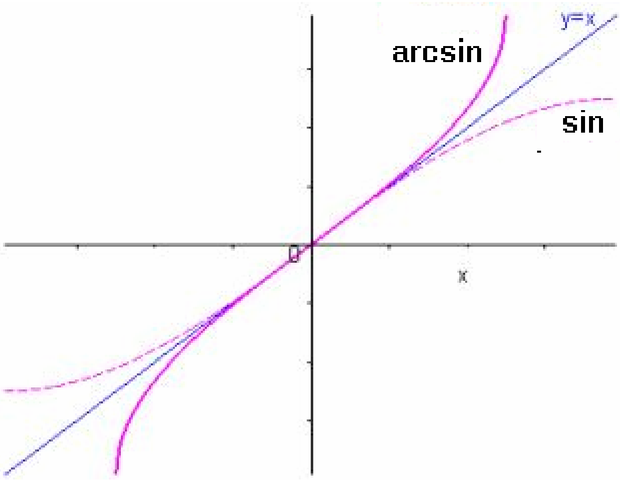
1. دالة الجيب sin

مجموعة تعريفها : $\mathbb{R}$، مجموعـــة وصـــولها $[-1,1]$، هـــي دوريـــة دورها 2π، ومستمرة و بيانها هو :



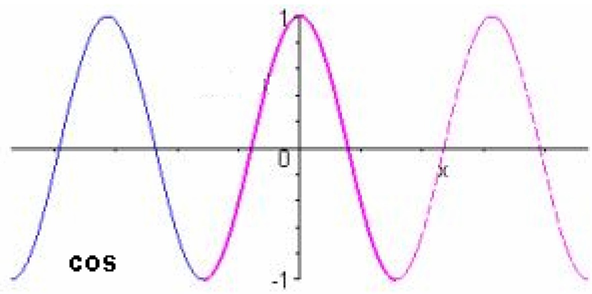
2. دالة قوس الجيب arcsin

هي الدالة العكسية للدالة الجيب. مجموعة تعريفها : $[-1,1]$، مجموعة وصولها $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، وهي مستمرة ومتزايدة، وبيانها هو :



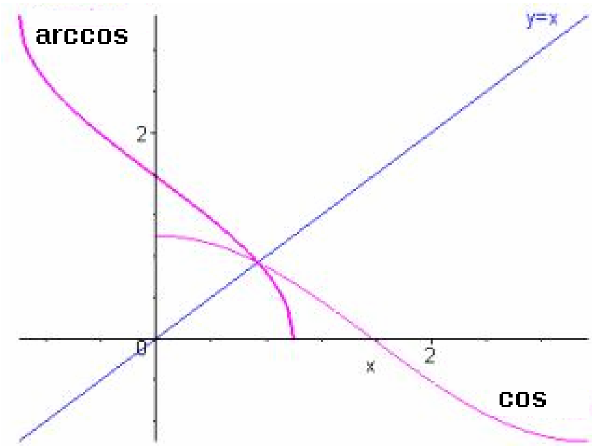
3. دالة جيب التمام cos

مجموعة تعريفها : $\mathbb{R}$، مجموعة وصولها $[-1,1]$، هي دورية دورها 2π، وبيانها هو :



4. دالة قوس جيب التمام arccos

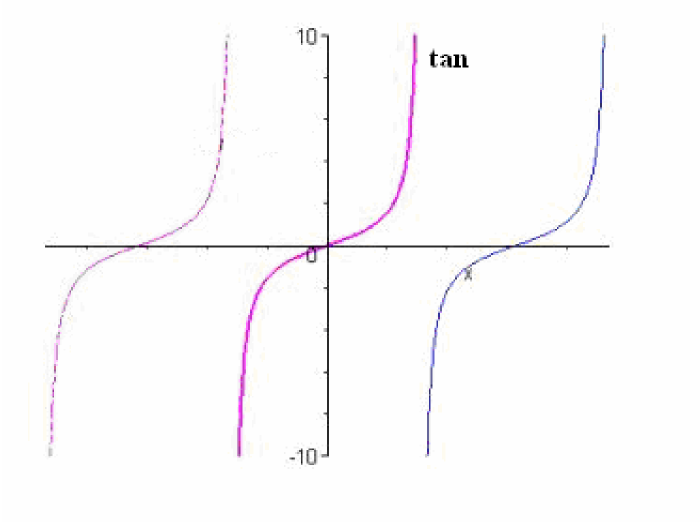
هي الدالة العكسية للدالة جيب التمام. مجموعة تعريفها : $[-1,1]$، مجموعة وصولها $[0,\pi]$ وهي مستمرة ومتناقصة، وبيانها هو :



5. دالة الظل tan

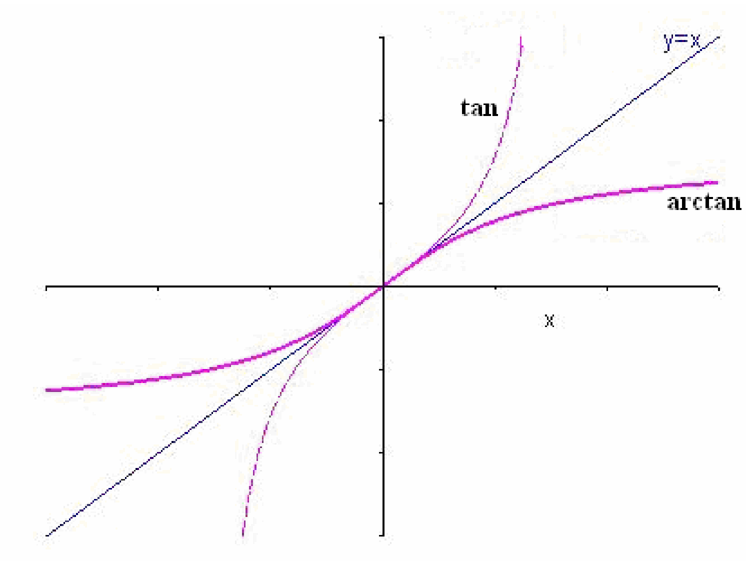
مجموعة تعريفها : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، مجموعة وصولها $\mathbb{R}$. ويمكن تمديد مجموعة التعريف إلى المجالات $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left](2n-1)\frac{\pi}{2},(2n+1)\frac{\pi}{2}\right[$ عبر الدورية.

دالة الظل (بدون تمديد) مستمرة وبيانها (لاحظ تكرار البيان) هو :



6. دالة قوس الظل arctan

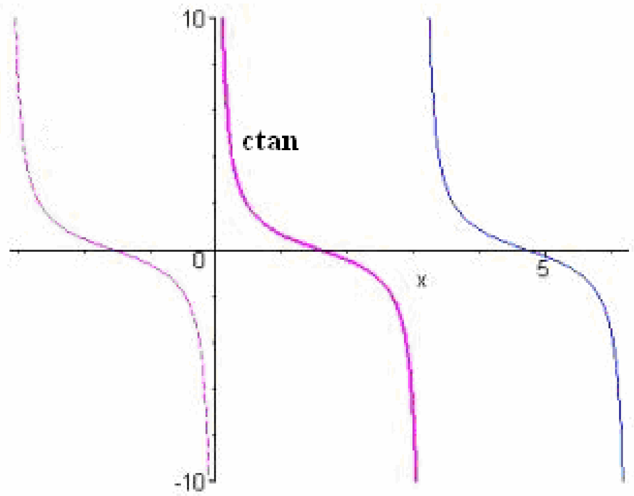
هي الدالة العكسية لدالة الظل. مجموعة تعريفها : $\mathbb{R}$، مجموعة وصولها $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. الدالة قوس الظل مستمرة ومتزايدة، وبيانها هو :



7. دالة ظل التمام ctan

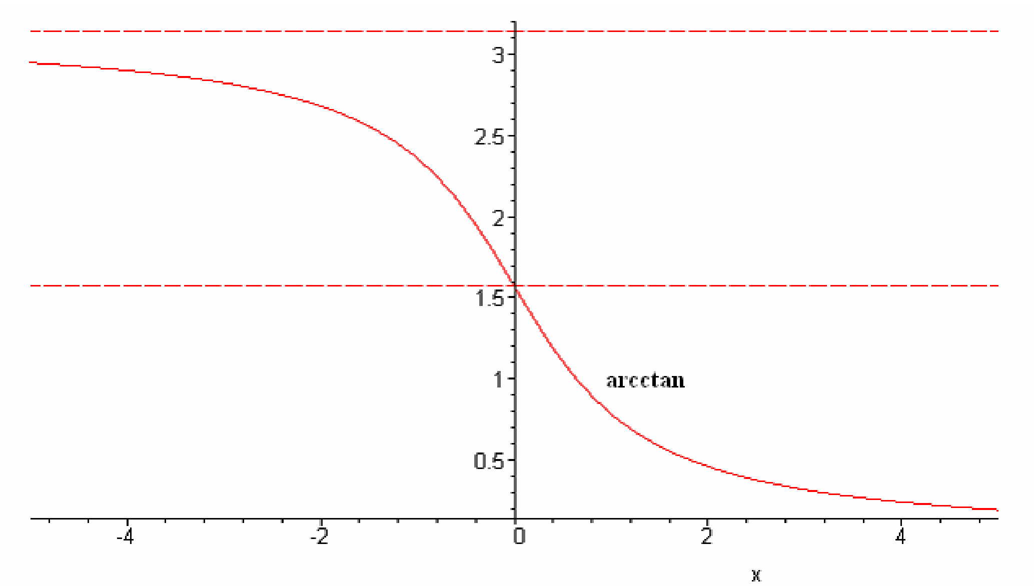
مجموعة تعريفها : $]0,\pi[$، مجموعة وصولها $\mathbb{R}$. ويمكن تمديد مجموعة تعريفها إلى مجالات أخرى بواسطة الدورية.

دالة ظل التمام (بدون تمديد) مستمرة وبيانها (لاحظ تكرار البيان) هو :



8. دالة قوس ظل التمام arcctan

هي الدالة العكسية لدالة ظل التمام. مجموعة تعريفها : $\mathbb{R}$، مجموعة وصولها $]0,\pi[$. الدالة قوس ظل التمام مستمرة ومتناقصة، وبيانها هو :


3
2.5
2
1.5
1
0.5
-4
-2
0
2
4
x
arcctan

****

نصوص التمارين

الفصل الأول

الأعداد الحقيقية والأعداد العُقَدِيَّة

نصوص التمارين

تمرين 1

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم.

1) أثبت (باستخدام دستور ثنائي الحد مثلا) أن :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+},\ \forall b \in \mathbb{R}^{+},\ \ a+b \le \left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}\right)^{n}.$$

2) استنتج العلاقة :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \left| |a|^{\frac{1}{n}} - |b|^{\frac{1}{n}} \right| \le |a-b|^{\frac{1}{n}}.$$

تمرين 2

عين الحد الأعلى والحد الأدنى والقيمة العظمى والقيمة الصغرى للمجموعات التالية :

1) $]-1,3]$ ، 2) $[0,2]\cup]2,3]$ ،

3) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 3\}$ ،

4) $\left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 3\right\}$ ،

5) $\left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 3 \ \vee \ -2 < x \leq -1\right\}$ ،

6) $\left\{x \in \mathbb{R},\ x = 2 + \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

تمرين 3

ليكن A و B جزءين غير خاليين ومحدودين من $\mathbb{R}$. أثبت :

1) $A \cup B$ محدودة.

2) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

3) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

تمرين 4

ليكن A جزءا غير خال ومحدود من $\mathbb{R}$. نضع $B = \{|x| : x \in A\}$

1) أثبت أن B محدود.

2) أثبت المساواة : $\sup B = \max(|\inf A|, |\sup A|)$.

تمرين 5

ليكن A جزءا محدودا وغير خال من $\mathbb{R}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} :\ -x \in A\}$.

أثبت أن : $\sup A = -\inf B$.

تمرين 6

ليكن A جزءا محدودا وغير خال من $]0,+\infty[$.

1) أثبت أن المجموعة $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{1}{x}\in A\right\}$ ليست بالضرورة محدودة؟ أثبت أنه إذا كان $\inf A>0$ فإن المجموعة B محدودة. قارن في هذه الحالة $\sup B$ و $\frac{1}{\inf A}$، ثم $\inf B$ و $\frac{1}{\sup A}$.

2) نفرض أن A مجال مغلق (ليس بالضرورة محدودا). أثبت أن B محدودة.

3) المجموعة $C=\left\{x^2\in\mathbb{R}:\ \mathrm{x}\in A\right\}$ محدودة عندما يكون A محدودا. قارن العددين $\left(\sup A\right)^2$ و $\sup C$.

تمرين 7

ليكن E الجزء من $\mathbb{R}$ المعرف بـــ :

$E=\left\{x_n:\ x_n=(-1)^n+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$. عين الحد الأعلى والحد الأدنى للمجموعة E.

تمرين 8

ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}^+$. نعرّف المجموعة B بـــ :

$B=\left\{x\in\mathbb{R}^+:\ x^2\in A\right\}$.

1) أثبت أنه إذا كان A محدودا فإن B محدود.

2) أثبت أنه إذا كان A محدودا فإن $\sqrt{\sup A} = \sup B$ و
. $\sqrt{\inf A} = \inf B$

تمرين 9

أثبت أن $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$.

تمرين 10

أثبت أن المجموعتين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ مجموعتان مغلقتان في $\mathbb{R}$.

تمرين 11

1) أثبت أن مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة وليست مغلقة في $\mathbb{R}$.

2) عين ملاصقة $\mathbb{Q}$.

تمرين 12

1) ما هي المفتوحات المحتواة في $\mathbb{Q}$؟

2) هل هناك مغلقات في $\mathbb{Q}$؟

3) هل هناك مغلقات تحتوي $\mathbb{Q}$؟

****

الفصل الثاني

المتتاليات

نصوص تمارين

تمرين 1

ما قولك في رتابة المتتاليات المعرفة بحدودها العامة كما يلي :

1) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.

2) $u_n = 5n + \frac{1}{n+1}$.

3) $u_n = \frac{n+5}{4n-2}$.

4) $u_n = -2n + n^2$.

5) $u_n = n(n+(-1)^n)$.

6) $u_n = \frac{\sqrt{2+2(-1)^n}}{n+1}$.

7) $u_n = \sin n$ (حيث يرمز $\sin$ إلى الجيب)،

8) $u_n = \sqrt[n]{2}$.

تمرين 2

أدرس طبيعة كل متتالية (u_n) المعرفة بـــ :

1) $u_n = \frac{2}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$.

3) $u_n = \frac{1.3.5...(2n-3)(2n-1)}{2.4.6...(2n-2).2n}$.

4) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

تمرين 3

ادرس طبيعة المتتاليات التالية :

1) $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$.

2) $u_n = \frac{1+2+3+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$.

3) $u_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$.

4) $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}$.

تمرين 4

لتكن (u_n) متتالية عددية. أثبت التكافؤ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 .$$

تمرين 5

لتكن (u_n) متتالية أعداد موجبة. أثبت أن :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n+1}=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=0 .$$

تمرين 6

إذا تقاربت متتالية عددية أثبت وحدانية نهايتها.

تمرين 7

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجيا بـــ :

$$\begin{cases} u_0=a\in[-1,1], \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n{}^2+1}{2}, \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

متزايدة ومحدودة. استنتج تقارب المتتالية واحسب نهايتها.

تمرين 8

عين طبيعة المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n=\left(\dfrac{i-1}{i+1}\right)^{n!}$.

تمرين 9

ليكن $a\in\mathbb{C}$. ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـــ $u_n=a^n$ المسماة المتتالية الهندسية ذات الأساس a.

أثبت أن المتتالية (u_n) تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان $|a|<1$ أو $a=1$.

تمرين 10

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين تحققان الشرطين :

1) (u_n) متقاربة نحو الصفر.

2) $|v_{n+p}-v_n|\le|u_n|$ من أجل كل عددين طبيعيين n و p.

أثبت أن (v_n) متقاربة.

تمرين 11

لتكن (u_n) متتالية موجبة. نفرض أن $u=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ وأن $u\in]-1,1[$. برهن أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

تمرين 12

لتكن (u_n) متتالية عددية تحقق الشرط :

$$|u_{n+2}-u_{n+1}|\le\frac{|u_{n+1}-u_n|}{3}$$

من أجل كل عدد طبيعي n.

أثبت أن $|u_{n+2}-u_{n+1}|\le\frac{|u_1-u_0|}{3^{n+1}}$ من أجل كل عدد طبيعي n، ثم استنتج أن (u_n) كوشية (وبالتالي فهي متقاربة).

تمرين 13

ليكن $a \in \mathbb{C}$. ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـــ $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

1) نفرض في هذا السؤال أن $a \in \mathbb{R}^*$. أثبت أن (u_n) رتيبة ومحدودة.
استنتج أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) برهن أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ عندما يكون $a \in \mathbb{C}$.

تمرين 14

بيّن أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ متباعدة.

تمرين 15 (أساس اللوغاريتم النبيري e عدد أصم)

نذكّر أن e هو (تعريفا) النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـــ $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1) نفترض أن e ناطق وأنه يوجد (إذن) عددان طبيعيان p و q بحيث $e = \frac{p}{q}$. أثبت أن $q!u_q < (q-1)!.p < q!u_q + 1$.

2) استنتج أن المتباينة السابقة خاطئة. واستخلص أن e غير ناطق (أي أنه أصم).

تمرين 16

نعتبر المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة تدريجيا كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3+2u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) بيّن أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : 0 < u_n \leq 1 .$$

2) تأكد من رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومن تقاربها معينا نهايتها.

تمرين 17

نعتبر المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة تدريجيا كما يلي، علما أن a عدد معطى في المجال $[0,1]$:

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

1) أثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن u_n ينتمي إلى المجال $[0,1]$. ثم أثبت أن المتتالية المعطاة رتيبة.

2) استنتج تقارب المتتالية وعين نهايتها.

3) نضع $a = \cos\theta$ حيث $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. بيّن أن

$$u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

تمارين 18

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n-1}+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

حيث a و b عددان حقيقيان يحققان $0 < b < a$.

1) أثبت أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 0 < v_n < u_n .$$

2) برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتان (متناقصة ومتزايدة، على الترتيب). ثم استنتج تقاربهما.

3) أثبت أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{v}_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{v_n - u_n}{2} .$$

استنتج وجود ثابت موجب C بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{v}_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{C}{2^{n+1}} .$$

واستخلص أن المتتاليتين متقاربتان نحو نفس النهاية.

4) احسب الجداء $u_n v_n$ بدلالة a و b من أجل تحديد النهاية المشتركة لـــ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

****

الفصل الثالث

الدوال الحقيقية الوحيدة المتغيّر

نصوص التمارين

تمرين 1

استخدم تعريف النهاية في إثبات :

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3\right)=3$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x^2+1}=-2$.

تمرين 2

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x}$.

تمرين 3

نقدم رمزي لوندو Landau :

نعتبر دالتين f و g معرفتين بجوار نقطة x_0 يمكن السماح للدالتين ألا تكونا معرفتين عند x_0 .

نقول إن f مهملة أمام g بجوار x_0 (أو عندما يؤول المتغير إلى x_0 أو عند x_0) إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. نكتب في هذه الحالة $f=\circ(g)$.

نقول إن f مهيمنة على g بجوار x_0 (أو عندما يؤول المتغير إلى x_0 أو عند x_0) إذا كان $\frac{f}{g}$ محدودا بجوار x_0 . نكتب في هذه الحالة $f=\mathrm{O}(g)$.

1) ماذا تعني الكتابتان $f=\circ(g)$ و $f=\mathrm{O}(g)$ في حالة $g=1$ ؟

2) تأكد من صحة العلاقات التالية بجوار 0 :

أ) $x^2=\circ(x)$ ،

ب) $\sin x=\circ(\sqrt{|x|})$ ،

ج) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4=\circ(\mathrm{tn}x)$ ،

د) $x^2\sin\frac{1}{x}=\mathrm{O}(x^2)$ ،

هـ) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2=\mathrm{O}(x^2)$ ،

و) $x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2=\mathrm{O}(x)$.

3) تأكد من صحة العلاقات التالية بجوار $+\infty$:

أ) $\frac{1}{x^2}=\circ(\frac{1}{\sqrt{x}})$ ،

ب) $x^2\sin\frac{1}{x}+x=\circ(x^3)$ ،

ج) $x+2x^3=\mathrm{O}(x^3)$ ،

د) $x^2\cos\frac{1}{x}+5x^3\sin\frac{1}{x}=\mathrm{O}(x^2)$.

4) تأكد من العلاقات التالية :

أ) $\circ(f) = \circ(f) + \circ(f)$ ،

ب) $\mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(f) + \mathrm{O}(f)$ ،

ج) $\mathrm{O}(f) = \circ(f) + \mathrm{O}(f)$.

تمرين 4

احسب النهايات الثلاث التالية :

$\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\tan x}{\sin 3x}$ ، $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

تمرين 5

نقول إن تابعين f و g متكافئان بجوار نقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ونكتب $f \overset{V(x_0)}{\sim} g$.

1) أثبت أنه إذا كان g تابعا معرفا بجوار x_0 ولا ينعدم في هذا الجوار وكان $f \overset{V(x_0)}{\sim} u$ فإن $f^2 \overset{V(x_0)}{\sim} u^2$ و $fg \overset{V(x_0)}{\sim} ug$.

2) $f \overset{V(x_0)}{\sim} u$ و $g \overset{V(x_0)}{\sim} v$ فإن $u \overset{V(x_0)}{\sim} v$ يكافئ $f \overset{V(x_0)}{\sim} g$.

3) تطبيق : احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\tan x}{\sin 3x}$ و $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(\cos x - 1)^2}{x^4}$.

تمرين 6

أ) ليكن $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ التابع المعرف بـــ $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

1) هل f مستمر على $\mathbb{R}^*$؟

2) ماذا يجب أن تكون قيمة هذا التابع عند 0 حتى يكـــون مستمرا على كامل $\mathbb{R}$؟

ب) أجب عن السؤالين السابقين باعتبار التابع $g:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ التـــابع المعرف بـــ $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$.

تمرين 7

لتكن دالة f معرفة ومستمرة على مجال I باستثناء نقطة x_0. نفرض أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة ونرمز لها بـــ l. تسمى الدالة :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & : \quad x \in I - \{x_0\} \\ l & : \quad x = x_0 \end{cases}$$

تمديد f بالاستمرار إلى x_0.

هل يمكن تمديد الدالة f المعرفة علـــى $\mathbb{R}^*$ بـــــ $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ لتكون مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 8

نفرض أن دالتين مستمرتان على $\mathbb{R}$ ومتطابقتـــان علـــى مجموعـــة الأعداد الناطقة. أثبت تطابق الدالتين على $\mathbb{R}$.

تمرين 9

ليكن التابع $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ المعرف بـــ $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم. هل يمكن تمديد f بالاستمرار إلى $\mathbb{R}$ بأكمله؟

تمرين 10

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا مستمرا ودوريا. نفرض أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}.$$

أثبت أن f ثابت وعيّن قيمته.

تمرين 11

أثبت أن التابع

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

مستمر بانتظام على $]0,1[$.

تمرين 12

1) أثبت أن التابع

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto \sin x \end{aligned}$$

مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$.

2) أثبت أن التابع

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto \sin\left(x^2\right) \end{aligned}$$

مستمر بانتظام على كل مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.

3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـــ $u_n = n + \frac{1}{n}$ و $.v_n = n - \frac{1}{n}$

أثبت، مستخدما العلاقات المثلثية، أن :

$$g(u_n) - g(v_n) = (2\sin 2)\cos(n^2 + \frac{1}{n^2}).$$

4) بكتابة $\cos(n^2 + \frac{1}{n^2})$ على الشكل :

$$\cos(n^2 + \frac{1}{n^2}) = \cos n^2 \cos\frac{1}{n^2} - \sin n^2 \sin\frac{1}{n}$$

استنتج أن المتتالية $g(u_n) - g(v_n)$ غير متقاربة مع التـــسليم بـــأن المتتاليـــة $\cos n^2 \cos\frac{1}{n^2}$ متباعدة.

5) استخلص أن التابع g ليس مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}$.

تمرين 13

لتكن $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة مستمرة. نضع $g(x) = f(x) - x$. نريد أن نعْرِف ما إذا كانت هناك نقطة $x\in[a,b]$ بحيث $g(x) = 0$. لنفـــرض أن ذلك غير صحيح، أي أن :

$$(1) \quad \forall x\in[a,b],\ g(x)\neq 0 .$$

1) أثبت أن إحدى القضيتين صحيحة :

$$(2) \quad \forall x\in[a,b],\ g(x) > 0 ,$$

$$(3) \quad \forall x\in[a,b],\ g(x) < 0 .$$

2) أثبت أن صحة إحدى القضيتين (2) و (3) تناقض الفرض القائل إن : $f:[a,b]\to[a,b]$.

3) استنتج وجود نقطة $x\in[a,b]$ بحيث $g(x)=0$. هل يمكنك استخلاص نتيجة تتعلق بالتابع f .

تمرين 14

أثبت أن للمعادلة $x = e^{-x}$ حلا على الأقل.

تمرين 15

ليكن J مجالا كيفيا. ذكّر أننا نقول عن تابع $f:J\to J$ إنه تقليص إذا وجد ثابت $M\in]0,1[$ بحيث :

$$\forall x\in J,\ \forall x'\in J,\quad |f(x)-f(x')|\le M|x-x'|\,.$$

1) برهن أن كل تقليص تابع مستمر.

2) أثبت أنه إذا كان $f:[a,b]\to[a,b]$ فإن f يقبل نقطة صامدة وحيدة $x\in[a,b]$ ، أي نقطة $x\in[a,b]$ تحقق $f(x)=x$.

تعقيب : تظل هذه النتيجة صحيحة حتى لو استبدلنا فيها $[a,b]$ بمغلق $F\subset\mathbb{R}$.

****

حلول التمارين

الفصل الأول

الأعداد الحقيقية والأعداد العُقَدِيَّة

حلول التمارين

حل التمرين 1

1) **طريقة 1** : نعلم (حسب دستور ثنائي الحد) أن :

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall b \in \mathbb{R}^+,\ \left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{n-r}{n}} \\ &= a + b + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{n-r}{n}} \\ &\geq a + b.\end{aligned}$$

ذلك هو المطلوب.

طريقة 2 : يمكن أيضا القول بأن المطلوب يكافئ العلاقة :

$$(^*)\quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ x^n + y^n \leq (x+y)^n.$$

وذلك بعد وضع $x = a^{\frac{1}{n}}$ و $y = b^{\frac{1}{n}}$. ثم مواصلة الاستدلال بالتدريج على n: العلاقة $(^*)$ واضحة من أجل $n = 1$. نفرض صحتها من أجل

الرتبة $n-1$ ونثبتها من أجل الرتبة n. وهذا أمر بسيط إذ نحصل بالاستفادة من فرض التراجع :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ x^{n-1}+y^{n-1} \le (x+y)^{n-1}$$

على :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ (x+y)\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right) \le (x+y)(x+y)^{n-1}$$

ونبلغ المطلوب بتعقيب أن :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\quad \mathrm{x}^{\mathrm{n}}+y^n &\le \mathrm{x}^{\mathrm{n}}+y^n+xy^{n-1}+yx^{n-1}\\ &=(x+y)\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)\\ &\le (x+y)(x+y)^{n-1}\\ &=(x+y)^n.\end{aligned}$$

2) نلاحظ في البداية أن العلاقة المثبتة آنفا تكافئ

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+,\ (a+b)^{\frac{1}{n}} \le a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}.$$

لدينا حسب خواص القيمة المطلقة وبالاستفادة من العلاقة السابقة :

$$\begin{aligned}|a|^{\frac{1}{n}} &= |a-b+b|^{\frac{1}{n}}\\ &\le \left(|a-b|+|b|\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\le |a-b|^{\frac{1}{n}}+|b|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

ومنه :

$$|a|^{\frac{1}{n}}-|b|^{\frac{1}{n}} \le |a-b|^{\frac{1}{n}}.$$

وبالمبادلة بين دوري a و b نحصل أيضا على :

$$|a|^{\frac{1}{n}} - |b|^{\frac{1}{n}} \leq |a-b|^{\frac{1}{n}} .$$

فنستنتج من العلاقتين الأخيرتين المطلوب، وهو :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \left| |a|^{\frac{1}{n}} - |b|^{\frac{1}{n}} \right| \leq |a-b|^{\frac{1}{n}} .$$

حل التمرين 2

نكتفي بتقديم الإجابات :

1) $]-1,3]$: $\sup]-1,3]=3$ ، $\inf]-1,3]=-1$ ،

$\max]-1,3]=3$ ، $\min]-1,3]$ غير موجودة.

2) $[0,2]\cup]2,3]$: لاحظ أن $[0,2]\cup]2,3]=[0,3]$. وبالتالي :

$\sup[0,2]\cup[2,3[=3$ ، $\inf[0,3]=0$ ،

$\max[0,3]=3$ ، $\min[0,3]=3$.

3) $\{x\in\mathbb{R}: 2<x\leq 3\}$: لاحظ أن

$\{x\in\mathbb{R}: 2<x\leq 3\}=]2,3]$.

ومنه تكون الإجابة كالتالي في ما يخص المجموعة المطلوبة :

$\sup]2,3]=3$ ، $\inf]2,3]=2$ ،

$\max]2,3]=3$ ، $\min]2,3]$ غير موجودة.

4) $\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{R}: 2<x\leq 3\right\}$: لاحظ أن

$\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{R}: 2<x\leq 3\right\}=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$.

ومنه تكون الإجابة كالتالي في ما يخص المجموعة المطلوبة :

$\inf\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[=\frac{1}{3}$ ، $\sup\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[=\frac{1}{2}$ ،

$\max\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$ غير موجودة ، $\min\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[=\frac{1}{3}$.

5) $\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{R}:0<x\le 3\ \vee\ -2<x\le -1\right\}$. لاحظ أن :

$$\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{R}:0<x\le 3\ \vee\ -2<x\le -1\right\}=\left[-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[.$$

ومنه تكون الإجابة كالتالي في ما يخص المجموعة المطلوبة :

$\sup\left[-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ غير موجود ،

$\inf\left[-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[=-1$ ،

$\max\left[-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ غير موجودة ،

$\min\left[-1,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[=-1$.

6) $\left\{x\in\mathbb{R},\ x=2+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$. لاحظ أننا لا نستطيع كتابة المجموعة في شكل مجال لأنها متكوّنة من عناصر متقطعة، فهي جزء من مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. ثم إنه من الواضح أن 3 عنصر من المجموعة المعطاة وهو في نفس الوقت حاد من الأعلى. إذن :

$$\sup\left\{x\in\mathbb{R},\ x=2+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=3$$

و

$$\max\left\{x\in\mathbb{R},\ x=2+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=3.$$

ومن جهة أخرى، نرى أن 2 حاد من الأدنى. هل هو الحد الأدنى للمجموعة؟ لتوضيح ذلك نعتبر عددا $a>2$. يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $a > 2+\frac{1}{n_0}$، ذلك أنه يكفي اختيار العدد الطبيعي n_0 كبيرا بكفاية بحيث تتحقق المتباينة : $n_0 > \frac{1}{a-2}$. وهكذا نكون قد وجدنا عنصرا $2+\frac{1}{n_0}$ من المجموعة المعطاة أصغر تماما من a. إذن :

$$2<a \;\Rightarrow\; \inf\left\{x \in \mathbb{R},\, x = 2+\frac{1}{n} :\, n \in \mathbb{N}^*\right\} < a\,.$$

ذلك ما يثبت أن (تذكّر أن 2 حاد من الأدنى) :

$$\inf\left\{x \in \mathbb{R},\, x = 2+\frac{1}{n} :\, n \in \mathbb{N}^*\right\} = 2\,.$$

وأخيرا نلاحظ أن :

$$2 \notin \left\{x \in \mathbb{R},\, x = 2+\frac{1}{n} :\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

ومنه يتبيّن أن $\min\left\{x \in \mathbb{R},\, x = 2+\frac{1}{n} :\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ غير موجودة.

حل التمرين 3

1) ليكن x عنصرا من $A \cup B$. لدينا بالتأكيد :

$$\min(\inf A, \inf B) \le \inf A \le x \le \sup A \le \max(\sup A, \sup B)$$

هذا إن كان x عنصرا من A و إن كان x عنصرا من B فإن :

$$\min(\inf A, \inf B) \le \inf B \le x \le \sup B \le \max(\sup A, \sup B)\,.$$

وبالتالي، نلاحظ أن :

$$\min(\inf A, \inf B) \le x \le \max(\sup A, \sup B)$$

سواء كان x عنصرا من A أو x عنصرا من B، أي مهما كان العنصر x من $A \cup B$. ذلك ما يثبت محدودية $A \cup B$.

2) يتبين من السؤال السابق أن $\min(\inf A, \inf B)$ حاد من الأدنى لـــ $A \cup B$. وبالتالي :

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B) .$$

فلو كان $\inf(A \cup B) < \min(\inf A, \inf B)$ مع $\inf A = \min(\inf A, \inf B)$ (مثلا) لاستنتجنا أن :

$$\inf(A \cup B) < \inf A \leq \inf B \ .$$

للتأكد من أن هذه المتباينة خاطئة نستخدم الخاصية المميزة للحد الأدنى القائلة إن :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A \cup B : \ \inf(A \cup B) \leq x < \inf(A \cup B) + \varepsilon .$$

خذ في هذه العلاقة $\varepsilon = \inf A - \inf(A \cup B)$ وأعد كتابتها تجد عندئذ أن :

$$\exists x \in A \cup B : \ \inf(A \cup B) \leq x < \inf A \leq \inf B \ .$$

ومن ثم يتضح أن :

$$\begin{cases} \exists x \in A \cup B : \ x < \inf A \\ \qquad\qquad\qquad\quad x < \inf B . \end{cases}$$

والآن نتساءل : بما أن $x \in A \cup B$، فهل $x \in A$ أو $x \in B$؟ لاحظ أن الحالتين غير ممكنتين لأن $x \in A$ يتنافى مع $x < \inf A$، كما أن $x \in B$ يتنافى مع $x < \inf B$. ومنه يتضح خطأ افتراضنا القائل إن :

$$\inf(A \cup B) < \min(\inf A, \inf B) .$$

وهكذا يأتي المطلوب : $\inf(A \cup B) < \min(\inf A, \inf B)$.

3) يتم البرهان كما في السؤال السابق مع التعقيب أن :

$$A \subset A \cup B \quad \Rightarrow \quad \sup(A \cup B) \geq \sup A$$

واستنتاج المتباينة :

$$\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$$

ولذا فإثبات المساواة :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

يتطلب إثبات عدم صحة $\sup(A \cup B) > \max(\sup A, \sup B)$. ونصل إلى ذلك باستخدام الخاصية المميزة للحد الأعلى :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \cup B :\ \sup(A \cup B) - \varepsilon < x \leq \sup(A \cup B)$$

حيث يكفي أن نختار فيها $\varepsilon = \sup(A \cup B) - \sup A$ في حال افتراض $\sup B \leq \sup A$ (وإلا اخترنا $\varepsilon = \sup(A \cup B) - \sup B$). عندئذ ينتج أن :

$$\exists x \in A \cup B :\ \sup B \leq \sup A < x\ .$$

وهذا مستحيل سواء كان $x \in A$ أو $x \in B$ لأنه يتنافى مع تعريف الحد الأعلى. إذن :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)\,.$$

حل التمرين 4

1) ليكن $|x| \in B$. نلاحظ أن هناك حالتين هما $x \in A$ أو $-x \in A$ وأن (بوضع $a = \max(|\inf A|, |\sup A|)$) :

$$x \in A \;\Rightarrow\; -a \leq -|\inf A| \leq \inf A \leq x \leq \sup A \leq a$$
$$-x \in A \;\Rightarrow\; -a \leq -|\inf A| \leq \inf A \leq -x \leq \sup A \leq a.$$

وبالتالي :

$$|x| \in B \quad\Rightarrow\quad |x| \leq a\,.$$

ومنه تأتي محدودية B (حيث أن a حاد أعلى له) وقيام العلاقة $\sup B \leq a$.

2) نريد إثبات أن $\sup B = \max(|\inf A|,|\sup A|)$، علما أننا بيّنا آنفا المتباينة $\sup B \leq \max(|\inf A|,|\sup A|)$. وعليه فإن إثبات المساواة المطلوب يكمن في إثبات عدم صحة المتباينة $\sup B < \max(|\inf A|,|\sup A|)$. واصل البرهان.

حل التمرين 5

نفرض أن $a = \sup A$. لدينا :

$$\forall x \in A,\; x \leq a\,.$$

ومنه :

$$\forall x \in A,\; -x \geq -a$$

أي :

$$\forall y \in B,\; y \geq -a$$

ومنه $-a$ حاد من الأدنى لــ B. وبما أن الحد الأدنى هو أكبر الحواد الدنيا فإن :

$$(1)\quad \inf B \geq -\sup A\,.$$

نفرض أن $b = \inf B$. لدينا :

$$\forall y \in B,\ y \ge b\ .$$

ومنه (بوضع $y = -x$ والضرب في "$-$") :

$$\forall x \in A,\ x \le -b\ .$$

لاحظ أن $-b$ صار حادا من الأعلى لــ A. وبما أن الحد الأعلى هو أصغر الحواد العليا فإن :

$$(2)\quad -\inf B \ge \sup A\ .$$

وهكذا يتضح من (1) و (2) أن : $\sup A = -\inf B$.

حل التمرين 6

1) لنأخذ المثال : $A =]0,1[$. إن

$$\begin{aligned} B &= \left\{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{x} \in]0,1[\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\ x > 1\} \\ &=]1,+\infty[\ . \end{aligned}$$

وهذا يبيّن أن المجموعة B ليست محدودة في $\mathbb{R}$. وبالتالي فإن محدودية A لا تستلزم بالضرورة محدودية B.

نلاحظ أن $\sup A$ موجود حسب مسلمة الحد الأعلى وكذلك $\inf A$. ومنه إذا كان $0 < \inf A$ فإن

$$0 < \inf A \le x \le \sup A$$

ومن ثمّ :

$$\forall x \in A, \quad \frac{1}{\sup A} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$$

أي :

$$\forall y \in B, \quad \frac{1}{\sup A} \leq y \leq \frac{1}{\inf A}.$$

وهذا يؤدي إلى محدودية المجموعة B. كما يبين أن $\frac{1}{\inf A}$ حاد من الأعلى لـــ B و $\frac{1}{\sup A}$ حاد من الأدنى لـــ B. إذن : $\sup B \leq \frac{1}{\inf A}$ و $\frac{1}{\sup A} \leq \inf B$.

2) إذا كان A مجالا مغلقا فإنه يكتب على الشكل $A = [a,b]$ أو $A = [a,+\infty[$. وعندئذ نلاحظ إن $a = \inf A$ ، مع العلم أن $[a,b] \subset]0,+\infty[$ و $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$. وبالتالي فإن $a > 0$. وهكذا يتضح في الحالتين أن $\inf A > 0$. إذن

$$\forall y \in B, \quad 0 < y \leq \frac{1}{a}.$$

وهو ما يثبت محدودية B.

3) لدينا :

$$\forall x \in A, \; x \leq \sup A \; .$$

ومنه :

$$\forall x \in A, \; x^2 \leq x.\sup A \leq (\sup A)^2 \; .$$

وهذا يعني :

$$\forall y \in C, \; y \leq (\sup A)^2$$

نستخلص من ذلك أن $(\sup A)^2$ حاد من الأعلى لـــ C. ومنه :

$$(1) \quad \sup C \leq (\sup A)^2 .$$

ومن جهة أخرى، نستنتج من العلاقة :

$$\forall x \in A,\ x^2 \leq \sup C$$

العلاقة :

$$\forall x \in A,\ x \leq \sqrt{\sup C} .$$

ولذلك فإن $\sqrt{\sup C}$ يمثل حادا من الأعلى لـــ A. وعليه $\sup A \leq \sqrt{\sup C}$، أي :

$$(2) \quad (\sup A)^2 \leq \sup C .$$

يتضح من العلاقتين (1) و (2) أن : $\sup C = (\sup A)^2$. وهو المطلوب في المقارنة.

حل التمرين 7

يمكن كتابة E على الشكل :

$$E = \left\{0,\ 1+\frac{1}{2},\ -1+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ -1+\frac{1}{5},\ ...,\ 1+\frac{1}{2n},\ -1+\frac{1}{2n+1},\ ...\right\}$$

نلاحظ أن $\frac{3}{2}$ حاد من الأعلى إذ أن $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$ سواء كان n زوجيا أو فرديا لأن $n \geq 1$. كما أن -1 حاد من الأدنى إذ أن $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1$

سواء كان n زوجيا أو فرديا لأن $n > 0$. لنثبت أن $\sup E = \frac{3}{2}$ يكفي أن نلاحظ بأن $\frac{3}{2} \in E$ مع التذكير أن $\frac{3}{2}$ حاد من الأعلى.

كما نستطيع التأكد من ذلك من خلال الخاصية المميزة للحد الأعلى : ليكن $\varepsilon > 0$. هل يوجد عنصر $x_{2n} \in E$ يحقق $\frac{3}{2} - \varepsilon < x_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$، أي $\frac{1}{n} > 1 - 2\varepsilon$؟ نعم، لأنه إذا كان $1 - 2\varepsilon \leq 0$ فالأمر واضح من أجل كل n. أما إذا كان $1 - 2\varepsilon > 0$ فإن $\frac{1}{1-2\varepsilon} > 1$ وهو ما يؤكد وجود عدد طبيعي n يحقق المطلوب، وهو $n < \frac{1}{1-2\varepsilon}$. ومنه $\sup E = \frac{3}{2}$.

لنثبت أن $\inf E = -1$ علما أن -1 حاد من الأدنى (لاحظ أن -1 لا ينتمي إلى E خلاف للحد الأعلى). من أجل ذلك نتأكد من قيام الخاصية المميزة للحد الأدنى : ليكن $\varepsilon > 0$. هل يوجد عنصر $x_{2n+1} \in E$ يحقق $-1 + \varepsilon > x_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$، أي $n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$؟ نعم، إذ يكفي أخذ n كبيرا بكفاية. ومنه $\inf E = -1$.

تعقيب : $\max E = \sup E = \frac{3}{2}$ لأن $\frac{3}{2} \in E$ و $\min E$ غير موجود لأن الحد الأدنى $\inf E$ لا ينتمي إلى E.

حل التمرين 8

1) نفرض أن A محدود، ونثبت أن B محدود. ليكن $x \in B$. عندئذ $x^2 \in A$. ومنه $x^2 \leq \sup A$. وبما أن $x \in B$ يستلزم أن $x \in \mathbb{R}^+$ فإن $x \leq \sqrt{\sup A}$. خلاصة القول هو إن :

$$(^*)\quad \forall x \in A,\ x \le \sqrt{\sup A}\ .$$

وبالتالي فإن $\sqrt{\sup A}$ حاد من الأعلى لـــ B.

واصل البرهان على محدودية B من الأدنى.

2) نفرض أن A محدود ونقارن $\sup B$ و $\sqrt{\sup A}$.

أ) إذا كان $\sup A = 0$ فإن $A = \{0\}$ لأن $A \subset \mathbb{R}^+$. ومنه ينتج أن $B = \{0\}$. وبالتالي $\sup B = 0$. إذن $\sqrt{\sup A} = \sup B$. وهو المطلوب.

ب) نفرض الآن أن $\sup A \neq 0$. ومن ثم فإن $\sup A > 0$. لدينا أولا $\sup B \le \sqrt{\sup A}$ استنادا إلى العلاقة $(^*)$.

ومن جهة أخرى، نعلم أن $\sup A$ يحقق خاصية الحد الأعلى :

$$(^{**})\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A :\ \sup A - \varepsilon < x_0\ .$$

لنتناول الخاصية المميزة للحد الأعلى للمجموعة B. نضع (في العلاقة السابقة) $y_0 = \sqrt{x_0}$ ونلاحظ أن $y_0 \in B$ وأن $\sqrt{\sup A - \varepsilon} < y_0$. ثم إن (تذكر أننا في الحالة التي يكون فيها $\sup A > 0$) :

$$(^{***})\quad \varepsilon < \sup A \ \Rightarrow\ \sqrt{\sup A} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sup A}} < \sqrt{\sup A - \varepsilon} < y_0$$

مع العلم أن علاقة من قبيل العلاقة $(^{**})$ تكون محققة إذا تحققت من أجل ε قريب من الصفر ... مثلا من أجل $\varepsilon < \sup A$. خلاصة القول إن :

$$\forall \varepsilon' \ (= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sup A}}) > 0,\ \exists y_0 \in B :\ \sqrt{\sup A} - \varepsilon' < y_0\ .$$

وهكذا يتضح أن العدد $\sqrt{\sup A}$ يمثل حادا من الأعلى لـــ B ويحقق أيضا الخاصية المميزة لـــ B. وبالتالي فإن $\sqrt{\sup A}$ يمثل الحد الأعلى لـــ B، أي أن $\sqrt{\sup A} = \sup B$. وهو المطلوب.

واصل البرهان لإثبات أن $\sqrt{\inf A} = \inf B$.

حل التمرين 9

نعلم أن $\mathbb{N} \subset \overline{\mathbb{N}}$ لأن لدينا دائما : $A \subset \overline{A}$ من أجل كل جزء A من $\mathbb{R}$.

لنوضح الاحتواء $\mathbb{N} \supset \overline{\mathbb{N}}$: نعتبر عددا x غير طبيعي، والمجال المفتوح I ذا المركز x المحتوي في $\left][x],[x]+1\right[$ حيث يرمز $[x]$ للجزء الصحيح لـــ x. إذن $I \cap \mathbb{N} = \varnothing$ على الرغم من أن I جوار لـــ x.

إذن $x \notin \overline{\mathbb{N}}$. ومنه $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$.

حل التمرين 10

* نعلم أن $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$ وأن ملاصقة أية مجموعة هي بالضرورة مجموعة مغلقة. إذن $\mathbb{N}$ جزء مغلق في $\mathbb{R}$.

* لنثبت أن $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$.

من الواضح أن $\mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{Z}}$.

يبقى توضيح الاحتواء $\mathbb{Z} \supset \overline{\mathbb{Z}}$. نعتبر عددا x موجبا غير صحيح، والمجال المفتوح I ذا المركز x المحتوي في $\left][x],[x]+1\right[$ حيث يرمز $[x]$

للجزء الصحيح لـــ x. إذن $I \cap \mathbb{Z} = \varnothing$ على الرغم من أن I جوار لـــ x.
إذن $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$. نعتبر بعد ذلك عددا x سالبا غير صحيح فيتضح بنفس الطريقة أن $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$. وبالتالي فكل الأعداد غير الصحيحة لا تنتمي إلى $\overline{\mathbb{Z}}$. ومنه $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}}$.

حل التمرين 11

1) لنثبت أن $\mathbb{Q}$ ليس مفتوحا في $\mathbb{R}$:

ليكن $x \in \mathbb{Q}$ و $I(x,\alpha)$ مجالا كيفيا مركزه x. نلاحظ أنه يوجد على الأقل عنصر $y \in I(x,\alpha)$ ولا ينتمي إلى $\mathbb{Q}$. إذن $I(x,\alpha) \not\subset \mathbb{Q}$. ومن ثم فإن $\mathbb{Q}$ غير مفتوح.

ومن جهة أخرى، لنثبت أن $\mathbb{Q}$ ليس مغلقا في $\mathbb{R}$ يكفي إثبات أن مجموعة الأعداد الصماء $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة: ليكن $x \in \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ و $I(x,\alpha)$ مجالا كيفيا مركزه x. يكفي أن نتذكّر الخاصية الهامة التالية التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الناطقة : بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد ناطق، أي

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \alpha > 0 :\ I(x,\alpha) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing .$$

نستنتج من هذه الخاصية من أجل $x \in \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ أن $I(x,\alpha) \not\subset \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$. وهذا يعني أن $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة. وعليه فإن $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة.

2) لاحظ أن الخاصية المشار إليها آنفا :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \alpha > 0 :\ I(x,\alpha) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

تستلزم أن :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall V \in V(x),\ \ V \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing .$$

وهذا يعني أن كل عدد حقيقي x ينتمي إلى ملاصقة $\mathbb{Q}$. ولما كانت ملاصقة $\mathbb{Q}$ محتواة بالضرورة في $\mathbb{R}$ فإننا نستنتج أن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. هذه العلاقة تؤكد بأن $\mathbb{Q}$ غير مغلق لأن $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q}$.

حل التمرين 12

1) ليكن U مفتوحا محتوي في $\mathbb{Q}$ و $x \in U$. لا بد أنه يوجد مجال $I(x,\alpha)$ يحقق $I(x,\alpha) \subset U$. ومنه $I(x,\alpha) \subset \mathbb{Q}$. وهذا مستحيل. نستخلص أن $U = \varnothing$، أي أن المفتوح الوحيد المحتوي في $\mathbb{Q}$ هي المجموعة الخالية.

2) هناك عدد غير منته من المغلقات في المجموعة $\mathbb{Q}$، منها كل المجموعات $\{a\}$ الوحيدة العنصر حيث $a \in \mathbb{Q}$. وكذلك كل المجموعات المؤلفة من عدد منته من العناصر مثل $\{a,b\}$ و $\{a,b,c\}$ مهما كانت الأعداد الناطقة a ، b ، c.

3) نعلم أن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ وأن $\overline{\mathbb{Q}}$ هو أصغر مغلق يحتوي $\mathbb{Q}$. ولما كانت كل المجموعات المعتبرة محتواة في $\mathbb{R}$ فإن المجموعة المغلقة الوحيدة التي تحتوي $\mathbb{Q}$ هي $\mathbb{R}$.

****

الفصل الثاني

المتتاليات

حلول التمارين

حل التمرين 1

1) متناقصة، 2) متزايدة، 3) متناقصة، 4) متـــزايدة،

5) متزايدة، 6) غير رتيبة، 7) غير رتيبة، 8) متناقصة.

حل التمرين 2

1) يكفي أن تجعل n يؤول إلى $+\infty$ في كل حد فتجد أن المتتالية متقاربة نحو 0.

2) يمكن أن تكتب $\frac{1}{2}u_n$ كمجموع ثم تحسب $u_n - \frac{1}{2}u_n$ ...

وستكتشف أن $u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. ومنه تستنتج تقارب المتتالية نحو 2.

3) اعتبر نسبة حدين متواليين من المتتالية وستجد أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. وهكذا تلاحظ أن المتتالية متناقصة، وهي محدودة من الأدنى بـــ 0. إذن فهي متقاربة.

4) لاحظ أن عبارة المتتالية تؤدي إلى عدم تعيين عنـــد المـــرور إلى النهاية. ولذا اضرب في "المرافق" وســـتجد أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. وهـــذا يؤدي إلى تقارب المتتالية نحو 0.

حل التمرين 3

1) متقاربة نحو 2.

2) لدينا :

$$u_n = \frac{\frac{2n(2n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n(2n-1)}{n(n+1)} = \frac{4n-2}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 4 .$$

3) لدينا :

$$u_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 2 .$$

4) المجموع المعطى هو أكبر من جداء n في أصغر الحـــدود، وهـــو كذلك أصغر من جداء n في أكبر الحدود. وعليه :

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n} \le n \times \frac{n}{n^2+1} .$$

إذن :

$$1 \xleftarrow{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

وبالتالي فنظرية الحصر تعطي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

حل التمرين 4

يكفي كتابة تعريف التقارب. إن تقارب (u_n) نحو 0 يعني تعريفا :

$$(1) \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ n \ge n_0 \ \Rightarrow \ |u_n - 0| < \varepsilon .$$

إن تقارب $(|u_n|)$ نحو 0 يعني تعريفا :

$$(2) \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ n \ge n_0 \ \Rightarrow \ \big||u_n| - 0\big| < \varepsilon .$$

لاحظ أنه لا فرق بين العلاقتين (1) و (2) سوى في الظاهر.

تعقيب

1) يمكن الإجابة عن السؤال بالاستفادة من استمرار الدوال (دالة القيمة المطلقة).

2) ما رأيك في الاستلزام التالي عموما (لا تتسرع) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u \ \Leftrightarrow \ \lim_{n \to +\infty} |u_n| = |u| \ ?$$

حل التمرين 5

لاحظ في البداية أن الاستلزام "$\Rightarrow$" بديهي.

لنهتم بالاستلزام "$\Rightarrow$" : بعد حسابات أولية في المسودة، نلاحظ أنه عندما يكون ε موجبا صغيرا فالأمر كذلك أيضا فيما يخص العدد $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$.

وعليه نقترح ما يلي : نعبّر عن أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_n+1}=0$ فيكون :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<\frac{u_n}{u_n+1}<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$$

أي :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0\ \Rightarrow\ 0<u_n<\varepsilon\,.$$

وهذا يعني تقارب (u_n) نحو 0.

حل التمرين 6

لنتأكد من ذلك بالخلف (نكتفي هنا باعتبار حالة المتتاليات الحقيقية لأن دراسة متتالية عقدية تردّ إلى دراسة متتاليتين حقيقيتين) : نفرض وجود نهايتين مختلفتين u و u' لمتتالية (u_n) باعتبار مثلا أن $u<u'$. ولنختر في التعريف السابق $\varepsilon=\frac{u'-u}{2}$. ومن ثمّ فإن

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ :\ \ n\geq n_0\ \ \Rightarrow\ \ |u_n-u|<\varepsilon$$

$$\exists n_0'\in\mathbb{N}\ :\ \ n\geq n_0\ \ \Rightarrow\ \ |u_n-u'|<\varepsilon.$$

وعندما نضع $N=\max(n_0,n'_0)$ نستنتج

$$n\geq N\ \ \Rightarrow\ u'-\frac{u'-u}{2}<u_n<u+\frac{u'-u}{2}$$

أي :

$$n\geq N\ \ \Rightarrow\ \frac{u'+u}{2}<u_n<\frac{u'+u}{2}$$

وفي العلاقة السابقة تناقض واضح. ومنه المطلوب.

حل التمرين 7

تزايد المتتالية : نلاحظ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن لدينا التكافؤ :

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n^{\;2}+1}{2} \geq u_n$$
$$\Leftrightarrow \quad (u_n-1)^2 \geq 0.$$

والمتباينة صحيحة $(u_n-1)^2 \geq 0$ دوما. ومنه يأتي تزايد المتتالية المعطاة.

محدودية المتتالية : نتأكد من ذلك بالتراجع بل نثبت أن $u_n \leq 1$ من أجل كل n. نعلم أن $u_0 = a \in [-1,1]$، ومنه:

$$u_1 = \frac{u_0^{\;2}+1}{2} \leq \frac{1+1}{2} \leq 1 .$$

نفرض (فرض التراجع) أن $u_n \leq 1$ من أجل عدد طبيعي n. عندئذ نستنتج :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^{\;2}+1}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1 .$$

وبالتالي المتتالية المعطاة محدودة.

التقارب : بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة فهي متقاربة (نظرية). لحساب النهاية نسميها u ونمر إلى النهاية في العلاقة $u_{n+1} = \frac{u_n^{\;2}+1}{2}$ فنحصل على $u = \frac{u^{\;2}+1}{2}$. ومنه يأتي أن $u = 1$.

حل التمرين 8

يبين الحساب المباشر أن $i = \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{n!}$. وبالتالي:

$$u_n = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n!}$$
$$= \cos n!\frac{\pi}{2} + i\sin n!\frac{\pi}{2}.$$

ومنه نستنتج أن $u_n = 1$ ابتداء من رتبة معينة (ابتداء من $n = 4$). وهذا يستلزم أن المتتالية متقاربة نحو 1.

حل التمرين 9

من أجل $a = 1$: من الواضح أن المتتالية ثابتة وبالتالي متقاربة.

من أجل $|a| < 1$: نعلم أن $\lim_n u_n = \lim_n a^n = 0$.

من أجل $|a| > 1$: المتتالية غير محدودة. وبالتالي فهي متباعدة.

حل التمرين 10

العلاقة $|v_{n+p} - v_n| \le |u_n|$ وفرض تقارب (u_n) نحو الصفر يؤديان إلى $0 \le \lim_n |v_{n+p} - v_n| \le \lim_n |u_n| = 0$. ومنه $\lim_n |v_{n+p} - v_n| = 0$ من أجل كل عدد طبيعي p. إذن المتتالية (v_n) كوشية. وعليه فهي متقاربة.

حل التمرين 11

نعبّر عن أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = u$ فنستنتج :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \ge n_0 \ \Rightarrow\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < u + \varepsilon .$$

لنختر في العلاقة السابقة مثلا $\varepsilon = \frac{1-u}{2}$ فنلاحظ أن $\varepsilon > 0$ وأن $1 > \frac{1+u}{2} = u + \varepsilon$ إذ أن $u \in]-1,1[$.

نضع $k = \frac{1+u}{2} = u + \varepsilon$ مع العلم أن ذلك يؤدي إلى $0 < k < 1$.

وبعد ذلك نستفيد من كل ما سبق لكتابة :

$$0 < \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \times \ldots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n_0}} < k^{n-n_0}.$$

وهكذا يتضح أنه يوجد ثابت C ($C = u_{n_0} k^{-n_0}$) بحيث

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_n < C.k^n.$$

نحن نعلم أن $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$ لأن $0 < k < 1$. ولذلك فالمرور إلى النهاية في أطرف $0 < u_n < C.k^n$ يؤدي حتما إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

حل التمرين 12

من السهل إثبات $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{3^{n+1}}$ بالتراجع.

لاستنتاج أن (u_n) كوشية نكتب :

$$\begin{aligned}|u_{n+p} - u_n| &\leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}|\,|u_{n+p-1} - u_{n+p-2}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq \frac{|u_1 - u_0|}{3^{n+p-1}} + \frac{|u_1 - u_0|}{3^{n+p-2}} + \ldots + \frac{|u_1 - u_0|}{3^n} \\ &\leq \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^{p-2}} + \ldots + 1\right).\end{aligned}$$

وعندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ في طرفي المتباينة السابقة يتضح أن $\lim_n |u_{n+p} - u_n| = 0$ من أجل كل عدد طبيعي p. وهو ما يثبت أن المتتالية كوشية. وبالتالي فهي متقاربة.

حل التمرين 13

1) لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$. وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. يمكننا إذن تطبيق التمرين 11 واستنتاج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) لدينا : $|u_n| = \frac{|a|^n}{n!}$. ومنه $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|}{n+1}$. ومن ثم :

$$\lim_n \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_n \frac{|a|}{n+1} = 0 .$$

يمكننا في هذه الحالة تطبيق السؤال الأول لأن $|a| \in \mathbb{R}$ (لاحظ أن الحالة $a = 0$ حالة تافهة). ولذا فإن $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. ونحن نعلم أن:

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 .$$

ومنه يأتي المطلوب.

حل التمرين 14

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n :

$$u_{2n}-u_n=(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$$
$$=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$$
$$\geq n\times\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

ومن ثم : $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$. لنتذكر شرط كوشي ولنتساءل عما إذا كانت المتتالية المعطاة متتالية كوشية. لاحظ أننا لو نختار $\varepsilon=\frac{1}{4}$ في ذلك الشرط و $q=2p$ لوجدنا من أجل كل n_0 بحيث $p\geq n_0$ و $q\geq n_0$: $u_{2p}-u_p>\frac{1}{4}$. وهذا يعني أن شرط كوشي غير محقق وبالتالي فالمتتالية المعطاة متباعدة.

تعقيب

هناك أسلوب آخر لإثبات المطلوب دون المرور بالمتتاليات الكوشية. فبعد ملاحظة قيام العلاقة $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$ من أجل كل n، نستدل بالخلف ونفترض أن (u_n) متقاربة، فنستنتج أن (u_{2n}) متقاربة أيضا نحو نفس النهاية لأن (u_{2n}) جزئية من (u_n). وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_{2n}-u_n=0$. ومنه يظهر تناقض بين العلاقة الأخيرة و $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$ لأنهما يؤديان إلى $0\geq\frac{1}{2}$. إذن (u_n) متباعدة.

حل التمرين 15

1) يتضح من التذكير ومن الفرض أن $u_n < \frac{p}{q} < v_n$ وذلك من أجل كل n. ومنه $u_q < \frac{p}{q} < v_q$. عندما نضرب أطراف هذه المتباينة في $q!$ نجد :

$$q!u_q < (q-1)!p < q!.(u_q + \frac{1}{q!})$$

أي : $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$.

2) لدينا :

$$\begin{aligned} q!.u_q &= q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} \\ &= q! + q! + q(q-1)...3 + ...q(q-1) + q + 1. \end{aligned}$$

يتبيّن من الطرف الأخير في العلاقة السابقة أن كل حد من ذلك الطرف ينتمي إلى $\mathbb{N}$. ومنه $q!u_q \in \mathbb{N}$، وعليه $q!u_q + 1 \in \mathbb{N}$ مع العلم أن $q!u_q$ و $q!u_q + 1$ عددان طبيعيان متواليان.

ومن ثم يأتي، استنادا إلى المتباينة $q!u_q < (q-1)!.p < q!u_q + 1$، أن $(q-1)!.p$ ليس عددا طبيعيا.

وهذا تناقض لأن $(q-1)!.p$ عدد طبيعي إذ أن p و q عددان طبيعيان. هذا التناقض يثبت المطلوب، وهو أن e غير ناطق (أي أنه أصم).

حل التمرين 16

1) لإثبات العلاقة $0 < u_n \leq 1$ يكفي اتباع استدلال بالتدريج فنلاحظ أن تلك العلاقة محققة من أجل $n = 0$. ثم نفرض فرض التدريج

وهو أن $0<u_n\leq 1$ محققة من أجل رتبة n. وبعد ذلك نتأكد من أن $0<u_{n+1}\leq 1$. من أجل ذلك نكتب اعتمادا على تعريف المتتالية وفرض التدريج :

$$0<u_{n+1}=\frac{1+u_n}{3+2u_n}\leq\frac{1+1}{3}\leq 1.$$

2) لدراسة رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نلاحظ أن $u_1<u_0$، وهو ما يوحي لنا بأنه إن كانت المتتالية رتيبة فهي متناقصة.

وعليه نستدل بالتدريج ونفرض أن $u_n<u_{n-1}$ من أجل رتبة n ونثبت أن $u_{n+1}<u_n$. نجد :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1+u_n}{3+2u_n}-\frac{1+u_{n-1}}{3+2u_{n-1}}\\&=\frac{u_n-u_{n-1}}{(3+2u_n)(3+2u_{n-1})}.\end{aligned}$$

وعليه فإيجابية المتتالية وفرض التدريج يؤديان إلى المطلوب ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة) بمجرد النظر إلى الطرف الأخير.

نستخلص أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة ومتناقصة، وبالتالي فهي متقاربة. لنحسب نهايتها بالمرور إلى النهاية في $u_{n+1}=\frac{1+u_n}{3+2u_n}$.

وهكذا نصل عند وضع $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u$ إلى المساواة $u=\frac{1+u}{3+2u}$، أي $2u^2+2u-1=0$. يعطي حل هذه المعادلة جذرين هما $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ علما أن $0<u\leq 1$. ولذا نستخلص أن $u=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

حل التمرين 17

1) نلاحظ أن العلاقة المطلوبة محققة فرضا من أجل $n=0$. وحتى نثبت المطلوب بالتدريج نفترض أن u_n ينتمي إلى المجال $[0,1]$ من أجل رتبة $n-1$، ونبيّن أن u_n ينتمي أيضا إلى المجال $[0,1]$.

نستوحي من المساواة $u_n=\sqrt{\frac{u_{n-1}+1}{2}}$ الاستدلال التالي :

$$\begin{aligned}0\le u_{n-1}\le 1 &\Rightarrow 0\le \frac{u_{n-1}+1}{2}\le \frac{1+1}{2}\\ &\Rightarrow 0\le \sqrt{\frac{u_{n-1}+1}{2}}\le \sqrt{\frac{1+1}{2}}\\ &\Rightarrow 0\le u_n\le 1.\end{aligned}$$

ومنه يأتي من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن u_n ينتمي إلى المجال $[0,1]$.

لننظر الآن في رتابة المتتالية : يمكننا اتباع الطريقة التالية، وهي ليست وحيدة في هذا المقام. لنقارن أولا u_0 و u_1، أي a و $\sqrt{\frac{a+1}{2}}$. نلاحظ بهذا الصدد أن :

$$\begin{aligned}u_1^2-u_0^2&=\frac{a+1}{2}-a^2\\ &=\frac{-2a^2+a+1}{2}\\ &=\frac{-2(a-1)(a+\frac{1}{2})}{2}.\end{aligned}$$

ثم إننا نعلم أن a ينتمي إلى المجال $[0,1]$. ولذلك ندرك أن :

$$\frac{-2(a-1)(a+\frac{1}{2})}{2}\ge 0\,.$$

وهكذا نستخلص أن :

$$u_1^2 - u_0^2 = (u_1 + u_0)(u_1 - u_0) \geq 0$$

علما أن $u_1 + u_0 \geq 0$. وعليه $u_1 \geq u_0$. لاستكمال دراسة الرتابة نواصل بالتدريج لإثبات تزايد المتتالية على ضوء العلاقة $u_1 \geq u_0$ (التي توحي بنوع الرتابة) : نفترض أن $u_n \geq u_{n-1}$. ونستنتج منها $u_{n+1} \geq u_n$. من أجل ذلك نستدل كما يلي :

$$\begin{aligned} u_n \geq u_{n-1} &\Rightarrow u_n + 1 \geq u_{n-1} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{u_n + 1}{2} \geq \frac{u_{n-1} + 1}{2} \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \geq \sqrt{\frac{u_{n-1} + 1}{2}} \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n . \end{aligned}$$

ومنه يأتي تزايد المتتالية المعطاة.

2) يتضح من السؤال السابق أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى (بـ1). وبالتالي فهي متقاربة (ونهايتها هي الحد الأعلى للمتتالية). إذا سمينا u النهاية المطلوبة فإن العلاقة $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1} + 1}{2}}$ مع الملاحظة بأن $u = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n-1}$ تؤديان عند المرور إلى النهاية إلى $u = \sqrt{\frac{u + 1}{2}}$.

إنه من السهل حل هذه المعادلة والتأكد من أن لها حلين هما 1 و $-\frac{1}{2}$. إن إيجابية المتتالية (u_n) تبيّن أن الحل $-\frac{1}{2}$ وتقارب المتتالية يؤدي عندئذ إلى $u = 1$.

3) لدينا $a = \cos\theta$ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. والمطلوب إثبات :

$$u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

نقيم برهانا بالتراجع فنبدأ بالتأكد من أن $u_1 = \cos(\frac{\theta}{2})$. لدينا:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{\cos\theta + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos(2.\frac{\theta}{2}) + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

لنفرض الآن أن $u_{n-1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n-1}})$ من أجل رتبة $n-1$ ولنتأكد من $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$. تبيّن العلاقات المثلثية أن (مع الملاحظة أن $\cos(\frac{\theta}{2^n})$ موجب مهما كان العدد الطبيعي n نظرا لكون $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{\frac{u_{n-1} + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}}) + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos(2\frac{\theta}{2^n}) + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^n}} \\ &= \cos\frac{\theta}{2^n}. \end{aligned}$$

ذلك هو المطلوب.

حل التمرين 18

1) لدينا حسب المعطيات $a > b > 0$. وهذا يكافئ $u_0 > v_0 > 0$.
نواصل البرهان بالتدريج. علينا التأكد من أن $u_{n+1} > v_{n+1} > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n بعد افتراض $u_n > v_n > 0$. إننا نستنتج من تعريف المتتاليتين أن

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}. \end{aligned}$$

لاحظ أن البسط في الطرف الأخير $\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ موجب تماما (تماما من فرض التدريج) وكذلك المقام حسب بداية الحل. وبالتالي $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$، أي $u_{n+1} > v_{n+1}$. من جهة أخرى يأتي من العلاقة $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ الواردة في تعريف المتتاليتين أن $v_{n+1} > 0$ بفضل فرض التدريج الذي ينص، فيما ينص، على أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$. وهكذا وصلنا إلى العلاقة المطلوبة، وهي $u_{n+1} > v_{n+1} > 0$.

2) لنثبت تناقص المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. يعني ذلك $u_{n+1} \le u_n$ من أجل كل n. نستفيد من التعريف المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومن الإجابة السابقة التي أثبتنا فيها أن $u_n > v_n$ فنجد :

$$\begin{aligned} v_n < u_n &\Rightarrow u_n + v_n < u_n + u_n \\ &\Rightarrow \frac{u_n + v_n}{2} < u_n \\ &\Rightarrow u_{n+1} < u_n . \end{aligned}$$

ومنه يأتي تناقص $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (لأننا كنا أثبتنا صحة العلاقة $v_n < u_n$).

وبنفس الطريقة نثبت تزايد $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (بناء على تناقص $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الذي يستلزم : $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$) إذ أن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n}{u_{n+1}} v_n \\ &> v_n . \end{aligned}$$

ومن ثمّ يتنتج تزايد $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

لنهتم الآن بموضوع التقارب : تبيّن لنا فيما سبق أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة (ومنه $u_n < u_0$) وأن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة (ومنه $v_0 < v_n$) وأن $v_n < u_n$. وعليه نستنتج أن $v_0 < v_n < u_n < u_0$. وهكذا يتضح أن المتتاليتين رتيبتان ومحدودتان، وهذا يؤدي إلى تقاربهما حسب النظرية المعروفة (كل متتالية رتيبة ومحدودة متتالية متقاربة).

3) لنبدأ بإثبات العلاقة

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \mathrm{u}_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} .$$

كانت حسابات السؤال الأول قد أكدت لنا صحة المساواة :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} . \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$$

مع العلم أن $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$ بفضل إيجابية المتتالية (v_n). ومنه يأتي :

$$(^*) \qquad u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{u_n - v_n}{2} .$$

ننتقل الآن إلى إثبات وجود ثابت موجب C بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{u}_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{C}{2^{n+1}} .$$

يثبت ذلك بالتدريج بفضل العلاقة (*) التي نستنتج منها أولا أن :

$$u_1 - v_1 < \frac{u_0 - v_0}{2} = \frac{a-b}{2} .$$

نضع $C = a - b$ ونواصل البرهان بالتراجع اعتمادا على (*) فنفترض أن: $\mathrm{u}_n - u_n \leq \frac{C}{2^n}$ من أجل رتبة n، ونسعى إلى بلوغ $\mathrm{u}_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{C}{2^{n+1}}$.
وهذا أمر بسيط لأن العلاقة (*) وفرض التدريج يؤديان إلى :

$$u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{u_n - v_n}{2} \leq \frac{1}{2} . \frac{C}{2^n} = \frac{C}{2^{n+1}} .$$

بقي أن نستخلص بأن للمتتاليتين نفس النهاية : لما كنا نعرف مسبقا أن المتتاليتين متقاربتان فيمكن أن نشير إلى نهايتيهما بـــ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$ واستغلال العلاقة $0 < \mathrm{u}_n - v_n \leq \frac{C}{2^n}$ المثبتة آنفا، وذلك بالمرور فيها إلى النهاية (أي بجعل n يؤول إلى $+\infty$). لدينا :

$$\lim_{n \to +\infty} 0 \leq \lim_{n \to +\infty} (\mathrm{u}_n - v_n) \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{C}{2^n} .$$

وبالتالي :

$$0 = \lim_{n \to +\infty} 0 \leq u - v \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{C}{2^n} = 0 .$$

ومن ثمّ يتضح أن $u = v$. وهو المطلوب.

4) لنحسب الجداء $u_n v_n$ انطلاقا من تعريف $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
نلاحظ أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} . \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$
$$= u_n v_n .$$

وهكذا نستنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n = u_{n-1}v_{n-1} = ... = u_1 v_1 = u_0 v_0 = ab \ .$$

وهذا معناه أن $u_n v_n = ab$ من أجل كل عدد طبيعي n.

وعند الانتقال إلى حساب النهاية المشتركة التي نرمز إليها بـــ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lambda$ نذكّر بالعلاقة $u_n v_n = ab$ وبتلك الواردة في تعريف المتتاليتين $v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ ونمرّ فيها إلى النهاية :

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2ab}{u_n + v_n}$$
$$= \frac{2ab}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$$
$$= \frac{2ab}{2\lambda} = \frac{ab}{\lambda}.$$

وهكذا نحصل على المساواة $\lambda^2 = ab$ التي ينتج منها المطلوب، وهو $\lambda = \sqrt{ab}$ (تذكّر أن ab موجب وأن النهاية λ موجبة لأن المتتاليتين موجبتان).

****

الفصل الثالث

الدوال الحقيقية الوحيدة المتغيّر

حلول التمارين

حل التمرين 1

نعلم أن العلاقة $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ تكتب على الشكل التالي :

$$(^*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha >: \ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon .$$

كما نعلم أن إثبات $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ يكمن في إيجاد العدد α الواردة في العلاقة $(^*)$ بدلالة ε. ونشير إلى أن تعيين قيمة لــ α تحقق $(^*)$ يجعل كل قيمة أصغر منها تحقق نفس العلاقة.

نشير أيضا إلى أنه يكفي إثبات العلاقة $(^*)$ من أجل القيم الصغيرة لــ ε حتى تتحقق من أجل كل القيم الموجبة الأخرى.

1) لدينا: $\lim_{x \to 0}(x^2 + 3) = 3$ إذ يكفي أن نختار في العلاقة $(^*)$ العدد α بحيث : $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$. ذلك أن من أجل كل $0 < \varepsilon$:

$$|x| < \alpha = \sqrt{\varepsilon} \ \Rightarrow \ |f(x) - 3| = |x^2 + 3 - 3| \\ = x^2 \\ < \alpha^2 \\ = \varepsilon.$$

2) لدينا $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-5}{x^2+1} = -2$ إذ يكفي أن نختار في العلاقة (*) العدد α بحيث : $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{6}$. ذلك أن من أجل كل $\varepsilon > 0$ يمكن أن نتأكد من المتباينات التالية، باعتبار أنه عندما يكون x مجاورا لـــ 1 فيمكن افتراض $|x| < \dfrac{3}{2}$ (مع ملاحظة أننا اعتبرنا هنا العدد $\dfrac{3}{2}$ للتبسيط لا أكثر، وبإمكان القارئ استبداله بأي عدد أكبر من 1) :

$$|x-1| < \alpha = \frac{\varepsilon}{6} \ \Rightarrow \ |f(x) + 2| = \left|\frac{x-5}{x^2+1} + 2\right| \\ = \left|\frac{2x^2 + x - 3}{x^2+1}\right| \\ \le |2x^2 + x - 3| \\ \le \left|2(x-1)(x+\frac{3}{2})\right| \\ \le 2|x-1|\left|x + \frac{3}{2}\right| \\ \le 2\alpha\left(|x| + \frac{3}{2}\right) \\ \le 6\alpha \\ = \varepsilon.$$

حل التمرين 2

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\times\frac{x}{\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\\
&= \frac{1}{2}\times 1\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

حل التمرين 3

1) إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ و $g=1$ فإن :

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f(x)\,.$$

ومنه $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

كما أنه من السهل التأكد من أن العلاقة الأخيرة تستلزم أن $f=\circ(g)$ باعتبار $g=1$. ولذلك نستطيع كتابة التكافؤ :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; f=\circ(1)\,.$$

ومن جهة أخرى، إذا كان $f=\mathrm{O}(g)$ في حالة $g=1$ فمعناه أن $\left|\frac{f}{1}\right|$ محدود، أي أن f محدود.

2) نقدم بإيجاز التوضيحات التالية :

أ) $x^2=\circ(x)$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$ ،

ب) $\sin x=\circ(\sqrt{|x|})$ لأن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}\times\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=0\times 1$$
$$=0.$$

ج) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4=\circ(\tan x)$ لأن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+x^4}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}+\frac{x^4}{\tan x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\times x\sin\frac{1}{x}+\frac{x}{\tan x}\times x^3\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)\times\lim_{x\to 0}x^3$$
$$=1\times 0+1\times 0$$
$$=0.$$

د) $x^2\sin\frac{1}{x}=O(x^2)$ لأن $\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right|=\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ من أجل كل x غير منعدم.

هـ) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2=O(x^2)$ لأن (باعتبار أن جوار 0 هو مثلا المجال $]-1,1[$) :

$$\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2}{x^2}\right| = \left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right| + \left|\frac{x^4}{x^2}\right| + \left|\frac{6x^2}{x^2}\right|$$
$$= \left|\sin\frac{1}{x}\right| + x^2 + 6$$
$$\le 1+1+6$$
$$= 7.$$

و) $x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2 = \mathrm{O}(x)$ لأن (باعتبار أن جوار 0 هو مـــثلا المجال $]-1,2[$) :

$$\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2}{x}\right| \le \left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right| + \left|\frac{5x}{x}\right| + \left|\frac{6x^2}{x}\right|$$
$$\le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| + 5 + 6|x|$$
$$\le 2+5+6\times 2$$
$$= 19.$$

3) نقدم بإيجاز التوضيحات التالية :

أ) $\frac{1}{x^2} = \circ(\frac{1}{\sqrt{x}})$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$
$$= 0.$$

ب) $x^2\sin\frac{1}{x}+x = \circ(x^3)$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^3}+\frac{x}{x^3}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\times\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\times\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$$
$$=0\times0+0$$
$$=0.$$

ج) $x+2x^3=O(x^3)$ لأنه يكفي أن نثبت بأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2x^3}{x^3}$ موجودة. لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}=0+2=2\ .$$

د) $x^2\cos\frac{1}{x}+5x^3\sin\frac{1}{x}=O(x^2)$ لأنه يكفي أن نثبت بـــأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}+5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ موجودة. لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}+5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\cos 0+\lim_{y\to0}5\frac{\sin y}{y}$$
$$=1+5$$
$$=6.$$

4) نقدم بإيجاز التوضيحات التالية :

أ) $\circ(f)+\circ(f)=\circ(f)$ لأن (باعتبار أن الأمر يتعلق بجوار نقطة x_0) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)+\circ(f)(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)}{f(x)}+\lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)}{f(x)}\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$ ،

ب) $\mathrm{O}(f)+\mathrm{O}(f)=\mathrm{O}(f)$ لأنه يوجد ثابت M بحيث $\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le M$. وبالتالي :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{O}(f)+\mathrm{O}(f)}{f}\right| &\le \left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|+\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|\\ &\le M+M\\ &= 2M.\end{aligned}$$

ج) $\mathrm{O}(f)+\circ(f)=\mathrm{O}(f)$ لأنه يوجد ثابت M بحيث $\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le M$ و $\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|\le M$ (تذكر أن $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|=0$ تؤدي إلى محدودية $\frac{\circ(f)}{f}$ بجوار x_0). ولذلك فإن :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\circ(f)+\mathrm{O}(f)}{f}\right| &\le \left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|+\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|\\ &\le M+M\\ &= 2M.\end{aligned}$$

حل التمرين 4

1) حساب $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$. لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-(x+1)}{x^2-1}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}\\&=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) حساب $\lim_{x\to 0}\frac{x.\tan x}{\sin 3x}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x.\tan x}{\sin 3x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x.\tan x}{\sin 3x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3}\\&=1\times 0\\&=0.\end{aligned}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}&=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\sin x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\\&=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}\times\frac{\sin x}{x}.\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\sin x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2} \right) \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \right)$$
$$= 1\times 1$$
$$= 1.$$

حل التمرين 5

1) نفرض أن $u \overset{V(x_0)}{\sim} f$. عندئذ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)} = 1$. ومنه :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)}{u^2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)} \times \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)}$$
$$= 1\times 1$$
$$= 1.$$

ومن جهة أخرى، تؤدي العلاقة $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)} = 1$ إلى $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x).f(x)}{g(x)u(x)} = 1$. ومنه المطلوب في السؤال.

2) نفرض أن $u \overset{V(x_0)}{\sim} f$ و $v \overset{V(x_0)}{\sim} g$. إذا كان : $v \overset{V(x_0)}{\sim} u$ فإن :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{u(x)} \times \frac{u(x)}{v(x)} \times \frac{v(x)}{g(x)} .$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{u(x)} \times \frac{u(x)}{v(x)} \times \frac{v(x)}{g(x)} \right) .$$

إذن :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)} \right) \times \left(\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} \right) \times \left(\lim_{x\to x_0} \frac{v(x)}{g(x)} \right)$$
$$= 1\times 1\times 1$$
$$= 1.$$

وهذا يعني $g \overset{V(x_0)}{\sim} f$. وهكذا اتضح الاستلزام :

$$u \overset{V(x_0)}{\sim} v \Rightarrow f \overset{V(x_0)}{\sim} g\,.$$

بنفس الطريقة نثبت الاستلزام :

$$.u \overset{V(x_0)}{\sim} v \Leftarrow f \overset{V(x_0)}{\sim} g$$

ومنه التكافؤ : $.u \overset{V(x_0)}{\sim} v \Leftrightarrow f \overset{V(x_0)}{\sim} g$

3) حساب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\tan x}{\sin 3x}$. لدينا : $x.\text{tn}x \overset{V(0)}{\sim} x^2$ و $\sin 3x \overset{V(0)}{\sim} 3x$.

بتطبيق ما سبق نجد :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x.\text{tn}x}{\sin 3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

حساب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)^2}{x^4}$.

لدينا بتطبيق ما سبق : $\cos x - 1 \overset{V(0)}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. ومنه :

$$(\cos x-1)^2 \overset{V(0)}{\sim} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2$$

أي : $(\cos x-1)^2 \overset{V(0)}{\sim} \dfrac{x^4}{4}$. إذن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}\,.$$

حل التمرين 6

أ) 1) نعم f مستمر على $\mathbb{R}^*$ بوصفه تركيب تابعين مستمرين على $\mathbb{R}^*$، وهما التابعان :

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \sin:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}.$$

2) الحديث هنا عن التمديد بالاستمرار : لا بد أن تكـــون قيمة f عند 0 تساوي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. وقبل ذلك ينبغي أن نعرف ما إذا كانت هذه النهاية موجودة! وهنا نلاحظ أنها غير موجـــودة إذ أن لدينا مثلا :

$$\lim_{x=\frac{1}{n\pi}\to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{n\to+\infty} \sin n\pi = 0$$

$$\lim_{x=\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}\to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{n\to+\infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x=\frac{1}{(4n+3)\frac{\pi}{2}}\to 0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{n\to+\infty} \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1.$$

ومنه يتضح أن النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ليست وحيدة (إن وجدت). وبالتالي فالنهاية غير موجودة. وعليه لا نستطيع تمديد f إلى 0 والحصول على تابع مستمر على كامل $\mathbb{R}$.

ب) 1) نعم g مستمر على $\mathbb{R}^*$ بوصفه جداء تابعين مستمرين (أحـــدهما تركيب تابعين مستمرين على $\mathbb{R}^*$ كما أسلفنا).

2) لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 0 \le |g(x)| = \left| x \sin\frac{1}{x} \right| \le |x|$$

ومنه :

$$0 \le \lim_{x\to 0} |g(x)| \le \lim_{x\to 0} |x| = 0 \,.$$

إذن :

$$\lim_{x\to 0} |g(x)| = 0$$

وهذا يكافئ (لأن التقارب نحو 0 بالقيمة المطلقة يكافئ التقارب نحو 0 بدونها) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. وهكذا فإن التابع $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & : x \ne 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

مستمر على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 7

يكفي دراسة وجود النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. نلاحظ باعتبار مثلا $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}(2n+1)}$ حيث n عدد طبيعي أن :

$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}(2n+1)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{2}(2n+1)(-1)^n \,.$$

ومن ثم يتبيّن أن جعل x يؤول إلى الصفر (وهذا يعني هنا جعل n يؤول إلى $+\infty$) يؤكد بأن النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ غير موجودة. إذن لا نستطيع تمديد الدالة المعطاة بالاستمرار.

حل التمرين 8

يكفي التعقيب بأن مجموعة الأعداد الناطقة كثيفة في $\mathbb{R}$. وبالتالي إذا كانت x نقطة من $\mathbb{R}$ فإنه توجد متتالية x_n من الأعداد الناطقة تتقارب نحو x. وهكذا إذا رمزنا للدالتين بـــ f و g فإن :

$$\forall n \in IN: \quad f(x_n) = g(x_n)$$

ومنه:

$$\lim_{x_n \longrightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \longrightarrow x} g(x_n)$$

وبفضل استمرار الدالتين نحصل على:

$$f(x) = f(\lim_{x_n \longrightarrow x} x_n) = \lim_{x_n \longrightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \longrightarrow x} g(x_n) = g(\lim_{x_n \longrightarrow x} x_n) = g(x)$$

وهذا مهما كان x من $\mathbb{R}$. إذن $f = g$.

حل التمرين 9

يكفي أن نحسب النهاية (إن وجدت) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$. إن كـــان $n = 1$ فمن البديهي بأن النهاية المذكورة تساوي 1. وإذا كان $2 \leq n$ يتّضح من دستور ثنائي الحد أن $(1+x)^n - 1 \overset{V(0)}{\sim} nx$ ذلك أن :

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r = 1 + nx + x^2 P(x)$$

حيث P كثير حدود (درجته $n-2$). إذن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{nx}{x} \\ &= n. \end{aligned}$$

وبذلك يكون التابع :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x} & : x\neq 0\\ n & : x=0,\end{cases}$$

مستمرا على $\mathbb{R}$ بأكمله.

حل التمرين 10

لما كان f دوريا فإنه يوجد عدد موجب تماما T يحقق

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x).$$

ونحن نعلم أن ذلك يؤدي إلى :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\quad f(x+nT)=f(x)$$

ولذلك يأتي :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)&=\lim_{n\to+\infty}f(x)\\&=\lim_{n\to+\infty}f(x+nT)\\&=\lim_{y\to+\infty}f(y)\\&=a.\end{aligned}$$

وبالتالي : $f(x)=a$ من أجل كل x في $\mathbb{R}$.

حل التمرين 11

ليكن x و y من المجال $]0,1[$. لدينا :

$$\begin{aligned}\forall x\in]0,1],\ \forall y\in]0,1],\quad |f(x)-f(y)| &= |x+y||x-y|\\ &\le (|x|+|y|)|x-y|\\ &\le 2|x-y|.\end{aligned}$$

فإذا عدنا إلى تعريف الاستمرار المنتظم واخترنا $\varepsilon>0$ فيكفي اختيار $\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$ لكي يتحقق الاستلزام :

$$\forall x\in]0,1],\ \forall y\in]0,1],\ |x-y|<\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

لاحظ أن اختيار α ($\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$) مستقل عن اختيار النقطتين x و y في المجال $]0,1]$.

تعقيب : يمكن إثبات أن f ليس مستمرا بانتظام على كامل $\mathbb{R}$ ولا على جزء غير محدود منه.

حل التمرين 12

1) لإثبات أن التابع f مستمر بانتظام على $\mathbb{R}$ نستفيد من العلاقات المثلثية :

$$\sin x-\sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\times\sin\frac{x-y}{2}$$
$$|\sin(x-y)|\le|x-y|.$$

فنجد :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\sin x-\sin y|\\ &= \left|2\cos\frac{x+y}{2}\times\sin\frac{x-y}{2}\right|\\ &\le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\\ &\le |x-y|.\end{aligned}$$

وعليه يكفي أن نأخذ في تعريف الاستمرار المنتظم $\alpha=\varepsilon$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \ |x-y|<\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

فنلاحظ عندئذ أن α مستقل عن ε. ومن ثم يأتي الاستمرار المنتظم على كل مجال $\mathbb{R}$.

2) ليكن $[a,b]$ مجالا من $\mathbb{R}$. علينا أن نثبت أن :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in[a,b],\ \forall y\in[a,b],\ \ |x-y|<\alpha\ \Rightarrow\ |g(x)-g(y)|<\varepsilon.$$

لدينا :

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &= |\sin x^2-\sin y^2|\\ &= \left|2\cos\frac{x^2+y^2}{2}\times\sin\frac{x^2-y^2}{2}\right|\\ &\le 2\left|\sin\frac{x^2-y^2}{2}\right|\\ &\le |x^2-y^2|\\ &\le |x+y||x-y|\\ &\le 2\max(|a|,|b|)|x-y|.\end{aligned}$$

ومنه يكفي أن نضع $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{2\max(|a|,|b|)}$ ونلاحظ عندئذ أن α مستقل عن ε. ومن ثم يأتي الاستمرار المنتظم على كل مجال $[a,b]$.

3) باستخدام العلاقات المثلثية نحصل على :

$$\begin{aligned}|g(u_n)-g(v_n)| &= |\sin u_n{}^2-\sin v_n{}^2| \\ &= \left|2\cos\frac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}\times\sin\frac{u_n{}^2-v_n{}^2}{2}\right| \\ &= 2\sin 2\left|\cos(n^2+\frac{1}{n^2})\right|\end{aligned}$$

4) لدينا فعلا باستخدام (مرة أخرى) العلاقات المثلثية :

$$\cos(n^2+\frac{1}{n^2})=\cos n^2\cos\frac{1}{n^2}-\sin n^2\sin\frac{1}{n}\ .$$

نلاحظ في الحد الثاني من الطرف الأيمن في العلاقة السابقة أن :

$$0\le\left|\sin n^2\sin\frac{1}{n}\right|\le\left|\sin\frac{1}{n}\right|\xrightarrow{n\to+\infty}0\ .$$

ومنه تقارب المتتالية $\sin n^2\sin\frac{1}{n}$ (نحو 0). أما المتتالية $\cos n^2\cos\frac{1}{n^2}$ فقد سلمنا بتباعدها. إذن المتتالية $\cos(n^2+\frac{1}{n^2})$ متباعدة. ولما كان :

$$g(u_n)-g(v_n)=2\sin 2\cos(n^2+\frac{1}{n^2})$$

فإننا نستنتج تباعد المتتالية $g(u_n)-g(v_n)$.

5) حتى نستخلص أن التابع g ليس مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}$ نستفيد مما سبق ونلاحظ أن :

$$|u_n-v_n|=\frac{2}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0\ .$$

لو كان g مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}$ لكان : $\lim\limits_{|x-y|\to0}|g(x)-g(y)|=0$

ولاستنتجنا عندئذ أن :

$$\lim_{|u_n-v_n|\to0}|g(u_n)-g(v_n)|=0\ .$$

وقد بيّنا أن هذا خاطئ. وهو المطلوب.

حل التمرين 13

1) لو كانت القضيتان (2) و (3) خاطئتين معا لوجدت نقطتان x_1 و x_2 من $[a,b]$ بحيث $g(x_1).g(x_2)<0$. ومنه ينتج (استنادا مثلا إلى نظرية القيم الوسطى) أنه توجد نقطة y من $[a,b]$ (وبوجه أدق، من المجال الذي حداه x_1 و x_2) بحيث $g(y)=0$. وهذا يناقض العلاقة (1).

2) لنفرض مثلا (2)، أي أن $g(x)>0$ من أجل كل x في $[a,b]$. استمرار g على المتراص $[a,b]$ يجعله يدرك حدّيْه. وبوجه خاص فهو يدرك حده الأدنى : يوجد عنصر y من $[a,b]$ بحيث : $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)=g(y)$. ولما كان y من $[a,b]$ فإن $g(y)>0$. نضع $\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)=g(y)=\alpha>0$ ونلاحظ أن :

$$\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq x+\alpha>x\ .$$

وبصفة خاصة نحصل على التناقض التالي باعتبار $x=b$:

$$f(b)\geq b+\alpha>b$$

لأن صورة التطبيق $f:[a,b]\to[a,b]$ هي $[a,b]$. وبالتالي لا بد أن يكون $f(b)\leq b$.

نصل أيضا إلى تناقض مماثل لو افترضنا بأن العلاقة (3) هي المحققة (بدل العلاقة (2)) يؤدي بنا إلى أن $f(a)<a$، وهو يتنافى مع كون صورة التطبيق $f:[a,b]\to[a,b]$ هي $[a,b]$.

3) خلاصة القول إن نفْيَنا لوجود نقطة $x\in[a,b]$ تحقق $g(x)=0$ يؤدي إلى تناقض. إذن توجد نقطة $x\in[a,b]$ تحقق $g(x)=0$. النتيجة التي

يمكننا استخلاصها مما سبق هي أن نقطة $x \in [a,b]$ التي تحقق $g(x)=0$ تحقق $f(x)=x$ (أي أن x نقطة صامدة لـــ f).

حل التمرين 14

نعتبر التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بـــ $f(x)=e^{-x}-x$. إنه تابع مستمر ويحقق $f(0)=1>0$ و $f(1)=e^{-1}-1<0$. ومنه $f(0)f(1)<0$. وبالتالي يتضح من نظرية القيم الموسطى أنه توجد على الأقل نقطة c بحيث $f(c)=0$. ولذلك فإن $f(c)=e^{-c}-c=0$، أي $e^{-c}=c$، وهذا يعني أن c حل للمعادلة $e^{-x}=x$.

حل التمرين 15

1) لتكن $x_0 \in]a,b[$. هل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-f(x_0)=0$؟ نعم لأن العلاقة :

$$0 \le |f(x)-f(x_0)| \le M|x-x_0|$$

تؤدي إلى :

$$0 \le \lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)| \le M \lim_{x\to x_0}|x-x_0| = 0 .$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$$

وهو ما يعني أن f مستمر عند x_0. ومنه يأتي استمرار f على $]a,b[$. نقوم بنفس العملية إن كان $x_0=a$ أو $x_0=b$ إذ أن :

$$0 \le \lim_{x\to a}|f(x)-f(a)| \le M \lim_{x\to a}|x-a| = 0$$
$$0 \le \lim_{x\to b}|f(x)-f(b)| \le M \lim_{x\to b}|x-b| = 0.$$

إذن f مستمر على $[a,b]$.

2) نعلم من التمرين السابق (انظر نظرية النقطة الصامدة التي اختتمنا بها التمرين) أن كل تابع $f:[a,b]\to[a,b]$ مستمر يقبل نقطة صامدة. وبما أن التقليص تابع مستمر (كما ورد في السؤال الأول) فإنه توجد نقطة صامدة $x\in[a,b]$ لـــ f، أي تحقق $f(x)=x$.

علينا أن نتأكد من وحدانية النقطة الصامدة : لنفترض أن هناك نقطيتين صامدتين x و y مختلفتين. عندئذ نكتب (تذكّر أن f تقليص) :

$$|f(x)-f(y)| = |x-y| \le M\,|x-y|.$$

ومنه، نحصل بعد الاختصار، على: $1\le M$. وهذا يناقض فرض التقليص الذي ينصّ على أن $M<1$. إذن $x=y$.

تعقيب : هناك طريقة أخرى لإثبات وجود نقطة صامدة دون اللجوء إلى استظهار استمرار التابع، نوجزها فيما يلي : نعتبر نقطة $x_0\in[a,b]$ ونعتبر المتتالية التدريجية (x_n) المعرفة بـــ $x_{n+1}=f(x_n)$. ونثبت أنها كوشية :

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\le M\,|x_{n+p}-x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1}-x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1}-x_n|\\ &\le \left[M^{n+p-1}+M^{n+p-2}+\dots+M^n\right].|x_1-x_0|\\ &\le \frac{M^n}{1-M}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

إذن (لاحظ أن $\lim_{n\to+\infty} M^n = 0$ لأن $0\le M<1$) :

$$0 \le \lim_{n\to+\infty}|x_{n+p}-x_n| \le \lim_{n\to+\infty}\frac{M^n}{1-M}|x_1-x_0| \le \frac{|x_1-x_0|}{1-M}\lim_{n\to+\infty} M^n = 0.$$

وعليه : $\lim_{n\to+\infty} x_{n+p} - x_n = 0$. إذن المتتالية (x_n) كوشية، وبالتالي فهي متقاربة، نرمز بـــ x لنهايتها : $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. وفي الأخير نلاحظ أن استمرار f يؤدي إلى :

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_{n-1}) \\ &= f(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

****

أهم المصطلحات

Français	English	عربية
Logarithme népérien	Neperian logarithm	اللوغاريتم النبيري
Droite réelle	Real line	المستقيم الحقيقي
Fonction	Function	تابع ، دالة
Fonction exponentielle	Exponential function	تابع أسي
Diverger	Diverge	تباعدَ
Divergence	Divergence	تباعدُ
Récurrence	Induction	تراجع (تدريج)
Accumulation	Accumulation	تراكم
Converger	Converge	تقاربَ
Convergence	Convergence	تقاربُ
Prolongement	Continuation	تمديد ، امتداد
Fonctions équivalentes	Equivalent functions	توابع متكافئة
Constante	Constant	ثابتة
Partie entière	Integer part	جزء صحيح
Voisinage	Neighborhood	جوار
Borne inférieure	Lower bound	حد أدنى
Borne supérieure	Upper bound	حد أعلى

Corps	**Field**	حقل
Réel	**Real**	حقيقي
Période	**Period**	دورة
Périodique	**Periodic**	دورية
Monotone	**Monotone**	رتيب
Nombre irrationnel	**Irrational number**	عدد أصم
Entier relatif	**Integer**	عدد صحيح
Nombre naturel	**Natural number**	عدد طبيعي
Nombre rationnel	**Rational number**	عدد ناطق
Numérique	**Numerical**	عددية
Complexe	**Complex**	عُقَدي ، مركب
Elément	**Element**	عنصر
Dérivable	**Differentiable**	قابل للاشتقاق
Extremum	**Extremum**	قيمة قصوى
Valeur absolue	**Absolute value**	قيمة مطلقة
Dense	**Dense**	كثيف
Principe d'Archimède	**Axiom of Archimedes**	مبدأ أرخميدس
Suites adjacentes	**Adjacent sequences**	متتاليات متجاورة
Suite	**Sequence**	متتالية
Sous suite	**subsequence**	متتالية جزئية

Suite de Cauchy	**Cauchy sequence**	متتالية كوشية
Suite extraite	**subsequence**	متتالية مستخرجة
Croissant	**Increasing**	متزايد
Variable	**Variable**	متغير
Discontinue	**Discontinuous**	متقطع
Décroissant	**Decreasing**	متناقص
Intervalle	**Interval**	مجال
Intervalles emboîtés	**Nested intervals**	مجالات متداخلة
Borné	**Bounded**	محدود
Continu	**Continuous**	مستمر
Axiome	**Axiom**	مُسَلَّمة
Fermé	**Closed**	مغلق
Ouvert	**Open**	مفتوح
Uniforme	**Uniform**	منتظم
Point fixe	**Fixed point**	نقطة صامدة
Limite	**Limit**	نهاية

****