École Normale Supérieure
Département de Mathématiques
Laboratoire des Équations aux Dérivées Partielles Non Linéaires
Vieux-Kouba, Alger – Algérie

Introduction

aux

Problèmes aux Limites

Non-Linéaires

Youcef ATIK

Magister d'Analyse Fonctionnelle 1999–2002

Table des matières

Première partie

Problèmes aux limites à données régulières

Chapitre 1

Introduction : Équations modèles

1.1 Quelques notations

Dans tout ce qui suit Ω désignera un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, i.e. un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^N$. Sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\overline{\Omega}$. Nous supposons qu'en chaque point $x \in \partial\Omega$ (sauf éventuellement en un nombre fini d'entre eux) le vecteur unitaire normale à $\partial\Omega$, et sortant de Ω, est défini et nous le désignerons par $\nu = \nu(x)$:

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N).$$

Soit $u = u(x_1, \ldots, x_N)$ une fonction définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En supposant qu'il existe, on appelle gradient de u au point x le vecteur

$$\nabla u(x) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x)\Big).$$

La norme euclidienne de ∇u est notée $|\nabla u|$:

$$|\nabla u| = \Big[\Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + \cdots + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_N}\Big|^2\Big]^{1/2}.$$

Pour la fonction u, la dérivée dans la direction de la normale sortante est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_N}\nu_N. \tag{1.1}$$

Dans le cas bidimensionnel, le point générique de $\mathbb{R}^2$ étant noté (x, y), on définit la *dérivée tangentielle* par :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial x}\nu_y + \frac{\partial u}{\partial y}\nu_x, \quad \nu = (\nu_x, \nu_y). \tag{1.2}$$

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On introduit

- $\star$ l'opérateur de Laplace par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \tag{1.3}$$

- $\star$ et l'opérateur biharmonique par

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}. \tag{1.4}$$

En écrivant les expressions (1.1), (1.3) et (1.4) nous supposans que toutes les dérivées qui y figurent existent – disons –, pour le moment, au sens usuel.

Dans le cas $N = 2$, on préfère, comme à l'accoutumée, désigner les deux variables par x et y de sorte que l'opérateur de Laplace (ou laplacien) s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et l'opérateur biharmonique (ou bilaplacien) s'écrit

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \tag{1.5}$$

si les dérivées croisées sont continues.

1.2 Exemples d'équations linéaires

1.2.1 Équation d'une tige reposant sur un support

Considérons une tige de longueur 1 qu'on suppose placée le long de l'intervalle $[0, 1]$ et reposant sur un support élastique. Le fléchissement de cette tige est exprimée par la fonction $u = u(x)$, $x \in [0, 1]$ qui vérifie l'équation différentielle ordinaire (en bref E.D.O) du quatrième ordre

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[E(x)I(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\Big] + Q(x)u = f(x),\ \ x \in]0, 1[, \tag{1.6}$$

où

— $E(x)$ est le module d'élasticité (module de Young) de la tige,
— $I(x)$ le moment d'inertie de la section transversale de la tige,
— $Q(x)$ est le coefficient de plissement du support,
— $f(x)$ la charge verticale agissant sur la tige.

Si les extrémités de la tige sont encastrées, on décrit cette situation par les conditions aux limites :

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0; \qquad u(1) = 0, \quad u'(1) = 0. \tag{1.7}$$

Si la tige est simplement supportée, on décrit cette situation par :

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0; \qquad u(1) = 0, \quad u''(1) = 0. \tag{1.8}$$

Par conséquent, pour résoudre le problème de fléchissement d'une tige, on doit trouver une fonction u satisfaisant l'équation (1.6) et les conditions (1.7) ou (1.8).

1.2.2 L'équation de Poisson à 2 dimensions

Soit Ω un domaine plan et soit $f = f(x, y)$ une fonction donnée dans Ω. On cherche une fonction $u = u(x, y)$ définie sur $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ et satisfaisant l'équation

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Cette équation (appelée équation de Poisson [1]) modélise plusieurs phénomènes physiques, tels que

⋆ la forme d'une membrane placée au dessus de Ω et soumise à des forces verticales ;

⋆ la distribution stationnaire de la chaleur sur un plaque de forme Ω avec une conductivité et des sources internes de chaleur indépendantes du temps.

La fonction f représente soit la charge verticale soit les sources de chaleur.

On peut adjoindre à l'équation de Poisson différentes conditions sur $\partial\Omega$. Par exemple, la condition

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

1. Siméon Denis (1781–1840), mathématicien français. Travaux sur le calcul des variations, les équations aux dérivées partielles et le calcul des probabilités.

qui signifie que la membrane est fixée sur tout son pourtour ou que la plaque est tenue à la température zéro sur son pourtour ; la condition

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \qquad (g = g(x,y) \quad \text{définie sur} \quad \partial\Omega),$$

signifie que l'émission de chaleur est prescrite sur la frontière de la plaque ; la condition

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

où $c = c(x,y)$ et $d = d(x,y)$ sont des fonctions données définies sur $\partial\Omega$, signifie que l'échange de chaleur entre la plaque et le milieu ambiant obéit à une loi donnée.

1.2.3 L'équation de la plaque

Soient, de nouveau, Ω un domaine plan et $f = f(x,y)$ une fonction donnée sur Ω. Cherchons une fonction $u = u(x,y)$ satisfaisant l'équation

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{1.9}$$

La fonction u décrit le fléchissement d'une plaque mince (d'épaisseur constante, homogène et isotrope), chargée verticalement par la charge f. L'équation (1.9) avec les conditions

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

décrit le fléchissement d'une plaque dont le pourtour est encastré.

C'est en première approximation que les phénomènes physiques sont modélisés par des équations linéaires. Si on veut plus de précisions on aboutit à des équations non linéaires.

1.3 Exemples d'équations non linéaires

Pour pouvoir modéliser la répartition stationnaire de la chaleur sur une plaque par l'équation de Poisson on a dû supposer que le coefficient k de conductivité de la chaleur du matériau est constant. Cependant, ce coefficient peut dépendre du point (x,y), de la température à laquelle est exposé le matériau et même du gradient de température. Dans ce cas l'équation modélisant la distribution stationnaire de la température s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\Big(x,y;u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \quad - \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(k\Big(x,y;u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\frac{\partial u}{\partial y}\Big) \\ = f(x,y) \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{aligned}$$

Cette équation est un cas spécial des équations aux dérivées partielles (en bref E.D.P) qui s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} -\tfrac{\partial}{\partial x}(a_1(x,y;u,\nabla u)\tfrac{\partial u}{\partial x}) \quad - \quad \tfrac{\partial}{\partial y}(a_2(x,y;u,\nabla u)\tfrac{\partial u}{\partial y}) \\ + a_0(x,y;u,\nabla u) = f(x,y). \end{aligned} \right. \tag{1.10}$$

Exemple 1.3.1 Soit $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. En prenant dans (1.10)

$$a_1(x,y;u,\nabla u) = a_2(x,y;u,\nabla u) = m(|\nabla u|^2) \quad \text{et} \quad a_0 \equiv 0,$$

on obtient l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(m(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(m(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = f(x,y) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.11}$$

qui décrit, par exemple, la déformation élasto-plastique d'un corps plan de forme Ω ; la fonction m caractérise les propriétés du matériau dont le corps est composé, la fonction f la charge. Si en plus, l'on impose la condition

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

on aura affaire à un corps encastré sur sa frontière.

Exemple 1.3.2 La même équation (1.11) décrit le champ magnétique stationnaire dans une machine électrique. La fonction $u = u(x,y)$ représente le potentiel magnétique et la fonction m est ce qu'on appelle la perméabilité de l'environnement.

Subdivision la frontière $\partial\Omega$ en deux parties Γ_1 et Γ_2 et imposons les conditions

$$u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \qquad \text{et} \qquad m(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{sur} \quad \Gamma_2,$$

où $g = g(x,y)$ et $h = h(x,y)$ sont des fonctions définies sur Γ_1 et Γ_2 respectivement. Cela signifie que le potentiel sur Γ_1 et la densité du flux d'induction sur Γ_2 sont donnés.

Exemple 1.3.3 Considérons toujours la même équation (1.11) mais ici avec une fonction m particulière :

$$m(t) = (1+t)^{-1/2}, \; t \geq 0.$$

On a alors l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial x}[(1+|\nabla u|^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y}[(1+|\nabla u|^2)^{\frac{-1}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}] = f(x,y) \text{ dans } \Omega, \tag{1.12}$$

qui peut s'écrire, pour $f = 0$, sous la forme

$$\Big(1+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \Big(1+\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Cette équation, couplée avec la condition

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

décrit ce qu'on appelle le problème de la surface minimale (le problème de Plateau [2]) : La fonction $u = u(x,y)$ représente la surface dans $\mathbb{R}^3$ dont la projection sur le plan Oxy est le domaine Ω avec une forme donnée (par la fonction g) au dessus de $\partial\Omega$ et dont l'aire est la plus petite possible parmi les surfaces de ce type [3].

Cependant les équations du type (1.12) décrivent aussi, par exemple, l'écoulement de liquides ou de gaz, ou les déformations dans les problèmes de la théorie de l'élasto-plasticité.

Exemple 1.3.4 Considérons encore l'équation (1.11) mais cette fois avec

$$m(t) = 1 - \frac{\gamma - 1}{2}t^{1/(\gamma-1)}, \; t \in \mathbb{R}_+,$$

avec $\gamma > 1$ une constante donnée. L'équation correspondante caractérise alors l'écoulement potentiel de gaz. Si

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{2}{\gamma - 1}$$

l'écoulement est subsonique.

2. Joseph A.F. (1801–1883).
3. Le problème de Plateau, qui trouve des applications en physique dans plusieurs phénomènes de tension superficielle, a été résolu en 1931 par Tibor Rado et Jesse Doublas. Il est possible de concrétiser les surfaces minimales en plongeant dans de l'eau savonneuse un fil métallique matérialisant la courbe $\partial\Omega$.

1.3.1 L'opérateur de Laplace non linéaire ou le p-laplacien

C'est l'opérateur donné, en N dimensions, par

$$-\Delta_p u(x) \doteq -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \doteq -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)$$

où $p > 1$ est un nombre réel. Si $|\nabla u| = 0$ et $1 < p < 2$ on convient de poser $|\nabla u|^{p-2}\nabla u = 0$; cela est raisonnable puisque, pour $N = 1$ cela s'écrit $\left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2}\frac{du}{dx} = 0$, et ceci peut se justifier en remarquant que, pour tout nombre réel r, on a

$$r = |r| \operatorname{sign}(r) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sign}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r = 0 \\ -1 & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$$

de sorte que $|r|^{p-2}r = |r|^{p-1}\operatorname{sign}(r)$ qui est nul pour $r = 0$.

On peut considérer l'équation

$$-\Delta_p u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.13}$$

qui se réduit à l'équation de Poisson dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$ pour $p = 2$. En étudiant la torsion d'une barre cylindrique de section transversale constante, on peut trouver une équation où intervient le p-laplacien, voir [20]. L'équation (1.13) nous sera très utile du point de vue méthodologique ; nous la prendrons pour modèle pour illustrer de nombreux concepts et assertions. Nous utiliserons aussi comme modèle l'équation :

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{1.14}$$

qui à une dimension ($N = 1$) s'écrit

$$-\frac{d}{dx}\Big(\Big|\frac{du}{dx}\Big|^{p-2}\frac{du}{dx}\Big) + |u|^{p-2}u = f(x),\ \ x \in \Omega =]a, b[. \tag{1.15}$$

1.3.2 L'équation de Monge-Ampère

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. Le problème de trouver une surface représentée par la fonction $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega}$ dont la forme sur $\partial\Omega$ et la courbure sont imposées conduit à l'équation non linéaire, dite de Monge-Ampère :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 = f(x, y) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

avec la condition

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

1.3.3 Équations d'ordre 4

a) Soit Ω un domaine plan et posons

$$H(u) = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = u(x, y).$$

L'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[g(H(u))\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\Big] \;+\; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big[g(H(u))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big] \\ \qquad + \; \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[g(H(u))\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big] \\ \qquad\qquad = f(x, y) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

avec les conditions

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{1.17}$$

modélise les déformations élasto-plastiques d'une plaque rigidement encastrée. La fonction $g = g(t)$ caractérise le matériau dont est fabriquée la plaque et la fonction f la charge. Les conditions (1.17) signifient que la plaque est encastrée sur tout son bord. En prenant $g(t) = 1$ on retrouve l'équation de (1.9).

b) On peut aussi introduire l'opérateur biharmonique non linéaire :

$$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) \tag{1.18}$$

avec $p > 1$. Nous ignorons si une équation avec l'opérateur (1.18) possède un sens physique. Cependant une telle équation peut être utilisée pour illustrer et modéliser de nombreuses considérations théoriques.

1.4 Équations différentielles ordinaires non linéaires

a) La rotation d'une corde lourde est representée par l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 \frac{u}{[x^2+u^2]^{1/2}} = 0 \quad \text{dans} \quad]0,1[$$

couplée avec les conditions

$$u(0) = u'(1) = 0,$$

où ω est la vitesse angulaire.

b) Dans la théorie des réacteurs chimiques, on rencontre le problème

$$\begin{cases} \beta \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} + F(u) &= 0 \quad \text{dans} \quad]0,1[\\ -u'(0) + \alpha u(0) &= 0 \quad \text{et} \quad u'(1) = 0, \end{cases}$$

avec F une fonction donnée, α et β deux constantes données.

c) En étudiant le processus de réaction dans l'atome de hélium, on est amené à rechercher une fonction $u = u(x)$ définie pour $x \geq 0$ satisfaisant le problème

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2u}{x} + uR(u) &= \lambda u \quad \text{dans} \quad]0,+\infty[\\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

avec

$$R(u) = \frac{4\pi}{x}\int_0^x u^2(t)dt + 4\pi\int_x^\infty \frac{u^2(t)}{t}\,dt.$$

1.4.1 Autres non linéarités

Les non linéarités rencontrées jusqu'ici sont essentiellement du "type puissance". Cependant, en chimie et en physique nucléaire, on rencontre des problème dont la modélisation conduit à des problèmes comportant des équations du type

$$\Delta u + ue^u = f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

ou

$$\Delta u + e^u = f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

où la non linéarité est du "type exponentiel". L'étude de ces non linéarités est de loin plus difficile que celle des non linérités du "type puissance".

1.5 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Considérons l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x),\ \ x \in \Omega, \tag{1.19}$$

où les coefficients a_{ij}, a_i, $i, j = 1, \ldots, N$, a et f sont des fonctions réelles définies sur Ω. Les solutions de (1.19) sont supposées de classe C^2 dans Ω. La matrice carrée $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ d'ordre N, formée des coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé de l'opérateur L, est supposée symétrique.

Soit x_0 un point quelconque de Ω et $\lambda_1(x_0), \ldots, \lambda_N(x_0)$ les valeurs propres (qui sont alors réelles) de la matrice $A(x_0)$. Désignons par $N_+ = N_+(x_0)$ le nombre de valeurs propres positives, par $N_- = N_-(x_0)$ le nombre de valeurs propres négatives et par $N_0 = N_0(x_0)$ celui des valeurs propres nulles. Donc $N = N_+ + N_- + N_0$.

1.5.1 Définitions

L'équation (1.19) est dite du type **elliptique** (ou elliptique) au point x_0 de Ω si $N = N_+$ ou $N = N_-$. Elle est dite elliptique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est elliptique en tout point de E.

L'équation (1.19) est dite du type **hyperbolique** (ou hyperbolique) au point x_0 de Ω si $N_+ = N - 1$ et $N_- = 1$ ou bien $N_+ = 1$ et $N_- = N - 1$. Elle est dite hyperbolique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est hyperbolique en tout point de E.

L'équation (1.19) est dite **ultrahyperbolique** au point x_0 de Ω si N_0 et $1 < N_+ < N - 1$. Elle est dite ultrahyperbolique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est ultrahyperbolique en tout point de E.

L'équation (1.19) est dite du type **parabolique** (ou parabolique) au point x_0 de Ω si $N_0 > 0$. Elle est dite parabolique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est parabolique en tout point de E.

1.6 Équations d'évolution

Les phénomènes physiques dépendent généralement du temps de sorte que les équations qui les modélisent dépendent elles aussi du temps ; elles sont évolutives. Les équations d'évolution les plus simples sont l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.

1.6.1 Équation de la chaleur

C'est l'équation du type **parabolique** la plus simple ; elle s'écrit dans le cylindre $\Omega\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$:

$$u_t - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,+\infty[, \tag{1.20}$$

où $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$. L'équation de la chaleur modélise plusieurs phénomènes physiques de type **diffusion** ; en particulier la distribution de la température u dans le domaine Ω avec une source de chaleur f dépendant du temps.

On peut adjoindre à l'équation de la chaleur différentes conditions sur $\partial\Omega \times [0,+\infty[$. Par exemple, la **condition aux limites de Dirichlet homogène** :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[\tag{1.21}$$

qui signifie que l'on maintient le bord de Ω à la température zero ; ou la **condition aux limites de Neumann homogène** :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[, \tag{1.22}$$

qui signifie que le flux de chaleur à travers la frontière $\partial\Omega$ est nulle ; ou encore la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[$$

où $c = c(x,t)$ et $d = d(x,t)$ sont des fonctions données définies sur $\partial\Omega \times [0,+\infty[$, qui signifie que l'échange de chaleur entre le domaine Ω et le milieu ambiant obeit à une loi donnée.

Pour espérer que le phénomène modélisé par (1.20) soit complètement déterminé, il faut encore adjoindre à cette équation une **condition initiale** ou **donnée de Cauchy** :

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega \quad (u_0 \ \text{défini sur} \ \overline{\Omega}), \tag{1.23}$$

qui décrit l'état initial du phénomène étudié.

1.6.2 Équation des ondes

C'est l'équation du type **hyperbolique** la plus simple ; elle s'écrit dans le cylindre $\Omega\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$:

$$u_{tt} - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,+\infty[, \tag{1.24}$$

où $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$. L'équation des ondes modélise, par exemple :

⋆ Lorsque $N = 1$ et $\Omega =]a,b[$, les petites vibrations d'une corde qui est soumise à une force extérieure f.

⋆ Lorsque $N = 2$, les petites vibrations d'une membrane élastique. Pour chaque $t \geq 0$, le graphe de la fonction $x \mapsto u(x,t)$ coïncide avec la configuration de la membrane à l'instant t. Et généralement :

⋆ La propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, ...) dans un milieux élastique homogène.

On peut adjoindre à l'équation des ondes différentes conditions sur $\partial\Omega \times [0,+\infty[$. Par exemple, la condition aux limites de Dirichlet (1.21) qui exprime que la corde ou la membrane est fixée à ses extrémités ; ou la condition aux limites de Neumann (1.22) qui exprime que les extrémités sont libres.

Ici, pour espérer que le phénomène modélisé par (1.24) soit complètement déterminé, il faut encore – en plus de la condition initiale (1.23) – adjoindre une autre condition initiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \ x \in \Omega \quad (v_0 \ \text{défini sur} \ \overline{\Omega}), \tag{1.25}$$

qui décrit la **vitesse initiale** de l'onde étudiée. Les équations (1.21) et (1.25) traduisent l'état initial du système étudié.

Remarque 1.6.1 Au lieu du cylindre infini $\Omega\times]0,+\infty[$, on se limite dans plusieurs cas pratiques et théoriques au cylindre fini $\Omega\times]0,T[$, avec $T>0$ un nombre réel.

1.6.3 Équations paraboliques non linéaires

Nous prendrons comme modèles d'équations paraboliques non linéaires les équations

$$u_t - \Delta_p u = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[,\ (T>0) \tag{1.26}$$

et

$$u_t - \Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[,\ (T>0) \tag{1.27}$$

avec la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times[0,T] \tag{1.28}$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega. \tag{1.29}$$

Un problème de biomathématique

L'étude de la concentration S d'un produit dans un fluide s'écoulant dans une veine artificielle conduit à un problème du type :

Trouver une fonction $S:[0,\ell]\times[0,\infty[\to\mathbb{R}$ $(\ell>0)$ solution de

$$\frac{\partial S}{\partial t} - D\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + C\frac{\partial S}{\partial x} + \rho\frac{S}{1+S} = 0 \tag{1.30}$$

$$S(0,t) = V(t), \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{1.32}$$

$$S(x,0) = 0, \tag{1.33}$$

où D est le coefficient de diffusion, C la vitesse d'écoulement, ρ la masse spécifique et V est une fonction donnée. Voir [27].

1.6.4 Équations de Navier-Stokes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $T>0$ un nombre réel. Ici u désigne une fonction de $\Omega\times]0,T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, donc :

$$u(x,t) = \big(u_1(x,t),...,u_N(x,t)\big).$$

On note

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \Big(\frac{\partial u_1}{\partial t},\dots,\frac{\partial u_N}{\partial t}\Big), \quad D_i u = \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial u_N}{\partial x_i}\Big)$$

et

$$\Delta u = \Big(\Delta u_1,...,\Delta u_N\Big).$$

Les équations de Navier-Stokes évolutives sont les suivantes :

$$u_t - \nu\Delta u + \sum_{i=1}^{N} u_i D_i u = f - \nabla p \quad \text{dans} \quad Q, \quad (\nu>0) \tag{1.34}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \Big(\text{i.e. } \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\Big) \quad \text{dans} \quad Q, \tag{1.35}$$

avec les conditions aux limites et initiales :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T] \text{ (i.e. } u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T],\ i = 1, ..., N), \tag{1.36}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \text{ (i.e. } u_i(x,0) = u_{0i}(x),\ i = 1, ..., N,\ x \in \Omega). \tag{1.37}$$

Les fonctions inconnues sont u et p.

Moyennant quelques hypothèses simplificatrices, les équations de Navier-Stokes précédentes modélisent le mouvement d'un fluide homogène, visqueux et incompressible. $u = u(x,t)$ représente la vitesse du fluide et $p = p(x,t)$ sa pression au point x et à l'instant t. Lorsque le mouvement est assez lent pour que les composantes de u et de ∇u soient considérées comme petites, il est d'usage de modiliser le mouvement par le système linéaire, dit de Stokes :

$$u_t - \nu\Delta u = f - \nabla p \quad (\nu > 0) \tag{1.38}$$

$$\text{div } u = 0 \quad \Big(\text{i.e. } \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\Big), \tag{1.39}$$

avec les conditions aux limites et initiales (1.36) et (1.37). Ce système est surtout utilisé dans le cas stationnaire ($u_t = 0$), dans ce cas la condition initiale (1.37) n'a pas lieu d'Ltre.

Le lecteur intéressé par l'origine physique des équations de Navier-Stokes peut consulter, par exemple, Dautray-Lions [12], volume 1.

1.6.5 Élasticité linéaire

1.6.6 Un problème de type Signorini

Revenons maintenant à l'équation de la plaque mince (1.9) et considérons le problème suivant : Trouver une fonction $u = u(x,y)$ définie dans un domaine plan $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ satisfaisant le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta^2 u &=& f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ Mu &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \\ u &\geq& 0 \quad \text{et} \quad Nu \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u.Nu &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

où

$$Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}$$

et

$$Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\nu_x\nu_y - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\nu_x^2 - \nu_y^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\nu_x\nu_y\Big],$$

σ est une constante dite coefficient de Poisson. Ici la plaque mince est supportée le long de sa frontière de telle manière qu'elle peut fléchir seulement vers le haut sur $\partial\Omega$ et la force de coupe ne peut être non nulle que si le flechissement est nulle sur sa fontière, ceci est exprimé par la condition $uNu = 0$.

1.6.7 Équations de Maxwell

Sera écrit plus tard.

Chapitre 2

Solutions classiques d'un problème aux limites

2.1 Équations du second ordre

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et soient

$$a_i = a_i(x; \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_N), \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

des fonctions de $2N+1$ variables définies pour

$$x \in \Omega \quad \text{et} \quad (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Soit encore $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.

Nous sommes intéressés par l'étude des équations différentielles de la forme

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x; u, \nabla u) + a_0(x; u, \nabla u) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

c'est à dire que nous cherchons une fonction $u = u(x)$ définie dans Ω et satisfaisant (2.2) pour tout $x \in \Omega$.

L'expression (2.2) est dite équation différentielle du second ordre (sous forme divergentielle), les fonctions a_i, ses coefficients et la fonction f son second membre.

En posant

$$\hat{a} = (a_1, \ldots, a_N) : \Omega \times \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$$

l'équation (2.2) s'écrit

$$-\operatorname{div}\, \hat{a} + a_0 = f, \quad \operatorname{div}\, \hat{a} \doteq \sum_{1=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i,$$

ce qui explique l'appellation "sous forme divergentielle".

Exemple 2.1.1 En prenant les fonctions a_i de (2.1) comme suit :

$$a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$
$$a_0(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = 0,$$

l'équation (2.2) prend la forme

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

ou, encore

$$-\Delta u = f(x), \; x \in \Omega$$

qui est l'équation de Poisson à N dimensions. Cette équation est un cas particulier des équations aux dérivées partielles (E.D.P) linéaires d'ordre 2. La forme générale de ces E.D.P linéaires d'ordre 2 est obtenue en prenant

$$a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N)=\sum_{j=0}^{N}a_{ij}(x)\xi_j,\quad i=0,1,\dots,N,$$

avec des fonctions $a_{ij}(x)$, définies dans Ω, données. Cela donne

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i0}(x)u\Big)+\sum_{j=1}^{N}a_{0j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_{00}(x)u=f(x).$$

Si les fonctions a_{i0}, $i=1,\dots,N$ sont dérivables, cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+\sum_{i=1}^{N}a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_0(x)u=f(x)$$

avec $a_i(x)=a_{0i}(x)-a_{i0}(x)$ et $a_0(x)=a_{00}(x)+\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{\partial a_{i0}}{\partial x_i}$.

Exemple 2.1.2 En prenant dans (2.1)

$$\begin{aligned}&a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N)=[\sqrt{\xi_1^2+\dots+\xi_N^2}\,]^{p-2}\xi_i,\quad i=1,\dots,N\\&a_0(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N)=0,\end{aligned}$$

avec $p>1$ un nombre réel, l'équation (2.2) prend la forme

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\nabla u\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)=f(x)\quad\text{dans}\quad\Omega.$$

L'opérateur se trouvant au premier membre est ce qu'on appelle l'"opérateur de Laplace non linéaire" qu'on a déjà vu dans la Section 1.3.1.

2.1.1 Équations d'Euler

Les équations dites d'Euler rencontrées dans le calcul des variations sont de la forme (2.2). Soit la fonction

$$J(u)=\int_\Omega F(x;u(x),\nabla u(x))\,dx$$

où $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ est une fonction donnée. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_i},\quad i=0,1,\dots,N$$

existent. L'équation

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial F}{\partial\xi_i}(x;u(x),\nabla u(x))\Big)+\frac{\partial F}{\partial\xi_0}(x;u(x),\nabla u(x))=0\quad\text{dans}\quad\Omega$$

est alors appelée l'équation d'Euler de la fonctionnelle J. C'est une équation de la forme (2.2) avec $f=0$ et les coefficients

$$a_i=\frac{\partial F}{\partial\xi_i},\quad i=0,1,\dots,N.$$

Exemple 2.1.3 L'équation de la surface minimale (voir l'Exemple 1.3.3)

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}([1+|\nabla u|^2]^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial x_i})=0$$

est une l'équation d'Euler de la fonctionnelle

$$J(u)=\int_{\Omega}[1+|\nabla u|^2]^{1/2}\,dx.$$

Ici, la fonction F de la Section 2.1.1 s'écrit

$$F(x;\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_N)=[1+\xi_1^2+\cdots+\xi_N^2]^{1/2}.$$

Exemple 2.1.4 L'équation

$$-\frac{\partial}{\partial x}\big(m(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x}\big)-\frac{\partial}{\partial y}\big(m(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial y}\big)=f(x,y)$$

est l'équation d'Euler de la fonctionnelle

$$J(u)=\int_{\Omega}\{\frac{1}{2}M(|\nabla u|^2)-f(x,y)u(x)\}\,dxdy,$$

avec la fonction F de la Section 2.1.1 donnée ici par

$$F(x,y;\xi_0,\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2}M(\xi_1^2+\xi_2^2)-f(x,y)\xi_0$$

où $M(s)=\int_0^s m(t)\,dt$.

2.2 Équations d'ordre supérieur

2.2.1 Notations

Soient $N\in\mathbb{N}^\star$ et $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$ un multi-indice de dimension N. Le nombre

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

est appelé longueur du multi-indice α.

Soit $\alpha\in\mathbb{N}^N$ un multi-indice et $u=u(x)$ une fonction réelle définie dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$; nous notons par le symbole

$$D^\alpha u$$

la dérivée partielle, d'ordre $|\alpha|$:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Soit $k\in\mathbb{N}$. Nous notons par κ le nombre de tous le N-multi-indices dont la longueur est au plus égal à k. On a

$$\kappa=\kappa(N,k)=\frac{(N+k)!}{N!k!}.$$

Ce nombre donne aussi le nombre de toutes les derivées (partielles) d'une fonction de N variables dont l'ordre varie de zéro à k inclus, à condition de ne pas tenir compte de l'ordre de dérivation dans les dérivées croisées et de compter l'identité.

Nous utilisons le symbole $\delta_k u$ pour noter la fonction vectorielle dont les composantes sont toutes les dérivées de la fonction u d'ordres $0, 1, 2 \ldots, k$:

$$\delta_k u = \left(D^\alpha u\right)_{|\alpha|\leq k} = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right). \tag{2.3}$$

Donc, le vecteur $\delta_k u$ a κ composantes (l'ordre de dérivation est ignoré). Les composantes de $\delta_k u$ sont ordonnées lexicographiquement :

La première composante est u (dérivée d'ordre zéro)
suivie des dérivées d'ordre 1,
suivies des dérivées d'ordre 2,...
suivies des dérivées d'ordre k.

Les dérivées de même ordre s ($s \leq k$) seront arrangées comme suit :

Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ sont deux multi-indices de longueur commune s, la dérivée $D^\alpha u$ précède la dérivée $D^\beta u$ si, pour un certain n de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, N\}$, on a :

$$\alpha_n > \beta_n \quad \text{et, si } n \geq 2, \quad \alpha_i = \beta_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

À titre d'exemples :

Pour $k = 1$, on a $\kappa = N + 1$ et

$$\delta_1 u = (u, \nabla u) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right);$$

et pour $k = 2$, on a $\kappa = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ de sorte que pour $N = 2$, on a $\kappa = 6$ et

$$\delta_2 u = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Finalement, nous utilisons le symbole $\hat{\delta}_k u$ pour désigner le vecteur dont les composantes sont toutes les dérivées d'ordre k, i.e.

$$\hat{\delta}_k u = \left(D^\alpha u\right)_{|\alpha|=k} ; \tag{2.4}$$

il est alors possible de scinder le vecteur $\delta_k u$ en deux parties :

$$\delta_k u = \{\delta_{k-1} u, \hat{\delta}_k u\}.$$

Le vecteur $\hat{\delta}_k u$ est appelé la partie principale du vecteur $\delta_k u$.

2.2.2 Équations d'ordre $2k$.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $k \in \mathbb{N}^\star$ et

$$a_\alpha(x; \xi) \quad (\text{les} \quad \alpha \quad \text{sont des} \quad N\text{-multi-indices avec} \quad |\alpha| \leq k) \tag{2.5}$$

des fonctions de $N + \kappa$ variables définies pour $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^\kappa$.

Notons les composantes de ξ par ξ_β où l'indice β parcourt l'ensemble de tous les N-multi-indices de longueur au plus égale à k, les composantes ξ_β sont ordonnées lexicographiquement, i.e. que :

le premier multi-indice est celui de longueur zéro, suivi des multi-indices de longueur 1, suivis des multi-indices de longueurs 2,..., suivis des multi-indices de longueurs k. Les multi-indices de même longueur sont ordonnés comme précisé dans Section 2.2.1. Donc

$$\xi = (\xi_\beta \mid |\beta| \leq k).$$

Soit encore $f = f(x)$ une fonction définie dans Ω.

On s'intéresse aux équations de la forme

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x; \delta_k u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.6}$$

i.e. qu'on cherche une fonction $u = u(x)$ définie dans Ω et satisfaisant l'équation (2.6) pour tout $x \in \Omega$. L'équation (2.6) est dite équation aux dérivées partielles si $N \geq 1$ (équation différentielle ordinaire si $N = 1$) d'ordre $2k$. Les fonctions a_α sont appelées coefficients de l'équation et f son second membre. Cette équation est sous forme divergentielle.

2.2.3 Exemples

Exemple 2.2.1 Si toutes les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$ de (2.5) sont des fonctions linéaires par rapport aux variables ξ_β, $|\beta| \leq k$, l'équation (2.6) sera alors une équation linéaire d'ordre $2k$.

Exemple 2.2.2 Prenons $k = 2$; donc $\kappa = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$. Notons I l'ensemble des N-multi-indices suivants :

$$(2,0,0,\dots,0), \quad (0,2,0,\dots,0), \quad \dots, \quad (0,0,\dots,0,2).$$

Définissons les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$ pour $|\alpha| \leq 2$ comme suit :

$$\begin{array}{lll} a_\alpha(x;\xi) = \sum_{\beta\in I} \xi_\beta & \text{si} & \alpha \in I \\ a_\alpha(x;\xi) = 0 & \text{si} & \alpha \notin I, \ |\alpha| \leq 2. \end{array}$$

L'équation (2.6) avec ce choix des coefficients s'écrit :

$$\sum_{\alpha\in I} D^\alpha\Big(\sum_{\beta\in I} D^\beta u\Big) = f(x). \tag{2.7}$$

Cette équation, qui est écrite en utilisant les multi-indices, peut aussi s'écrire en utilisant une somme avec les indices "usuels" :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\Big) = f(x), \ x \in \Omega, \tag{2.8}$$

i.e. qu'on a l'équation $\Delta^2 u = f$, où $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ est ce qu'on appelle l'**opérateur biharmonique**. Les formules (2.7) et (2.8) représentent la même équation. En les comparant, on voit que la notation utilisant les multi-indices n'est pas toujours la plus avantageuse.

Exemple 2.2.3 Soient toujours $k = 2$ et I l'ensemble des N-multi-indices definis dans l'exemple 2.2.2. Soit $p > 2$ un nombre réel et définissons les fonctions a_α pour $|\alpha| \leq 2$ comme suit :

$$\begin{array}{lll} a_\alpha(x,\xi) = \Big|\sum_{\beta\in I} \xi_\beta\Big|^{p-2}\Big(\sum_{\beta\in I} \xi_\beta\Big) & \text{pour} & \alpha \in I \\ a_\alpha(x,\xi) = 0 & \text{pour} & \alpha \notin I, \ |\alpha| \leq 2. \end{array}$$

Les équations (2.6) prennent alors la forme :

$$\sum_{\alpha\in I} D^\alpha\Big(\Big|\sum_{\beta\in I} D^\beta u\Big|^{p-2} \sum_{\beta\in I} D^\beta u\Big) = f(x)$$

i.e.

$$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = f(x)$$

où l'on retrouve ce qu'on appelle l'opérateur biharmonique non linéaire.

Exemple 2.2.4 Soient $k = 2$ et $N = 2$ (donc $\kappa = 6$). On doit alors définir 6 fonctions :

$$a_\alpha(x,y;\xi), \quad (x,y) \in \Omega, \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_5) \in \mathbb{R}^6.$$

Rappelons que les composantes $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_5$ du vecteur ξ correspondent, respectivement, aux fonctions

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Définissons les fonctions a_α comme suit :

$$\begin{array}{rcl} a_{(2,0)}(x,y;\xi) & = & g(\xi)(\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_5) \\ a_{(0,2)}(x,y;\xi) & = & g(\xi)(\xi_5 + \frac{1}{2}\xi_3) \\ a_{(1,1)}(x,y;\xi) & = & g(\xi)\xi_4 \\ a_\alpha(x,y;\xi) & = & 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| = 0, \ |\alpha| = 1 \end{array}$$

où $g(\xi) = G(\xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_3\xi_5)$ avec $G = G(t)$ une fonction réelle définie pour $t \geq 0$.

Avec ce choix des coefficients a_α, l'équation (2.6) peut s'écrire en utilisant la sommation avec des indices usuels :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\{\mathcal{G}(u)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\Big\} \quad &+ \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big\{\mathcal{G}(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big\} \\ &+ \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big\{\mathcal{G}(u)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\Big\} = f(x,y) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{G}(u) = G\Big(\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big).$$

C'est donc l'équation donnée dans l'Exemple 1.3.3 décrivant les déformations élasto-plastiques d'une plaque, où $g(H(u))$ a été utilisée à la place de $\mathcal{G}(u)$.

2.3 Solution classique d'une équation différentielle

Supposons que les fonctions $a_\alpha(x,\xi)$ de (2.5), qui sont définies pour $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^\kappa$, possèdent des dérivées d'ordre $|\alpha|$ (par rapport à toutes les variables) continues, i.e. que

$$a_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega \times \mathbb{R}^\kappa).$$

Supposons aussi que la fonction $f = f(x)$ soit donnée dans $C^0(\Omega)$, $C^0(\Omega)$ étant l'espace des fonctions continues dans Ω.

Definition 2.3.1 On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est solution classique de l'équation

$$\sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{a_\alpha(x; \delta_k u(x))\} = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.9}$$

si $u \in C^{2k}(\Omega)$ et si u satisfait (2.9) pour tout $x \in \Omega$.

2.4 Conditions aux limites

En revenant aux exemples du Chapitre 1, on voit que dans ces exemples on cherchait non pas une fonction quelconque vérifiant une équation différentielle mais une solution satisfaisant certaines conditions sur $\partial\Omega$. Ces conditions, qui expriment le comportement demandé à la solution u sur $\partial\Omega$, s'appellent conditions aux limites. Par exemple, pour $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$, en considérant l'équation différentielle ordinaire

$$-[(u')^2]' = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.10}$$

qui est de la forme (2.2) avec

$$a_1(x; \xi_0, \xi_1) = \xi_1^2, \quad a_0(x; \xi_0, \xi_1) = 0,$$

on voit qu'elle est satisfaite par toute fonction de la forme

$$u(x) = ax + b, \; x \in \Omega =]0,1[$$

avec a et b des constantes arbitraires. L'équation (2.10) possède donc une infinité de solutions. Si on exige maintenant une solution de (2.10) vérifiant sur le bord $\partial\Omega = \{0,1\}$ de Ω des conditions du type

$$u(0) = c_0 \quad \text{et} \quad u(1) = c_1,$$

on trouve une solution uniquement determinée, c'est

$$u(x) = (c_1 - c_0)x + c_0.$$

Dans le cas de plusieurs dimensions ($N > 1$) les choses ne sont pas aussi simples, car $\partial\Omega$ peut être très "irrégulière", on doit donc imposer (pour arriver à formuler correctement les conditions aux limites) à $\partial\Omega$ d'avoir une régularité suffisante. Cette régularité dépendant de l'ordre de l'équation : frontière continue, lipschitzienne, de classe C^1,..., voir la Section 2.7 et Nečas [30] pour la signification de ces notions.

2.4.1 Conditions aux limites

Nous supposons dans ce qui suit que le domaine Ω a une frontière lipschitzienne.

Une condition aux limites n'est en fait autre chose qu'une certaine "équation différentielle" que l'on impose à u de vérifier. Mais cette fois-ci sur $\partial\Omega$ au lieu de Ω. Cette "équation différentielle" peut être d' "ordre zéro" comme la condition :

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

rencontrée dans le Chapitre 1.

Essayons de donner une formulation générale des conditions aux limites. Soient $s \in \mathbb{N}$ et σ le nombre des N-multi-indices de longueur inférieure à s. Soit la fonction

$$\Phi(x;\eta) \tag{2.11}$$

définie pour $x \in \partial\Omega$ et $\eta \in \mathbb{R}^\sigma$ qu'on suppose donnée et soit $u \in C^s(\overline{\Omega})$ satisfaisant la condition

$$\Phi(x;\delta_s u(x)) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{2.12}$$

$C^s(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions de classe C^s dans Ω admettant des prolongements continus sur tout $\overline{\Omega}$. La condition (2.12) est dite condition aux limites d'ordre s.

2.4.2 Problème aux limites

On parle de problèmes aux limites lorsqu'on se donne :

a) une équation différentielle (par exemple de la forme (2.6)) ;

b) un certain nombre de conditions aux limites (indépendantes en un certain sens).

Le nombre des conditions aux limites, leur ordre et la forme des fonctions Φ correspondants ne sont généralement pas liés à l'équation différentielle, i.e. à son ordre $2k$ et à la forme des fonctions a_α, $|\alpha| \leq k$. Cependant, dans les problèmes physiques, il existe une relation étroite entre l'équation différentielle et les conditions aux limites (voir les exemples du Chapitre 1). Pour cette raison, nous n'imposerons pas ici des conditions aux limites de manière arbitraire. Nous allons respecter un certain nombre de principes qui reflètent la réalité physique et qui sont aussi avantageux pour le traitement mathématique. Ces principes sont les suivants :

1. Pour une équation différentielle d'ordre $2k$, nous considérons k conditions aux limites, i.e. qu'on va donner k fonctions
$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k.$$
2. La fonction Φ_i exprime une condition aux limites d'ordre s_i ; tous les nombres s_1, s_2, …, s_k seront ici tous différents et doivent vérifier
$$0 \leq s_i \leq 2k-1,$$
i.e. qu'on considère des conditions aux limites d'ordre au plus égal à $(2k-1)$. Les conditions aux limites d'ordre au plus égal à $(k-1)$ sont dites stables (pour une équation d'ordre $2k$), tandis que les conditions d'ordre supérieur sont dites instables.

En règle générale, nous n'écrirons pas les conditions aux limites sous la forme générale (2.12), mais plutôt sous les formes dans lesquelles elles se présentent dans les problèmes "pratiques".

En outre, pour être bref, nous allons nous limiter à l'ordre 2 qui fera l'objet d'une attention particulière de notre part.

2.4.3 Problème aux limites pour une équation d'ordre 2

Considérons une équation différentielle d'ordre 2, i.e., une équation de la forme (2.2). Dans ce cas nous imposons, selon ce qu'on a dit dans la sous-section précédente 2.4.2 une seule condition aux limites :

a) La condition de Dirichlet :

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.13}$$

où g est une fonction définie sur $\partial\Omega$. Le problème de Dirichlet pour l'équation

$$-\text{div}\,\hat{a}(x;u,\nabla u)+a_0(x;u,\nabla u)=f \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.14}$$

est le problème qui consiste à trouver une (ou plusieurs) solutions de cette équation qui vérifie(nt) en plus une condition du type (2.13).

b) La condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.15}$$

i.e.

$$\nu_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+\nu_N\frac{\partial u}{\partial x_N}=g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

où g est une fonction donnée sur $\partial\Omega$. Cette condition est instable puisque l'équation est d'ordre 2, i.e. $k=1$. Le problème qui consiste à résoudre (2.14) sous la condition (2.15) est dit problème de Neumann.

c) La condition de Newton :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+hu=g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.16}$$

où $h=h(x)$ et $g=g(x)$ sont des fonctions données sur $\partial\Omega$ avec $h(x)\geq h_0>0$. Cette condition est aussi instable. Le problème qui consiste à résoudre (2.14) sous la condition (2.17) est dit problème de Newton.

d) La condition de dérivée oblique :

$$s_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+s_N(x)\frac{\partial u}{\partial x_N}=g(x) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.17}$$

où les $s_i(x)$ et g sont des fonctions données sur $\partial\Omega$ avec

$$\sum_{i=1}^{N}s_i^2(x)=1.$$

La condition (2.17) est instable et elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial s}=g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

oŮ $\frac{\partial u}{\partial s}$ représente la dérivée de u dans la direction du vecteur $s=(s_1,\ldots,s_N)$, le vecteur s variant avec $x\in\partial\Omega$. Le problème qui consiste Ě résoudre (2.14) sous la condition (2.17) est dit problème de dérivée oblique. Si $s_i(x)=\nu_i(x)$ on retrouve le problème de Neumann.

e) La condition "mêlée"

Subdivisons la frontière $\partial\Omega$ en deux parties Γ_1 et Γ_2, i.e. $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, et considérons la condition aux limites :

$$u=g_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}=g_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \tag{2.18}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions définies sur Γ_1 et Γ_2 respectivement. Le problème qui consiste à résoudre (2.14) sous la condition (2.18) est dit problème mêlé.

La condition (2.18) est du type (2.12). En effet, elle peut s'écrire sous la forme

$$a(x)u+b(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}=a(x)g_1(x)+b(x)g_2(x),\ x\in\partial\Omega,$$

donc, en posant

$$\Phi=\Phi(x;\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N)=a(x)[\eta_0-g_1(x)]+b(x)\Big[\sum_{i=1}^{N}\nu_i(x)\eta_i-g_2(x)\Big],$$

fonction qui est définie pour

$$x\in\partial\Omega \quad \text{et} \quad (\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$$

avec

$$a(x)=\begin{cases}1 & \text{pour} \quad x\in\Gamma_1\\ 0 & \text{pour} \quad x\in\Gamma_2\end{cases} \qquad \text{et} \qquad b(x)=1-a(x),$$

on voit que (2.18) est bien de la forme (2.12).

2.4.4 Conditions aux limites non linéaires

Les conditions aux limites considérées dans la sous-section 2.4.3 étaient toutes linéaires. Donnons maintenant une condition aux limites non linéaire. Considérons l'équation

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x; u(x), \nabla u(x)) + a_0(x; u(x), \nabla u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.19}$$

avec cette fois les coefficients, i.e. les fonctions

$$a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$$

définies pour $x \in \overline{\Omega}$ et $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, donc en particulier pour $x \in \partial\Omega$.

La condition aux limites (non linéaire)

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x; u(x), \nabla u(x)) \nu_i(x) = g(x) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.20}$$

où les $\nu_i(x)$ sont les composantes du vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et sortant de Ω, est très importante, car elle est très étroitement liée à l'équation différentielle : Elle est donnée directement à l'aide des coefficients de (2.19).

Pour illustrer cette condition on va prendre trois exemples “concrets” :

a) Posons

$$\begin{cases} a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = F_i(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)\xi_i, \; i = 1, 2, \ldots, N \\ a_0(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

La condition (2.20) prend alors la forme

$$\sum_{i=1}^{N} F_i(u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i(x) = g(x) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Cette condition est à rapprocher à la condition (2.17). Ici la dérivée de u est prise dans la direction du vecteur

$$s = (\nu_1 F_1, \nu_2 F_2, \ldots, \nu_N F_N),$$

vecteur qui dépend de x, u et ∇u.

b) Posons

$$a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = F(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)\xi_i, \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

i.e. qu'on suppose que toutes les fonctions dans (2.21) sont égales à F. Dans ce cas (2.20) prend la forme

$$F(u(x); \nabla u(x)) \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

c) Posons

$$a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = \xi_i, \; i = 1, \ldots, N.$$

[i.e. qu'on a posé dans (2.21) $F_i = \cdot = F_N = 1$]. L'équation différentielle (2.19) est alors l'équation de Poisson :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

et la condition (2.20) est alors

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

i.e. qu'on a le problème de Neumann.

2.5 Solutions d'un problème aux limites

2.5.1 Solution classique d'un problème aux limites

Considérons le problème aux limites

$$\sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x;\delta_k u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.22}$$

$$\Phi_i(x;\delta_{s_i}u(x)) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ (i=1,\ldots,k) \tag{2.23}$$

où $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k < 2k$.

Supposons que les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$, définies pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\xi \in \mathbb{R}^\kappa$, appartiennent à $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^\kappa)$, que $f \in C^0(\Omega)$ et que les fonctions $\Phi_i(x;\eta)$ sont définies pour $x \in \partial\Omega$ et $\eta \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$ (avec σ_i le nombre de multi-indices de longueurs inférieures à s_i).

Définition 2.5.1 Nous disons qu'une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une solution classique du problème aux limites (2.22), (2.23) si :

a) $u \in C^{2k}(\overline{\Omega})$;

b) u satisfait l'équation (2.22) pour tout $x \in \Omega$;

c) u satisfait les conditions aux limites (2.23) pour tout $x \in \partial\Omega$.

2.6 Le problème aux limites exprimé en terme d'opérateur

Si les fonctions $a_\alpha = a_\alpha(x;\xi)$ pour $|\alpha| \leq k$ appartiennent à $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^\kappa)$, pour toute fonction $u \in C^{2k}(\overline{\Omega})$, la fonction

$$v(x) = \sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x;\delta_k u(x)) \tag{2.24}$$

est dans $C^0(\overline{\Omega})$. La formule (2.24) définie un opérateur différentiel A qui associe à la fonction $u \in C^{2k}(\overline{\Omega})$ la fonction $v = Au$ de $C^0(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned} A : C^{2k}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\ u &\longmapsto v = Au \end{aligned}$$

avec

$$v(x) = \sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x;\delta_k u(x)).$$

Limitons le domaine de l'opérateur A. Nous choisissons pour D_A, le domaine de A, l'ensemble de toutes les fonctions u de $C^{2k}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^\kappa)$ qui vérifie les conditions aux limites (2.23).

Donc, pour $f \in C^0(\overline{\Omega})$ donnée ainsi que les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$ dans $C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^\kappa)$ $(|\alpha| \leq k)$, résoudre le problèmes aux limites classique (2.22), (2.23) revient à trouver la (ou les) solution(s) $u \in D_A$ de l'équation opératorielle :

$$Au = f,\ u \in D_A. \tag{2.25}$$

2.6.1 À propos de l'équation opératorielle (2.25)

Après avoir clarifié la notion de solution classique d'un problème aux limites et l'avoir réduit à la recherche des solution d'une équation opératorielle du type (2.25), nous nous trouvons confrontés à deux problèmes théoriques fondamentaux :

a) Le problème d'existence d'une solution du problème aux limites ou, ce qui revient au même de l'équation (2.25).

b) Le problème de déterminer cette solution.

L'agissant du problème (b), nous devons immédiatement noter qu'une formule explicite donnant la (ou les) solution(s) d'un problème aux limites non linéaires ne peut être trouvée que dans des cas très exceptionnels. Les méthodes numériques sont alors les bienvenues ici et elles sont effectivement très largement utilisées.

L'objet de ce cours est d'étudier le problème (a). Il n'existe pas de méthodologie générale pour résoudre les problèmes aux limites relatifs aux équations aux dérivées partielles non linéaires. Toutefois, si les équations ont une forme particulière, on connaît quelques méthodes pour démontrer l'éxistence de solution. C'est principalement cette question d'existence qui nous intéresse ici.

Voici une méthode d'approche des problèmes liés aux opérateurs différentiels :

1$^{\text{re}}$ étape. Recherche des estimations a priori ; on suppose que tout se passe bien i.e. qu'on travaille formellement : On essaie d'avoir des informations sur le problème en question, en particulier pour savoir dans quel espace ou ensemble il convient de chercher la ou les solutions.

2$^{\text{e}}$ étape. Construction de l'ensemble (ou des ensembles) où on va chercher la (ou les) solutions.

3$^{\text{e}}$ étape. Recherche de la méthode de résolution.

La plupart des méthodes que l'on va adopter dans ce cours seront basées sur :

— La résolution d'un problème "élémentaire".

Exemples :

1. Ramener le problème à un problème en dimension finie (méthode de Galerkin) (on dit qu'on a fait une projection).
2. Ramener le problème à un problème déja résolu, cela se fait par

— Une approximation du problème par une famille de problèmes "classiques" qu'on sait résoudre.

Si l'équation (2.25) a une structure adéquate, on connaît un certain nombre de méthodes telles que celles basées sur l'utilisation :

— d'un théorème de point fixe ou
— d'une fonctionnelle ou
— de la théorie des opérateurs monotones.

Pour donner un avant goût de ces méthodes donnons un exemple qui peut être aisément traité par un théorème de point fixe.

2.6.2 Le théorème du point fixe de Banach (1922)

Théorème 2.6.1 *Soit T un opérateur d'un espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante ℓ vérifiant $0 < \ell < 1$ et telle que*

$$|Tx - Ty|_X \leq \ell |x - y|_X, \ \forall x, y \in X.$$

Alors, l'opérateur T possède un point fixe unique, i.e. il existe $u \in X$, unique, tel que

$$Tu = u.$$

Ce théorème s'appelle aussi le principe de contraction de Banach [1].

C'est le plus simple et le plus ancien des théorèmes du point fixe. Il a l'avantage d'être constructif ; plus précisement la méthode de sa démonstration (méthode des approximations successives) fournit aussi un moyen d'approcher le point fixe.

Comment utiliser ce théorème pour résoudre les problèmes aux limites ? Cela se fait en utilisant :

2.6.3 La méthode de linéarisation

Illustrons cette méthode sur un exemple.

Prenons $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$ et cherchons à résoudre le problème

$$\text{trouver} \quad u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \quad \text{solution de}$$

$$-u'' + g(u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega =]0, 1[\tag{2.26}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2.27}$$

où $f \in C^0(\overline{\Omega})$ est une fontion donnée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi une fonction donnée qu'on suppose lipschitzienne.

En terme d'opérateur, on peut poser ce problème comme suit :

Résoudre l'équation

$$Au = f \in C^0(\overline{\Omega})$$

où

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

et

$$Au = -u'' + g(u(x)).$$

La non linéarité de ce problème est portée par g.

Soit $v \in C^0(\overline{\Omega})$ une fonction fixée, mais choisié arbitrairement, et considérons le problème aux limites linéaire :

$$\text{trouver} \quad u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \quad \text{vérifiant}$$

$$-u'' = f(x) - g(v(x)), \ x \in \Omega =]0, 1[\tag{2.28}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2.29}$$

Ce problème aux limites linéaire possède une solution unique qui est donnée explicitement, voir l'exercice **??**, par

$$u(x) = (1 - x) \int_0^x tF(t)dt + x \int_x^1 (1 - t)F(t)dt$$

où

$$F(t) = f(t) - g\ (v(t)), \ t \in \overline{\Omega} = [0, 1].$$

1. Stéphane (1892–1945), mathématicien polonais. Autodidacte, il fut découvert par H. Steinhaus. Un des plus grands mathématiciens du 20e siècle. Fondateur de l'analyse fonctionnelle moderne. Avec ses élèves, tels S. Mazur, W. Orlicz, J. Schauder, Banach fonda la célèbre école mathématique de Lvov.

Il est classique d'écrire u sous la forme

$$u(x) = \int_0^1 K(x,t)F(t)dt$$

où $K = K(x,t)$ est ce qu'on appelle la fonction de Green du problème (2.28), (2.29) et elle est donnée par

$$K(x,t) = \begin{cases} (1-x)t & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq x \\ x(1-t) & \text{pour} \quad x < t \leq 1. \end{cases}$$

En posant, pour $v \in C^0(\overline{\Omega})$:

$$Tv(x) = \int_0^1 K(x,t)[f(t) - g(v(t))]\,dt, \tag{2.30}$$

on définit un opérateur de $C^0(\overline{\Omega})$ dans lui même. En fait, on a $Tv \in D_A$ (Tv est l'unique solution de (2.28), (2.29)).

On voit rapidement que chercher une solution du problème (2.26), (2.27) revient à trouver un point fixe de T dans $C^0(\overline{\Omega})$; i.e. à trouver $u \in C^0(\overline{\Omega})$ tel que

$$Tu = u.$$

Le problème (2.26–2.27) sera résolu si on peut s'arranger pour montrer que l'opérateur T défini par (2.30) possède un point fixe. Il suffit de montrer que T est une contraction sur $X = C^0(\overline{\Omega})$, muni de la norme de la convergence uniforme.

Lemme 2.6.1 *Si la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz*[2] *:*

$$|g(s) - g(t)| \leq \ell|s-t|, \ \forall s,t \in \mathbb{R}$$

avec $0 < \ell < 8$, l'opérateur $T : X = C^0(\overline{\Omega}) \to X$ défini par

$$Tv(x) = \int_0^1 K(x,t)[f(t) - g(v(t)]\,dt, \ v \in X$$

est une contraction.

Preuve. Soient u et v deux fonctions de X. On a

$$|Tu - Tv|_X = \sup_{x \in [0,1]} |Tu(x) - Tv(x)|,$$

et comme

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &\leq \int_0^1 K(x,t)|g(u(t)) - g(v(t))|\,dt \\ &\leq \ell|u-v|_X \int_0^1 K(x,t)\,dt \\ &\leq \frac{1}{2}\ell|u-v|_X x(1-x) \leq \frac{\ell}{8}|u-v|_X, \end{aligned}$$

il vient

$$|Tu - Tv| \leq k|u-v|_X, \ \forall u,v \in X$$

avec $0 < k = \frac{\ell}{8} < 1$. L'opérateur T est donc une contraction dans X.

Donc, d'après le Théorème 2.6.1, l'opérateur T possède un point fixe unique u dans $X = C^0(\overline{\Omega})$ et comme $Tu \in D_A$ cela montre que la problème (2.26), (2.27) possède une solution unique.

2. Rudolf Otto Sigismund (1832–1903), mathématicien allemand. S'est occupé de plusieurs branches de mathématique telles la théorie des nombres, le calcul des variations, les fonctions de Bessel, les séries de Fourier, les équations différentielles, la physique mathématique...

2.6.4 Encore sur la méthode de linéarisation

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $N > 1$ et considérons le problème non linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u(x)) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in C^0(\Omega)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données avec g lipschitzienne.

En linéarisant, on obtient le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= F(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

avec $F(x) = f(x) - g(v(x))$, $v \in C^0(\overline{\Omega})$ fixé. En essayant de résoudre ce problème linéaire, on est confronté à des difficultés beaucoup plus sérieuses que dans le cas $N = 1$. Par exemple :

- Le problème linéaire n'étant pas toujours soluble pour tout F dans $C^0(\overline{\Omega})$, on est obligé d'imposer à f, g et v des contraintes plus fortes que celles nécessaires dans le cas $N = 1$.
- De plus, la forme concrète de la fonction de Green, analogue de la fonction K servant à définir T, n'est connue que pour des domaines de types très spéciaux et elle n'a pas des propriétés aussi bonnes que celle de K pour $N = 1$.

Des difficultés de ce type et d'autres similaires font que l'application de la méthode de linéarisation avec le principe de contraction de Banach n'est pas très souhaitable pour prouver l'existence de solution classique d'un problème aux limites pour une équation défférentielle non linéaire.

2.7 Sur une identité intégrale

Théorème 2.7.1 (Formule de Green) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est lipschitzienne. Alors, pour tous u, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, la formule (de Green) suivante a lieu :*

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)\,dS, \tag{2.31}$$

ν_i est la i-ème composante du vecteur unitaire ν de la normale à $\partial\Omega$, sortant de Ω.

2.7.1 La formule de Green pour les dérivées d'ordre supérieur

Soit toujours Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est lipschitzienne et soit $m \in \mathbb{N}^\star$, $m > 1$. En reitérant l'application de (2.31) à des fonctions u et v dans $C^m(\overline{\Omega})$, on obtient

$$\int_\Omega v(x)D^\alpha u(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} G(u,v)\,dS \tag{2.32}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = m$ et $G(u, v)$ est une somme de produit du type

$$\pm D^\beta u(x)D^\gamma v(x)\nu_i(x),\ x \in \partial\Omega$$

avec β et γ des N-multi-entiers avec $|\beta| < m$ et $|\gamma| < m$, et $\nu_i = \nu_i(x)$ est une composante du vecteur unitaire sortant de Ω et normale au point $x \in \partial\Omega$.

2.7.2 Un cas spécial de la formule de Green (2.32)

Notons $C_c^m(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$ l'espace des fonctions de classe C^m à supports compacts dans Ω. On a alors l'assertion :

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ lipschitzien et $m \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $v \in C_c^m(\Omega)$ et tout $w \in C^m(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_\Omega v(x)D^\alpha w(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w(x)D^\alpha v(x)\,dx,\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \le m. \tag{2.33}$$

2.7.3 Une identité intégrale

Soit $u \in C^{2k}(\overline{\Omega})$ une solution classique de l'équation différentielle d'ordre $2k$:

$$\sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x; \delta_k u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{2.34}$$

Soit encore $v \in C_c^k(\Omega)$. En multipliant l'équation (2.34) par v et en utilisant la formule (2.33) avec

$$w(x) = a_\alpha(x; \delta_k u(x))$$

on obtient

$$\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega a_\alpha(x; \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx, \ \forall v \in C_c^k(\Omega). \tag{2.35}$$

Donc, si u est une solution classique de l'équation (2.34), l'identité (2.35) a lieu pour tout $v \in C_c^k(\Omega)$.

Naturellement, la réciproque de cette assertion n'est pas vraie. l'identité (2.35) peut avoir lieu pour une classe de fonctions plus large que celle des solutions classiques de (2.34). Cette formule (2.34) peut être satisfaites par des fonctions u ayant seulement des dérivées jusqu'a l'ordre k inclus avec $v \in C_c^k(\Omega)$ quelconque. Une telle fonction u sera dite solution faible de l'équation (2.34). C'est cette notion de solution faible qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Solutions faibles d'un problème aux limites

3.1 Propriété de Carathéodory et opérateurs de Němytskiĭ

3.1.1 En partant des solutions classiques de l'équation

$$\sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}a_{\alpha}(x;\delta_k u(x))=f(x),\ x\in\Omega \tag{3.1}$$

et en utilisant la formule de Green (2.33), nous avons obtenu l'identité intégrale

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{\Omega}a_{\alpha}(x;\delta_k u(x))D^{\alpha}v(x)\,dx=\int_{\Omega}f(x)v(x)\,dx,\ \forall v\in C_c^k(\Omega). \tag{3.2}$$

Pour obtenir (3.2) à partir de (3.1), on a supposé que

$$\begin{array}{l} u\in C^{2k}(\Omega),\ v\in C_c^k(\Omega) \\ f\in C^0(\Omega),\ a_{\alpha}(x;\xi)\in C^{|\alpha|}(\Omega\times\mathbb{R}^{\kappa}). \end{array}$$

Si on regarde (3.2) indépendamment de (3.1), on remarque que dans (3.2) on n'a pas besoin :

- des dérivées de u d'ordre $>k$
- de la dérivabilité des a_{α}
- de la continuité des fonctions apparaissant dans (3.2).

Essayons d'analyser (3.2) dans le but de voir quelles sont les hypothèses "faibles" sur les $a_{\alpha}(x;\xi)$, $u(x)$ et $v(x)$ dont on aura besoin pour donner un sens à (3.2).

Le premier membre de (3.2) est de la forme

$$\int_{\Omega}h\ (x;u_1(x),\cdots,u_m(x))\,dx \tag{3.3}$$

où les $u_1,\ldots,u_m$ sont à remplacer par toutes les derivées de u d'ordre au plus égal à k et par $D^{\alpha}v$.

Rappelons que nous utilisons ici la mesure de Lebesgue.

Quand est ce que (3.3) a un sens ?

Pour que (3.3) ait un sens, il est nécessaire d'abord que

$$g(x)=h(x;u_1(x),\ldots,u_m(x)),\ x\in\Omega$$

soit mesurable ensuite que $\int_{\Omega}|g(x)|\,dx$ soit fini.

Occupons nous d'abord de la mesurabilité.

g est une fonction composée. Et comme il n'est pas vrai que la composée de deux fonctions mesurables le soit, on introduit la notion de fonction de Carathéodory [1].

Définition 3.1.1 Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ et soit $h = h(x;\xi)$ une fonction réelle définie pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$. On dit que h est de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}^m$ si :

a) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$ la fonction

$$\Omega \ni x \mapsto h_\xi(x) = h(x;\xi) \in \mathbb{R}$$

est mesurable dans Ω ;

b) pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\mathbb{R}^m \ni \xi \mapsto h_x(\xi) = h(x;\xi)$$

est continue sur $\mathbb{R}^m$.

Il est clair que si $h \in C(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, h est de Garathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}^m$.

On démontre le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Soient N, m des nombres naturels et Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Soit $h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Si les fonctions $u_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ sont mesurables sur Ω, la fonction composée donnée par*

$$g(x) = h(x; u_1(x), \dots, u_m(x)),\ x \in \Omega$$

est aussi mesurable sur Ω.

Définition 3.1.2 Soit $h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. L'opérateur $\mathcal{H}$ défini sur des m-uplets de fonctions mesurables $u_i = u_i(x)$ $(x \in \Omega,\ i = 1, \dots, m)$ par la formule

$$\mathcal{H}(u_1, \dots, u_m)(x) = h(x; u_1(x), \dots, u_m(x))$$

est appelé opérateur de Němytskiĭ (déterminé par h).

Remarque 3.1.1 Le théorème 3.1.1 montre que l'opérateur de Němytskiĭ applique un m-uplet de fonctions mesurables sur une fonction mesurable. En prenant $m = \kappa = \kappa(N, k)$ et en supposant que les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$ de (3.1) sont de Carathéodory, la fonction

$$b_\alpha(x) = a_\alpha(x; \delta_k u(x))$$

est mesurable sur Ω, pourvu que la fonction u et toutes ses dérivées $D^\gamma u$ $(|\gamma| \leq k)$ soient mesurables.

De plus, si les fonctions $D^\alpha v$ $(|\alpha| \leq k)$ sont mesurables sur Ω, la fonction

$$g(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x; \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)$$

est mesurable sur Ω, puisque les sommes et les produits de fonctions mesurables sont mesurables.

Nous savons donc quand l'intégrand du premier membre de (3.3) est mesurable. Concernant son intégrabilité, on a :

Théorème 3.1.2 *Soient p_1,..., p_m et r des nombres réels, chacun d'eux supérieur à 1. Soit $h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Notons $\mathcal{H}(u_1, ..., u_m)$ l'opérateur de Němytskiĭ déterminé par h. Alors,*

a) *on a*

$$\mathcal{H}(u_1, ..., u_m) \in L^r(\Omega),\ \forall u_i \in L^{p_i}(\Omega),\ i = 1, ..., m$$

si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

Il existe $g \in L^r(\Omega)$ et une constante $c \geq 0$ telles que :

$$|h(x;\xi)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^m |\xi_i|^{p_i/r},\ \forall \xi = (\xi_1, ...\xi_m) \in \mathbb{R}^m,\ x \quad p.p.\ dans \quad \Omega \tag{3.4}$$

b) *Si la condition (a) est satisfaite, l'opérateur de Němytskiĭ $\mathcal{H}$ est continu du produit $L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_m}(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$.*

Les preuves des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 peuvent être, par exemple, trouvées dans [17].

1. Constantin (1873–1950), mathématicien allemand. Travaux en optique et analyses réelle et complexe.

3.1.2 Exemples

Prenons pour fonction h la fonction $a_\alpha(x;\xi)$ de l'identité (3.2) ; donc $m = \kappa = \kappa(N,k)$.

Exemple 3.1.1 Soit $p > 1$ et choisissons tous les p_i du théorème 3.1.2 égaux à p et $r = p'$, p' étant l'exposant conjugué de p : $p' = \frac{p}{p-1}$. Donc $p_i/r = p/p' = p-1$, de sorte l'inégalité (3.4) prend la forme

$$|a_\alpha(x;\xi)| \leq g_\alpha(x) + C_\alpha \sum_{|\beta|\leq k} |\xi_\beta|^{p-1}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa, \ x \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega, \tag{3.5}$$

où $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ et C_α une constante ≥ 0. En appliquant le théorème 3.1.2, on voit donc que la fonction

$$w(x) = a_\alpha(x;\delta_k u(x)), \ x \in \Omega$$

est dans $L^{p'}(\Omega)$ si

- a_α est de Carathéodory ;
- l'inégalité (3.5) est vraie pour presque tout $x \in \Omega$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa$;
- $D^\beta u \in L^p(\Omega)$ pour tout N-multi-entiers β avec $|\beta| \leq k$.

Si ces conditions sont satisfaites, on a

$$|a_\alpha(x;\delta_k u)|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_{\alpha 1} + C_{\alpha 2} \sum_{|\beta|\leq k} |D^\beta u|^{p-1}_{L^p(\Omega)}. \tag{3.6}$$

La preuve de cette estimation utilise l'inégalité élémentaire :

$$(a_1 + \cdots + a_m)^r \leq \max\{1, m^{r-1}\}(a_1^r + \cdots + a_m^r)$$

qui est valable pour $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ et $r \geq 0$.

L'intégrale

$$\int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\, dx$$

sera alors finie si $D^\alpha v \in L^p(\Omega)$; cela résulte de l'inegalité de Hölder.

Exemple 3.1.2 Pour $p = 1$ et $p' = \infty$, l'inégalité (3.5) prend la forme

$$|a_\alpha(x;\xi)| \leq g_\alpha(x) + \kappa C_\alpha$$

avec $g_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ et C_α une constante positive. Dans ce cas, on voit immédiatement que si a_α est de Carathéodory et $D^\beta u \in L^1(\Omega)$ pour $|\beta| \leq k$, la fonction

$$w(x) = a_\alpha(x;\delta_k u(x))$$

est dans $L^\infty(\Omega)$. Il est alors clair que l'intégrale

$$\int_\Omega a_\alpha \ (x;\delta_k \ u(x)) \ D^\alpha v$$

est finie si $D^\alpha v \in L^1(\Omega)$.

3.1.3 Coefficients à croissance polynômiale

L'intégalité (3.5) va jouer un rôle fondamental dans nos considérations futures. Elle nous dit comment la fonction $a_\alpha(x;\xi)$ doit se comporter par rapport à la variable ξ en imposant une limite à sa croissance : La fonction a_α ne peut croître plus vite, par rapport à la variable ξ, que le "polynôme"

$$C_1 + C_2|\xi|^{p-1} \quad \text{avec, par exemple,} \quad |\xi| = \sum_{|\beta|\leq k} |\xi_\beta|.$$

C'est pour cette raison que nous disons que les fonctions a_α qui vérifie (3.5) sont des fonctions à croissance polynômiale.

Dans ce qui suit, et pour $p > 1$, nous écrirons

$$a_\alpha \in \text{Car}\,(p)$$

pour exprimer que

a) a_α est de Carathéodory et

b) il existe une fonction $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante $C_\alpha \geq 0$ telles que a_α satisfait (3.5).

3.1.4 Exemples

Exemple 3.1.3 Pour $p > 1$, posons

$$a_\alpha(x;\xi) = |\xi_\alpha|^{p-2}\xi_\alpha = |\xi_\alpha|^{p-1}\,\text{sign}(\xi_\alpha),\ |\alpha| \leq k.$$

Il est clair qu'on a

$$a_\alpha \in \text{Car}\ (p).$$

En effet, comme a_α est continue par rapport à ξ elle est de Carathéodory et (3.5) est vérifiée avec $g_\alpha = 0$ et $C_\alpha = 1$:

$$|a(x;\xi)| = |\xi_\alpha|^{p-1} \leq \sum_{|\beta|\leq k} |\xi_\beta|^{p-1}.$$

En particulier, pour $a_\alpha(x;\xi) = \xi_\alpha^2$, on a $a_\alpha \in \text{Car}\ (3)$.

Exemple 3.1.4 Pour $k = 1$ et avec les indices usuels, posons pour $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$a_i(x;\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) = [\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2]^{(p-2)/2}\xi_i.$$

Alors, on a

$$a_i(x;\xi) \in \text{Car}\ (p).$$

En effet, $a_i(x;\xi)$ est continue par rapport à toutes ses variables et

$$\begin{array}{rcl} |a_i(x;\xi)| & = & [\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2]^{\frac{p-2}{2}}|\xi_i| \\ & \leq & [\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2]^{\frac{p-2}{2}}[\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & [\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2]^{\frac{p-1}{2}} \\ & \leq & [|\xi_0| + |\xi_1| + \cdots + |\xi_N|]^{p-1} \\ & \leq & \max\{1, (N+1)^{p-2}\} \displaystyle\sum_{i=0}^{N} |\xi_i|^{p-1} \end{array}$$

Exemple 3.1.5 Posons

$$a_\alpha(x;\xi) = e^{\xi_\alpha}.$$

Alors, $\forall p > 1$, $a_\alpha \notin \text{Car}\ (p)$.

En effet, pour $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $p > 1$ des nombres réels donnés, on peut trouver une abscisse $t_0 \geq 0$ (dépendant naturellement de a, b et p) telle que

$$e^t > at^{p-1} + b,\ \forall t \geq t_0.$$

Donc, une estimation du type (3.5) n'est pas possible.

Exemple 3.1.6 Prenons $k = 1$ et utilisons les indices "usuels" au lieu des multi-indices. La condition (3.5) s'écrit

$$|a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N)| \le g_i(x) + C_i \sum_{j=0}^{N} |\xi_j|^{p-1},\ i = 0,1,\dots,N \tag{3.7}$$

où les $g_i \in L^{p'}(\Omega)$ et les $C_i \ge 0$ des constantes.

En particulier, si on choisit :

$$a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N) = \frac{\xi_i}{[1+\xi_1^2+\dots+\xi_N^2]^{1/2}}, i = 1,\dots,N, \tag{3.8}$$

on a $a_i \in$ Car (2), puisque

$$|a_i(x;\xi_0,\dots,\xi_N)| \le |\xi_i| \le \sum_{j=0}^{N} |\xi_j|^{2-1},$$

ce qui est l'inégalité (3.7) avec $g_i \equiv 0$ et $C_i = 1$.

Les a_i sont les coefficients de l'équation de le surface minimale.

En fait, on peut montrer que

$$a_i \in \text{Car } (p),\ \forall p > 1.$$

En effet, comme $|\xi_i| \le [1+\xi_1^2+\dots+\xi_N^2]^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$|a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N)| \le 1,$$

ce qui est la relation (3.7) avec $g_i \equiv 1$ et $C_i = 0$. Le domaine Ω étant supposé borné pour que $1 \in L^q(\Omega)$, $\forall q \ge 1$.

Exemple 3.1.7 Prenons de nouveau $k = 1$ et posons

$$a_i(x;\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N) = \xi_i^2,\ i = 0,1,\dots,N.$$

Il est clair que $a_i \in$ Car (3). Cependant,

$$a_i \notin \text{Car } (2).$$

En effet, pour $a \ge 0$ et $b \ge 0$, des constantes données, on peut trouver un nombre $t_0 \ge 0$ (dépendant de a et b) tel que

$$t^2 > at + b,\ \forall t \ge t_0;$$

et on peut alors se convaincre, en posant $a_i \in$ Car (2), qu'on arrive à une contradiction dans l'inégalité (3.5).

Ce dernier exemple montre que si $a_\alpha \in$ Car (p), on n'a pas, en général $a_\alpha \in$ Car(r) avec $r < p$. Cependant :

Lemme 3.1.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soient $r > p \ge 1$. Si $a_\alpha \in$ Car(p), alors $a_\alpha \in$ Car(r).*

La preuve de ce lemme est élémentaire et elle est basée sur le fait que, pour $r_1 > p_1 \ge 1$ donnés, il existe $a \ge 0$, $b \ge 0$ tels que

$$t^{p_1} \le at^{r_1} + b,\ \forall t \ge 0.$$

On peut vérifier que $a = b = 1$ conviennent.

Remarque 3.1.2 Le lemme 3.1.1 montre que si $a_\alpha \in$ Car$\,(p)$, on a $a_\alpha \in$ Car$\,(p+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$. Nous devons alors à ce propos dire que nous sommes en quelque sorte interessés par le "plus petit" $p \ge 1$ pour lequel (3.5) a lieu. Par exemple, pour

$$a_\alpha(x;\xi) = \xi_\alpha,\ |\alpha| \le k$$

le nombre $p = 2$ est précisement l'exposant "optimal" désiré. Pour les fonctions (3.8), l'exposant "optimal" est $p = 1$.

L'importance de cet exposant optimal tient au fait qu'il "détermine" le cadre convenable pour chercher les solutions faibles. Si l'exposant optimal est noté p, le cadre convenable sera l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Avant d'aller plus loin, rappelons les définitions et les propriétés essentielles (sans démonstrations) concernant les

3.1.5 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $k \geq 1$ un entier naturel et $p \in [1, \infty[$ un nombre réel. On pose

$$W^{k,\,p}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \,\Big|\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ 0 \leq |\alpha| \leq k \Big\}.$$

Muni de la norme :

$$(\star) \qquad |u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}$$

ou de la norme équivalente :

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)} \Big]^{1/p}$$

$W^{k,\,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable. Il est réflexif si $1 < p < +\infty$.

Pour traiter les problèmes de Dirichlet homogène on a besoin de l'espace :

$$W_0^{k,\,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{|\cdot|_{W^{k,\,p}(\Omega)}}.$$

Cet espace est caractérisé par le fait que

$$W_0^{k,\,p}(\Omega) = \{ u \in W^{k,\,p}(\Omega) \mid D^\alpha u = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq k-1 \}.$$

Pour $p = 2$, on pose $W^{k,\,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Muni du produit scalaire

$$(u|v)_{H^(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

$H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 3.1.3 On démontre que pour un ouvert Ω dont la frontière Γ est borné et “assez régulière”, la norme $(\star)$ est équivalente à la norme

$$|u|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}.$$

Dans la suite, on travaillera surtout avec $W^{1,\,p}(\Omega)$, muni de la norme

$$|u|_{W^{1,\,p}(\Omega)} = \Big[|u|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|^p_{L^p(\Omega)} \Big]^{1/p}$$

ou de la norme équivalente

$$|u|_{W^{1,\,p}(\Omega)} = |u|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{L^p(\Omega)}$$

et, pour les problèmes de Dirichlet homogène (d'ordre 2), avec l'espace $W_0^{1,\,p}(\Omega)$ qu'on muni de la norme induite par $W^{1,\,p}(\Omega)$. Pour Ω borné (ou de mesure fini), on peut le munir aussi de la norme équivalente :

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \Big]^{1/p}$$

dite norme du gradient. L'équivalence des normes est basé sur le résultat suivant.

Proposition 3.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Alors, l'inégalité suivante, dite de Poincaré*[2], *a lieu*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Ici, C est une constante qui ne dépendant que de Ω et p.

En particulier l'expression $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $|u|_{W^{1,p}(\Omega)}$ et l'expression

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega) \doteq W_0^{1,2}(\Omega)$ qui induit la norme (du gradient) $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$, $H^1(\Omega) \doteq W^{1,2}(\Omega)$.

Pour une preuve cette proposition on pourrait voir [30] ou [6].

On a le résultat important suivant.

Théorème 3.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1 dont la frontière Γ est bornée. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors :*

1. *si $1 \leq p < N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$ où $p^\star = Np/(N-p)$,*
2. *si $p = N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, où $\forall q \in [p, +\infty[$,*
3. *si $p > N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, où $\forall q \in [p, +\infty[$,*
   avec injections continues.

De plus, si $p > N$, on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\gamma, \ \text{p.p. } x, y \in \Omega$$

avec $\gamma = 1 - N/p$ et C une constante qui dépend seulement de p, N et Ω. En particulier, on $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

On a pour Ω borné :

Proposition 3.1.2 *Si l'ouvert Ω est borné et sa frontière de classe C^1, on a :*

1. *si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^\star[$,*
2. *si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,*
3. *si $p > N$, on $W^{1,p}(\Omega) \subset C^(\overline{\Omega})$, avec injections compactes.*

Revenons maintenant à la justifications de l'identité intégrale (3.2).

Remarque 3.1.4 D'après les considérations précédentes, la relation (3.2) a un sens si :

$$\begin{array}{rcl} a_\alpha & \in & \text{Car}\,(p), \quad |\alpha| \leq k, \ p \geq 1 \\ D^\alpha v & \in & L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq k, \ D^\beta u \in L^p(\Omega), \quad |\beta| \leq k \end{array}$$

et

$$f \in L^{p'}(\Omega), \ v \in L^p(\Omega).$$

Donc, si pour $p \geq 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} a_\alpha & \in & \text{Car}\,(p), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq k; \\ u, v & \in & W^{k,p}(\Omega) \quad \text{(l'espace de Sobolev usuel) ;} \\ f & \in & L^{p'}(\Omega) \quad \text{(si } p = 1 \text{ on convient que } p' = +\infty\text{) ;} \end{array}$$

l'écriture

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega a_\alpha(x; \delta_k u(x)) D^\alpha v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

a un sens.

2. Jules Henri (1854–1912), mathématicien et philosophe français. Travaux en équations différentielles et aux dérivées partielles et sur les équations intégrales. Travaux importants en physique mathématique et en philosophie des sciences.

Terminons cette section par le :

Théorème 3.1.4 *Soit $a = a(x;\xi)$ une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{\kappa}$. Supposons que $a \in \mathrm{Car}\,(p)$ avec $p \geq 1$. Alors, l'opérateur de Němytskiĭ déterminé par a et qui associe à toute fonction $u \in W^{k,\,p}(\Omega)$ la fonction*

$$a(x; \delta_k u(x))$$

est continue de $W^{k,\,p}(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ $\left[p' = \frac{p}{p-1} \text{ si } p > 1 \text{ et } p' = +\infty \text{ si } p = 1\right]$.

3.1.6 La formule de Green dans les espaces de Sobolev

Théorème 3.1.5 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est lipchitzienne et soit $p > 1$. Pour tout $u \in W^{1,\,p}(\Omega)$ et tout $v \in W^{1,\,p'}(\Omega)$, on a formule de Green :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i \, dS \tag{3.9}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions, ν_i est la i-ème composante du vecteur unitaire de la normale à $\partial\Omega$, sortant de Ω, et les valeurs de u et v dans l'intégrale de surface sont comprises au sens des traces.

Remarque 3.1.5

a) Si $u \in W_0^{1,\,p}(\Omega)$ ou $v \in W_0^{1,\,p'}(\Omega)$, la trace sur $\partial\Omega$ de la fonction correspondante est nulle, de sorte que l'intégrale de surface (ou de bord) dans (3.9) est nulle.

b) La formule (3.9) peut se généraliser pour les dérivées d'ordre supérieur :
Si $u \in W^{k,\,p}(\Omega)$ et $v \in W_0^{k,\,p'}(\Omega)$, alors :

$$\int_\Omega D^\beta u(x) v(x)\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u(x) D^\beta v(x)\, dx, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^N, \ |\beta| \leq k. \tag{3.10}$$

3.2 Les opérateurs différentiels

3.2.1 Les opérateurs différentiels formels

Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $p > 1$ un nombre réel (le cas $p = 1$ n'est pas étudié ici). Considérons l'opérateur différentiel d'ordre $2k$:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x; \delta_k u(x)). \tag{3.11}$$

Nous supposons que les fonctions $a_\alpha(x;\xi)$ définies pour $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^\kappa$ sont dans $\mathrm{Car}\,(p)$:

$$a_\alpha \in \mathrm{Car}\,(p). \tag{3.12}$$

L'opérateur A représenté par la formule (3.11) est dit opérateur différentiel formel, car (3.11) n'est qu'un symbôle formel, puisque on ne peut calculer, par exemple, les dérivées figurant dans (3.11) sous les hypothèses faites.

Nous associons à A la forme $a(u, v)$ donnée par :

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega a_\alpha\left(x; \delta_k u(x)\right) D^\alpha v(x)\, dx. \tag{3.13}$$

Dans la suite, nous ferons plus usage de $a(u, v)$ que de A.

Il résulte des considérations de la section 3.1 et par application de l'inégalité de Hölder que, si (3.12) est satisfaite, pour $u, v \in W^{k,\,p}(\Omega)$, l'on a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha(x; \delta_k u(x))|_{L^{p'}(\Omega)} |D^\alpha v|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left[\sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha(x; \delta_k u(x))|_{L^{p'}(\Omega)}\right] |v|_{W^{k,\,p}}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Il est clair, d'autre part que $a(u,v)$ est linéaire par rapport à v. Donc, d'après (3.14), pour tout $u \in W^{k,p}(\Omega)$, la relation (3.13) définit une forme linéaire continue sur $W^{1,p}(\Omega)$. Notons la Φ_u :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_u : W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \Phi_u(v) = a(u,v) \end{array}$$

La fonctionnelle Φ_u est complètement définie et de manière unique par les κ-uplets :

$$(a_\alpha(x;\delta_k u(x)))_{|\alpha|\le k}\,.$$

Plus précisement, les fonctions coefficients a_α étant données, la fonctionnelle Φ_u est complètement déterminée par $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Nous écrivons

$$\Phi_u = \mathcal{A}u.$$

En utilisant essentiellement le théorème 3.1.2, on démontre le :

Théorème 3.2.1 *Soit A l'opérateur différentielle formel donné par (3.11). Si ses coefficients $a_\alpha(|\alpha| \le k)$ sont dans* Car (p)*, A définit l'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & (W^{k,p}(\Omega))' = \quad \textit{dual de} \quad W^{k,p}(\Omega) \\ u & \longmapsto & \mathcal{A}u \end{array}$$

avec

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,dx,\ \ v \in W^{k,p}(\Omega) \tag{3.15}$$

qui est continu.

Remarque 3.2.1 Soit V un sous-espace de $W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme induite. Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, en posant :

$$\langle \mathcal{B}u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,dx,\ \ u \in W^{k,p}(\Omega),\ \ v \in V,$$

l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu de $W^{k,p}(\Omega)$ dans V'. Il est clair que

$$\mathcal{A}u\big|_V = \mathcal{B}u.$$

Dans la suite nous n'utiliserons pas cette notation de restriction. Par exemple, pour $f \in V'$, l'écriture

$$\mathcal{A}u = f$$

signifie en fait $(\mathcal{A}u)|_V = f$.

3.2.2 Équations différentielles

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur continu de $W^{k,p}(\Omega)$ dans son dual $(W^{k,p}(\Omega))'$ défini à partir de l'opérateur différentiel formel A. Soit $f \in (W_0^{k,p}(\Omega))'$ une fonctionnelle continue sur $W_0^{k,p}(\Omega)$ donnée. Considérons l'équation :

$$\mathcal{A}u = f \tag{3.16}$$

Cette égalité (3.16) entre fonctionnelle signifie

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle f, v\rangle,\ \ \forall v \in W_0^{k,p}(\Omega)$$

qui s'écrit par définition de $\mathcal{A}$ (formule (3.15)) :

$$\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\,dx = \langle f, v\rangle,\ \ \forall v \in W_0^{k,p}(\Omega). \tag{3.17}$$

Si la fonctionnelle f est représentée par une fonction, notée encore f, de $L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u)D^\alpha v\,dx = \int_\Omega f v\,dx,\ \forall v\in W_0^{k,p}(\Omega); \tag{3.18}$$

ce qui n'est autre que l'identité (3.2) que nous avons obtenue en étudiant l'équation

$$\sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x;\delta_k u(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et en faisant des hypothèses plus fortes que celles faites ici. L'identité (3.18) représente ici l'équation différentielle formelle

$$Au = f \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

3.2.3 Solution faible d'une équation différentielle

Soit A l'opérateur différentiel formel donné par (3.11) et soit $f\in[W_0^{k,p}(\Omega)]'$. Nous dirons qu'une fonction $u\in W^{k,p}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation différentielle (formelle)

$$Au = f$$

si l'on a

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle f, v\rangle,\ \forall v\in W_0^{k,p}(\Omega),$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur continu de $W^{k,p}(\Omega)$ dans son dual $[W^{k,p}(\Omega)]'$, défini par (3.15).

3.3 Problèmes aux limites

3.3.1 Solution faible du problème de Dirichlet homogène

Soit A l'opérateur différentiel formel d'ordre $2k$ donné par (3.11) avec des coefficients

$$a_\alpha\in \mathrm{Car}\,(p),\ |\alpha|\leq k,\ p>1.$$

Soit encore f une forme linéaire continue sur $W_0^{k,p}(\Omega)$. Nous dirons qu'une fonction

$$u\in W_0^{k,p}(\Omega)$$

est une solution faible du problème de Dirichet homogène (associé à A) si l'on a

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega a_\alpha(x;\delta_k u)D^\alpha v\,dx = \langle f, v\rangle,\ \forall v\in W_0^{k,p}(\Omega).$$

Remarque 3.3.1 En utilisant la formule de Green 2.33, nous avons vu au début de ce chapitre que toute solution classique (au sens de la définition 2.5.1) vérifie l'identité intégrale intervenant dans la définition de solution faible de ce même problème, et comme est elle dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, elle est solution faible de ce problème. Il possible, inversement de montrer en utilisant l'injection de Sobolev et la formule de Green 3.10 et la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans les espaces de Sobolev à traces nulles, de montrer que toute solution faible du problème aux limites 2.22-2.23 suffisamment régulière (i.e. dans un espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ avec m grand) est aussi solution classique de ce même problème.

Dans ce qui suit, nous allons nous occuper exclusivement du problème de Dirichlet homogène pour les équations d'ordre 2.

3.3.2 Solution faible du problème de Dirichlet homogène pour une équation différentielle d'ordre deux

Ici $k = 1$ et l'opérateur différentiel formel d'ordre 2 s'écrit, pour $N = 1$, sous la forme

$$Au = -\frac{d}{dx}(a_1(x; u, u')) + a_0(x; u, u') \tag{3.19}$$

et pour $N > 1$, il s'écrit :

$$Au = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x; u, \nabla u) + a_0(x; u, \nabla u). \tag{3.20}$$

Concernant ses coefficients

$$a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N),\ i = 0, 1, \ldots, N,$$

nous supposons qu'ils sont dans la classe Car (p) avec $p > 1$. Ce qui signifie que les a_i sont de Carathéodory et qu'ils vérifient les conditions de croissance :

$$|a_i(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)| \leq g_i(x) + c_i \sum_{j=0}^{N} |\xi_j|^{p-1},\ i = 0, 1, \ldots, N \tag{3.21}$$

$$\forall \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^{N+1},\ x \text{ p.p. dans } \Omega,$$

avec les $g_i \in L^{p'}(\Omega)$ et les $c_i \geq 0$ des constantes pour $i = 0, 1, \ldots, N$.

Définition 3.3.1 On appelle solution faible du problème de Dirichlet homogène associé à A et au second membre $f \in W^{-1,p'}(\Omega) \doteq [W_0^{1,p}(\Omega)]'$, une fonction u telle que

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right.$$

avec

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x; u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega a_0(x; u, \nabla u) v.$$

Exemple 3.3.1 Prenons $N = 1$ et $\Omega = I =]-1, 1[$. Pour $a_1(x; \xi_0, \xi_1) = \xi_1$ et $a_0(x; \xi_0, \xi_1) = 0$, l'opérateur (3.19) s'écrit $Au = -u''$ et pour $f = \delta$, la mesure de Dirac portée par l'origine, qui est dans $H^{-1}(I) = [H_0^1(I)]'$, on obtient l'équation linéaire

$$-u'' = \delta \quad \text{dans} \quad I. \tag{3.22}$$

Une solution faible du problème de Dirichlet homogène associé à l'équation (3.22) est une fonction u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(I) \\ a(u, v) = v(0),\ \forall v \in H_0^1(I), \end{array} \right. \tag{3.23}$$

avec $a(u, v) = \int_I u'v'\, dx$.

On peut vérifier que ce problème (3.23) admet une solution faible unique qui la fonction

$$u(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x \in]-1, 0] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x \in [0, 1[. \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, nous allons étudier la question d'existence de solution faible du problème $(\mathcal{P})$. On va donner 3 méthodes :

- La méthode du point fixe,
- La méthode variationnelle et
- La méthode de monotonie.

Terminons ce chapitre par quelques

3.4 Rappels

Nous avons vu dans la Section 2.6.3 que l'utilisation d'un théorème de point fixe pour la résolution d'un problème aux limites non linéaire passe par la résolution de problèmes linéaires. Nous aurons donc besoin du résultat suivant.

Lemme 3.4.1 (Lax–Milgram) *Soit H un espace de Hilbert et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire satisfaisant :*

$$|a(u,v)| \leq M|u|_H|v|_H, \ \forall u,v \in H \quad (M>0 \textit{ une constante}), \tag{3.24}$$

$$a(u,u) \geq \alpha|u|_H^2, \ \forall u \in H \quad (\alpha > 0 \textit{ une constante}). \tag{3.25}$$

Alors, pour toute forme linéaire continue F sur H, il existe une fonction unique $u \in H$ telle que

$$a(u,\varphi) = \langle F, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in H.$$

De plus on a l'estimation $|u|_H \leq \frac{1}{\alpha}|F|_{H'}$.

Pour une preuve de ce lemme on pourrait voir [30] ou [6].

3.4.1 Une application du lemme de Lax-Milgram

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Notons $H^{-1}(\Omega)$ le dual topologique de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, construit sur $L^2(\Omega)$, muni de la norme du gradient $|u|_{H_0^1(\Omega)} = [\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx]^{1/2}$. Alors, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, le problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution faible unique dans $H_0^1(\Omega)$. Pour le voir, on considère la forme

$$\begin{array}{rcl} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx. \end{array}$$

Il est clair que cette forme est bililnéaire et elle est continue puisque, grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$|a(u,v)| \leq |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Elle est coercitive puisque $a(u,v) = |u|^2_{H_0^1(\Omega)}$. On appliquera alors le lemme de Lax-Migram avec la forme bilinéaire a et f qui est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Il existe alors $u \in H_0^1(\Omega)$, unique, tel que :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Chapitre 4

Résolution par la méthode du point fixe

4.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Nous avons vu dans la sous-section 2.6.3, comment utiliser le théorème de point fixe de Banach pour trouver la solution classique d'un problème aux limites à une dimension. Nous donnons ici des théorèmes de point fixe plus généraux, que le principe de contraction de Banach, qui offrent plus de souplesse pour résoudre les problèmes aux limites faibles à une ou plusieurs dimensions. Ces théorèmes garantissent l'existence de solution faible mais ils ne disent rien sur l'unicité de ces solutions.

Définition 4.1.1 On dit qu'un espace topologique X possède la **propriété du point fixe** si toute application continue f de X dans lui-même possède un point fixe, i.e. il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Exemple 4.1.1 Tout intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, muni de la topologie de sous-espace, possède la proprité du point fixe.

Notons B^N la boule euclidienne unité fermée de $\mathbb{R}^N$. Nous admettons le résultat suivant.

Théorème 4.1.1 (Brouwer, 1910)

a) *B^N a la propriété du point fixe.*

b) *Tout sous-ensemble convexe compact non vide $\mathcal{C}^N$ de $\mathbb{R}^N$ (ou de E^N, espace euclidien de dimension N) possède la propriété du point fixe.*

Pour une preuve de ce théorème qui utilise un minimum d'outils topologiques, on pourrait voir [16] ou [13]. Pour des preuves de nature plus topologique, on pourrait consulter [?] ou [41].

En utilisant le théorème du point fixe de Brouwer [1], on peut démontrer un certain nombre de généralisation du théorème de point fixe de Banach.

4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 4.2.1 (Schauder [2], 1930) *Tout convexe $\mathcal{C}$, non vide, compact dans un espace de Banach X possède la propriété du point fixe.*

Preuve. Soit T une application continue de $\mathcal{C}$ dans lui-même. Il s'agit de prouver que T a un point fixe. Si $\mathcal{C}$ est réduit à un seul point le résultat est évident. Supposons donc que $\mathcal{C}$ n'est réduit à un seul point et donc le diamètre de $\mathcal{C}$ n'est pas nul ; soit k un nombre naturel non nul tel que $\frac{2}{k}$ soit inférieur à ce diamètre. Comme $\mathcal{C}$ est compact, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$, avec $n = n(k) \geq 2$, tel

1. Luitzen Egbertus Jan (1881–1966). Mathématicien et logicien hollandais. Travaux en topologie et géométrie différentielle. Fondateur de l'intuitionnisme.

que les boules ouvertes $B^i = B(x_i, 1/k)$, $i = 1, \ldots, n$ couvrent $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}$ l'enveloppe convexe[3] fermé de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et considérons l'application

$$\mathcal{C} \ni x \longmapsto J_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x, \mathcal{C} \setminus B^i) x_i}{\sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x, \mathcal{C} \setminus B^i)} \in \mathcal{C}_k.$$

Il est facile de voir que cette fonction est continue en tout point $x \in \mathcal{C}$ et si l'on remarque que $\operatorname{dist}(x, \mathcal{C} \setminus B^i) = 0$ pour $x \notin B^i$, l'on voit que

$$||J_k x - x||_X \leq \frac{\sum \operatorname{dist}(x, \mathcal{C} \setminus B^i) \|x_i - x\|}{\sum \operatorname{dist}(x, \mathcal{C} \setminus B^i)} < \frac{1}{k}, \ \forall x \in \mathcal{C}. \tag{4.1}$$

L'application $J_k \circ T$, restreinte à $\mathcal{C}_k$ est alors continue de $\mathcal{C}_k$ dans lui même et par suite, en vertu du théorème du point fixe de Brouwer, possède un point fixe x^k. En faisant varier k dans $\mathbb{N}^\star$, nous obtenons une suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}^\star}$. Comme $\mathcal{C}$ est compact, on peut en extraire une sous-suite, notée de la même manière, convergeant vers un élément $x \in \mathcal{C}$. Cet élément x est un point fixe de T. En effet, appliquant l'estimation (4.1) à Tx^k, on obtient :

$$\left|\left|x^k - Tx^k\right|\right|_X = \left|\left|J_k \circ Tx^k - Tx^k\right|\right|_X < \frac{1}{k},$$

de sorte que la continuité de T implique que $Tx = x$.
■

Corollaire 4.2.1 (Second théorème de Schauder) *Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé, non vide dans un espace normé X et soit T une application continue de $\mathcal{C}$ dans un compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ ($\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$). Alors T possède un point fixe.*

Pour prouver ce corollaire nous rappelons le

Théorème 4.2.2 (Mazur) *Soit A une partie relativement compacte[4] dans un espace de Banach X. Alors son enveloppe convexe $\operatorname{Co}(A)$ est aussi relativement compacte dans X et son enveloppe convexe fermée $\overline{\operatorname{Co}}(A)$ est compacte[5].*

Preuve du corollaire 4.2.1. Utiliser le théorème 4.2.1 en considérant T comme une application de $\overline{\operatorname{Co}}\ (\mathcal{K})$ (qui est compacte en vertu du théorème de Mazur précédent) dans lui même.

4.3 Théorème du point fixe de Leray-Schauder : Cas spécial

4.3.1 Rappels

Soit E un espace topologique. Une partie A de E est dite

— séquentiellement fermée si et seulement si (ssi) pour toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de A convergeant vers x on a $x \in A$.

— relativement séquentiellement compacte si chaque suite d'éléments de A contient une sous-suite convergente. Si les limites de chacune des sous-suites convergentes appatiennent à A on dit que A est séquentiellement compacte.

Si E est un espace métrique, alors A est

— fermée ssi elle est séquentiellement fermée.

— relativement compacte ssi elle est relativement séquentiellement compacte.

— compacte ssi elle séquentiellement compacte.

3. Rappelons que l'enveloppe convexe $\operatorname{Co}(A)$ d'une partie A de l'espace vectoriel réel X est l'ensemble des points de X qui s'écrivent $a = t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m$ (m fini) avec $a_i \in A$, $t_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

4. i.e. que son adhérence $\bar{A}$ est compacte, on dit aussi que précompacte.

5. L'enveloppe convexe fermée d'une partie A de X est définie comme étant le plus petit convexe fermé contenant A. On démontre que $\overline{\operatorname{Co}}(A) = \overline{\operatorname{Co}(A)}$.

Définition 4.3.1 On dit qu'un opérateur continu entre deux espaces de Banach X et Y qu'il est compact (ou complètement continu) si les images des parties bornées dans X sont relativement compactes (i.e. d'adhérences compactes) dans Y.

Exemple. Toute application $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{P}^N$ $(P \in \mathbb{N}^\star)$ continue est compacte.

Théorème 4.3.1 *Soit T un opérateur compact d'un espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :*

(4.2) *pour tout $x \in X$ et tout $\sigma \in [0,1]$ vérifiant $x = \sigma T x$, l'on a $||x||_X < M$.*

Alors T possède un point fixe.

Preuve. Considérons l'opérateur $T^\star$ défini par

$$T^\star(x) = \begin{cases} Tx & \text{si} \quad ||Tx||_X < M \\ \frac{M}{||Tx||_X} Tx & \text{si} \quad ||Tx||_X \geq M. \end{cases}$$

L'opérateur $T^\star$ est alors continu de la boule fermée $\overline{B}_M = \overline{B}(O, M)$ dans lui-même. Comme $T(\overline{B}_M)$ est précompact, $T^\star(\overline{B}_M)$ l'est aussi. Pour le voir, il suffit de montrer que $T^\star(\overline{B}_M)$ est séquentiellement précompacte. Pour ce faire, on prend une suite $\{y_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de $T^\star(\overline{B}_M)$ et donc $y_n = T^\star x_n$ avec $x_n \in \overline{B}_M$. Distinguons deux cas :

a) il existe une sous-suite $\{a_j\}$ de $\{x_n\}$ telle que $|Ta_j|_X < M$, $\forall j \geq 1$ et

b) il existe une sous-suite $\{b_j\}$ de $\{x_n\}$ telle que $|Tb_j|_X \geq M$, $\forall j \geq 1$.

Dans le premier cas, on a $T^\star a_j = Ta_j$ et la compacité de T permet d'extraire de $\{T^\star a_j\} = \{Ta_j\}$ une sous-suite convergente.

Dans le second cas, la compacité de T permet d'extraire de $\{Tb_n\}$ une sous-suite, notée de même, convergente vers un élément y et donc $\{\|Tb_j\|_X\}$ converge vers $\|y\|_X$ de sorte que $\{T^\star b_j\}$ converge vers $\frac{M}{\|y\|_X} y$.

Donc, en vertu du corollaire 4.2.1, l'opérateur $T^\star$ possède un point fixe x. Cet élément est aussi un point fixe de T. En effet, si l'on suppose que $||Tx||_X \geq M$, on a $x = T^\star x = \sigma T x$ avec $\sigma = M / ||Tx||_X$ et $||x||_X = ||T^\star x||_X = M$, ce qui contredit (4.2). Donc, $||Tx||_X < M$ et par suite $x = T^\star x = Tx$.
■

4.4 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Théorème 4.4.1 *Soient X un espace de Banach et T un opérateur compact de $X \times [0,1]$ dans X tel que*

$$T(x, 0) = 0, \ \forall x \in X.$$

Supposons qu'il existe une constante M telle que

$$\forall (x, \sigma) \in X \times [0,1] \ \Big(x = T(x, \sigma) \Rightarrow ||x||_X < M\Big). \tag{4.3}$$

Alors, l'opérateur T_1 de X dans lui-même donné par

$$T_1(x) = T(x, 1), \ x \in X$$

possède un point fixe.

Ce théorème peut-être obtenu à partir de la conséquence suivante du corollaire 4.2.1.

Lemme 4.4.1 *Soit $B_M = B(O, M)$ la boule ouverte de centre O et de rayon $M > 0$ dans l'espace de Banach X. Soit T une application continue de $\overline{B}_M$ dans X telle que $T(\overline{B}_M)$ soit précompacte et $T(\partial B_M) \subset B_M$. Alors, T a un point fixe.*

Preuve. Soit $T^\star$ opérateur défini par

$$T^\star(x) = \begin{cases} Tx & \text{si} \quad \|Tx\|_X < M \\ \frac{M}{\|Tx\|_X} Tx & \text{si} \quad \|Tx\|_X \geq M. \end{cases}$$

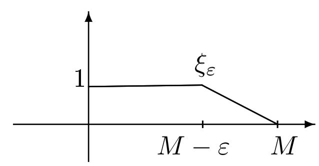
L'opérateur $T^\star$ est alors continu de $\overline{B}_M$ dans lui-même. Comme $T(\overline{B}_M)$ est précompacte, $T^\star(\overline{B}_M)$ l'est aussi. En vertu du corollaire 4.2.1, l'opérateur $T^\star$ possède un point fixe x et comme $T(\partial B) \subset B$, on doit avoir $\|Tx\|_X < M$ et par suite $x = Tx$.

Preuve du théorème 4.4.1. Pour $\varepsilon \in]0, M[$, considérons l'application $T^\star$ de $\overline{B}_M$ dans X définie par

$$T^\star_\varepsilon(x) = T(x, \xi_\varepsilon(\|x\|_X)), \quad x \in \overline{B}_M,$$

où ξ_ε est la fonction réelle donnée par

$$\xi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < M - \varepsilon, \\ \dfrac{M-t}{\varepsilon}, & M - \varepsilon \leq t \leq M. \end{cases}$$



On peut vérifier que $|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)| \leq \varepsilon^{-1}|t-s|$, $\forall s, t \in [0, M]$. Comme $T^\star_\varepsilon$ s'écrit $T^\star_\varepsilon = T \circ R_\varepsilon$ avec R_ε l'application de $\overline{B}_M$ dans $X \times [0,1]$ donnée par $R_\varepsilon(x) = (x, \xi_\varepsilon(\|x\|_X)$, l'opérateur $T^\star_\varepsilon$ est continu, comme composé de fonctions continues. Montrons que $T^\star_\varepsilon(\overline{B}_M)$ est séquentiellement précompacte. Soit $\{z_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $T^\star_\varepsilon(\overline{B}_M)$. Donc

$$z_n = T^\star_\varepsilon(x_n) = T(x_n, \xi_\varepsilon(\|x_n\|_X)), \quad x_n \in \overline{B}_M.$$

Comme la suite $\{(x_n, \xi_\varepsilon(\|x_n\|_X))\}_{n\geq 1}$ est bornée et $T : X \times [0,1] \to X$ est compact, on peut extraire de $\{z_n\}_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente $\{z_{n'}\}_{n'\geq 1}$. Comme $z_{n'} = T^\star_\varepsilon(x_{n'})$, cela montre que $T^\star_\varepsilon(\overline{B}_M)$ est séquentiellement précompacte donc précompacte. Comme $T^\star_\varepsilon(\partial B_M) = \{0\} \subset B_M$, grâce à l'hypothèse que $T(x,0) = 0$, $\forall x \in X$. D'après le lemme 4.4.1, $T^\star_\varepsilon$ possède un point fixe au moins $x(\varepsilon) : T^\star_\varepsilon(x(\varepsilon)) = x(\varepsilon) \in \overline{B}_M$. Prenons successivement $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = k_0$, $k_0 + 1$, $\ldots$, avec k_0 suffisamment grand pour avoir $\frac{1}{k_0} < M$. On obtient une suite $\{x_k\} \doteq \{x(\frac{1}{k})\}_{k\geq k_0}$ telle que

$$T^\star_{1/k} x_k = T(x_k, \sigma_k) = x_k, \quad k \geq k_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_k = \xi_{1/k}(\|x_k\|_X).$$

Comme la suite $\{(x_k, \sigma_k)\}_{k\geq k_0}$ est bornée dans $X \times [0,1]$, la compacité de T garantit l'existence d'une sous-suite $\{x_{k'}\}$ convergente dans X vers un élément $x \in \overline{B}_M$. Et comme la suite des réels $\{\sigma_{k'})\}_{k'\geq 1}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $\{\sigma_{k''})\}_{k''\geq 1}$ convergente dans $\mathbb{R}$ vers un élément $\sigma \in [0,1]$. La suite $\{(x_{k''}, \sigma_{k''})\}_{k''\geq 1}$ converge dans $X \times [0,1]$ vers (x, σ). Si $\sigma < 1$, on aura

$$M - \frac{1}{k''} \leq \|x_{k''}\|_X, \ \forall k'' \geq k''_0$$

de sorte que $\|x\|_X = \lim\limits_{k''\to\infty} \|x_{k''}\|_X = M$ et la continuité de T montre alors que

$$\lim_{k''\to\infty} T(x_{k''}, \sigma_{k''}) = T(x, \sigma),$$

donc $x = T(x, \sigma)$ avec $\|x\|_X = M$. Cela contredit l'hypothèse (4.3). Donc $\sigma = 1$ et $T(x, 1) = x$. Ce qui prouve que $T_1 : X \to X$ possède un point fixe.
■

4.5 Applications

4.5.1 Résolution d'un problème de Dirichlet semi-linéaire

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$(\star) \qquad g(s)s \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |g(s)| \leq C_0 + C_1|s|, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

avec C_0 et C_1 deux constantes positives. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. Résoudre le problème :

Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solution faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + g(u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Pour montrer que ce problème possède une solution, on considère, pour $X = L^2(\Omega)$, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} T : X \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ (v, \sigma) & \longmapsto & u = T(v, \sigma) \end{array}$$

où u est l'unique solution du problème aux limites linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \sigma[f - g(v)] \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

L'existence et l'uncité d'une solution du problème (4.5) précédent dans $H^1(\Omega)$ résulte du lemme de Lax-Milgram 3.4.1. Pour le voir, nous considérons l'espace de Sobolev $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme du gradient $|v|_V = \left[\int_\Omega |\nabla v|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Et sur V nous prenons la forme bilinéaire a définie par

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \quad u, \varphi \in V,$$

qui est continue et coercitive (car $a(u,u) = |u|^2$), et la forme linéaire continue F donnée par $F(\varphi) = \sigma \int_\Omega [f - g(v)]\varphi$, $\varphi \in V$. La continuité de F résulte de ce qu'on a, grâce à $(\star)$ et à l'inégalité de Poincaré :

$$|F(\varphi)| \leq \sigma\{|f|_{L^2(\Omega)} + C_0|\Omega|^{1/2} + C_1|v|_{L^2(\Omega)}\}C_\Omega|\varphi|_V, \ \forall \varphi \in V$$

où $|\Omega|$ dénote la mesure de Lebesgue de Ω et C_Ω est une constante provenant de l'application de l'inégalité de Poincaré.

Il est clair que $T(v, 0) = 0$ pour tout $v \in X$, car l'unique solution faible du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

est $u = 0 \in L^2(\Omega)$.

Estimation de la solution. Comme la solution du problème (4.5) vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \sigma \int_\Omega [f - g(v)]\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

en prenant $\varphi = u$, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \sigma \int_\Omega [f - g(v)]u \leq ||f - g(v)||_{L^2(\Omega)} \, ||u||_{L^2(\Omega)} \, .$$

D'où, en utilisant $(\star)$ et l'inégalité de Poincaré (voir proposition 3.1.1) :

$$\begin{array}{rcl} ||u||_{H_0^1(\Omega)} & \leq & C_\Omega \, ||f||_{L^2(\Omega)} + C_\Omega C_1 \, ||v||_{L^2(\Omega)} + C_\Omega C_0 |\Omega|^{1/2} \\ & \leq & C\Big\{||f||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} + 1\Big\}, \end{array} \tag{4.6}$$

où C est une constante, en particulier indépendante de v.

Continuité de T. Soit $\{(v_n, \sigma_n)\}$ une suite de $L^2(\Omega) \times [0,1]$ convergeant vers (v, σ) dans cet espace. Donc,

$$v_n \to v \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort et} \quad \sigma_n \to \sigma \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}.$$

Il vient, grâce à l'inégalité (4.6) :

$$||u_n||_{H_0^1(\Omega)} = ||T(v_n, \sigma_n)||_{H_0^1(\Omega)} \leq C\Big\{||f||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} + 1\Big\} \leq R,\ \forall n \geq 1,$$

avec R une constante indépendante de n, puisque $\{v_n\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. On peut alors, grâce à la réflexité de $H_0^1(\Omega)$ et à la compacité de son injection dans $L^2(\Omega)$ (voir [6], par exemple), extraire une sous-suite $\{u_m\}$ telle que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{faiblement et} \quad u_m \to u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fortement.}$$

En passant à la limite dans l'identité intégrale :

$$\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla \varphi = \sigma_m \int_\Omega [f - g(v_m)]\varphi,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \sigma \int_\Omega [f - g(v)]\varphi,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Nous avons utilisé le fait que l'opérateur de Němytskiǐ $\mathcal{G}$ déterminé par $g : \mathcal{H}(u)(x) = g(u(x))$, est continu de $L^2(\Omega)$ dans lui-même, voir le Théorème 3.1.2.

L'unicité de la solution faible du problème (4.5) montre alors que $T(v, \sigma) = u$.

Prenons alors une sous-suite de $\{u_n\}$, disons $\{u_{n_1}\}$; donc $u_{n_1} = T(v_{n_1}, \sigma_{n_1})$. Avec la suite $\{(v_{n_1}, \sigma_{n_1})\}$, on peut refaire tout le travail fait avec la suite $\{(v_n, \sigma_n)\}$ pour aboutir à une sous-suite $\{(v_{m_1}, \sigma_{m_1})\}$ telle que

$$u_{m_1} \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort.}$$

Donc, c'est toute la suite $\{u_n\}$ qui converge :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort,} \quad n \to \infty.$$

Ce qui montre la continuité de T.

Compacité de T. Soit $\widetilde{B}$ un borné de $L^2(\Omega) \times [0,1]$. Donc $\widetilde{B}$ est contenu dans un produit du type $B \times [0,1]$ avec B un borné de $L^2(\Omega)$, qu'on peut supposer être une boule de centre O et de rayon $r > 0$. Pour $u \in T(\widetilde{B})$, on a, grâce à (4.6) :

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq C\Big\{||f||_{L^2(\Omega)} + r + 1\Big\} \equiv \rho$$

pour $u = T(v, \sigma)$ avec $(v, \sigma) \in B \times [0,1]$. Ce qui prouve que T applique $\widetilde{B}$ dans la boule fermée de centre O et de rayon ρ dans $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Soit alors $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $T(\widetilde{B})$, donc $u_n = T(v_n, \sigma_n)$ avec $(v_n, \sigma_n) \in \widetilde{B}$. Comme $\{u_n\}$ demeure dans un borné de $H_0^1(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement vers un élément u de $L^2(\Omega)$. Cela prouve que

$$\overline{T(\widetilde{B})}^{L^2(\Omega)} \qquad \text{est compact.}$$

Donc T est compact.

Estimation des éléments de $L^2(\Omega)$ tels que $v = T(v, \sigma)$. On a

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi = \sigma \int_\Omega [f - g(v)]\varphi,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

d'où, en prenant $\varphi = v$:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = \sigma \int_\Omega fv - \sigma \int_\Omega g(v).v \leq \sigma \int_\Omega fv,$$

puisque l'on a supposé que $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. D'où

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = ||f||_{L^2(\Omega)} \, ||v||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \, ||f||_{L^2(\Omega)} \left[\int_\Omega |\nabla v|^2 \right]^{1/2}$$

c'est à dire

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \, ||v||_{H^1_0(\Omega)} \leq C^2_\Omega \, ||f||_{L^2(\Omega)} < C^2_\Omega \, ||f||_{L^2(\Omega)} + 1 = M.$$

Il résulte alors du théorème de Leray-Schauder que l'opérateur $T_1 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, défini par $T_1(u) = T(u,1)$ possède un point fixe, ce qui montre l'existence d'une solution du problème

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega g(u)\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Remarque 4.5.1 On peut prendre dans le problème précédent f dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$, le dual de $H^1_0(\Omega)$. Il suffit d'"identifier" $g(v)$, qui est dans $L^2(\Omega)$, avec l'élément G_v de $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle G_v, \varphi \rangle = \int_\Omega g(v)\varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Remarque 4.5.2 Comme le théorème de Leray-Schauder ne dit rien sur l'unicité du point fixe, l'utilisation de ce théorème pour prouver l'existence de solutions d'un problème aux limites est à compléter par une étude séparée de la question d'unicité. Cette étude est souvent difficile.

Dans le problème (4.4), pour avoir l'unicité il suffit de supposer que la fonction g est croissante. En effet, si u_1 et u_2 sont deux solutions faibles du problème (4.4), on a, par soustraction

$$\begin{cases} u_1 - u_2 \in H^1_0(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega (g(u_1) - g(u_2))\varphi = 0, \ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

de sorte qu'en prenant $\varphi = u_1 - u_2$ comme fonction test, l'on a :

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) + \int_\Omega (g(u_1) - g(u_2))(u_1 - u_2) = 0,$$

ce qui conduit, puisque le terme contenant g est positif, à $\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx = 0$, et donc $u_1 = u_2$, puisque $u_1 - u_2$ est dans $H^1_0(\Omega)$.

Chapitre 5

Résolution par la méthode variationnelle

5.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre deux comment utiliser le théorème de point fixe de Banach pour trouver la solution classique d'un problème aux limites à une dimension et dans le chapitre quatre comment utiliser les théorèmes du point fixe de Schauder et de Leray-Schauder pour montrer l'existence de solution faible de certains problèmes aux limites. Nous présentons ici une autre méthode pour prouver l'existence de solution faible pour les problèmes aux limites ; il s'agit de la méthode variationnelle qui ramème le problème de l'existence d'une solution faible au problème de recherche d'extréma d'une fonctionnelle.

La méthode que voulons présenter est très naturelle et pour la motiver commençons par le commencement.

5.1.1 Cas scalaire : équation dans $\mathbb{R}$

Soit donc $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intéressons nous au problème d'existence d'une solution réelle de l'équation

$$g(x) = y \quad \text{avec} \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{donné.} \tag{5.1}$$

Considérons la fonction G définie par

$$G(x) = \int_a^x [g(s) - y]\, ds, \; x \in \mathbb{R} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ fixé.} \tag{5.2}$$

Si G possède un point critique r, on a :

$$0 = G'(r) = g(r) - y,$$

c'est à dire que r est racine de l'équation (5.1). Donc, chercher les racines de l'équation (5.1) revient à chercher les points critiques de la fonction primitive (5.2).

5.1.2 Cas vectoriel : équation dans $\mathbb{R}^N$

L'idée d'utiliser une fonctionnnelle peut être aussi appliquée pour résoudre des équations vectorielles. Présentons la sur un exemple simple. Regardons comment utiliser une fonctionnelle pour prouver l'existence de solution pour un système d'équations linéaires.

Soit A une matrice $N \times N$ symétrique et définie positive et soit $b \in \mathbb{R}^N$. Il s'agit de montrer que le système linéaire $Au = b$ possède une solution.

Posons

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x), \; x \in \mathbb{R}^N.$$

La barre verticale est mise pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$. On peut facilement voir que minimiser J sur $\mathbb{R}^N$ équivaut à résoudre le système linéaire

$$Au = b \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

En effet, si J a un minimum au point u, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(t) = J(u + th) = J(u) + t(Au|h) - t(b|h) + \frac{1}{2}t^2(Ah|h)$$

admet un minimum au point $t = 0$ de sorte que

$$0 = \varphi'(0) = (Au - b|h), \ \forall h \in \mathbb{R}^N$$

et donc

$$Au = b.$$

Réciproquement, si en un point $u \in \mathbb{R}^N$, on a $Au = b$, il vient

$$J(u + h) - J(u) = \frac{1}{2}(Ah|h) \geq 0, \ \forall \in h \in \mathbb{R}^N$$

de sorte que J possède un minimum au point u.

Montrons maintenant que J possède au moins un minimum dans $\mathbb{R}^N$. Comme la matrice A est définie positive, la fonction ψ donnée par

$$\psi(x) = (Ax|x), \ x \in \mathbb{R}^N$$

est telle que

$$\psi(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \ x \neq 0$$

et comme elle est continue sur $\mathbb{R}^N$, son minimum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^N$ est strictement positif : $\alpha = \min\limits_S \psi(x) > 0$. Cela implique que

$$(Ax|x) \geq \alpha|x|^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad (|\cdot| = \text{norme euclidienne}).$$

Nous pouvons donc écrire

$$J(x) \geq \frac{1}{2}\alpha|x|^2 - |b||x| = \Big(\frac{1}{2}\alpha|x| - |b|\Big)|x|$$

et donc

$$\lim_{|x| \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

Cela implique que J est minoré sur $\mathbb{R}^N$. En effet, il existe $\rho > 0$ telle que

$$J(x) \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{avec} \quad |x| > \rho$$

et comme la fonction continue J est minorée sur le compact $\overline{B}(O, \rho)$, elle est minorée sur tout $\mathbb{R}^N$. Soit alors $m = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} J$ et considérons une suite minimisante $\{x_n\}$, i.e. une suite telle que

$$x_n \in \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad J(x_n) \to m.$$

Cette suite est nécessairement bornée ; cela résulte du comportement de J à l'infini. Le théorème de Bolzano-Weierstrass implique alors que l'on peut extraire de $\{x_n\}$ une sous-suite $\{x_k\}$ convergente vers un vecteur $u \in \mathbb{R}^N$. La continuité de la fonction J implique alors que

$$J(u) = m = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} J(x).$$

Comme nous l'avons dit plus haut u est solution du système $Au = b$ et la preuve de l'existence d'une solution de ce système est ramenée à la preuve de l'existence d'un minimun de J.

5.1.3 Cas vectoriel : équation dans espace de Banach de dimension infinie

Notre but est d'étendre cette méthode d'utilisation d'une fonctionnelle à des espaces de dimension infinie.

Soient donc X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur de X dans Y. Pour $f \in Y$, considérons l'équation

$$Au = f \tag{5.3}$$

où u est l'inconnue à chercher dans X.

Posons nous la question suivante : Peut-on trouver des conditions suffisantes simples sur A garantissant l'existence de solution pour l'équation (5.3) ? Ici le problème est beaucoup plus difficile même pour A linéaire. Penser aux problèmes à deux points pour les équations différentielles ordinaires.

Pour tenter de répondre à cette question, essayons d'utiliser une fonctionnelle dans le cas où $Y = X'$, le dual topologique de X. Supposons donc qu'il existe une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ possédant un **gradient** (voir définition 5.2.2) ∇J en tout point de X tel que

$$\nabla J(u) = Au - f, \;\forall u \in X.$$

Dans ce cas chercher les solutions de (5.3) revient à chercher les points critiques de J.

Peut on trouver des conditions suffisantes simples garantissant l'existence de point critique ? Dans le cas fini-dimensionnel, nous avons vu qu'il suffit que la fonctionnelle soit continue et qu'elle tende vers $+\infty$ quand la norme de la variable tend vers $+\infty$ pour être assuré de l'existence d'au moins un minimum. Ces conditions sont elles suffisantes pour garantir l'existence de minimum dans le cas infini-dimensionnel ?

Supposons donc que J soit continue et que

$$\lim_{|u|\to+\infty} J(u) = +\infty. \tag{5.4}$$

Essayons d'adapter la preuve donnée en dimension finie. Soit $m = \inf_X J$.

Première question : m est-t-il fini ? Non en général, ou plutôt nous n'avons aucun moyen pour le prouver. La méthode utilisée en dimension finie profite essentiellement de la compacité des boules bornées. Ici, en dimension infinie, les boules fermées bornées ne sont jamais compactes pour la topologie associée à la norme, d'après un théorème bien connu de Riesz.

Nous pouvons toutefois affirmer que $m < +\infty$. Considérons une suite minimisante

$$\{u_n\} \subset X \quad \text{et} \quad J(u_n) \to m \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{5.5}$$

Cette suite $\{u_n\}$ reste bornée dans X ; dans le cas contraire, $\{J(u_n)\}$ tendrait vers $+\infty$, ce qui contredirait (5.4). Cela ne nous avancera pas beaucoup, puisque les boules fermées bornées ne sont pas relativement compactes. On ne peut pas extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite convergente qui nous permettrait, comme en dimension finie, de prouver l'existence d'un minimum.

Il y a-t-il moyen de surmonter cette difficulté ? Nous souhaitons avoir plus de compacité. Pour cela nous devons changer de topologie ; remplacer la topologie définie par la norme de X par une topologie ayant moins d'ouverts pour espérer avoir plus de compacité. Pour sentir qu'il faut prendre une topologie avec moins d'ouverts pour espérer avoir plus de compacité, penser à la topologie grossière sur X, i.e. la topologie dont les seuls ouverts sont $\emptyset$ et X. Pour cette topologie toute partie E de X est compacte. Par contre, pour la topologie discrète de X, i.e. la topologie dont les ouverts sont toutes les parties de X, les parties infinies ne sont jamais compactes.

La topologie qu'on prend habituellement est la **topologie faible**, i.e. la topologie la moins fine (avec le minimum d'ouverts) rendant continue toutes les applications $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$, $f \in X'$ définies par

$$\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle.$$

Cette topologie est (par bonheur) séparée.

Lorsque sur X on considère ces deux topologies, celle définie par la norme est dite topologie forte.

Noter qu'en appauvrissant la topologie, on a moins de fonctions continues.

Tout ensemble fermé pour la topologie faible est fermé pour la topologie forte. La réciproque est fausse en dimension infinie. On montre que si $\dim X = +\infty$, l'adhérence de $S = \{x \in X \mid |x|_X = 1\}$ est la boule unité fermée $B_F(O,1)$. Toutefois on a le résultat :

Théorème 5.1.1 *Soit $\mathcal{C}$ un convexe de X. Alors, $\mathcal{C}$ est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Qu'a-t-on gagné, du point de vue de la compacité, en introduisant la topologie faible ? En particulier, est ce que les fermés bornés de X sont faiblement compacts ? Disons tout de suite que dans les espaces de Hilbert, les fermés bornés sont **séquentiellement faiblement compacts**. Ce qui signifie que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Pour les espaces de Banach, la question est plus délicate. Le résultat n'est pas vrai pour tous les espaces de Banach ; il l'est seulement pour les espaces **réflexifs**.

Notons que les espaces de fonctions continues ou dérivables sur un compact de $\mathbb{R}^N$ ne sont pas réflexifs. Cela n'est pas fait pour arranger les choses. Noter aussi que l'espace de Lebesgue $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif lui aussi.

On a le résultat suivant :

Théorème 5.1.2 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans X. Alors, il existe une sous-suite extraite $\{x_{n_k}\}$ faiblement convergente dans X.*

Revenons à notre problème d'existence de minimum. Supposons que X est réflexif et considérons la suite minimisante vue dans (5.5). Cette suite est bornée ; on peut donc en extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ faiblement convergente vers un élément $u \in X$:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \ k \to \infty.$$

Considérons maintenant la suite des réels $\{J(u_{n_k})\}$. Peut-on affirmer qu'elle converge ? et si oui convergerait-elle vers $J(u)$? Cela aurait était le cas si $\{u_{n_k}\}$ tendait fortement vers u. Mais tel n'est pas le cas. Nous sentons que nous devons introduire une (ou d') autre(s) notion(s) de continuité. Le fait qu'on a maintenant deux types de topologies distinctes sur un même espace de Banach nous conduit à différents types de continuités :

Définition 5.1.1 Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : X \to Y$ un opérateur. Soit $x_\infty \in X$. On dit que A est

- fortement continu au point x_∞ si

$$x_n \to x_\infty \text{ fortement dans } X \text{ implique } Ax_n \to Ax_\infty \text{ fortement dans } Y.$$

- faiblement continu au point x_∞ si

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \text{ faiblement dans } X \text{ implique } Ax_n \rightharpoonup Ax_\infty \text{ faiblement dans } Y.$$

- fortement (respectivement faiblement) continu sur X s'il est fortement (respectivement faiblement) continu en tout point de X.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le

Théorème 5.1.3 *Soit X un espace de Banach réflexif est soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle faiblement continue sur X. Supposons que*

$$\lim_{|u|_X \to \infty} J(u) = +\infty.$$

Alors, J possède un minimum au moins sur X.

Preuve. L'hypothèse que J est faiblement continue permet de terminer la preuve commencée ci-dessus.

Pour terminer cette section nous donnons un raffinement du théorème précédent.

Théorème 5.1.4 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i) sur X. Supposons que*

$$\lim_{|u|_X \to \infty} J(u) = +\infty.$$

Alors, J possède un minimum (absolu) au moins sur X, i.e. il existe $u \in X$ tel que $J(u) = \min_{v \in X} J(v)$.

La notion de s.c.i. faible est définie comme suit :

Définition 5.1.2 Soient X un espace de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle et $x_\infty \in X$. On dit que J est faiblement semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point x_∞ si

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \quad \text{faiblement dans } X \text{ implique } \liminf_{n\to\infty} J(x_n) \geq J(x_\infty).$$

Si J est faiblement s.c.i. en tout point de X, on dit qu'il est faiblement s.c.i. sur X.

Si la convergence faible dans X est remplacée par la convergence forte, on dit que J est fortement s.c.i. en un point ou sur X, selon le cas.

Exercise 5.1.1 Étudier la continuité (forte) et la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle

$$F : L^2(0,1) \ni u \longmapsto F(u) = 1 - \int_0^1 u^2(x)\, dx \ni \mathbb{R}.$$

Le théorème 5.1.4 précédent peut-être donnée sur une partie de X.

Théorème 5.1.5 *Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide faiblement fermée d'un espace de Banach réflexif X et soit $J : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle faiblement s.c.i. sur $\mathcal{B}$. Supposons que*

$$\lim_{\substack{|u|_X \to \infty \\ u \in \mathcal{B}}} J(u) = +\infty.$$

Alors, il existe $u \in \mathcal{B}$ tel que $J(u) = \min_{v \in \mathcal{B}} J(v)$.

Encore un raffinement : Comme il est plus difficile de vérifier la s.c.i. faible que la s.c.i. forte, on aimerait savoir quand la s.c.i. forte implique la s.c.i. faible.

Proposition 5.1.1 *Soit $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle* **convexe** *s.c.i. pour la topologie forte. Alors, J est s.c.i. pour la topologie faible. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x_\infty$ faiblement, alors*

$$J(x_\infty) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

Rappelons la définition de la convexité.

Définition 5.1.3 Soient E un espace vectoriel réel. Une fonctionnelle $J : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite **convexe** sur E si

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y),\ \forall x, y \in E,\ \forall t \in]0,1[.$$

Exercise 5.1.2 Soient E un espace vectoriel réel et $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On suppose que $a(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E$. Montrer que la fonctionnelle F définie sur E par $F(x) = a(x,x)$ est convexe.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.1.6 *Soit X un espace de Banach réflexif est soit $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle convexe fortement s.c.i. sur X. Supposons que*

$$\lim_{|u|_X \to \infty} J(u) = +\infty.$$

Alors, J possède un minimum (absolu) au moins sur X.

Terminons cette section par un résultat utile pour les applications :

Proposition 5.1.2 *Soit $\mathcal{B}$ une partie convexe non vide fortement fermée dans un espace de Banach réflexif X et soit $J : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe fortement s.c.i. sur $\mathcal{B}$. Supposons J coercitif dans le sens que*

$$J(v) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad ||v||_V \to \infty,\ v \in \mathcal{B},$$

alors

$$\exists u \in \mathcal{B} \quad \textit{tel que} \quad J(u) = \min_{v \in \mathcal{B}} J(v).$$

Pour pouvoir appliquer la méthode variationnelle (utilisation d'une fonctionnelle) pour montrer l'existence de solution faible de problème aux limites, nous avons besoin de quelques éléments de calcul différentiel dans les espaces de Banach.

5.2 Différentiablité dans les espaces de Banach

5.2.1 Différentiabilité au sens de Gateaux

Définition 5.2.1 Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : X \to Y$ un opérateur (non linéaire).

1. Si, pour $u \in X$, $\varphi \in X$, le quotient

$$\frac{A(u + t\varphi) - A(u)}{t} \in Y$$

a une limite finie lorsque $t \to 0$, on la note $A'(u, \varphi)$ et on l'appelle la G-différentielle de A au point u dans la direction φ (ou différentielle au sens de Gateaux).

2. Si $A'(u, \varphi)$ existe pour tout φ, on dit que A est G–différentiable au point u.

3. Si $A'(u, \varphi)$ existe pour tout $\varphi \in X$ et si l'opérateur $\varphi \longmapsto A'(u, \varphi)$ est linéaire continu, on l'appelle la G–dérivée de A au point u.

On note la G–dérivée au point u par $A'(u)$. Donc $A'(u) \cdot \varphi = A'(u, \varphi)$ avec $A'(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$, l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Exercise 5.2.1 Soient X et Y deux espaces de Banach, $A : X \to Y$ un opérateur et $u \in X$. Montrer que si A possède une G-dérivée $A'(u)$ au point u, $A'(u)$ est l'unique application linéaire continue de X dans Y qui vérifie

$$\lim_{t \to 0} \left|\left| \frac{1}{t}[A(u + t\varphi) - A(u)] - A'(u) \cdot \varphi \right|\right|_X = 0,\ \forall \varphi \in X.$$

Exemple 5.2.1 On prend $X = L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $Y = \mathbb{R}$. Soit $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant, ainsi que sa dérivée, les conditions de croissance :

$$|g(t)| \leq C|t|^p \quad \text{et} \quad |g'(t)| \leq C|t|^{p-1},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

où C est une constante positive. On pose

$$J(u) = \int_\Omega g(u(x))\, dx,\ \forall u \in L^p(\Omega).$$

Alors, J possède une G–dérivée en tout point $u \in L^p(\Omega)$ et l'on a :

$$J'(u) \cdot \varphi = J'(u, \varphi) = \int_\Omega g'(u(x))\varphi(x)\, dx,\ \forall u, \varphi \in L^p(\Omega).$$

Preuve. La condition de croissance vérifiée par g assure que $J(u)$ a un sens pour tout $u \in L^p(\Omega)$.

Soient u et φ deux éléments de $L^p(\Omega)$. Pour $t \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$J(u + t\varphi) - J(u) = \int_\Omega \Big\{ g\Big(u(x) + t\varphi(x)\Big) - g\Big(u(x)\Big) \Big\}\, dx.$$

Mais, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$g\Big(u(x) + t\varphi(x)\Big) - g\Big(u(x)\Big) = t\varphi(x)g'\Big(u(x) + t\theta(x,t)\varphi(x)\Big)$$

avec $0 < \theta(x,t) < 1$, de sorte que

$$\frac{1}{t}\{J(u + t\varphi) - J(u)\} = \int_\Omega g'\Big(u(x) + t\theta(x,t)\varphi(x)\Big)\varphi(x)\,dx.$$

Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$g'\Big(u(x) + t\theta(x,t)\varphi(x)\Big)\varphi(x) \longrightarrow g'\Big(u(x)\Big)\varphi(x) \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow 0$$

car g' est continu et comme, pour $|t| \leq 1$, on a, pour $p > 1$:

$$\begin{aligned}
|g'\Big(u(x) + t\theta(x,t)\varphi(x)\Big)\varphi(x)| &\leq C|u(x) + t\theta(x,t)\varphi(x)|^{p-1}|\varphi(x)| \\
&\leq C\max\{1, 2^{p-2}\}\{|u(x)|^{p-1} \\
&\qquad + |t|^{p-1}\theta^{p-1}(x,t)|\varphi(x)|^{p-1}\}|\varphi(x)| \\
&\leq C|u(x)|^{p-1}|\varphi(x)| + C|\varphi(x)|^p \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Tandis que pour $p = 1$, on a $|g'(u + t\theta\varphi| \leq C|\varphi| \in L^1(\Omega)$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$J'(u,\varphi) = \lim_{t \not\to 0} \frac{1}{t}\{J(u + t\varphi) - J(u)\} = \int_\Omega g'(u(x))\varphi(x)\,dx.$$

Il est clair que l'application $\varphi \mapsto J'(u,\varphi)$ est linéaire ; elle est continue, puisque

$$|J'(u,\varphi)| \leq C\Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{1/p'}\Big(\int_\Omega |\varphi|^p\Big)^{1/p}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Cas particuliers :

a) Pour $g(t) = \frac{1}{p}|t|^p$ $(p > 1)$, on a $g'(t) = |t|^{p-2}t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et donc

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \quad \text{donne} \quad J'(u,\varphi) = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi, \ \forall u, \varphi \in L^p(\Omega).$$

b) Pour $g(t) = \frac{1}{p}|t|^{p-1}t$ $(p > 1)$, on a $g'(t) = |t|^{p-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^{p-1}u$$

donne

$$J'(u,\varphi) = \int_\Omega |u|^{p-1}\varphi.$$

Exemple 5.2.2 On prend $X = W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $Y = \mathbb{R}$. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de l'une de ses normes équivalente, prenons par exemple

$$|u|_{W^{1,p}(\Omega)} = |u||_{L^p(\Omega)} + \Big||\nabla u|\Big|_{L^p(\Omega)}.$$

Soit $h : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant ainsi que son gradient les conditions de croissance :

(5.6) $$|h(x)| \le C|x|^p, \quad |x| = \text{ norme euclidienne de } \ x,\ C = \text{constante}.$$
$$|\nabla h(x)| \le C|x|^{p-1},\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \nabla = \text{ gradient}.$$

On pose
$$J(u) = \int_\Omega h(\nabla u(x))\, dx,\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Alors, J possède une G–dérivé en tout point $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et l'on a :
$$J'(u)\dot{\varphi} = J'(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla h(\nabla u(x)) \cdot \nabla\varphi,\ \forall u,\varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Preuve. Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $J(u)$ a un sens ; puisque
$$|J(u)| \le \int_\Omega |h(\nabla u)| \le C\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx < +\infty.$$

Soient u et φ deux éléments de $W^{1,p}(\Omega)$. On a :
$$\begin{aligned} J(u+t\varphi) - J(u) &= \int_\Omega \{h(\nabla u + t\nabla\varphi) - h(\nabla u)\}\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla h(\nabla u + t\theta\nabla\varphi)\cdot t\nabla\varphi\, dx, \quad \theta = \theta(x,t) \in]0,1[. \end{aligned}$$

Ceci a été obtenu en utilisant la formule des accroissements finis :
$$h(x+y) - h(x) = \nabla h(x+\theta y)\cdot y, \quad \nabla = \quad \text{gradient}.$$

Donc
$$\frac{1}{t}\{J(u+t\varphi) - J(u)\} = \int_\Omega \nabla h(\nabla u + t\theta\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi\, dx.$$

On a
$$\nabla h\Big(\nabla u(x) + t\theta(x,t)\nabla\varphi(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \nabla h\Big(\nabla u(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,$$

et comme, pour $|t| \le 1$, on a
$$\begin{aligned} &|\nabla h\Big(\nabla u(x) + t\theta(x,t)\nabla\varphi(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x)| \\ &\qquad \le C|\nabla u(x) + t\theta(x,t)\nabla\varphi(x)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)| \\ &\qquad \le C(p)\Big\{|\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)| + |\nabla\varphi(x)|^p\Big\} \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que :
$$\begin{aligned} J'(u,\varphi) &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+t\varphi) - J(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \nabla h(\nabla u + t\theta\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla h(\nabla u(x))\cdot\nabla\varphi\, dx,\ \forall u,\varphi \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

La linéarité et la continuité de l'application $\varphi \longmapsto J'(u,\varphi)$ sont évidentes.

Cas particuliers :

a) Pour $h(x) = \frac{1}{p}|x|^p,\ x \in \mathbb{R}^N,\ p > 1$, on a $\nabla h(x) = |x|^{p-2}x$. En effet ; pour $x \ne 0$, on peut écrire
$$\nabla h(x) = \frac{1}{p}(\partial_1|x|^p, \ldots, \partial_N|x|^p) = |x|^{p-1}\Big(\frac{x_1}{|x|}, \cdots, \frac{x_N}{|x|}\Big) = |x|^{p-2}x.$$

Pour $x = 0$, on a

$$\nabla h(0) = (\partial_1 h(0), \dots, \partial_N h(0)) = 0,$$

puisque, par exemple,

$$\partial_1 h(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}|(t, 0, \dots, 0)|^p = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^p}{t} = 0.$$

D'où, pour $J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p$, on a

$$J'(u, \varphi) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi,\ \forall u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega).$$

b) Prenons $X = H^1(\Omega)$ (i.e. $p = 2$). Pour $h(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^N$, qui est de classe C^1, on a $\nabla h(x) = x/\sqrt{1 + |x|^2}$ de sorte qu'on a ici :

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq 1 + |x| \leq 2 + 2|x|^2 \\ |\nabla h(x)| &\leq 1 + |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Si Ω est borné

$$J(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx,\ u \in H^1(\Omega)$$

représente l'aire de la surface définie par la fonction u au dessus de Ω. On a, ici :

$$J'(u, \varphi) = \int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla\varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\, dx,\ \forall u, \varphi \in H^1(\Omega).$$

Remarque 5.2.1 La fonction h du cas particulier (b) ci-dessus ne vérifie pas la condition de croissance (5.6). Toutefois, on peut facilement voir que, pour Ω borné, tous les calcul de l'exemple 5.2.2 reste valable si (5.6) est remplacée par

$$|h(x)| \leq C + C|x|^p \quad (C \text{ une constante positive}).$$

et

$$|\nabla h(x)| \leq C + C|x|^{p-1},\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition 5.2.2 Soient V un espace de Banach et $J : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Si J possède une G-dérivée au point u de V, on désigne par $\operatorname{grad} J(u)$ ou $\nabla J(u)$ ou encore $J'(u)$ l'élément de V' tel que

$$J'(u, \varphi) = \langle J'(u), \varphi\rangle = J'(u) \cdot \varphi,\ \forall \varphi \in V$$

et on l'appelle le **gradient** de J au point u.

Exemple 5.2.3 Soient $p > 1$ un nombre réel, $k \geq 1$ un entier naturel et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $b : \Omega \times \mathbb{R}^\kappa$ avec $\kappa = (N + k)/(N!k!)$, voir la section 2.2, une fonction jouissant des dérivées partielles

$$\frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha}(x; \xi) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k.$$

Supposons que

$$b \in \operatorname{Car}(p + 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha} \in \operatorname{Car}(p),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq k.$$

Alors la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J : W = W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \textstyle\int_\Omega b(x; \delta_k u(x))\, dx \end{aligned}$$

est G-dérivable en tout point $u \in W$ et l'on a :

$$J'(u) \cdot v = J'(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha}(x; \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\, dx,\ \forall v \in W.$$

Preuve. Comme $b \in \mathrm{Car}(p+1)$ et $\frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha} \in \mathrm{Car}(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq k$, il existe des constantes C et C_α et des fonctions positives g et g_α, $|\alpha| \leq k$ telles que :

$$\begin{aligned} |b(x;\xi)| &\leq g(x) + C \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi_\alpha|^p, \; x \text{ p.p. } \Omega, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa, \\ \left| \frac{\partial b}{\partial \xi_\alpha}(x;\xi) \right| &\leq g_\alpha(x) + C_\alpha \sum_{|\beta| \leq k} |\xi_\beta|^{p-1}, \; x \text{ p.p. } \Omega, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa; \end{aligned}$$

avec $g \in L^{(p+1)'}(\Omega)$ et $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq k$. Pour $u \in W$, la condition de croissance sur b couplée avec l'inégalité de Hölder permet de voir que $J(u)$ est bien définie. Pour u et v dans W on écrit, pour $|t| \leq 1$ – par exemple –, le rapport différentiel $[J(u+tv) - J(u)]/t$, ce qui fait apparaître $[b(x; \delta_k u(x) + t\delta_k v(x)) - b(x; \delta_k u(x))]/t$ sous le signe intégral, on applique ensuite le théorème des accroissements à la fonction b dans $\mathbb{R}^\kappa$, ce qui fait disparaître t du dénominateur ; utilisant maintenant la continuité des fonctions $\partial b / \partial \xi_\alpha$ par rapport à la variable ξ et les conditions de croissance sur ces dérivées partielles on passe à la limite par rapport à t, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour trouver l'expression annoncée de $J'(u,v)$. La fonction $v \mapsto J'(u,v)$ et linéaire et continue, ce qui termine de prouver le résultat.

Proposition 5.2.1 *Soient $\mathcal{B}$ une partie ouverte d'un espace de Banach V et $J : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle et soit u un point de minimum de J dans $\mathcal{B}$: $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{B}} J(v)$. Si J possède une G-dérivée au point u, on a*

$$J'(u) \cdot \varphi = 0, \; \forall \varphi \in V.$$

Preuve. Comme $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{B}} J(v)$, $\mathcal{B}$ ouvert et $u \in \mathcal{B}$, pour $\varphi \in V$, on a $u + t\varphi \in \mathcal{B}$ pour $|t|$ suffisamment petit ; disons $|t| \leq \varepsilon, \; \varepsilon > 0$. Donc

$$J(u+t\varphi) - J(u) \geq 0, \; \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Prenons $t > 0$, il vient $\frac{1}{t}\{J(u+t\varphi) - J(u)\} \geq 0$; en faisant tendre t vers zéro, on obtient $J'(u) \cdot \varphi \geq 0$ et comme $J'(u)$ est homogème par rapport à φ, i.e.

$$J'(u) \cdot (\lambda \varphi) = \lambda J'(u) \cdot \varphi, \; \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

en prenant $-\varphi$ au lieu de φ, on a $J'(u) \cdot (-\varphi) \geq 0$. D'où

$$J'(u) \cdot \varphi = 0, \; \forall \varphi \in V.$$

L'identité précédente s'appelle équation d'Euler du problème de minimisation considéré.

5.3 Applications

Exemple 5.3.1 Soit $\mathcal{B} = V = W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ (muni de la norme du gradient, Ω de mesure finie) et $f \in V' = W^{-1,p'}(\Omega)$ et J la fonctionnelle donnée par

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p - \langle f, v \rangle, \; v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La fonctionnelle J est

$\star$ Continue pour la topologie forte de V. En effet ; soient $v \in V$ et $\{v_n\}$ une suite de V convergeant vers v. On a $\langle f, v_n \rangle \to \langle f, v \rangle$, puisque $f \in V'$, et $||v_n||_V \to ||v||_V$ (continuité de la norme) donc

$$\frac{1}{p} ||v_n||_V^p \to \frac{1}{p} ||v||_V^p \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

D'où

$$J(v_n) = \frac{1}{p} ||v_n||_V^p - \langle f, v_n \rangle \to \frac{1}{p} ||v||_V^p - \langle f, v \rangle = J(v).$$

⋆ J est convexe. En effet ; soit $t \in [0,1]$, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On a :

$$J((1-t)u+tv) = \frac{1}{p}\,||(1-t)u+tv||_V^p - \langle f, (1-t)u+tv\rangle.$$

Mais

$$||(1-t)u+tv||_V \leq (1-t)\,||u||_V + t\,||v||_V\,,$$

et comme l'application $s \mapsto s^p,\ s \geq 0$ est croissante et convexe, on a

$$||(1-t)u+tv||_V^p \leq \big((1-t)\,||u||_V + t\,||v||_V\big)^p \leq (1-t)\,||u||_V^p + t\,||v||_V^p\,,$$

donc, puisque f est linéaire :

$$J((1-t)u+tv) \leq (1-t)J(u) + tJ(v).$$

⋆ J est coercitive. En effet ; puiseque $||\langle f, v\rangle|| \ \leq ||f||_{V'}\,||v||_V$, on a

$$J(v) \geq \frac{1}{p}\,||v||_V^p - ||f||_{V'}\,||v||_V\,,\ \forall v \in V,$$

de sorte que

$$\lim_{||v||_V \to \infty} J(v) = +\infty \quad (\text{car} \quad p > 1).$$

⋆ Il est évident que $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ est fortement fermé et convexe.
Il résulte alors de la proposition 5.1.2 l'existence d'une fonction u de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v).$$

On peut alors utiliser l'exemple 5.2.2 pour voir que J est G-différentiable et que l'équation d'Euler de notre problème de minimisation s'écrit :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi - \langle f, \varphi\rangle = 0,\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Comme $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, u est solution du problème de Dirichlet homogene :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Exemple 5.3.2 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{vérifiant} \\ -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = f. \end{cases} \tag{5.7}$$

Pour prouver l'existence d'une solution du problème (5.7), on considère sur $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, muni de a norme

$$||v||_V = \Big[\int_\Omega |u|^p\Big]^{1/p} + \Big[\int_\Omega |\nabla u|^p\Big]^{1/p},$$

la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega |v|^p - f(v),\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On vérifie comme ci-dessus que J est :

⋆ Convexe, fortement continue (donc faiblement continue).

⋆ Coercitive, puisque $p > 1$ et

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{p}\,||v||^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}\,|||\nabla v|||^p_{L^p(\Omega)} - ||f||_{V'}\,||v||_{W_0^{1,\,p}(\Omega)} \\ &\geq \frac{2^{1-p}}{p}\,||v||^p_{W_0^{1,\,p}(\Omega)} - ||f||_{V'}\,||v||_{W_0^{1,\,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

impliquent que

$$\lim_{|v|_V \to \infty} J(v) = +\infty.$$

Comme $V = W_0^{1,\,p}(\Omega)$ est convexe, fortement fermé ; il résulte de la proposition 5.2.1 l'existence de $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Les exemples 5.2.1 et 5.2.2 montrent que J est G-différentiable et l'équation d'Euler du problème $\min\limits_{v \in V} J(v)$ s'écrit :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi - f(\varphi) = 0, \;\; \forall\varphi \in W_0^{1,\,p}(\Omega),$$

ce qui résoud le problème (5.7).

5.4 Convexité et G-différentiabilité

Proposition 5.4.1 *Si la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ est G-différentiable dans V, alors (i) et (ii) sont équivalents, (iii) et (iv) sont équivalents :*

i) *J est convexe dans V,*

ii) $J(v) \geq J(u) + J'(u, v-u), \;\; \forall u, v \in V.$

iii) *J est strictement convexe dans V,*

iv) $J(v) > J(u) + J'(u, v-u), \;\; \forall u, v \in V, \;\; u \neq v.$

Preuve. (i)⇒(ii). On a par hypothèse :

$$J((1-t)u + tv) \leq (1-t)J(u) + tJ(v), \quad \text{pour} \quad u, v \in V, \;\; t \in]0, 1],$$

d'où

$$\frac{J(u + t(v-u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u),$$

et en faisant tendre t vers 0, on obtient :

$$J'(u, v-u) \leq J(v) - J(u).$$

(ii)⇒(i). Nous pouvons écrire (ii) sous la forme

$$J(y) \geq J(x) + J'(x, y-x), \;\; \forall x, y \in V. \tag{5.8}$$

Soient $u, v \in V$ et $t \in [0, 1]$. En prenant dans (5.8)

$$y = u \quad \text{et} \quad x = (1-t)u + tv,$$

on a :

$$\left\{ \begin{aligned} J(u) &\geq J((1-t)u + tv) + J'((1-t)u + tv, u - (1-t)u - tv) \\ &= J((1-t)u + tv) - tJ'((1-t)u + tv, v-u) \; ; \end{aligned} \right. \tag{5.9}$$

et en prenant dans (5.8), $y = v$ et $x = (1-t)u + tv$, on obtient :

$$\text{(5.10)} \qquad \begin{cases} J(v) & \geq J((1-t)u+tv) + J'((1-t)u+tv, v-(1-t)u-tv) \\ & = J((1-t)u+tv) + (1-t)J'((1-t)u+tv, v-u). \end{cases}$$

Multipliant (5.9) par $(1-t)$ et (5.10) par t et additionnant, on obtient :

$$(1-t)J(u) + tJ(v) \geq J((1-t)u+tv)$$

(iii)$\Rightarrow$(iv). Si $u \neq v$ et $t \in]0,1[$, on a :

$$J((1-t)u+tv) < (1-t)J(u) + tJ(v),$$

donc

$$J(v) - J(u) > \frac{1}{t}[J((1-t)u+tv) - J(u)];$$

mais J est convexe et donc, d'après (ii) :

$$J((1-t)u+tv) - J(u) \geq J'(u,(1-t)u+tv-u) = J'(u,t(v-u))$$

de sorte que

$$\frac{1}{t}[J((1-t)u+tv) - J(u)] \geq J'(u, v-u),$$

d'où

$$J(v) - J(u) > J'(u, v-u),\ \forall u, v \in V,\ u \neq v.$$

(iv)$\Rightarrow$(iii). Dans le passage (ii)$\Rightarrow$(i), on a des inégalités strictes lorsque $u \neq v$, d'où la stricte convexité.

5.5 Semi-continuité inférieure faible et G-différentiabilité

Théorème 5.5.1 *Si la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ est convexe et sa G-différentielle (première) $J'(u,\varphi)$ est linéaire et continue en φ, alors J est faiblement semi-continue inférieurement.*

Preuve. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible lorsque $n \to \infty$. On doit prouver que

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u).$$

D'après la proposition 5.4.1, on a :

$$J(u_n) \geq J(u) + J'(u, u_n - u) = J(u) + J'(u) \cdot (u_n - u)$$

et puisque $\varphi \mapsto J'(u) \cdot \varphi$ est linéaire et continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} J'(u) \cdot (u_n - u) = 0,$$

d'où :

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u).$$

5.6 Minimum d'une fonctionnelle

Théorème 5.6.1 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de V.*

i) *Si $u \in \mathcal{U}$ est un minimum relatif de J dans $\mathcal{U}$ et si J est G-différentiable dans $\mathcal{U}$, alors*

$$J'(u,\varphi) = 0,\ \forall \varphi \in V.$$

ii) *Si J est convexe et une fois G-différentiable, alors :*

j) *tout minimum local est un minimum global ;*
jj) *les relations suivantes* $(\cdot)$ *et* $(:)$ *sont équivalentes :*

$$(\cdot) \qquad J(u) \le J(v), \ \forall v \in V \ ; u \in V,$$

$$(:) \qquad J'(u, \varphi) = 0, \ \forall \varphi \in V \ ; u \in V.$$

jjj) *Si de plus* J *est strictement convexe* $(\cdot)$ *et* $(:)$ *admettent au plus une solution* u.

Exemple 5.6.1 Soit A un opérateur différentiel linéaire et soit V l'espace défini par :

$$V = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^p(\Omega)\}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$. Muni de la norme

$$||v||_V = ||v||_{L^2(\Omega)} + ||Au||_{L^p(\Omega)}$$

V est un espace de Banach réflexif.

Soit $g : \mathbb{R} \ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$(5.11) \qquad g(0) = 0, \quad g(t) \ge \alpha |t|^p, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ (\alpha > 0)$$

et

$$(5.12) \qquad |g'(t)| \le \beta |t|^{p-1} \quad \text{avec} \quad t \longmapsto g'(t) \quad \text{croissante} \quad (\beta > 0).$$

D'aprés (5.12), on a $g'(0) = 0$, $g'(t) \le 0, \forall t < 0$ et $g'(t) \ge 0, \ \forall t > 0$. Et donc, pour $t > 0$, on a :

$$g(t) - g(0) \le \frac{\beta}{p} t^p \quad \text{i.e.} \quad g(t) \le \frac{\beta}{p} t^p$$

et pour $t < 0$:

$$-\int_t^0 g'(s)\, ds \le \beta \int_t^0 (-s)^{p-1}\, ds$$

i.e.

$$g(t) - g(0) \le \frac{-\beta}{p} (-s)^p \Big|_t^0 = \frac{\beta}{p} (-t)^p.$$

D'où

$$0 \le g(t) \le \frac{\beta}{p} |t|^p, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$J(u) = \int_\Omega g(Au(x))\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x)|^2\, dx - \int_\Omega f(x) u(x)\, dx$$

où f est donné dans $L^2(\Omega)$.

Pour $v \in V$, on a

$$|J(v)| \le \frac{\beta}{p} \int_\Omega |Av|^p + \frac{1}{2} \int_\Omega |v|^2 + ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}$$

ce qui montre que J est bien défini sur V.

En raisonnant de la même manière que dans les exemples 5.2.2 et 5.3.1, on voit que J est G-différentiable et

$$J'(u, \varphi) = \int_\Omega g'(Au(x)) A\varphi(x)\, dx + \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega f\varphi.$$

Pour montrer que J est convexe, on va utiliser la proposition 5.4.1.ii. Pour cela on aura besoin du

Lemme 5.6.1 *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert convexe de* V *et soit* $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, *une fonction G-différentiable dans* $\mathcal{U}$. *Alors, pour tous* $u, v \in \mathcal{U}$, *il existe* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*

$$J(v) = J(u) + J'(u + \theta(v - u), v - u).$$

Admettons pour un instant ce lemme et utilisons le pour montrer la convexité de J. Il vient alors, pour $u, v \in V$:

$$\begin{aligned} J(v) \quad &= \quad J(u) + \int_\Omega g'[Au(x) + \theta\{Av(x) - Au(x)\}] \cdot [Av(x) - Au(x)] \\ &\qquad + \int_\Omega [u + \theta(v-u)](v-u) - \int_\Omega f(v-u). \end{aligned}$$

Mais, comme g' est croissante et $\theta \in]0, 1[$, on a

$$g'(s + \theta(t-s))(t-s) \geq g'(s)(t-s), \ \forall s, t \in \mathbb{R}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &g'[Au(x) + \theta(Av(x) - Au(x))][Av(x) - Au(x)] \geq \\ &\qquad \geq g'(Au(x))[Av(x) - Au(x)] \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} J(v) \quad &\geq \quad J(u) + \int_\Omega g'(Au(x))[Av(x) - Au(x)] + \\ &\qquad + \int_\Omega u(v-u) + \theta \int_\Omega (v-u)^2 - \int_\Omega f(v-u) \\ &= \quad J(u) + J'(u, v-u) + \theta\, ||v-u||^2_{L^2(\Omega)} > J(u) + J'(u, v-u). \end{aligned}$$

Sous reserve de la preuve du lemme 5.6.1, cela prouve -grâce à la proposition 5.4.1.ii- que J est strictement convexe. Il est clair que $J'(u, \varphi)$ est linéaire en φ et comme, d'après (5.12) :

$$\begin{aligned} |J'(u,\varphi)| \quad &\leq \quad \beta \int_\Omega |Au|^{p-1}|A\varphi| + ||u||_{L^2}\, ||\varphi||_{L^2} + ||f||_{L^2}\, ||\varphi||_{L^2} \\ &\leq \quad \beta\, ||Au||^{p-1}_{L^p}\, ||A\varphi||_{L^p} + ||u||_{L^2}\, ||\varphi||_{L^2} + ||f||_{L^2}\, ||\varphi||_{L^2} \\ &\leq \quad \{\beta\, ||Au||^{p-1}_{L^p} + ||u||_{L^2} + ||f||_{L^2}\}\, ||\varphi||_V\,, \end{aligned}$$

$J'(u, \varphi)$ est continu en φ pour tout $u \in V$.

Il résulte de la proposition 5.4.1.ii que J est faiblement semi-continu inférieurement sur V.

Montrons que J est coercitive. On a :

$$\begin{aligned} J(v) \quad &= \quad \int_\Omega g(Av) + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 - \int_\Omega fv \\ &\geq \quad \alpha \int_\Omega |Au|^p + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 - ||f||_{L^2(\Omega)}\, ||v||_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \quad \min\{\alpha, \frac{1}{2}\}[||Av||^p_{L^p(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)}] - ||f||_{L^2(\Omega)}\, ||v||_V\,. \end{aligned}$$

Posons $a = ||v||_{L^2}$ et $b = ||Av||_{L^p}$. On a

$$\lim_{a+b\to\infty} \frac{a^2 + b^p}{a+b} = +\infty.$$

En effet ; si $a + b \to +\infty$, on a $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\{a + b + |b - a|\}$ et donc $\max\{a, b\} \to +\infty$. Si $\max\{a, b\} = a$, on a :

$$\frac{a^2 + b^p}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\max\{a, b\}.$$

Si $\max\{a, b\} = b$, On a :

$$\frac{a^2 + b^p}{a+b} \geq \frac{b^p}{a+b} \geq \frac{1}{2}b^{p-1} = \frac{1}{2}[\max\{a, b\}]^{p-1};$$

d'où le résultat. Cela prouve que
$$\lim_{||v||_V \to\infty} J(v) = +\infty.$$
Il résulte alors du théorème 5.1.5 l'existence de $u \in V$ tel que $J(u) = \min_{v\in V} J(v)$ de sorte que $J'(u, \varphi) = 0,\ \forall\varphi \in V$, i.e.
$$\int_\Omega g'(Au)A\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall\varphi \in V.$$

Preuve du lemme 5.6.1. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est convexe, on a :
$$(1-t)u + tv \in \mathcal{U},\ \forall t \in [0, 1].$$
Considérons alors la fonction réelle ψ définie sur $[0, 1]$ par
$$\psi(t) = J((1-t)u + tv).$$
La fonction ψ est dérivable dans $]0, 1[$ et l'on a
$$\begin{aligned}\lim_{s\to0} \frac{\psi(t+s) - \psi(t)}{s} &= \lim_{s\to0} \frac{J((1-t-s)u + (t+s)v) - J((1-t)u + tv)}{s}\\ &= \lim_{s\to0} \frac{1}{s}\{J((1-t)u + tv + s(v-u)) - J((1-t)u + tv)\}\\ &= J'((1-t)u + tv, v-u).\end{aligned}$$
Donc
$$\psi'(t) = J'(u + t(v-u), v-u),\ \forall t \in]0, 1[.$$
D'aprés le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$; d'où :
$$J(v) = J(u) + J'(u + \theta(v-u), v-u).$$

5.7 Potentiel d'opérateur

Définition 5.7.1 Si un opérateur $A : V \to V'$ est le gradient d'une fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$, i.e. $Au = J'(u),\ \forall u \in V$, on dit que A est un opérateur de potentiel et J est dit son potentiel.

Le gradient d'une fonctionnelle est défini dans la définition 5.2.2. Seuil les problèmes aux limites associés à des opérateurs de potentiel sont susceptibles d'être résolus par l'utilisation d'une fonctionnelle. La résolution est possible si la fonctionnelle possède les propriétés requises pour garantir l'existence d'extréma, par exemples les propriétés exigées pour la validité du Théorème 5.1.6 ou la Proposition 5.1.2.

Posons nous le problème suivant : Soient $p > 1$ un nombre réel, $k \geq 1$ un entier naturel et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Considérons l'opérateur différentiel formel
$$Au = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x; \delta_k u(x)),\ x \in \Omega$$
dont les coefficients a_α sont dans $\mathrm{Car}(p)$, $|\alpha| \leq k$. Le problème est de trouver une fonction $b : \Omega \times \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ telle que la fonctionnelle $J(u) = \int_\Omega b(x; \delta_k u(x))\,dx$ soit le potentiel (sur $W^{1,p}(\Omega)$, par exemple) de l'opérateur différentiel (non formel) déterminé par A. L'énoncé de ce problème doit être précisé. Commençons par le :

Lemma 5.7.1 *Soient $\Omega \times \mathbb{R}^\kappa \ni (x; \xi) \longmapsto a_\alpha(x; \xi) \in \mathbb{R}$ des fonctions de* $\mathrm{Car}(p)$, $|\alpha| \leq k$. *Supposons que les dérivées partielles*
$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi_\beta}(x; \xi) \doteq a_{\alpha\beta}(x; \xi) \quad \textit{existent pour } x \textit{ p.p. } \Omega,\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha|, |\beta| \leq k.$$

avec

$$a_{\alpha\beta}(x;\xi) = a_{\beta\alpha}(x;\xi),\ x \quad p.p. \quad Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha|, |\beta| \leq k.$$

Supposons aussi que

$$\xi_\alpha a_{\alpha\beta}(x;\xi) \in \mathrm{Car}(p),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha|, |\beta| \leq k.$$

Posons

$$b(x;\xi) = \int_0^1 \Big[\sum_{|\alpha| \leq k} \xi_\alpha a_\alpha(x; t\xi) \Big]\, dt.$$

Alors, la fonction b est dans $\mathrm{Car}(p+1)$ *et admet des dérivées partielles vérifiant :*

$$\frac{\partial b}{\partial \xi_\beta}(x;\xi) = a_\beta(x;\xi),\ x \quad p.p. \quad \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^\kappa,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^N,\ |\beta| \leq k.$$

Preuve Utiliser les propriétés des intégrales paramétriques et la condition de symétries $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ et l'expression de la dérivée (totale) de $a_\beta(x;t\xi)$ par rapport à t et intégrer ensuite par parties.

On le théorème suivant dans l'espace $V = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 5.7.1 *Soit l'opérateur différentiel formel*

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x; \delta_k u(x)),\ x \in \Omega$$

dont les coefficients satisfont les conditions du lemme précédent. Soit $V = W_0^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{A}u \in V'$ défini par

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x; \delta_k u(x)) D^\alpha v(x)\, dx,\ v \in V.$$

Considérons la fonction $b : \Omega \times \mathbb{R}^\kappa \to \mathbb{R}$ définie par Posons

$$b(x;\xi) = \int_0^1 \Big[\sum_{|\alpha| \leq k} \xi_\alpha a_\alpha(x; t\xi) \Big]\, dt$$

et la fonctionnelle définie par :

$$J(u) = \int_\Omega b(x; \delta_k u(x))\, dx,\ u \in V.$$

Alors $J'(u) = \mathcal{A}u$, $\forall u \in V$, i.e.

$$J'(u) \cdot v = \langle \mathcal{A}u, v \rangle,\ \forall u \in V,\ \forall v \in V.$$

Preuve. Elle résulte du lemme précédent et de l'exemple 5.2.3.

Les conditions exigées pour pouvoir construire le potentiel d'un opérateur différentiel ne sont pas toujours vérifiées en pratique. Nous avons donc besoin d'introduire d'autres types d'opérateurs. C'est ce qui sera fait dans le chapitre suivant.

Deuxième partie

Problèmes aux limites à données irrégulières

Chapitre 6

Problèmes elliptiques à donnée mesure : cas $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$

Dans ce chapitre nous étudions les problèmes aux limites non linéaires du type elliptique associés à des opérateurs pseudomonotones mais avec un second membre non régulier, i.e. n'appartenant pas à un espace dual. Nous considérons des seconds membres dans L^1 ou dans l'espace des mesures de Radon bornées. Comme dans les chapitres précédents, nous sommes principalement intéressés par la question d'existence de solutions faibles.

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, section **??**, nous avons vu que, pour tout $p \in]1, +\infty[$, le problème

$$\begin{cases} Au & \doteq -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u)) + F(x, u, \nabla u) = f \\ u & = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$

avec les fonctions de Carathéodory vectorielles $\hat{a}$ et F vérifiant les conditions $(\hat{a}.1 - 3)$ et (F), données dans la section **??**, possède une solution faible pour tout f donné dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Ce qui nous intéresse ici c'est d'étudier la question d'existence d'une solution pour la même équation

$$Au = f$$

mais avec le second membre f – la donnée – moins régulière, c'est à dire n'appartenant pas à $W^{-1,p'}(\Omega)$. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f est un élément de L^1 ou, plus généralement une mesure de Radon bornée sur Ω. Comme, avec les hypothèses sur $\hat{a}$ et F, l'opérateur A applique $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$, il n'y a pas d'espoir de trouver u dans V si f n'appartient pas à V'. Il faut alors essayer de chercher u dans un espace ou ensemble plus grand que V. C'est ce que nous aller tâcher de faire dans ce qui suit.

Commençons par rappeler que nous travaillons sur un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^N$, i.e. un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$; sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\overline{\Omega}$.

6.1.1 L'espace $M(\Omega)$

Nous désignons par $M(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon[1] bornées sur Ω. Par définition, $M(\Omega) = [C_c(\Omega)]'$ = le dual topologique de l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω muni de la norme de la convergence uniforme :

$$||u||_{C_c(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

1. Johann Karl, mathématicien autrichien (Hetschen 1887 – Vienne 1956).

La remarque suivante va nous permettre d'inclure l'étude du cas où f est dans $L^1(\Omega)$ dans celle du cas f dans $M(\Omega)$.

Remarque 6.1.1 On peut vérifier que l'application T de $L^1(\Omega)$ dans $M(\Omega)$ qui à la fonction sommable f associe la mesure Tf définie par

$$\langle Tf, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega)$$

est une isométrie linéaire de $L^1(\Omega)$ dans $M(\Omega)$. Cela nous permet d'identifier $L^1(\Omega)$ à un sous-espace de $M(\Omega)$.

6.2 Le problème $(\mathcal{P})$

Nous sommes interessés par les problèmes du type

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} Au = \mu \in M(\Omega) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$

avec A pseudomonotone, ce qui est le cas si

$$Au = -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u)) + F(x, u, \nabla u)$$

avec les fonctions vectorielles de Carathéodory $\hat{a}$ et F vérifiant les conditions standards de Leray-Lions, i.e. les conditions $(\hat{a}.1-3)$ et (F) données dans la section **??**. L'exemple suivant va nous servir de guide dans notre étude.

6.2.1 Exemple modèle

Soit $\Omega = \mathcal{U} = B(0, 1)$, la boule unité euclidienne ouverte de centre zéro et de rayon 1.
Trouver $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u \doteq -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{U}) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{U} \end{cases} \tag{6.1}$$

où $p > 1$ est un nombre réel et δ est la distribution de Dirac à l'origine. Rappelons que l'opérateur Δ_p est dit $p-$laplacien.

Exercise 6.2.1 Montrer que le problème (6.1) admet pour solution (modèle) u_{mod} :

$$u_{\text{mod}}(x) = (N\omega_N)^{-1/(p-1)} \begin{cases} \frac{p-1}{N-p}\{|x|^{\frac{p-N}{p-1}} - 1\} & \text{si} \quad p \neq N \\ -\log|x| & \text{si} \quad p = N \end{cases}$$

où ω_N =Vol$(\mathcal{U})$, $N\omega_N = \sigma_N$ = aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

6.2.2 Où chercher une solution de $(\mathcal{P})$?

Une question naturelle se pose : Dans quel espace – ou ensemle – chercher une solution de $(\mathcal{P})$?

- si $p > N$ et Ω un domaine borné, on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega});$$

plus précisement, on a :

$$\sup_\Omega |u| \leq C|\Omega|^{1/N-1/p} \, |||\nabla u|||_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

de sorte que $M(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$; dans le sens qu'il existe une injection linéaire continue de $M(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. En effet, considérons l'application $\pi : M(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ qui associe à $\mu \in M(\Omega)$ l'élément $\pi\mu$ de $W^{-1,p'}(\Omega)$ défini sur $\mathcal{D}(\Omega)$ – qui est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ – par

$$\langle \pi\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme

$$|\langle \pi\mu, \varphi \rangle| = |\langle \mu, \varphi \rangle| \leq ||\mu||_{M(\Omega)} \, ||\varphi||_{C_c(\Omega)} \leq C \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, ||\varphi||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \, ,$$

la restriction de $\pi\mu$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue pour la topologie de $W_0^{1,p}(\Omega)$, et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\pi\mu$ est bien un élément de $W^{-1,p'}(\Omega)$, et

$$||\pi\mu||_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, .$$

Ce qui prouve la continuité de π. Il est facile de voir que π est linéaire. L'application π est injective ; en effet, soient μ et ν deux éléments de $M(\Omega)$ tels que $\pi\mu = \pi\nu$. Donc :

$$\langle \pi\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle = \langle \pi\nu, \varphi \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit maintenant $\varphi \in C_c(\Omega)$. On peut alors trouver une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $C_c(\Omega)$, de sorte que

$$\langle \mu, \varphi_n \rangle = \langle \nu, \varphi_n \rangle.$$

Faisons tendre n vers $+\infty$, en utilisant la continuité de μ et ν, on a :

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega),$$

d'où $\mu = \nu$; i.e. π est injective. Grâce à π on identifie $M(\Omega)$ à un sous-espace de $W^{-1,p'}(\Omega)$.

En résumé, si $p > N$, on a $M(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, ce qui signifie que ce cas entre dans le cadre classique traité dans la chapitre **??**. L'espace où on cherche dans ce cas les solutions est – comme on le sait – l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Désormais on suppose que $1 < p \leq N$.

Posons nous toujours la même question : Dans quel espace ou ensemble chercher la ou les solutions ? Pour donner un sens à “$u = 0$” sur $\Gamma = \partial\Omega$ et au gradient ∇u p.p. dans Ω, il est naturel de chercher u dans un espace de Sobolev. Nous voulons profiter des résultats vus dans la section **??** concernant les opérateurs du type Leray-Lions, en particulier les opérateurs de la forme donnée dans $(\mathcal{P})$ avec $\hat{a}(x,s,\xi)$ et $F(x,s,\xi)$ des fonctions de Carathéodory vérifiant les conditions ($\hat{a}$.1–3) et (F). Ces opérateurs sont conçus pour travailler entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$. Donc, pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $Au \in W^{-1,p'}(\Omega)$, de sorte que, puisque dans le cas $1 < p \leq N$, il existe des mesures $\mu \in M(\Omega)$ telles que $\mu \notin W^{-1,p'}(\Omega)$, l'on a $Au \neq \mu$, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Les solutions possibles de $(\mathcal{P})$ doivent donc être cherchées dans un espace ou ensemble plus grand que $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si on reste dans le cadre des espaces de Sobolev, le plus grand de ces espaces (pour Ω borné) est $W^{1,1}(\Omega)$. Pour savoir si cet espace est assez riche pour contenir les solutions possibles du problème $(\mathcal{P})$, nous reprenons l'équation modèle :

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \delta & \text{dans} \quad \mathcal{U} = B(0,1) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

qui admet pour solution

$$u_{\text{mod}}(x) = (N\omega_N)^{-1/(p-1)} \begin{cases} \frac{p-1}{N-p}\{|x|^{\frac{p-N}{p-1}} - 1\} & \text{si} \quad p \neq N \\ \qquad -\log|x| & \text{si} \quad p = N, \end{cases}$$

donc, dans le cas $p \neq N$, on a

$$\begin{aligned} \nabla u_{\text{mod}}(x) &= -(N\omega_N)^{-1/(p-1)}|x|^{\frac{p-N}{p-1}-2}x, \\ |\nabla u_{\text{mod}}(x)| &= (N\omega_N)^{-1/(p-1)}|x|^{\frac{p-N}{p-1}-1} = (N\omega_N)^{-1/(p-1)}|x|^{\frac{1-N}{p-1}}, \end{aligned}$$

de sorte

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}} |\nabla u_{\text{mod}}(x)|\, dx &= (N\omega_N)^{-1/(p-1)} \int_B |x|^{\frac{1-N}{p-1}}\, dx \\ &= (N\omega_N)^{-1/(p-1)} (N\omega_N) \int_0^1 r^{\frac{1-N}{p-1}} r^{N-1}\, dr.\end{aligned}$$

Cette intégrale est finie si $\frac{1-N}{p-1} + N - 1 > -1$, donc si $p > 2 - \frac{1}{N}\cdot$ Ce calcul montre que :

$$u_{\text{mod}} \quad \text{n'est dans} \quad W_0^{1,1}(\mathcal{U}) \quad \text{que si} \quad p > 2 - \frac{1}{N}\cdot$$

Supposons que $p > 2 - \frac{1}{N}$ et cherchons la valeur critique de l'exposant $q \geq 1$ pour que $u_{\text{mod}} \in W_0^{1,\,q}(\mathcal{U})$. On a :

$$\int_{\mathcal{U}} |\nabla u_{\text{mod}}(x)|^q\, dx = (N\omega_N)^{-q/(p-1)} (N\omega_N) \int_0^1 r^{\frac{q(1-N)}{p-1} + N - 1}\, dr,$$

notre intégrale sera finie si $\frac{q(1-N)}{p-1} + N > 0$, ce qui donne

$$u_{\text{mod}} \in W_0^{1,\,q}(\mathcal{U}) \quad \text{pour tout } q \text{ tel que} \quad 1 \leq q < \frac{N}{N-1}(p-1).$$

Commençons donc par le cas où les solutions peuvent être cherchées dans les espaces de Sobolev, si on se fie à l'équation modèle, c'est le cas de $p > p_c = 2 - \frac{1}{N}$. Pour préparer le train à notre étude, donnons la propriété générale des mesures suivante, qui nous permettra d'approcher le problème à donnée mesure par des problèmes à données régulières.

6.2.3 Un théorème de densité

Théorème 6.2.1 *Soit $\mu \in M(\Omega)$. Alors, il existe une suite $\{\mu_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

- *$\mu_n \to \mu$ au sens vague des mesures, i.e.*

$$\forall \varphi \in C_c(\Omega),\ \langle \mu_n, \varphi\rangle \to \langle \mu, \varphi\rangle \quad (\textit{dans}\ \ \mathbb{R}),$$

et

- $$||\mu_n||_{L^1(\Omega)} \leq ||\mu||_{M(\Omega)}\,,\ \forall n \geq 1.$$

Preuve. Comme de nombreuses preuves de densité, elle se fait par ' 'troncature" et "régularisation".

a) Troncature. Soit $\{K_n\}$ une suite croissante de compacts Ω dont la réunion est Ω. Prendre, par exemple,

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}\,(x, {}^c\Omega) \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |x| \leq n\},\ {}^c\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

Pour $\{\theta_n\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que

$$0 \leq \theta_n \leq 1 \quad \text{et} \quad \theta_n(x) = 1,\ \forall x \in K_n,$$

la suite de mesures $\{\theta_n\mu\}$ converge vers μ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$; puisque, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que supp $\varphi \subset K_n$, $\forall n \geq n_0$, de sorte que

$$\langle \theta_n\mu, \varphi\rangle - \langle \mu, \varphi\rangle = \langle \mu, \theta_n\varphi\rangle - \langle \mu, \varphi\rangle = \langle \mu, (\theta_n - 1)\varphi\rangle = 0,\ \forall n \geq n_0.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}||\theta_n\mu||_{M(\Omega)} &= \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\Omega)\\ |\varphi| \leq 1}} |\langle \theta_n\mu, \varphi\rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\Omega)\\ |\varphi| \leq 1}} |\langle \mu, \theta_n\varphi\rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\Omega)\\ |\varphi| \leq 1}} ||\mu||_{M(\Omega)}\, |\theta_n||\varphi| \leq ||\mu||_{M(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

b) Régularisation. Soit $\mu \in M(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ à support (compact) $K = \operatorname{supp} \mu$. Prolongeons μ en dehors de Ω de la manière suivante. On considère θ une fonction de $C_c(\Omega)$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta \equiv 1$ sur un voisinage de K et on pose, pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$:

$$\langle \tilde{\mu}, \varphi \rangle = \langle \mu, \theta\varphi \rangle.$$

Comme, pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $(1-\theta)\varphi \equiv 0$ sur K, il est clair que $\langle \tilde{\mu}, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_c(\Omega)$, i.e. que $\tilde{\mu}$ prolonge μ à $\mathbb{R}^N$ avec

$$\begin{aligned} ||\tilde{\mu}||_{M(\mathbb{R}^N)} &= \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \\ |\varphi| \leq 1}} |\langle \tilde{\mu}, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \\ |\varphi| \leq 1}} |\langle \mu, \theta\varphi \rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \\ |\varphi| \leq 1}} ||\mu||_{M(\Omega)} ||\theta\varphi||_{C_c(\mathbb{R}^N)} \leq ||\mu||_{M(\Omega)} \sup_{\substack{\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \\ |\varphi| \leq 1}} |\varphi| \leq ||\mu||_{M(\Omega)} . \end{aligned}$$

Prenons maintenant une suite régularisante $\{\rho_n\}$ et formons $\widetilde{\mu} \star \rho_n$, on rappelle que

- $$(\widetilde{\mu} \star \rho_n)(x) = \langle \widetilde{\mu}(y), \rho_n(x-y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, d\widetilde{\mu}(y)$$

où le second membre désigne la valeur de la mesure $\widetilde{\mu}$ sur la fonction $\rho_n(x - .)$.

- $$\widetilde{\mu} \star \rho_n \quad \text{est de classe} \quad C^\infty \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N$$

- $$\operatorname{supp}(\widetilde{\mu} \star \rho_n) \subset \overline{\operatorname{supp} \widetilde{\mu} + \operatorname{supp} \rho_n} = \operatorname{supp} \widetilde{\mu} + \operatorname{supp} \rho_n,$$

car $\operatorname{supp} \widetilde{\mu}$ et $\operatorname{supp} \rho_n$ sont compacts. On voit donc que, pour n suffisamment grand, $\widetilde{\mu} \star \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et l'on a, grâce au théorème de Fubini [2] :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(\widetilde{\mu} \star \rho_n)(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, d\widetilde{\mu}(y) \Big|\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n(x-y)|\, d|\widetilde{\mu}|(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, dx \Big]\, d|\widetilde{\mu}|(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} d|\widetilde{\mu}|(y) = ||\widetilde{\mu}||_{M(\Omega)} \leq ||\mu||_{M(\Omega)} . \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à démontrer que $\widetilde{\mu} \star \rho_n$ converge vers $\widetilde{\mu}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mu} \star \rho_n, \varphi \rangle - \langle \widetilde{\mu}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (\widetilde{\mu} \star \rho_n)(x)\varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, d\widetilde{\mu}(y) \Big] \varphi(x)\, dx \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\varphi(x)\, dx \Big]\, d\widetilde{\mu}(y) \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\varphi(x)\, dx - \varphi(y) \Big]\, d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\{\varphi(x) - \varphi(y)\}\, dx \Big]\, d\widetilde{\mu}(y). \end{aligned}$$

2. On pourra, pour les résultats d'intégration utilisés, consulter **J. Dieudonné**, *Éléments d'analyse*, tome 2, p. 103 (13.3.3), p. 203 et p. 194.

Comme φ est à support compact, il existe $r > 0$ tel que supp $\varphi \subset B(0, r)$ et, comme supp $\rho_n \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n})$, pour $(x, y) \notin B(0, r+1) \times B(0, r+1)$, on a $\rho_n(x-y)[\varphi(x) - \varphi(y)] = 0$, de sorte que :

$$\begin{aligned} &\left| \langle \widetilde{\mu} \star \rho_n, \varphi \rangle - \langle \widetilde{\mu}, \varphi \rangle \right| \\ &\qquad = \left| \int_{\{|y| \le r+1\}} \Big[\int_{\{|x| \le r+1\}} \rho_n(x-y)\{\varphi(x) - \varphi(y)\}\, dx \right| d\widetilde{\mu}(y) \\ &\qquad \le \int_{\{|y| \le r+1\}} \Big\{ \int_{\{|x| \le r+1, |x-y| \le \frac{1}{n}\}} \rho_n(x-y)|\varphi(x) - \varphi(y)|\, dx \Big\} d|\widetilde{\mu}|(y). \end{aligned}$$

Comme φ est uniformément continu sur $B(0, r+1)$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \varepsilon$, $\forall (x, y) \in B^2(0, r+1)$ avec $|x - y| \le \delta$; donc pour $\frac{1}{n} < \delta$, on a :

$$|\langle \widetilde{\mu} \star \rho_n - \widetilde{\mu}, \varphi \rangle| \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)\, dx \Big\} d|\widetilde{\mu}|(y) = ||\widetilde{\mu}||_{M(\mathbb{R}^N)} ;$$

d'où

$$\widetilde{\mu} \star \rho_n \to \widetilde{\mu} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

de sorte que :

$$\widetilde{\mu} \star \rho_n \to \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad ||\widetilde{\mu} \star \rho_n||_{L^1(\Omega)} \le ||\mu||_{M(\Omega)} .$$

6.3 Le problème $(\mathcal{P}_0)$: Cas $2 - \frac{1}{N} < p \le N$

Pour simplifier, on va considérer l'opérateur sans le terme F :

$$Au = -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u))$$

où $\hat{a}(x, s, \xi)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant les conditions ($\hat{a}$.1–3) données dans **??**.

Théorème 6.3.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, μ une mesure de Radon bornée, $\mu \in M(\Omega)$, et $\hat{a}$ une fonction de Carathéodory vérifiant ($\hat{a}$.1–3). Alors, le problème*

$$(\mathcal{P}_0) \qquad \begin{cases} Au \doteq -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u)) &= \mu \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ \qquad\qquad u &= 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution u qui est dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q \in [1, q_c = \frac{N}{N-1}(p-1)[$.

Preuve. Elle se fait en trois étapes.

1re étape. On approche le problème par une suite de problèmes "classiques" :

$$\begin{cases} Au_n = \mu_n \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{6.3}$$

où $\{\mu_n\}$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$||\mu_n||_{L^1(\Omega)} \le ||\mu||_{M(\Omega)} < +\infty, \ \forall n \ge 1 \quad \text{et} \quad \mu_n \to \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

2e étape. On cherche des estimations uniformes des solutions approchées dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec

$$1 \le q < q_c = \frac{N}{N-1}(p-1).$$

3e étape. On passe à la limite sur n en utilisant les estimations uniformes trouvées dans la deuxième étape.

6.3.1 1re étape : Approximation du problème $(\mathcal{P}_0)$

Soit $\mu \in M(\Omega)$, d'après le théorème 6.2.1, il existe une suite $\{\mu_n\}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$||\mu_n||_{L^1(\Omega)} \leq ||\mu||_{M(\Omega)} < +\infty, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mu_n \to \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme $\mu_n \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $\hat{a}$ satisfait les hypothèses ($\hat{a}$.1–3), d'après le théorème **??**, il existe une fonction u_n solution du problème

$$(\mathcal{P}_{0n}) \qquad \begin{cases} Au_n = \mu_n \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (\text{donc} \quad u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma = \partial\Omega) \end{cases}$$

dont la formulation faible équivalente est :

$$(\mathcal{P}_{0n}) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \int_\Omega \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla v = \int_\Omega \mu_n v, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Dans toute la suite (sauf dans le lemme 6.3.2) la notation $\{u_n\}$ est reservée pour cette suite de solutions approchées.

6.3.2 2e étape : Estimations uniformes des solutions approchées

Comme nous avons seulement $||\mu_n||_{L^1(\Omega)} \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pour pouvoir majorer le terme $\int_\Omega \mu_n v$ uniformément par rapport à n, nous devons choisir comme fonction test

$$v_n = \text{ fonction de } u_n \text{ telle que } ||v_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star \text{ avec } v_n \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Comment choisir les fonctions tests $\{v_n\}$?

Pour choisir les fonctions tests nous utilisons le résultat suivant dû à Stampacchia :

Lemme 6.3.1 (Stampacchia) *Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction globalement lipschitzienne, i.e.*

$$\exists C > 0 \quad \textit{tel que} \quad |T(s) - T(t)| \leq C|s-t|, \ \forall s, t \in \mathbb{R},$$

telle que $T(0) = 0$. Alors, pour tout $v \in W_0^{1,s}(\Omega)$ avec $1 \leq s \leq \infty$, on a :

$$T(v) \in W_0^{1,s}(\Omega) \quad \textit{et} \quad \nabla T(v) = T'(v)\nabla v \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \textit{et p.p. dans} \quad \Omega.$$

Preuve. Voir, par exemple, Brézis[3], p.155 dans le cas où T est en plus supposé dans $C^1(\mathbb{R})$.

Le lemme précédent nous donne une famille de choix possible des v_n : Soit l'espace

$$\mathrm{Lip}_p(\mathbb{R}) = \{T \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \mid T(0) = 0 \quad \text{et} \quad T' \in L^p(\mathbb{R})\}$$

(pour $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, on pourrait voir Brézis, p.126).

On peut vérifier que les fonctions

$$\text{Arctg}\,, \quad \psi_\delta \quad \text{avec} \quad \psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^{1+\delta}}, \ \delta > 0$$

sont dans $\mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, $\forall p > 1$ fini.

Exercise 6.3.1 Soit $k > 0$. On appelle troncature aux niveaux $-k$ et k la fonction T_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

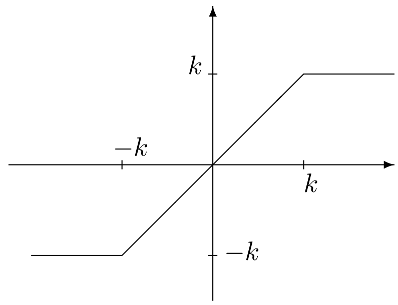
$$T_k(t) = \frac{1}{2}\{|t+k| - |t-k|\} = [k - (k - |t|)_+]\,\text{sign}\,(t), \ t \in \mathbb{R}$$

l'indice $+$ est mis pour la partie positive et

$$\text{sign}\,(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

3. **H. Brézis,** *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1989.

La fonction T_k a pour graphe :



Vérifier que $T_k \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$. Chercher d'autres fonctions de $\mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$.

Proposition 6.3.1 *$\{u_n\}$ étant la suite des solutions des $(\mathcal{P}_{0n})$, pour tout $T \in Lip_p(\mathbb{R})$, la suite $\{T(u_n)\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, i.e.*

$$\forall T \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R}),\ \exists C = C(T) > 0 \quad \textit{telle que} \quad ||T(u_n)||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C,\ \forall n \geq 1.$$

Preuve. Soit $T \in Lip_p(\mathbb{R})$. La fonction $\Phi(t) = \int_0^t |T'(\sigma)|^p \, d\sigma$ est globalement lipschitzienne, puisque

$$\Phi'(t) = |T'(t)|^p \leq ||T'||^p_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{p.p. dans} \quad \mathbb{R}.$$

et on a

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad |\Phi(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |T'(\sigma)|^p \, d\sigma = M < \infty,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'après le lemme 6.3.1, $v_n = \Phi(u_n)$ est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; en la prenant comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot |T'(u_n)|^p \nabla u_n &= \int_\Omega \mu_n \Phi(u_n) \\ &\leq M \int_\Omega |\mu_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{aligned}$$

D'où, grâce à $(\hat{a}.1)$:

$$\alpha \int_\Omega |T'(u_n)|^p |\nabla u_n|^p \leq M \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, , \forall n \geq 1$$

i.e.

$$\int_\Omega |\nabla T(u_n)|^p = ||T(u_n)||^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, ,\ \forall n \geq 1.$$

Proposition 6.3.2 *Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} \leq C,\ \forall n \geq 1.$$

Preuve. Soit $\delta > 0$. La fonction ψ_δ donnée par

$$\psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma|)^{1+\delta}} = \frac{1}{\delta} \Big[1 - \frac{1}{(1 + |t|)^\delta} \Big] \, \mathrm{sign}\,(t),\ t \in \mathbb{R}$$

est globalement lipschitzienne, $\psi_\delta(0) = 0$ et $|\psi_\delta(t)| \leq \frac{1}{\delta}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. En prenant $v_n = \psi_\delta(u_n)$ pour fonction test dans $(\mathcal{P}_{0n})$, on obtient :

$$\int_\Omega \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \frac{\nabla u_n}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} = \int_\Omega \mu_n \psi_\delta(u_n) \leq \frac{1}{\delta} \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, ,$$

d'où, grâce à ($\hat{a}$.1) :

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\alpha\delta} \,||\mu||_{M(\Omega)}\,, \ \forall n \geq 1.$$

Corollaire 6.3.1 *Si $2-\frac{1}{N} < p \leq N$, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$, il existe une constante $C = C(q) > 0$ telle que :*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C, \ \forall n \geq 1.$$

Preuve. Soit $q \in]1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$. Remarquer que $\frac{N}{N-1}(p-1) - p = \frac{p-N}{N-1} \leq 0$. Donc $1 < q < \frac{N}{N-1}(p-1) \leq p \leq N$, i.e. $1 < q < N$ toujours. Notons $q^\star$ l'exposant de Sobolev associé à q, i.e., $q^\star = \frac{Nq}{N-q}$. Pour

$$\delta = q^\star \frac{p-q}{q} - 1 = \frac{N-1}{N-q}\Big(\frac{N}{N-1}(p-1) - q\Big),$$

il existe d'après la proposition 6.3.2, une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} \leq C, \ \forall n \geq 1.$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
y_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^q \ &= \ \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p}}(1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p} \\
&\leq \ \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}\Big)^{q/p}\Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1+\delta)\frac{q}{p-q}}\Big)^{1-q/p} \\
&\leq \ C^{q/p}\Big[\int_\Omega (1+|u_n|)^{q^\star}\Big]^{1-q/p} \\
&\leq \ C^{q/p}(2^{q^\star-1})^{(1-q/p)}\Big[\int_\Omega 1\,dx + \int_\Omega |u_n|^{q^\star}\Big]^{1-q/p} \\
&\leq \ C^{q/p}(2^{q^\star-1})^{(1-q/p)}\Big\{|\Omega|^{1-q/p} + \Big[\int_\Omega |u_n|^{q^\star}\Big]^{1-q/p}\Big\}.
\end{aligned}$$

Mais, d'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré (voir Brézis, p. 174, relation (30)), on a :

$$\Big(\int_\Omega |u_n|^{q^\star}\Big)^{1/q^\star} \leq C(q,N)\,|||\nabla u_n|||_{L^q(\Omega)} = C(q,N) y_n^{\frac{1}{q}};$$

de sorte que

$$y_n \leq a + b y_n^{\frac{q^\star}{q}(1-\frac{q}{p})}, \ \forall n \geq 1,$$

où a et b sont deux constante dépendant de q, N et $|\Omega|$, ($|\Omega|$ = mesure de Lebesgue de Ω). Comme, dans le cas $p < N$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{q^\star}{q}\Big(1-\frac{q}{p}\Big) - 1 \ &= \ \frac{Nq}{N-q}\,\frac{p-q}{qp} - 1 \\
&= \ \frac{N(p-q)}{(N-q)p} - 1 = \frac{Np - Nq - Np + pq}{p(N-q)} = \frac{q}{p}\frac{p-N}{N-q} < 0,
\end{aligned}$$

l'inégalité précédente, vérifiée par $\{y_n\}$, montre que cette suite est bornée.

Dans le cas $p = N$, on reprend les calculs en choisissant $\delta = \beta\frac{N-q}{q} - 1$ et β avec $\max\{1, \frac{q}{N-q}\} < \beta < q^\star = Nq/(N-q)$. On utilise la continuité de l'injection de $W_0^{1,q}(\Omega)$ dans $L^\beta(\Omega)$ et l'on obtient

$$y_n \leq a + b y_n^{\frac{\beta}{q}(1-\frac{q}{N})}, \ \forall n \geq 1 \quad \text{avec} \quad \frac{\beta}{q}(1-\frac{q}{N}) < \frac{q^\star}{q}(1-\frac{q}{N}) = 1.$$

Cela implique que $\{y_n\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ dans ce cas aussi.

6.3.3 Construction d'une solution du problème $(\mathcal{P}_0)$

Pour "construire" une fonction u candidate à être une solution de $(\mathcal{P}_0)$, on raisonne comme suit :

La suite $\{u_n\}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. En effet, soit $q \in]1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$, d'après le corollaire 6.3.1, $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, donc dans $L^q(\Omega)$ et donc aussi dans $L^1(\Omega)$ (on suppose Ω borné). Comme $L^1(\Omega) \subset M(\Omega)$ ($L^1(\Omega)$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace de $M(\Omega)$, voir Brézis, pp. 75–76), on peut extraire[4] de $\{u_n\}$ une sous-suite $\{u_{n_1}\}$ convergeant vers une mesure $u \in M(\Omega)$ au sens vague des mesures, i.e.

$$\int_\Omega u_{n_1}\varphi \to \langle u, \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in C_c(\Omega).$$

Donc aussi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cela signifie que

$$u_{n_1} \to u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Considérons maintenant un exposant $q \in]1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$ quelconque. Comme $\{u_{n_1}\}$ est borné dans l'espace réflexif $W_0^{1,q}(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite $\{u_{n_2}\}$ telle que

$$u_{n_2} \rightharpoonup v \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad \text{faiblement}$$

et $\{u_{n_2}\}$ peut être choisie pour que $u_{n_2} \rightharpoonup v$ dans $L^q(\Omega)$ faiblement, de sorte que

$$u_{n_2} \to v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

et comme on a aussi $u_{n_2} \to u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, cela prouve que

$$u = v \in W_0^{1,q}(\Omega), \ \forall q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[.$$

Finalement, en vertu du théorème de Rellich-Kondrachov, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$, on peut extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite $\{u_\nu\}$ telle que

$$u_\nu \rightharpoonup u \ \text{ dans } \ W_0^{1,q}(\Omega) \ \text{ (faible)}, \quad u_\nu \to u \ \text{ dans } \ L^q(\Omega) \ \text{ fort et p.p. dans } \ \Omega.$$

Exercise 6.3.2 Supposons $1 < p < N$ et soit

$$\gamma^\star = \Big(\frac{N}{N-1}(p-1)\Big)^\star = \frac{N}{N-p}(p-1)$$

l'exposant de Sobolev associé à $\frac{N}{N-1}(p-1)(< N)$. Soit $\{u_n\}$ une suite de solutions des problèmes $(\mathcal{P}_n)$. Montrer que $\forall \gamma \in [1, \gamma^\star[$, (toute) la suite $\{u_n\}$ converge fortement dans $L^\gamma(\Omega)$.

Énoncer et démontrer l'analogue de ce résultat pour $p = N$.

Exercise 6.3.3 Montrer que si

$$-\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u)) = -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$$

avec $a_{ij}(s)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées pour $i, j = 1, \dots, N$, les convergences obtenues permettent de conclure :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il existe } \ u \in W_0^{1,q}(\Omega), \ q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[\ \text{ tel que} \\ \quad -\displaystyle\sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) = \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \end{array}\right.$$

4. On utilise ici le Corollaire III. 26 de Brézis. L'espace $C_c(\Omega)$ n'étant pas complet pour la norme du sup, on applique ce Corollaire à l'espace $C_0(\Omega)$ des fonctions "nulles à l'infini" muni de la norme du sup, et on remarque que son dual est isométriquement isomorphe à $M(\Omega)$.

Mais, si $\hat{a}$ dépend du gradient ∇u, on a besoin de plus de “convergence” sur les gradients ∇u_n. C'est ce que nous allons tâcher d'obtenir :

Proposition 6.3.3 *Soit u la fonction construite dans la sous-section 6.3.3 p. 84. On a :*

$$T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \forall T \in Lip_p(\mathbb{R}).$$

En particulier, en prenant $T = T_k$ (troncature aux niveaux $-k$ et k), on a :

$$u^k = T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Preuve. Soient $T \in Lip_p(\mathbb{R})$ et $\{u_n\}$ telle que $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$, $q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$. Comme

$$|T(u_n) - T(u)| \leq ||T'||_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_n - u| \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,$$

il résulte que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^q(\Omega)$, de sorte que

$$T(u_n) \to T(u) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T(u_n) \to \nabla T(u) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

Par ailleurs, grâce à la proposition 6.3.1, $\{T(u_n)\}$ reste dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite, notée de même, telle que

$$T(u_n) \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{faible}$$

donc

$$\nabla T(u_n) \to \nabla w \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N,$$

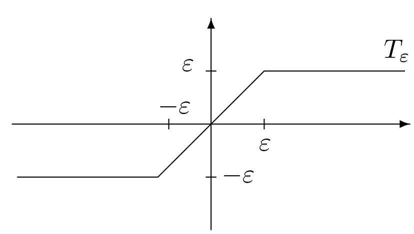
cela implique que $\nabla w = \nabla T(u)$, ce qui signifie que $T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 6.3.4 *Pour tout $k > 0$, on a :*

$$\int_{\{x \in \Omega |\, |u_n - u^k| \leq \varepsilon\}} \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u^k) \leq \varepsilon \, ||\mu||_{M(\Omega)}, \ \forall \varepsilon > 0; \ u^k = T_k(u).$$

Preuve. Soit $k > 0$ fixé et, pour $\varepsilon > 0$, soit T_ε la troncature aux niveaux $-\varepsilon$ et ε. Cette fonction T_ε est lipschitzienne, $T_\varepsilon(0) = 0$ et

$$T'_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \varepsilon \\ 1, & |t| < \varepsilon. \end{cases}$$



Comme, d'après la proposition 6.3.3, $u^k \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la fonction $v_n = T_\varepsilon(u_n - u^k)$ est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En la prenant comme fonction test dans $(\mathcal{P}_n)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in \Omega || u_n - u^k| \leq \varepsilon\}} \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u^k) &= \int_\Omega \mu_n T_\varepsilon(u_n - u^k) \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega |\mu_n| \leq \varepsilon \, ||\mu||_{M(\Omega)}. \end{aligned}$$

6.3.4 Un lemme fondamental de compacité

Lemme 6.3.2 (de compacité) *Soit $\{u_n\}$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ possédant les propriétés suivantes :*

a) *Il existe $q \in]1,p]$ tel que $\{u_n\}$ reste dans un borné de $W_0^{1,q}(\Omega)$ et u_n converge faiblement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers une fonction u et $u_n \to u$ p.p. dans Ω.*

b) *Pour tout $k > k_0 \geq 0, \{u_n^k\} = \{T_k(u_n)\}$ demeure dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

c) *Pour tout $k > k_0 \geq 0$, il existe une fonction C_k telle que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{x\in\Omega|\,|u_n-u^k|\leq\varepsilon\}} \hat{a}(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-u^k) \leq C_k(\varepsilon),\ \forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[,\varepsilon_0>0$$

avec $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} C_k(\varepsilon) = 0$ et $\hat{a}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant ($\hat{a}$.1–3).
Alors, il existe une sous-suite $\{u_\nu\}_{\nu\geq 1}$ telle que

$$\nabla u_\nu \to \nabla u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega$$

et, pour toute la suite, on a :

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,s}(\Omega) \quad \text{fort} \quad \forall s\in[1,q[.$$

Preuve [5] **.** Considérons la suite des réels

$$S_n = \int_\Omega \{\Delta(u_n,u)\}^{1/p} dx \equiv \int_\Omega R_n(x)\,dx$$

avec

$$\Delta(u_n,u)(x) = [\hat{a}(x,u_n,\nabla u_n) - \hat{a}(x,u_n,\nabla u)]\cdot\nabla(u_n-u)(x).$$

Cette quantité est définie p.p. dans Ω du fait que u_n et u sont dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Quant à la suite $\{S_n\}$ elle est bien définie. En effet,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta(u_n,u) \leq\ & C\big\{|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1} + a_0\big\}\big\{|\nabla u_n| + |\nabla u|^{p-1}\big\} \\ & \text{(grâce à ($\hat{a}$.2) et ($\hat{a}$.3) ; C désigne différentes constantes)} \\ \leq\ & C\big\{|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1} + \big(a_0^{\frac{1}{p-1}}\big)^{p-1}\big\} \\ & \qquad\qquad \big\{|u_n| + |\nabla u_n| + |\nabla u| + a_0\big\} \\ \leq\ & C\{|u_n|^p + |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p + a_0^{p'}\}. \end{aligned}$$

[J'ai utilisé l'inégalité

$$\Big(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^{p-1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|\Big) \leq m\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p, \quad \text{où les } \alpha_i \text{ sont des nombres réels.]}$$

Par conséquent :

$$\big\{\Delta(u_n,u)\big\}^{1/p} \leq C\big\{|u_n| + |\nabla u_n| + |\nabla u| + a_0^{\frac{1}{p-1}}\big\}$$

et

$$\begin{aligned} S_n \quad \leq \quad & C\Big\{\Big(\int_\Omega |u_n|^q\Big)^{1/q} + \Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^q\Big)^{1/q} + \Big(\int_\Omega |\nabla u|^q\Big)^{1/q}\Big\}|\Omega|^{1-\frac{1}{q}} \\ & + C\Big(\int_\Omega a_0^{p'}\Big)^{1/p}|\Omega|^{1-\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Notre but est de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Pour ce faire nous fixons $k > k_0$ et écrivons

$$S_n = S_n^1 + S_n^2 \quad \text{avec} \quad S_n^1 = \int_{\{|u|\leq k\}} R_n(x)\,dx \quad \text{et} \quad S_n^2 = \int_{\{|u|>k\}} R_n(x)\,dx$$

5. Voir aussi la preuve donnée dans **J. M. Rakotoson,** *Quasilinear elliptic problems with measures as data,* Diff. Int. Equ. 4 (1991), 449–457.

où $\{|u| \leq k\} = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \leq k\}$.

Pour estimer S_n^2 nous écrivons

$$\begin{aligned} S_n^2 \leq \quad & C\Big\{\big(\textstyle\int_\Omega |u_n|^q\big)^{1/q} + \big(\int_\Omega |\nabla u_n|^q\big)^{1/q} \\ & \qquad + \big(\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^q\big)^{1/q}\Big\}|\{|u| > k\}|^{1-1/q} \\ & \qquad\qquad + C\big(\textstyle\int_\Omega a_0^{p'}\big)^{1/p}|\{|u| > k\}|^{1-1/p} \\ \leq \quad & C\big\{|\{|u| > k\}|^{1-1/q} + |\{|u| > k\}|^{1-1/p}\big\} \quad \text{(grâce à l'hypothèse (a)).} \end{aligned}$$

Mais

$$\int_\Omega |u|^q \geq \int_{\{|u|>k\}} |u|^q \geq k^q |\{|u| > k\}|,$$

donc

$$|\{|u| > k\}| \leq k^{-q} \int_\Omega |u|^q \leq C k^{-q},$$

de sorte que

$$(\cdot) \qquad S_n^2 \leq C\{k^{-(q-1)} + k^{-q(1-1/p)}\}, \quad (C \text{ est une constante}).$$

Concernant S_n^1, nous l'estimons comme suit. Nous l'écrivons sous la forme $S_n^1 = S_n^{11} + S_n^{12}$ avec

$$S_n^{11} = \int\limits_{\{|u|\leq k, |u_n - u| \leq \varepsilon\}} R_n(x) dx \quad \text{et} \quad S_n^{12} = \int\limits_{\{|u|\leq k, |u_n - u| > \varepsilon\}} R_n(x)\, dx,\ \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0].$$

Commençons par S_n^{12} qui peut être traité comme S_n^2. On a :

$$\begin{aligned} S_n^{12} \leq \quad & C\Big\{\big(\textstyle\int_\Omega |u_n|^q\big)^{1/q} + \big(\int_\Omega |\nabla u_n|^q\big)^{1/q} + \big(\int_\Omega |\nabla u|^q\big)^{1/q}\Big\}\times \\ & \qquad \times|\{|u| \leq k, |u_n - u| > \varepsilon\}|^{1-1/q} \\ & \qquad\qquad + C\big(\textstyle\int_\Omega a_0^{p'}\big)^{1/p}|\{|u| \leq k, |u_n - u| > \varepsilon\}|^{1-1/p} \\ \leq \quad & C\big\{|\{|u| \leq k, |u_n - u| > \varepsilon\}|^{1-1/q} + |\{|u| \leq k, |u_n - u| > \varepsilon\}|^{1-1/p}\big\}. \end{aligned}$$

Et comme $\{u_n\}$ converge vers u p.p. dans Ω, elle converge vers u en mesure dans Ω, par conséquent

$$(\cdot\cdot) \qquad \limsup_{n\infty} S_n^{12} \leq O(\varepsilon^{1-1/q}) + O(\varepsilon^{1-1/p}).$$

Estimons maintenant S_n^{11}

$$(:\cdot) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_n^{11} \quad &= \int\limits_{\{|u|\leq k, |u_n-u|\leq\varepsilon\}} \Delta^{1/p}(u_n, u)\, dx \\ &\leq \Bigg\{ \int\limits_{\{|u|\leq k, |u_n-u|\leq\varepsilon\}} \Delta(u_n, u)\, dx \Bigg\}^{1/p} |\{|u| \leq k, |u_n - u| \leq \epsilon\}| \\ &\leq |\Omega|^{1-\frac{1}{p}} \Bigg\{ \int\limits_{\{|u|\leq k, |u_n-u^k|\leq\varepsilon\}} \Delta(u_n, u^k) \Bigg\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\Omega|^{1-\frac{1}{p}} \Bigg\{ \int\limits_{\{|u_n-u^k|\leq\varepsilon\}} \Delta(u_n, u^k) \Bigg\}^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned} \right.$$

Nous sommes conduit à étudier la quantité

$$I_{k,n}(\varepsilon) = \int\limits_{\{|u_n-u^k|\le\varepsilon\}} [\hat{a}(x,u_n,\nabla u_n) - \hat{a}(x,u_n,\nabla u^k)]\cdot\nabla(u_n-u^k)$$

que nous écrivons

$$I_{k,n}(\varepsilon) = J_{k,n}(\varepsilon) - K_{k,n}(\varepsilon)$$

avec

$$J_{k,n}(\varepsilon) = \int\limits_{\{u_n-u^k|\le\varepsilon\}} \hat{a}(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-u^k)$$

et

$$K_{k,n}(\varepsilon) = \int\limits_{\{|u_n-u^k|\le\varepsilon\}} \hat{a}(x,u_n,\nabla u^k)\cdot\nabla(u_n-u^k).$$

Estimations $K_{k,n}(\varepsilon)$: Notons d'abord que pour $|u_n-u^k|\le\varepsilon\le 1$, on a $u_n = u_n^{k+1}$ et par suite

$$K_{k,n}(\varepsilon) = \int_\Omega \hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)\cdot\nabla(T_\varepsilon(u_n-u^k))$$

où T_ε est la fonction de troncature $T_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\{|t+\varepsilon| - |t-\varepsilon|\}$. La suite $\{T_\varepsilon(u_n-u^k)\}_{n\ge1}$ est fortement convergente dans $L^p(\Omega)$ vers $T_\varepsilon(u-u^k)$ (utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue). La fonction $T_\varepsilon(u-u^k)$ est en fait dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour le voir nous considérons les suites $\{\partial_i T_\varepsilon(u_n-u^k)\}_{n\ge1}$, pour $i=1,...,N$, où

$$\partial_i T_\varepsilon(u_n-u^k) = \begin{cases} \partial_i u_n^{k+1} - \partial_i u^k, & |u_n-u^k|\le\varepsilon\le 1 \\ 0, & |u_n-u^k| > \varepsilon \end{cases}$$

qui demeurent bornées -grâces à (b)- dans l'espace réflexif $L^p(\Omega)$ de sorte qu'elles possèdent une sous-suites faiblement convergente dans $L^p(\Omega)$ nécessairement vers $\partial_i T_\varepsilon(u-u^k)$, $i=1,...,N$.

Prouvons maintenant que

$$\hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k) \to \hat{a}(x,u^{k+1},\nabla u^k) \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega)^N \quad \text{fort.}$$

Comme la fonction vectorielle $\hat{a}$ est de Carathéodory, on a :

$$\hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k) \to \hat{a}(x,u^{k+1},\nabla u^k) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega$$

et donc, il suffit -grâce à Lebesgue- de majorer $|\hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)|$ par une fonction de $L^{p'}(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} |\hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)| &\le C\big\{|u_n^{k+1}|^{p-1} + |\nabla u^k|^{p-1} + a_0\big\} \\ &\le C\big\{(k+1)^{p-1} + |\nabla u^k|^{p-1} + a_0\big\} \in L^{p'}(\Omega). \end{aligned}$$

La convergence forte de $\big\{\hat{a}(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)\big\}_{n\ge1}$ vers $\hat{a}(x,u^{k+1},\nabla u^k)$ dans l'espace $L^{p'}(\Omega)^N$ et la convergence faible de $\Big\{\nabla\big(T_\varepsilon(u_n-u^k)\big)\Big\}$ vers $\nabla(T_\varepsilon(u-u^k))$ dans $L^p(\Omega)^N$ nous permet d' écrire :

$$\lim_{n\infty} K_{k,n}(\varepsilon) = \int_\Omega \hat{a}(x,u^{k+1},\nabla u^k)\cdot\nabla(T_\varepsilon(u-u^k)) \equiv K_k(\varepsilon).$$

Étudions le comportement de $K_k(\varepsilon)$ quand $\varepsilon\downarrow 0$.
On a $T_\varepsilon(u-u^k)\to 0$ fortement dans $L^p(\Omega)$ quand $\varepsilon\downarrow 0$, et comme, pour $\varepsilon\le 1$

$$T_\varepsilon(u-u^k) = T_\varepsilon(u^{k+1}-u^k) = \begin{cases} u^{k+1}-u^k & \text{si} \quad |u-u^k|\le\varepsilon \\ \varepsilon\,\mathrm{sign}\,(u^{k+1}-u^k) & \text{si} \quad |u-u^k|>\varepsilon \end{cases}$$

on a, pour $i = 1, ..., N$:

$$\partial_i T_\varepsilon(u - u^k) = \begin{cases} \partial_i u^{k+1} - \partial_i u^k & \text{si} \quad |u - u^k| \le \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |u - u^k| > \varepsilon. \end{cases}$$

Donc $\left\{\partial_i T_\varepsilon(u - u^k)\right\}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$; on peut alors en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers une fonction qui est nécessairement la dérivée distribution de zéro. Par conséquent $\partial_i T_\varepsilon(u - u^k) \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ quand $\varepsilon \downarrow 0$, pour $i = 1, ..., N$; ce qui montre que

$$(\star) \qquad K_k(\varepsilon) = \int_\Omega \hat{a}(x, u^{k+1}, \nabla u^k) \cdot \nabla(T_\varepsilon(u - u^k)) = 0_k(1)(\varepsilon \downarrow 0).$$

Utilisant la positivité de $\Delta(u_n, u)$, l'hypothèse (c), l'estimation $(\star)$ et le fait que

$$I_{k,n}(\varepsilon) = J_{k,n}(\varepsilon) - K_{k,n}(\varepsilon)$$

on voit que :

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} 0 \le \limsup\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\{|u|\le k, |u_n - u^k| \le \varepsilon\}} \Delta(u_n, u^k) \le \limsup\limits_{n\to\infty} I_{k,n}(\varepsilon) \\ \qquad = \limsup\limits_{n\to\infty} J_{k,n}(\varepsilon) - \lim\limits_{n\to\infty} K_{k,n}(\varepsilon) \\ \qquad = o_k(1)(\varepsilon \downarrow 0) + o(1)(k \to \infty) \end{cases}$$

Nous déduisons alors de $(\because)$ et $(\star\star)$ que :

$$(\overset{\star}{\star\star}) \qquad \limsup_{n\to\infty} S_n^{11} \le o_k(1)(\varepsilon \downarrow 0) + o(1)(k \to \infty).$$

Comme $S_n = S_n^{11} + S_n^{12} + S_n^2$, il résulte de $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ et $(\overset{\star}{\star\star})$ que :

$$0 \le \limsup_{n\infty} S_n \le o_k(1)(\varepsilon \downarrow 0) + o(1)(k \to \infty)$$

de sorte qu'en faisant d'abord tendre ε vers 0 ensuite k vers $+\infty$, on obtient :

$$0 = \lim_{n\infty} S_n = \lim_{n\infty} \int_\Omega R_n(x)dx.$$

Nous pouvons donc extraire de $\{R_n\}$ une sous-suite $\{R_\nu\}$ telle que $R_\nu(x) \to 0$ p.p. dans Ω quand $\nu \to \infty$. On peut alors trouver un sous-ensemble Z de Ω négligable tel que

$$\Delta(u_\nu, u)(x) \to 0, \ \forall x \in \Omega \setminus Z.$$

Ce sous-ensemble peut être choisi de manière à ce que toutes les fonctions intervenant dans Δ et les conditions ($\hat{a}$.1–3) soient définies sur $\Omega \setminus Z$, avec $u_\nu(x) \to u(x)$ et

$$[\hat{a}(x, s, \xi) - \hat{a}(x, s, \xi')] \cdot [\xi - \xi'] > 0, \ \forall x \in \Omega \setminus Z, \ \forall \xi \ne \xi' \in \mathbb{R}^N.$$

On a :

$$(4\star) \qquad \begin{cases} \Delta(u_\nu, u)(x) \quad \ge \alpha|\nabla u_\nu|^p + \alpha|\nabla u|^p \\ \qquad\qquad - C\{|u_\nu|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1} + a_0\}|\nabla u_\nu| \\ \qquad\qquad\qquad - C\{|u_\nu|^{p-1} + |\nabla u_\nu|^{p-1} + a_0\}|\nabla u| - 2C_0. \end{cases}$$

Comme

$$\lim_{\nu\to\infty} \Delta(u_\nu, u)(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to\infty} u_\nu(x) = u(x), \ \forall x \in \Omega \setminus Z,$$

la relation (4⋆) implique que $\{\nabla u_\nu(x)\}_{\nu\geq 1}$ est bornée pour tout $x\in\Omega\setminus Z$. Donc, pour tout $x\in\Omega\setminus Z$, on peut extraire de $\{\nabla u_\nu(x)\}_{\nu\geq 1}$ une sous-suite $\{\nabla u_{\nu'}(x)\}_{\nu'\geq 1}$ qui converge vers un vecteur $\xi^\star(x)\in\mathbb{R}^N$. En un tel x, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\nu'\to\infty}\Delta(u_{\nu'},u)(x)\\ &= [\hat{a}(x,u(x),\xi^\star(x))-\hat{a}(x,u(x),\nabla u(x))]\cdot(\xi^\star(x)-\nabla u(x)); \end{aligned}$$

ce qui implique, grâce à ($\hat{a}$.3), que

$$\xi^\star(x)=\nabla u(x),$$

et comme la suite $\big\{\nabla u_\nu(x)\big\}_{\nu\geq 1}$ a un seul point adhérent qui est $\nabla u(x)$, on a pour toute la suite :

$$\lim_{v\to\infty}\nabla u_v(x)=\nabla u(x),\ \forall x\in\Omega\setminus Z.$$

Pour montrer que $u_\nu\to u$ fortement dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s\in[1,q[$, on utilise le

Théorème 6.3.2 (de convergence de Vitali, Giuseppe 1875–1932)
Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné et $\{f_n\}$ une suite de $L^1(\omega)$ telle que

- *$f_n\to f$ p.p. dans ω et $\{f_n\}$ équi-intégrable dans ω, i.e.*
- $$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall E\subset\omega \text{ mesurable avec } |E|\leq\delta,\ \text{ on a } \int_E|f_n|\leq\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Alors

$$f\in L^1(\omega)\quad \text{et}\quad f_n\to f\quad \text{dans}\quad L^1(\omega)\quad \text{fort.}$$

Admettons ce théorème et utilisons le pour terminer la preuve du lemme 6.3.2.

Soit $s\in[1,q[$ et posons $f_\nu=|\nabla(u_\nu-u)|^s$; on a $f_\nu\to 0$ p.p. dans Ω et pour $E\subset\Omega$, on peut écrire :

$$\int_E f_\nu=\int_E|\nabla(u_\nu-u)|^s\leq\Big(\int_E|\nabla(u_\nu-u)|^q\Big)^{s/q}|E|^{1-s/q}$$

ce qui prouve l'équi-intégrabilité de $\{f_\nu\}$ dans Ω. Il résulte alors du théorème de Vitali que

$$u_\nu\to u\quad \text{dans}\quad W_0^{1,s}(\Omega)\quad \text{fort},\ \forall s\in[1,q[.$$

En fait, un raisonnement par l'absurde, montre que toute la suite $\{u_n\}$ converge fortement vers u dans $W_0^{1,s}(\Omega),\ \forall s\in[1,q[$.

6.3.5 Passage à la limite dans les problèmes approchés

Soit $q\in]1,\frac{N}{N-1}(p-1)[$. D'une part, d'après le corollaire 6.3.1, la suite des solutions approchées $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ et l'on a $u_n\longrightarrow u$ p.p. dans Ω et d'après la construction de u, on peut supposer que $u_n\rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. D'autre part, d'après la proposition 6.3.1, $\{u_n^k\}$ demeure dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et d'après la proposition 6.3.4, on a, pour tout $k>0$:

$$\int_{\{x\in\Omega||u_n-u^k|\leq\varepsilon\}}\hat{a}(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-u^k)\leq\varepsilon\,||\mu||_{M(\Omega)},\ \forall\varepsilon>0.$$

Cela montre que toutes les hypothèses du lemme 6.3.2 sont satisfaites par $\{u_n\}$ et u. On peut donc trouver une sous-suite $\{u_\nu\}$ telle que

$$u_\nu\longrightarrow u\quad \text{et}\quad \nabla u_\nu\longrightarrow\nabla u\quad \text{p.p. dans}\quad\Omega$$

et

$$u_\nu\longrightarrow u\quad \text{dans}\quad W_0^{1,s}(\Omega),\ \forall s\in[1,q[\quad \text{fort.}$$

Fixons maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a :

$$\int_\Omega \hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \mu_\nu \varphi.$$

a) Passage à la limite dans $\int_\Omega \mu_\nu\varphi$. Par le choix même de la suite $\{\mu_n\}$, on a :

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \mu_\nu\varphi = \langle \mu, \varphi\rangle.$$

b) Passage à la limite dans $\int_\Omega \hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi$. Puisque $\hat{a}$ est de Carathéodory, on a :

$$\hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi \longrightarrow \hat{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Comme

$$\frac{N}{N-1}(p-1) - (p-1) = (p-1)\Big[\frac{N}{N-1} - 1\Big] = \frac{p-1}{N-1} > 0,$$

on peut choisir $q > p-1$; c'est ce qu'on suppose fait dans la suite. Ceci étant, pour $E \subset \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_E |\hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi| \quad &\leq \quad |||\nabla\varphi|||_{L^\infty(\Omega)}\, C \int_E \{|u_\nu|^{p-1} + |\nabla u_\nu|^{p-1} + a_0\} \\
&\leq \quad C\Big\{\Big(\int_E |u_\nu|^q\Big)^{\frac{p-1}{q}} + \Big(\int_E |\nabla u_\nu|^q\Big)^{\frac{p-1}{q}}\Big\}|E|^{1-\frac{p-1}{q}} \\
&\qquad + \Big(\int_E a_0^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}|E|^{\frac{1}{p}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Comme $\{u_\nu\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ (utiliser l'inégalité de Poincaré), on a :

$$\int_E |\hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi| \leq C|E|^{1-\frac{p-1}{q}} + C|E|^{\frac{1}{p}},\ \forall \nu \geq 1,$$

ce qui prouve l'équi-intégrabilité de la suite $\{\hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi\}$. Il résulte alors du théorème de convergence de Vitali que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \hat{a}(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \hat{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi.$$

On a donc prouvé que

$$\int_\Omega \hat{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi = \langle \mu, \varphi\rangle,\ \forall \in \mathcal{D}(\Omega)$$

i.e. que u est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{c} u \in W_0^{1,q}(\Omega),\ q \in \big[1, \frac{N}{N-1}(p-1)\big[\\ Au = \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega). \end{array}\right.$$

Le théorème 6.3.1 est alors démontré (et le problème $(\mathcal{P}_0)$ résolu).

Remarque 6.3.1 Concernant le problème $(\mathcal{P})$, en supposant que le terme F vérifie en plus la condition de signe :

$$F(x, s, \xi)s \geq 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

la méthode utilisée permet de montrer l'existence d'une solution. En effet, pour $\hat{a}$ et F vérifiant les hypothèses $(\hat{a}.1-3)$ et (F) respectivement, le théorème **??** garantit l'existence d'une solution u_n du problème approché vérifiant

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla v + \int_\Omega F(x, u_n, \nabla u_n)v = \int_\Omega \mu_n v, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right.$$

En prenant les mêmes fonctions test et en utilisant la condition de signe sur F, on voit que les propositions 6.3.1 et 6.3.2 (et par conséquent le corollaire 6.3.1) restent vrais pour les solutions $\{u_n\}$ des problèmes $(\mathcal{P}_n)$. Ces résultats permettent de construire une fonction u telle que $u \in W_0^{1,\,q}(\Omega)$, $\forall q \in [1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$. Le lecteur peut aussi vérifier que cette fonction vérifie aussi la proposition 6.3.4.

Les estimations obtenues permettent d'utiliser le lemme de compacité 6.3.2 qui permet le passage à la limite pour obtenir une solution du problème $(\mathcal{P})$ avec, en plus, la condition de signe sur le terme F.

Chapitre 7

Problèmes elliptiques à donnée mesure : cas $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$

Il s'agit dans ce chapitre de résoudre le problème $(\mathcal{P}_0)$ dans le cas qui n'a pas été traité dans le chapitre précédent à savoir le cas où $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$.

7.1 Le problème $(\mathcal{P}_0)$: Cas $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}$

On considère toujours l'opérateur sans le terme F :

$$Au = -\operatorname{div}\left(\hat{a}(x, u, \nabla u)\right)$$

où $\hat{a}(x, s, \xi)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant les conditions $(\hat{a}.1) - (\hat{a}.3)$ données dans **??**. L'équation modèle montre que dans ce cas le cadre des espaces de Sobolev est insuffisant pour chercher une solution éventuelle de

$$\begin{cases} Au &= \mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{“}u &= 0\text{”} \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous devons donc élargir le cadre des espaces de Sobolev pour espérer trouver une solution.

Pour trouver les “matériaux” qui nous serviront pour construire un ensemble susceptible d'être un cadre adéquat pour résoudre notre problème, nous reprenons le cas (déja étudié) de $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$.

Nous devrons passer en revue toutes les propriétés (estimations) des solutions approchées $\{u_n\}$ qui sont vraies pour tout $p > 1$ et les propriétés de la solution (exacte) u qui en découlent plus au moins directement.

Nous relevons pour $\{u_n\}$ que :

⋆ Pour tout $T \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, il existe une constante $C = C(T) > 0$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla T(u_n)|^p \leq C, \ \forall n \geq 1$$

et

⋆ Pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C = C(\delta) > 0$ telle que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} \leq C, \ \forall n \geq 1.$$

Ce qui conduit, si on a les convergences nécessaires, à :

⋆ Pour tout $T \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, on a $T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$

et

⋆ pour tout $\delta > 0$, on a

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{(1 + |u|)^{1+\delta}} < \infty.$$

Comme la dernière relation contient ∇u et que dans le cas qui nous intéresse u n'est pas nécessairement dans un espace de Sobolev, l'existence de ∇u n'est pas a priori claire. Cela a conduit le professeur J.M. Rakotoson à proposer un cadre nouveau, celui des T-ensembles.

7.2 Les T-ensembles et leurs propriétés

Définition 7.2.1 L'ensemble $L_0^{1,p}(\Omega)$ formé des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $\forall T \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, $T(u)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^p}{(1+|u^k|)^{1+\delta}} < \infty, \ \forall \delta > 0$$

est appelé T-ensemble ; le T est mis pour troncature.

Une fois la définition d'un T-ensemble posée, plusieurs questions très naturelles se posent.

- Existe-t-il des relations en les T-ensembles et les espaces de Sobolev ; est ce que les T-ensembles "élargissent" réellement les espaces de Sololev.
- Puisque les espaces de Sobolev sont un bon cadre pour résoudre notre problème dans le cas $p > 2-\frac{1}{N}$; que deviennent alors les T-ensembles pour $p > 2 - \frac{1}{N}$?

Ensuite, pour que le T-ensemble $L_0^{1,p}(\Omega)$ puisse servir de cadre pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_l)$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{a}(x,u,\nabla u)) & = & \mu & \text{dans} & \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{“}u & = 0 & \text{”} & \text{sur} & \partial\Omega, \end{cases}$$

il doit posséder suffisamment de propriétés pour donner un sens à tous les "éléments" constituant notre problème. En particulier, pour $u \in L_0^{1,p}(\Omega)$, peut-on

- parler de ∇u et dans quel sens ?
- justifier l'existence de $\operatorname{div}(\hat{a}(x,u,\nabla u))$ au sens des distributions ?
- parler de trace de u sur $\partial\Omega$ et dans quel sens ?

C'est à ces différentes questions que nous allons tenter de répondre dans ce qui suit. Nous donnerons les relations "liant" les T-ensembles et les espaces de Sobolev pour les différentes valeurs de p, nous montrerons que ∇u existe presque partout dans Ω. Nous "réaliserons" la condition "$u = 0$" sur $\partial\Omega$ en exigeant simplement que u appartient a $L_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour justifier l'existence de $\operatorname{div}(\hat{a}(x,u,\nabla u))$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$, il suffit que $\hat{a}(x,u,\nabla u))$ soit dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^N$ et comme

$$|\hat{a}(x,u,\nabla u)| \leq C\left\{|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1} + a_0\right\},$$

il suffit d'avoir $|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Cela peut être prouvé.

Théorème 7.2.1

a) *On a l'inclusion algébrique* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_0^{1,p}(\Omega), \ \forall p > 1$.

b) *Si* $v \in L_0^{1,p}(\Omega)$*, le gradient* $\nabla v(x)$ *existe p.p. dans* Ω *et pour tout* $k > 0$*, la fonction* $v^k = T_k(v)$ *est telle que*

$$\nabla v^k(x) = \begin{cases} \nabla v(x) & si \quad |v(x)| < k \\ \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad p.p. \ dans \quad \Omega.$$

La dérivée ici n'est pas en général une dérivée distribution penser à u_{mod}, la solution de l'exemple modèle donnée à la sous-section 6.2.1, qui est dans $L_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p > 1$ (vérifier le) et cette solution n'est dans $L^1(\mathcal{U})$ que pour $p > \frac{2N}{N+1}$.

Preuve.

a) Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après le lemme de Stampacchia 6.3.1, pour $T \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, $T(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour $k > 0$ et $\delta > 0$, on peut écrire

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^p}{(1+|u^k|)^{1+\delta}} \leq \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{(1+|u|)^{1+\delta}} \leq \int_\Omega |\nabla u|^p < \infty.$$

D'où $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.

b) Soit $v \in L_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $\Phi_0 = \text{Arctg}$ est dans $\text{Lip}_p(\mathbb{R})$, on a $w = \Phi_0(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc, d'après un théorème de Deny-Lions, w est (eventuellement après modification sur un sous-ensemble de Ω de mesure N-dimensionnelle nulle) absolument continue sur presque tous les segments de Ω parallèles aux axes de coordonnées et le gradient de w au sens usuel existe p.p. dans Ω. Donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et pour presque tout $x \in \Omega$, $\nabla w(x)$ existe et l'application $\mathbb{R} \ni t \to w(x + te_i) \in \mathbb{R}$ (e_i étant le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$) est absolument continue pour t dans un intervalle fermé $I(x) \subset \mathbb{R}$ centré à l'origine. Nous avons donc pour x non exceptionnel et $t \in I(x)$ (remarquer que $w(y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, y p.p. dans Ω) :

$$\begin{array}{rcl} v(x+te_i) - v(x) & = & \text{tg}\, w(x+te_i) - \text{tg}\, w(x) \\ & = & (1 + \text{tg}^2\, C_{x,t})[w(x+te_i) - w(x)]. \end{array}$$

En faisant tendre t vers zéro, la continuité (absolue) de w sur le segment passant par x dans la direction e_i montre que $C_{x,t}$ tend vers $w(x)$ de sorte que

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) & = & \lim\limits_{t \to 0} \frac{v(x+te_i)-v(x)}{t} \\ & = & (1 + \text{tg}^2\, w(x)) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x). \end{array}$$

c) Soit $k > 0$. Pour $\Phi_0(t) = \text{Arctg}\, t$, posons $w^{\Phi_0(k)} = T_{\Phi_0(k)}(w)$. Comme

$$T_{\Phi_0(k)}(w) = \begin{cases} \Phi_0(k) & \text{si} \quad w > \Phi_0(k) \\ w & \text{si} \quad -\Phi_0(k) \leq w \leq \Phi_0(k) \\ -\Phi_0(k) & \text{si} \quad w < -\Phi_0(k), \end{cases}$$

en prenant la tangente de $w^{\Phi_0(k)}$, on obtient $v^k = \text{tg}\, w^{\Phi_0(k)}$ et donc, pour presque tout $x \in \Omega$, tous $i = 1, \ldots, N$, on peut écrire en utilisation la règle de dérivation en chaîne dans les espaces de Sobolev :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v^k}{\partial x_i}(x) & = & (1 + \text{tg}^2\, w^{\Phi_0(k)}) \dfrac{\partial w^{\Phi_0(k)}}{\partial x_i}(x) \\ & = & (1 + \text{tg}^2\, w^{\Phi_0(k)}) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) & \text{si} \quad |w(x)| < \Phi_0(k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ & = & (1 + v^2) \begin{cases} \frac{1}{1+v^2} \frac{\partial v}{\partial x_i} & \text{si} \quad |v| < k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

d'où

$$\nabla v^k(x) = \begin{cases} \nabla v & \text{si} \quad |v(x)| < k \\ & \\ 0 & \text{si} \quad |v(x)| \geq k \end{cases} \qquad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Remarque 7.2.1 Comme les fonctions de $L_0^{1,p}(\Omega)$ ne sont pas nécessairement dans $L^1_{loc}(\Omega)$, les dérivées partielles dont il est question ici ne sont pas des dérivées au sens des distributions.

Théorème 7.2.2 (Inclusions de type Sobolev) *Pour*

a) $1 < p < N$, *on a l'inclusion algébrique :*

$$L_0^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega), \ \forall s \in \left]0, \frac{N}{N-p}(p-1)\right[.$$

b) $p = N$, *on a*

$$L_0^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega), \ \forall s > 0.$$

c) $p > N$, *on a*

$$L_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega).$$

Remarque 7.2.2 L'exposant de Lebesgue s peut être pris dans l'intervalle $]0,1[$; et dans ce cas, on pose :

$$L^s(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mesurable } \ \mid |v|^s \in L^1(\Omega)\}\cdot$$

Pour $s \geq 1$, l'espace $L^s(\Omega)$ est muni de sa norme classique ; tandis que dans le cas $0 < s < 1$, on le munit de

$$\rho(u,v) = \int_\Omega |u-v|^s$$

qui en fait un espace métrique.

Preuve du théorème 7.2.2.

a) Soient $v \in L_0^{1,p}(\Omega)$ et $s \in]0, \frac{N}{N-p}(p-1)[\cdot$ Posons $\alpha = 1 - \frac{s}{p^\star}$ avec $p^\star = \frac{Np}{N-p}$; donc $\frac{1}{p} < \alpha < 1$. Pour $k > 0$, on a $v^k = T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et comme la fonction réelle

$$\Psi_\alpha(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\{(1+|t|)^{1-\alpha} - 1\}\,\text{sign}\,(t)$$

est de classe C^1 avec $0 < \Psi'_\alpha(t) \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $\Psi_\alpha(v^k)$ est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il résulte alors du théorème d'injection de Sobolev et de l'inégalité de Poincaré que :

$$|\Psi_\alpha(v^k)|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C_\Omega \left|\left|\nabla \Psi_\alpha(v^k)\right|\right|_{L^p(\Omega)}$$

i.e.

$$\left(\int_\Omega |\Psi_\alpha(v^k)|^{p^\star}\right)^{1/p^\star} \leq C_\Omega \left(\int_\Omega \frac{|\nabla v^k|^p}{(1+|v^k|)^{\alpha p}}\right)^{1/p}.$$

Puisque

$$\alpha p - 1 = (1 - \tfrac{s}{p^\star})p - 1 = p - \tfrac{s(N-p)}{N} - 1 = \tfrac{N-p}{N}\left\{\tfrac{N}{N-p}(p-1) - s\right\}$$

est strictement positif, l'appartenance de v à $L_0^{1,p}(\Omega)$ implique que

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|\nabla v^k|^p}{(1+|v^k|)^{\alpha p}} < \infty;$$

donc

$$\left(\int_\Omega |\Psi_\alpha(v^k)|^{p^\star}\right)^{1/p^\star} \leq C, \ \forall k > 0.$$

Et comme, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$|t|^{1-\alpha} \leq (1+|t|)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha}\left[(1+|t|)^{1-\alpha} - 1\right] + 1,$$

on a

$$|t|^{1-\alpha} \leq (1-\alpha)\,|\Psi_\alpha(t)| + 1, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

de sorte que

$$|v^k|^{1-\alpha} \leq (1-\alpha)\left|\Psi_\alpha(v^k)\right| + 1,$$

d'où

$$|v^k|^{p^\star(1-\alpha)} \leq 2^{p^\star-1}(1-\alpha)^{p^\star}\left|\Psi_\alpha(v^k)\right|^{p^\star} + 2^{p^\star-1},$$

ce qui donne

$$\left(\int_\Omega |v^k|^s\right)^{1/p^\star} \leq 2^{1-1/p^\star}(1-\alpha)\left(\int_\Omega |\Psi(v^k)|^{p^\star}\right)^{1/p^\star} + 2^{1-1/p^\star}|\Omega|^{1/p^\star}$$

d'où, pour $k > 0$:

$$\left(\int_\Omega |v^k|^s\right)^{1/p^\star} \leq s\frac{2^{1-1/p^\star}}{p^\star}C_\Omega C + 2^{1-1/p^\star}|\Omega|^{1/p^\star} \leq C,$$

où C est une constante indépendante de k. Il résulte alors du lemme de Fatou que

$$\int_\Omega |v|^s \leq C,$$

i.e. que $v \in L^s(\Omega)$.

b) Ici $p = N$. Soit $s > 0$ et fixons $p^\star$ un nombre quelconque tel que $p^\star > s$. On refait le même travail en utilisant l'inégalité

$$|\Psi_\alpha(v^k)|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C_\Omega \left||\nabla \Psi_\alpha(v^k)|\right|_{L^p(\Omega)}.$$

c) Pour $p > N$, on utilise l'inégalité

$$|\Psi_\alpha(v^k)|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left||\nabla \Psi_\alpha(v^k)|\right|_{L^p(\Omega)} \leq C \sup_j \left[\int_\Omega \frac{|\nabla v^j|^p}{(1+|v^j|)^{\alpha p}}\right]^{1/p}$$

où α est un nombre positif quelconque tel que $\alpha p > 1$.

Proposition 7.2.1

a) *Si* $1 < p \leq N$, *on a*

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q(p-1)} < \infty, \ \ \forall v \in L_0^{1,p}(\Omega), \ \ \forall q \in]0, \frac{N}{N-1}[.$$

b) *Si* $p > N$, *on a*

$$\int_\Omega |\nabla v|^p < \infty, \ \ \forall v \in L_0^{1,p}(\Omega).$$

Preuve.

a) Soient $v \in L_0^{1,p}(\Omega)$ et $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$. Posons $s = q(p-1)$; donc $0 < s < \frac{N}{N-1}(p-1)$. Supposons d'abord $1 < p < N$. On alors $s < p$ et, pour $k > 0$, on peut écrire (avec $\delta > 0$) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v^k|^s &= \int_\Omega \frac{|\nabla v^k|^s}{(1+|v^k|)^{(1+\delta)^{s/p}}}(1+|v^k|)^{(1+\delta)s/p} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla v^k|^p}{(1+|v^k|)^{1+\delta}}\right)^{s/p} \left(\int_\Omega (1+|v^k|)^{(1+\delta)\frac{s}{p-s}}\right)^{1-\frac{s}{p}}.
\end{aligned}$$

Choisissons $\delta > 0$ tel que $(1+\delta)\frac{s}{p-s} < \frac{N}{N-p}(p-1)$. Ceci est possible, puisque

$$\frac{N}{N-p}(p-1)\frac{p-s}{s} - 1 = \frac{N}{N-p} \cdot \frac{p-(p-1)q}{q} - 1 = \frac{p(N-1)}{q(N-p)}\left\{\frac{N}{N-1} - q\right\} > 0.$$

Avec un tel choix de δ, on peut utiliser le théorème 7.2.2.a, le fait que $|\Omega| < \infty$ et l'appartenance de v à $L_0^{1,p}(\Omega)$ pour voir que

$$\int_\Omega |\nabla v^k|^s \leq C \quad (C \text{ une constante indépendante de } k).$$

Si $p = N$, on aura $0 < s < N$ et on refait le calcul ci-dessus avec $\delta > 0$ quelconque, ce qui donne – grâce au théorème 7.2.2.b – :

$$\int_\Omega |\nabla v^k|^s \leq C, \quad (C \text{ une constante indépendante de } k).$$

En utilisant le théorème 7.2.1.b, on peut écrire

$$\int_\Omega |\nabla v^k|^s = \int_{\{|v|<k\}} |\nabla v|^s = \int_\Omega \chi_k |\nabla v|^s \leq C, \ \forall k > 0$$

où χ_k est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x \in \Omega \mid |v(x)| < k\}$. Et comme

$$\chi_k \to 1 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega,$$

il résulte du lemme de Fatou que

$$\int_\Omega |\nabla v|^s = \int_\Omega |\nabla v|^{q(p-1)} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla v^k| \leq C.$$

b) Pour $p > N$, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v^k|^p &= \int_\Omega \frac{|\nabla v^k|}{(1+|v^k|^{1+\delta}}(1+|v^k|)^{1+\delta} \\ &\leq (1+|v|_{L^\infty(\Omega)})^{1+\delta} \sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|\nabla v^k|^p}{(1+|v^k|)^{1+\delta}}\end{aligned}$$

et ceci d'après le théorème 7.2.2.c. On utilise alors le lemme de Fatou pour conclure que

$$\int_\Omega |\nabla v|^p < \infty.$$

Corollaire 7.2.1

a) *Si* $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$, *on a*

$$L_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,s}(\Omega),\ \forall s \in \left[1, \frac{N}{N-1}(p-1)\right[.$$

b) *Si* $p > N$, *on a*

$$L_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Preuve.

a) Soit $p \in]2 - \frac{1}{N}, N]$. Alors $\frac{N}{N-1}(p-1) > 1$. Soient $s \in]1, \frac{N}{N-1}(p-1)[$ et $q = s/(p-1)$; donc $q \in]\frac{1}{p-1}, \frac{N}{N-1}[$, de sorte que, pour $v \in L_0^{1,p}(\Omega)$, on a (voir preuve de la proposition 7.2.1.a)

$$\int_\Omega |\nabla v^k|^s \leq C,\ \forall k > 0$$

où C est une constante indépendante de k. D'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\left(\int_\Omega |v^k|^s\right)^{1/s} \leq C_\Omega \left(\int_\Omega |\nabla v^k|^s\right)^{1/s}.$$

Donc $\{v^k\}$ est bornée dans l'espace $L^s(\Omega)$ et comme $v^k \to v$ p.p. dans Ω, il résulte du lemme de Fatou que $v \in L^s(\Omega)$ et de l'exercice 7.2.1 ci-dessous que

$$v^k \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans} \quad L^s(\Omega).$$

Donc

$$v^k \to v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla v^k \to \nabla v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N,\ k \to \infty.$$

Et comme $\{\nabla v^k\}$ est bornée dans $L^s(\Omega)^N$, on peut en extraire un sous-suite (notée de même) telle que

$$\nabla v^k \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^s(\Omega)^N \quad \text{faiblement}$$

donc aussi

$$\nabla v^k \to w \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)^N,$$

d'où
$$w = \nabla v \in L^s(\Omega)^N.$$
Cela montre que $v \in W_0^{1,s}(\Omega)$, puisque $v^k \rightharpoonup v$ dans cet espace. Donc :
$$L_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,s}(\Omega),\ \forall s \in \left[1, \frac{N}{N-1}(p-1)\right[$$
et ceci pour $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$.

b) La preuve se fait de la même manière que ci-dessus. De la suite $\{v^k\}$, qui est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on extrait une sous-suite qui converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ vers v, de sorte que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque les v^k dont toutes à traces nulles.

Exercise 7.2.1 Soit $\{g_n\}$ une suite de $L^q(\Omega)$ avec $1 < q < +\infty$. Supposons $|\Omega| < \infty$, $\{g_n\}$ bornée dans $L^q(\Omega)$ et il existe $g \in L^q(\Omega)$ tel que $g_n \to g$ p.p. dans Ω. Montrer que $g_n \rightharpoonup g$ faiblement dans $L^q(\Omega)$.

7.3 Application à la résolution des problèmes de type Leray-Lions à donnée mesure

Revenons au problème du chapitre précédent :
$$(\mathcal{P}_0) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{a}(x,u,\nabla u)) &= \mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ \text{“}u &= 0\text{”} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega = \Gamma \end{cases}$$
avec $\hat{a}(x,s,\xi)$ de Carathéodory vérifiant les conditions $(\hat{a}.1) - (\hat{a}.3)$ mais cette fois avec
$$1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}\cdot$$
(Le cas $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$ a été traité dans le chapitre précédent.)

Nous formulons $(\mathcal{P}_0)$ comme suit : Trouver $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tel que
$$(\mathcal{P}_0) \qquad \begin{cases} u \in L_0^{1,p}(\Omega) \\ \int_\Omega \hat{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi = \langle \mu, \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

Théorème 7.3.1 *Sous les hypothèses du théorème 6.3.1, le problème $(\mathcal{P}_0)$ admet une solution au moins pour tout p vérifiant $1 < p \leq 2 - \frac{1}{N}\cdot$*

Comme dans le cas $2 - \frac{1}{N} < p \leq N$, on approche $(\mathcal{P}_0)$ par la suite des problèmes
$$(\mathcal{P}_n) \qquad \begin{cases} u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \int_\Omega \hat{a}(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\varphi = \langle \mu_n, \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$
où $\{\mu_n\}$ est une suite choisie comme dans la sous-section 6.3.1.

D'après le corollaire **??**, les problèmes $(\mathcal{P}_n)$ possèdent des solutions u_n. Dans tout ce qui suit, on note par $\{u_n\}$ une telle suite de solutions de $(\mathcal{P}_n)$.

7.3.1 Estimations des solutions approchées

Lemme 7.3.1 *Soit $\{u_n\}$ une suite des solutions de $(\mathcal{P}_n)$. Alors*
$$(7.1) \qquad \forall T \in \operatorname{Lip}_p(\mathbb{R}),\ \exists C = C(T) \quad \textit{tel que} \quad \int_\Omega |\nabla T(u_n)|^p \leq C,\ \forall n \geq 1;$$
$$(7.2) \qquad \forall \delta > 0,\ \exists C = C(\delta) > 0 \quad \textit{tel que} \quad \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} \leq C, \forall n \geq 1.$$

Preuve. Voir les preuves des propositions 6.3.1 et 6.3.2.

7.3.2 Construction d'une solution de $(\mathcal{P}_0)$

Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{Arctg}\, t$ est dans $\mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$, d'après le lemme 7.3.1, la suite $\{v_n\} = \{\mathrm{Arctg}\, u_n\}$ reste dans un borné de l'espace réflexif $W_0^{1,p}(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite, qu'on note de la même manière, telle que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{faiblement}.$$

Comme l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte, on peut s'arranger (par des extractions successives) pour que

$$v_n \to v \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{fort et p.p. dans} \quad \Omega.$$

Posons $u = \mathrm{tg}\, v$ avec la convention que $\mathrm{tg}\,(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm\infty$. Donc

$$u_n \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Pour montrer que u est finie p.p. dans Ω, on prend $s \in]0, \frac{N}{N-p}(p-1)[$ et on raisonne comme dans la preuve du théorème 7.2.2.a avec u_n et $\alpha = 1 - \frac{s}{p^\star}$, on trouve que

$$\left(\int_\Omega |u_n|^s\right)^{1/p^\star} \leq \frac{s}{p^\star} 2^{1-1/p^\star} C_\Omega \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{\alpha p}}\right]^{1/p} + 2^{1-1/p^\star} |\Omega|^{1/p^\star}. \tag{7.3}$$

Comme $\alpha p > 1$, on peut l'écrire $\alpha p = 1 + \delta$, avec $\delta > 0$, et en utilisant le lemme 7.3.1, on a

$$\int_\Omega |u_n|^s \leq C, \ \forall n \geq 1, \quad C = \text{une constante indépendante de} \quad n.$$

Il résulte alors du lemme de Fatou que

$$u \in L^s(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_\Omega |u|^s \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^s \leq C.$$

Ce qui prouve que u est fini p.p. dans Ω.

Exercise 7.3.1 Soit $\{u_n\}$ la suite des solutions approchées et u la fonction construite ci-dessus telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω. Montrer que

$$|u_n - u|^s \to 0 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega) \quad \text{et ceci}$$

pour tout $s \in]0, \frac{N}{N-p}(p-1)[$ si $1 < p < N$ et pour tout $s > 0$ si $p = N$.

Proposition 7.3.1 *Soit u la fonction construite dans la sous-section 7.3.2. Alors*

$$\forall \Phi \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R}), \ \Phi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier, $u^k = T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

Preuve. Soit $\Phi \in \mathrm{Lip}_p(\mathbb{R})$. Comme $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\{\Phi(u_n)\}$ est bornée sur le domaine borné Ω avec

$$\Phi(u_n) \to \Phi(u) \quad \text{p.p.} \quad \Omega,$$

il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\Phi(u) \in L^p(\Omega)$ et

$$\Phi(u_n) \to \Phi(u) \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{fort},$$

donc

$$\Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u) \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{faible}$$

de sorte que, d'une part :

$$\Phi(u_n) \to \Phi(u) \quad \text{et} \quad \partial_i \Phi(u_n) \to \partial_i \Phi(u) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \ i = 1, \ldots, N.$$

D'autre part, d'après le lemme 7.3.1, il exite $C = C(\Phi)$ telle que

$$\int_\Omega |\partial_i \Phi(u_n)|^p \leq C, \; i = 1, \ldots, N, \; \forall n \geq 1.$$

Donc, pour $i = 1$, on peut extraire de $\{\partial_1 \Phi(u_n)\}$ une sous-suite, notée de la mï£¡me manière, telle que

$$\partial_1 \Phi(u_n) \rightharpoonup w_1 \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{faiblement},$$

d'où

$$\partial_1 \Phi(u_n) \to w_1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

La séparation de la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique alors que

$$w_1 = \partial_1 \Phi(u) \in L^p(\Omega).$$

En faisant le mï£¡me travail pour $i = 2, \ldots, N$, on voit, par des extractions convenables, de sous-suites que

$$\nabla \Phi(u) \in L^p(\Omega)$$

et

$$\Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u) \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{faiblement},$$

donc $\Phi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
■

Proposition 7.3.2 *Soit u la fonction construite dans 7.3.2. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a :*

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^p}{(1 + |u^k|)^{1+\delta}} < \infty.$$

Preuve. Soient $\delta > 0$ et $\{u_n\}$ une suite de solutions approchées telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω. Comme la fonction

$$\psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma|)^{(1+\delta)/p}}$$

est de classe C^1 avec $\psi_\delta(0) = 0$ et $0 < \psi'_\delta(t) \leq 1$, pour tout $k > 0$, la fonction $\psi_\delta(u_n^k)$ est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et l'on a :

$$|\psi_\delta(u_n^k)| \leq \int_0^{|u_n^k|} \frac{d\sigma}{(1 + |\sigma|)^{(1+\delta)/p}} \leq \int_0^k d\sigma = k \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Donc

$$\psi_\delta(u_n^k) \to \psi_\delta(u^k) \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega)$$

puisque

$$\psi_\delta(u_n^k) \to \psi_\delta(u^k) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

D'où

$$\psi_\delta(u_n^k) \to \psi_\delta(u^k) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

et, pour $i = 1, \ldots, N$:

$$\partial \psi_\delta(u_n^k) \to \partial \psi_\delta(u^k) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Mais

$$\partial_i \psi_\delta(u_n^k) = \psi'_\delta(u^k) \partial_i u_n^k = \frac{\partial_i u_n^k}{(1 + |u_n^k|)^{(1+\delta)/p}},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\partial_i \psi_\delta(u_n^k)|^p &\leq \int_\Omega \frac{|\partial_i u_n^k|^p}{(1 + |u_n^k|)^{1+\delta}} \\ &\leq \int_\Omega \frac{|\partial_i u_n|^p}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} \leq C, \forall n \geq 1 \quad \text{(grâce à 7.3.1)} \end{aligned}$$

avec C une constante indépendante de n et de k. Et, commençons par $i = 1$; comme $\{\partial_1 \psi_\delta(u_n^k)\}$ demeure dans un borné de $L^p(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite (noté de mï£¡me) telle que

$$\partial_1 \psi_\delta(u_n^k) \rightharpoonup w_1 \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{faible},$$

donc aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, d'où $w_1 = \partial_1 \psi_\delta(u^k)$, i.e. que

$$\partial_1 \psi_\delta(u_n^k) \rightharpoonup \partial_1 \psi_\delta(u^k) \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{faible},$$

ce qui implique que

$$\int_\Omega |\partial_1 \psi_\delta(u^k)|^p \le \int_\Omega \frac{|\partial_1 u^k|^p}{(1+|u^k|)^{1+\delta}} \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} \le C.$$

En refait le mï£¡me travail avec $i = 2, \ldots, N$ pour voir que, par des extractions convenables de sous-suites, l'on a l'estimation :

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^p}{(1+|u^k|)^{1+\delta}} \le C, \ \forall k > 0$$

où C est une constante indépendante de k. Donc

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|\nabla u^k|^p}{(1+|u^k|)^{1+\delta}} < \infty.$$

■

Les propositions 7.3.1 et 7.3.2 prouvent que la fonction u construite en 7.3.2 est dans $L_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 7.3.3 *Pour tout $k > 0$, on a :*

$$\int_{\{x\in\Omega |\ |u_n(x)-u^k(x)|\le\varepsilon\}} \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u^k) \le \varepsilon \, ||\mu||_{M(\Omega)} \, , \ \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve. Elle se fait exactement de la même manière que celle de la proposition 6.3.4 ; pour $k > 0$, se rappeler que $u^k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et prendre pour fonction test $v_n = T_\varepsilon(u_n - u^k)$.

Lemme 7.3.2 *Si $\{u_n\}$ est une suite de solutions approchées, alors, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$, il existe $C = C(q) > 0$ telle que*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{q(p-1)} \le C, \ \forall n \ge 1. \tag{7.4}$$

Preuve. Supposons d'abord que $1 < p < N$ et prenons $q \in [1, \frac{N}{N-1}[\cdot$ Donc $q(p-1) < \frac{N}{N-1}(p-1) < p$ et $q < p'$. Ecrivons, pour $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} y_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^{q(p-1)} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{q(p-1)}}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p'}} (1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p'} \\ &\le \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}\Big)^{\frac{q}{p'}} \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1+\delta)\frac{q(p-1)}{p-q(p-1)}}\Big)^{1-\frac{q}{p'}}. \end{aligned}$$

Posons $s = (1+\delta)\frac{q(p-1)}{p-q(p-1)}\cdot$ Est-il possible de choisir $\delta > 0$ pour avoir :

$$\delta < \tfrac{N}{N-p} \tfrac{p-q(p-1)}{q} - 1 = \tfrac{p(N-1)}{q(N-p)} \{ \tfrac{N}{N-1} - q \};$$

comme $q < \frac{N}{N-1}$, on peut bien choisir δ tel que

$$0 < \delta < \tfrac{p(N-1)}{q(N-p)} \{ \tfrac{N}{N-1} - q \}.$$

Donc,

$$0 \le y_n \le \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}\Big)^{q/p'} 2^{(s-1)(1-q/p')} \Big[|\Omega| + \int_\Omega |u_n|^s\Big]^{1-q/p'}.$$

D'après le lemme 7.3.1, il existe C_δ tel que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} \leq C_\delta,\ \forall n \geq 1,$$

de sorte que

$$y_n \leq C + C\Big(\int_\Omega |u_n|^s\Big)^{1-p/p'};$$

et d'après l'estimation (7.3)

$$\int_\Omega |u_n|^s \leq \frac{s}{p^\star} 2^{1-1/p\star} C_\Omega \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{\beta p}}\right]^{1/p} + 2^{1-1/p^\star}|\Omega|^{1/p^\star}.$$

avec $\beta = 1 - \frac{s}{p^\star} \in]0,1[$ et $\beta p^\star > 1$, une application du lemme 7.3.1 donne

$$y_n \leq C,\ \forall \in \mathbb{N}^\star.$$

Exercise 7.3.2 A quel résultat doit-on s'attendre dans le cas $p \geq N$?

Lemme 7.3.3 (de compacité) *Soit $\{u_n\}$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ possédant les propriétés suivantes :*

a) *Il existe $u \in L_0^{1,p}(\Omega)$ telle que*

$$u_n \to u \quad p.p.\ dans \quad \Omega$$

et il existe $q \in]1, \frac{N}{N-1}[$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{q(p-1)} \leq C,\ \forall\ n\ \geq\ 1\ .$$

b) *Pour tout $k > 0$, $\{u_n^k\} = \{T_k(u_n)\}$ reste bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

c) *Pour tout $k > 0$, il existe deux fonctions θ_k et θ telles que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|u_n - u^k| \leq \varepsilon\}} \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u^k) \leq \theta_k(\varepsilon) + \theta(k)\ ,\ \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

où $\varepsilon_0 > 0$, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \theta_k(\varepsilon) = 0$, θ ne dépend que de k et $\lim_{k\to\infty} \theta(k) = 0$.

Alors, il existe une sous-suite $\{\nabla u_{n'}\}$ convergeant vers ∇u p.p dans Ω et (pour toute la suite), on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^{s(p-1)}\ =\ 0\ ,\quad \forall\ s\ \in\ [1, q[.$$

7.3.3 Passage à la limite dans les problèmes approchés

Soient $q \in]1, \frac{N}{N-1}[$ et $\{u_n\}$ la suite des solutions approchées. D'une part, l'on a $u_n \longrightarrow u$ p.p. dans Ω et $u \in L_0^{1,p}(\Omega)$, d'après les propositions 7.3.1 et 7.3.2. D'autre part, on déduit de la proposition 7.3.2 que, $\{u_n^k\}$ demeure dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et d'après la proposition 7.3.3, on a, pour tout $k > 0$:

$$\int_{\{x\in\Omega \mid |u_n - u^k| \leq \varepsilon\}} \hat{a}(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla(u_n - u^k) \leq \varepsilon\, ||\mu||_{M(\Omega)}\ ,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Cela montre que toutes les hypothèses du lemme 7.3.3 sont satisfaites par $\{u_n\}$ et u. On peut donc trouver une sous-suite $\{u_\nu\}$ telle que

$$u_\nu \longrightarrow u \quad \text{et} \quad \nabla u_\nu \longrightarrow \nabla u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^{s(p-1)}=0,\ \forall s\in[1,q].$$

Fixons maintenant $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. On a :

$$\int_\Omega \hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi=\int_\Omega \mu_\nu\varphi.$$

a) Passage à la limite dans $\int_\Omega \mu_\nu\varphi$. Par le choix même de la suite, on a :

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \mu_\nu\varphi=\langle\mu,\varphi\rangle.$$

b) Passage à la limite dans $\int_\Omega \hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi$. Puisque $\hat{a}$ est de Carathéodory, on a :

$$\hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi\longrightarrow\hat{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Soit $E\subset\Omega$. On a :

$$\begin{aligned}\int_E|\hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi| &\le |||\nabla\varphi|||_{L^\infty(\Omega)}\,C\int_E\{|u_\nu|^{p-1}+|\nabla u_\nu|^{p-1}+a_0\}\\ &\le C\Big\{\Big(\int_E|u_\nu|^{q(p-1)}\Big)^{\frac1q}+\Big(\int_E|\nabla u_\nu|^{q(p-1)}\Big)^{\frac1q}\Big\}|E|^{1-\frac1q}\\ &\qquad+\Big(\int_E a_0^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}|E|^{\frac1p}.\end{aligned}$$

Comme $\{u_\nu\}$ est bornée dans $L^{q(p-1)}(\Omega)$ (utiliser l'inégalité de Poincaré), on a :

$$\int_E|\hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi|\le C|E|^{1-\frac1q}+C|E|^{\frac1p},\ \forall\nu\ge1,$$

ce qui prouve l'équi-intégrabilité de la suite $\{\hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi\}$. Il résulte alors du théorème de Vitali que

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega\hat{a}(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\cdot\nabla\varphi=\int_\Omega\hat{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi.$$

On a donc prouvé que

$$\int_\Omega\hat{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi=\langle\mu,\varphi\rangle,\ \forall\in\mathcal{D}(\Omega)$$

i.e. que u est solution du problème

$$\begin{cases} u\in L_0^{1,p}(\Omega),\\ Au=\mu \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).\end{cases}$$

Le théorème 7.3.1 est alors démontré (et le problème $(\mathcal{P}_0)$ résolu) dans le cas $1<p\le 2-\frac1N$.

Bibliographie

[1] R.A. ADAMS [1975, 286 p.], “Sobolev spaces", Academic Press, New York.

[2] A. AMBROSETTI & G. PRODI [1993, 175 p.], “A primer of nonlinear analysis”, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[3] Y. ATIK, *Introdution aux problèmes elliptiques quasi-linéaires à donnée mesure*, Cours spéciaux de l'ENS–Kouba, Alger, (1992).

[4] L. BOCCARDO & T. GALLOUËT, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal., 87 (1989), 149–169.

[5] R.K. BOSE & M.C. JOSHI [1985, 311 p.], “Some topics in nonlinear functional analysis”, Wiley Eastern Ltd, New Delhi.

[6] H. BREZIS [1983, 248 p.], “Analyse fonctionnelle, théorie et applications", Masson, Paris.

[7] J. CÉA [1971, 237 p.], “Optimisation, théorie et algorithmes", Dunod, Paris.

[8] G. CHOQUET [1964, 310 p.], “Cours d'analyse, tome 2, Topologie", Masson, Paris.

[9] R. COURANT & D. HILBERT [1937, 1962, 576 p., 852 p.], “Methods of mathematical physics", Volumes I and II, Interscience Publishers, N.Y.

[10] M. CROUZEIX & A.L. MIGNOT [1984, 180 p.], “Analyse numérique des équations différentielles", Masson, Paris.

[11] M. CROUZEIX & A.L. MIGNOT [1986, 182 p.], “Exercices d'analyse numérique des équations différentielles", Masson, Paris.

[12] R. DAUTRAY & J.L. LIONS [1984, 1985, 1434 p., 1088 p.], “Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Tomes 1 et 2, Masson, Paris. Nouveau tirage en 9 volumes, 1987–88.

[13] N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ [1958, 872 p.], “Linear operators, Part I : general theory”, Interscience Publishers, Inc., New York.

[14] S. FUČIK & A. KUFNER [1980, 359 p.], “Nonlinear differential equations”, Elsevier, New York.

[15] P.R. GARABEDIAN [1964, 672 p.], “Partial differential equations", John Wiley, New York.

[16] D. GILBARG & N.S. TRUDINGER [1977, 401 p.], “Elliptic partial differential equations of second order", Springer-Verlag, New York.

[17] M.A. KRASNOSEL'SKII [1964, – p.], “Topological Methods in the theory of nonlinear integral equations”, Macmillan, New York.

[18] F. JOHN [1975, 358 p.], “Partial differential equations", Springer-Verlag, Berlin.

[19] L. KANTOROVITCH & G. AKILOV [1981, 491 p., 343 p.], “Analyse fonctionnelle", Tomes 1 et 2, Éditions Mir, Moscou.

[20] B. KAWOHL, *From p-Laplacian to mean curvature operator and related questions*, In Progress in P.D.E. : The Metz surveys, M. Chipot & Saint Jean Paulin editors, Pitman Research Notes in Mathematics Series, No 249, Longman, Harlow, (1991), 40–56.

[21] S. KICHENASSAMY, *Quasilinear problems with singularities*, Manuscripta math. 57 (1987), 281–313.

[22] A. KIRILLOV & A. GVICHIANI [1982, 324 p.], “Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle", Éditions Mir, Moscou.

[23] O.A. LADYZHENSKAYA [1985, 322 p.], “The boundary value problems of mathematical physics", Translated by J. Lohwater, Springer-Verlag, New York.

[24] O.A. LADYZHENSKAYA N. URAL'TSEVA [1968, 503 p.], “Linear and quasilinear elliptic equations", Translated by Scripta Technica, Inc., Academic Press, New York.

[25] O.A. LADYŽENSKAJA, V. SOLONNIKOV & N. URAL'CEVA [1968, 660 p.], “Linear and quasilinear parabolic equations", Translated by S. Smith, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[26] J.L. LIONS [1969, 564 p.], “Quelques méthodes de résoution des problèmes aux limites non linéaires”, Dunod, Paris, 1969.

[27] J.L. LIONS [1973, – p.], “Cours d'analyse numérique de l'École Polytechnique”, Hermann, Paris.

[28] A. MARTIN [1991, 224 p.], “Exercices résolus d'équations aux derivées partielles", Dunod Université, Paris.

[29] V. MIKHAÏLOV [1980, 390 p.], “Équations aux derivées partielles", Éditions Mir, Moscou.

[30] J. NEČAS [1967, 351 p.], “Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques”, Masson (Paris) et Academia (Prague).

[31] I.G. PETROVSKY [1950, 255 p.], “Lectures on partial differential equations”, Dover Publications, N.Y. 1991.

[32] M.H. PROTTER & H.F. WEINBERGER [1967, 264 p.], “Maximum principles in differential equations”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[33] P. RABIER & J.-M. THOMAS [1985, 208 p.], “Exercices d'analyse numérique des équations aux derivées partielles", Masson, Paris.

[34] P. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. P. & M. Curie, No 9001, (1990).

[35] J. M. RAKOTOSON, *Quasilinear elliptic problems with measures as data*, Diff. Int. Equ. 4 (1991), 449–457.

[36] J.M. RAKOTOSON, *Introduction aux problèmes non linénaires*, Cours de DEA, Univ. Poitiers, (1992).

[37] P. RAVIART & J.-M. THOMAS [1988, 224 p.], “Introduction à l'analyse numérique des équations aux derivées partielles", 2^{e} tirage, Masson, Paris.

[38] W. RUDIN [1973, 414 p.], “Functional analysis", McGraw-Hill, N.Y.

[39] W. RUDIN [1966, 424 p.], “Real and complex analysis", McGraw-Hill, N.Y.

[40] M. SCHECHTER [1977, p.], “Modern methods in partial differential equations (an introduction)”, McGraw-Hill, N.Y.

[41] D.R. SMART [1974, – p.], “Fixed point theorems”, Cambridge Univ. Press.

[42] G. STEPHENSON [1985, 171 p.], “ Partial differential equations for scientists and engineers", Third edition, Longman, N.Y.

[43] V. TRENOGUINE [1985, – p.], “Analyse fonctionnelle", Éditions Mir, Moscou.

[44] V. TRENOGUINE & al. [1987, 246 p.], “Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle", Éditions Mir, Moscou.

[45] V. VLADIMIROV & al. [1976, 264 p.], “Recueil de problèmes équations de la physique mathématiques", Éditions Mir, Moscou.

[46] M.M. VAINBERG [1973, 356 p.], “Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations”, John Wiley & Sons New York.

[47] H. WEINBERGER [1965, 458 p.], “A first course in partial differential equations", John Wiley & Sons, New York.

[48] K. YOSIDA [1971, 485 p.], “Functional analysis", Third edition, Springer-Verlag, Berlin.

[49] E. ZEIDLER [1990], “Nonlinear functional analysis and its applications”, 4 volumes, Springer-Verlag, New York. Volume I : Fixed-point theorems. Volume II/A : Linear monotone operators, 485 p. Volume II/B : Nonlinear monotone operators, 750 p. III : Variational methods and optimization. IV/V : Applications to mathematical physics.