

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure, Kouba, Alger.
Département de mathématiques,

MEMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Didactique et histoire des mathématiques**

Intitulé

Etude des rapports cognitifs et structurels entre argumentation
et démonstration en mathématiques

Présenté par

Mr Hamza Abdelhalim Younes

Sous la direction du D^r M.T.Talbi, Maître de conférences.

Soutenu publiquement le : 10 Juillet 2010, devant le jury composé de :

Mr. Y.Atik	Professeur	E.N.S. Kouba	Président
Mr. M.T. Talbi	Maître de conférences	E.N.S. Kouba	Rapporteur
Mr. M. Hazi	Maître de conférences	E.N.S. Kouba	Examineur
Mr. Y. Guergour	Maître de conférences	E.N.S. Kouba	Examineur
Mr. M. Ourahay	Professeur	E.N.S Marrakech	Maroc Examineur

Table des matières

Introduction.....	4
I.Aperçu historique sur l'argumentation et la démonstration.....	4
I.1. Aperçu historique sur l'origine de la démonstration	7
I.2. Aperçu historique sur l'argumentation	10
II. Raisonnement, argumentation, démonstration.....	13
II. 1.Valeur épistémique et valeur logique d'une proposition	13
II. 1.1. Valeur épistémique d'une proposition.....	13
II. 1.2.Valeur logique d'une proposition.....	13
II. 1.3. Statut d'une proposition	14
II. 1.4. Validation et justification	14
II.1.4.1 valider, validation	14
II. 1.4.2. Justifier ; justification	15
II.2 Raisonnement et argumentation en didactique :.....	16
II. 2.1 Définition de Balacheff et Duval.....	16
II. 2.2 Structure d'un pas de raisonnement selon Duval	17
II.3. L'argumentation dans la linguistique	19
II. 3.1. Le statut de l'auditoire dans l'argumentation.....	20
II. 3.1.1. La vision sophiste.....	20
II. 3.1.2. La vision platonicienne	20
II. 3.1.3. La vision de C.Perelman (la nouvelle rhétorique)	20
II. 3.1.4. Les nouvelles théories du convaincre.....	20
II. 3.1.5.Selon le mathématicien Thurston :	21
II. 3.2.La fonctionnalité de l'argumentation.....	21
II. 3.2.1. L'argumentation a une fonction : la justification	21
II. 3.2.2. L'argumentation a un objectif : convaincre ou persuader	21
II.3.2.3. L'argumentation a un champ de validité :.....	21
II. 3.2.4. L'argumentation s'adresse a un auditoire :.....	22
II. 3.3.Point de vue sur la classification de Duval	22
II.4. Argumentation, logique formelle et logique naturelle	23
III. Le modèle de Toulmin.....	25
III.1. Structure du raisonnement et le modèle de Toulmin.....	25
III.1.1. Le raisonnement « abductif » :.....	27

III.1.1.1. L'abduction créative :	28
III.1.1.2. Abduction et cognition	29
III.1.2. Le raisonnement déductif	30
III.1.3. Le raisonnement inductif	31
III.1.3.1. Types d'argumentations inductives	33
III.2. Raisonnement mathématique et modèle de Toulmin	34
III.2.1. La démonstration en mathématique	34
III.2.1.2. Apprentissage de la démonstration	36
III.2.2. Classification de N.Balacheff(1987, pp.147-176)	36
III.2.3.La classification de Harel & Sowder (1998).....	39
2.3.1.Conviction externe.	39
2.3.2. Schème de preuve empirique :	40
2.3.3. Preuve analytique.....	40
III.2.4. Argumentation et construction de la démonstration	41
III.2.5. Le modèle de Toulmin en mathématique	44
III.2.5.1. Analyse de l'argument de Zermelo pour l'adoption de l'axiome du choix par le modèle de Toulmin (Andrew Aberdein, 2005).....	44
III. 2.5.2. Analyse de la preuve de Théétète à propos des cinq solides platoniques (A. Aberdein, 2005).....	45
III. 2.5.3. Modélisation d'un argument mathématique (Inglis et al. 2007)	45
III.2.6. Schéma des trois types de raisonnement dans le modèle de Toulmin.....	48
III.3. Raisonnements et conceptions	49
III.3. 1. Le modèle cKc.....	49
III.3. 1.1 Le paradigme des misconceptions et de l'erreur bachelardien	49
III.3.1.2. Le problème de la cohérence chez l'apprenant (Balacheff, 2001).....	50
III.3.1.3. Formalisation de la conception	50
III.3.2. Les conceptions dans le modèle de Toulmin	54
III. 3.2.1 Théorème, preuve, énoncé prouvé.....	54
III. 3.2.2 Le modèle cKc dans le modèle de Toulmin	55
IV. Unité et rupture cognitive entre argumentation et démonstration.....	59
IV.1. Selon R.Duval.....	59
IV.2. Selon Boero & al.....	60
IV.3. Selon Alexandra Mariotti(la preuve en mathématique	61
IV.4. Selon Thurston	62
IV.5. Selon B.Pedemonte.....	63

IV.5.1 Exemple d'unité cognitive dans le système de référence (Pedemonte, 2002)	64
IV.5.2. Exemple de Rupture du système de référence (Pedemonte, 2002).....	68
IV. 6. Continuité cognitive et structure de l'argumentation	73
IV.6.1 Cas de l'argumentation abductive	73
IV.6.2. Cas de l'argumentation inductive	77
V. Phase expérimentale.....	82
VI. Conclusion.....	97

Introduction

Le travail consiste en l'étude des rapports cognitifs et structurels entre argumentation et démonstration lors de la résolution d'un problème ouvert. Y-a-t-il unité ou rupture cognitive entre argumentation et démonstration en mathématique. L'étude s'articule sur l'article de Pedemonte paru dans la revue *Educational Studies in Mathematics*, 2007, Vol(66), No.1, pp. 23-41, et sur ses travaux sur l'unité cognitive.

La genèse de l'article :

La thèse formulée par les Italiens (Boero, Garuti, Mariotti) qui prétend qu'il y a unité cognitive dans le système de références entre les deux phases de construction de la démonstration et, celle de Duval qui prétend qu'il y a rupture cognitive et structurelle entre les deux phases, amena B.Pédemonte à travailler plus profondément sur le concept d'unité cognitive.

La thèse des Italiens

« During the production of conjecture, the students progressively work out his/her statement through an intensive argumentative activity functionally intermingled with the justification of the plausibility of his/her choices. During the subsequent statement-proving stage, the student links up with this process in a coherent way, organising some of previously produced arguments according to a logical chain »(Boero, Garuti, Mariotti, 1996)

« Durant la phase de production d'une conjecture, les étudiants produisent progressivement des informations par le biais d'une activité argumentative entremêlée de justifications de la plausibilité de leurs choix. Durant la phase de démonstration, l'étudiant s'accroche au processus précédant de façon cohérente pour réorganiser selon une chaîne logique les arguments précédemment produits »(trad. Pedemonte 2002)

Conséquence : une bonne façon d'initier les élèves à la démonstration est de leur proposer des problèmes ouverts (Arsac et al.,1991, Boero et al., 1996)

La thèse de R. Duval (Duval, 1992-93)

« Pour passer d'un mode de fonctionnement à l'autre, une décentration à l'égard du contenu d'une part, et une prise de conscience de l'existence d'une autre valeur épistémique d'autre part, sont donc nécessaires. On peut donc parler de distance cognitive entre le fonctionnement d'un raisonnement valide et celui d'une argumentation. »

« Il est important de voir que cette hétérogénéité n'est pas seulement logique mais elle est aussi cognitive, c'est-à-dire relative à des modes d'appréhension par le sujet. »

Conséquence : l'enseignement de la démonstration doit être centré sur les graphes propositionnels. Le pas déductif doit se construire sur la considération exclusive du statut des propositions, et non sur leur contenu.

Le travail de Pedemonte sur l'analyse de l'argumentation et de la démonstration s'appuie sur un cadre théorique qui rapproche des éléments pris de différents cadres (Toulmin, Balacheff, Duval, Thurston).

Le contexte expérimental soutenant cette étude s'appuie sur le problème ouvert. Ce dernier offre la possibilité de produire une argumentation et une démonstration. C'est un contexte qui contraint l'élève à formuler une conjecture et ensuite valider son énoncé.

La phase d'élaboration des arguments justifiant la conjecture se nomme phase argumentative. La démonstration est la phase formelle qui consiste à intégrer les arguments dans le schéma de la déduction.

Il s'agit de voir d'une part si les arguments produits en phase argumentative se retrouvent ou ont des traces dans la phase déductive et quelles sont les effets de cette présence sur l'écriture de la démonstration, ce qui amène à comparer les conceptions de l'étudiant à la théorie mathématique, c'est-à-dire comparer les systèmes de référence. Et de voir d'autre part si la structure des arguments est conservée lors du passage de l'argumentation à la démonstration et quelles sont les effets de cette conservation ou non conservation sur l'écriture de la démonstration. La structure étant la connexion cognitive logique entre les propositions (abduction, induction, ou déduction).

L'analyse de la structure se fait dans le modèle de Toulmin qui permet l'explicitation de tous les éléments constitutifs d'un argument.

Le système de référence se compose du système de représentations (langage, heuristique, graphe) et du système de connaissance (conceptions, théorèmes). Ceci se fait dans le modèle $ck\emptyset$ de formalisation des conceptions de Balacheff.

On dira qu'il y a unité cognitive dans le système de référence entre l'argumentation qui justifie la conjecture et sa démonstration, si quelques théorèmes, graphes, ou mots utilisés en phase argumentative se retrouvent dans la phase démonstrative. Dans le cas contraire on parlera de rupture cognitive.

On dira qu'il y aura continuité structurelle si quelques pas abductifs ou inductifs utilisés en argumentation se retrouvent en démonstration. Si la structure de l'argumentation est abductive ou inductive et celle de la démonstration est déductive alors on dira qu'il y a distance ou écart structurelle.

L'étude de l'unité cognitive trouve sa raison d'être alors dans l'identification des difficultés des apprenants à écrire une démonstration, de sélectionner les problèmes à administrer à l'apprenant en vue de lui permettre d'accéder à l'élaboration de la preuve formelle dans le système de référence théorique, c'est-à-dire dans la théorie mathématique.

Le plan du mémoire se justifie entre autre par la classification du discours faite par Aristote, où la dialectique part de prémisses probables alors que l'analytique part de prémisses puisées

dans la théorie scientifique. Ainsi on commence par parler de valeur épistémique et logique, ce qui est en rapport avec la dialectique qui est plutôt lié à l'argumentation, et avec l'analytique qui n'est autre que la démonstration. D'où l'étude de ce qu'est l'argumentation et ce qu'est la démonstration. Et que cette étude débouche sur l'appréhension du modèle cK et celui de Toulmin qui permettent l'analyse des rapports cognitifs.