

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
École Normale Supérieure Kouba - Alger  
Département de Mathématiques

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE DE MAGISTÈRE PRÉSENTÉ PAR :

**Fatima SAYAH**

Directeur de thèse : **Professeur M. BOUSSELSAL**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

TITRE : **Relaxation de quelques multi-puits problèmes**

Les modèles mathématiques dans les transitions de phases aboutissent au problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \text{minimiser } I(u) = \int_{\Omega} W(Du(x)) dx \quad (1)$$

où  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une déformation d'un matériau élastique occupant la configuration de référence  $\Omega$  et  $W : \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité d'énergie du matériau.

Pour toute suite minimisante  $u_k$  de la fonctionnelle  $I$ , la déformation gradient  $Du_k$  doit s'approcher d'un ensemble  $K$  ayant une multi-puits structure :

$$K = SO(n)U_1 \cup \dots \cup SO(n)U_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n = 2, 3$$

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel géométrique et quelques notions de convexité</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels et compléments sur les matrices . . . . .	5
1.1.1	Définitions et notations principales . . . . .	5
1.1.2	Propriétés particulières aux matrices symétriques . . . . .	10
1.2	Quelques notions de convexité . . . . .	12
1.2.1	Le calcul des variations . . . . .	12
1.2.2	Sur l'approximation interne . . . . .	29
1.3	Ensembles affines et convexes et leurs propriétés topologiques . . . . .	32
1.3.1	Ensembles affines . . . . .	32
1.3.2	Propriétés topologiques des convexes . . . . .	32
1.3.3	Étude affine des arcs géométriques . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Résultats de base</b>	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>Les puits <math>SO(2)</math>-invariants</b>	<b>62</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	L'enveloppe quasi-convexe de $SO(2)U_1 \cup \dots \cup SO(2)U_k$ . . . . .	67
3.3	Exemples . . . . .	93
3.3.1	Le bi-puits problème . . . . .	93
3.3.2	Le problème de quatre puits . . . . .	95
3.4	Existence de minimiseurs . . . . .	98
3.5	Unicité de la mesure de Young . . . . .	105

3.6	Application . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Les puits <math>O(2)</math>-invariants</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	116
4.2	L'enveloppe quasi-convexe de $O(2)U_1 \cup \dots \cup O(2)U_k$ . . . . .	118
4.3	Existence de minimiseurs . . . . .	133
4.4	Unicité de la mesure de Young . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Les puits <math>SO(3)</math>-invariants essentiellement bi-dimensionnels</b>	<b>146</b>
5.1	Introduction . . . . .	147
5.2	Les puits $\mathbf{SO}(3)\mathbf{U}_i$ . . . . .	149
5.2.1	L'enveloppe quasi-convexe de $SO(3)U_1 \cup \dots \cup SO(3)U_k$ . . . . .	149
5.2.2	Exemples . . . . .	156
5.2.3	Existence de minimiseurs . . . . .	158
5.3	Les puits $\mathbf{SO}(3)\hat{\mathbf{U}}_i$ . . . . .	161
5.3.1	L'enveloppe quasi-convexe de $SO(3)\hat{U}_1 \cup \dots \cup SO(3)\hat{U}_k$ . . . . .	161
5.3.2	Existence de minimiseurs . . . . .	168

ou

$$K = O(n)U_1 \cup \dots \cup O(n)U_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n = 2, 3$$

où les  $U_i$  sont des matrices  $n \times n$  symétriques et définies positives.

En termes des mesures, cela signifie que la mesure de young  $(\nu_x)$  associée à la suite  $Du_k$  est supportée sur l'ensemble  $K$ .

Avec cette structure de l'ensemble  $K$ , la fonction  $W$  ne peut pas être quasiconvexe donc les méthodes directes en calcul des variations basées sur la semicontinuité inférieure ne s'appliquent pas pour minimiser la fonctionnelle  $I$ .

Cependant, la minimisation de  $I$  est liée à l'enveloppe quasiconvexe  $K^{qc}$  de  $K$  :

$$K^{qc} = \left\{ \begin{array}{l} \xi \in \mathbb{M}^{m \times n} : \varphi(\xi) = 0, \quad \forall \varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{quasiconvexe avec } \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi|_K = 0 \end{array} \right\}.$$

En fait, si on minimise  $I$  sur des fonctions de Sobolev qui coïncident avec une application affine  $u(x) = Fx$  sur  $\partial\Omega$ , alors

$$\inf I = 0 \Leftrightarrow F \in K^{qc}.$$

Le but principale de ce travail est de caractériser l'enveloppe quasiconvexe de l'ensemble  $K$ . Plus précisément, on démontre les résultats suivants :

### **Théorème 0.0.1**

Soit  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\} \subset \mathbb{M}_{sym}^{2 \times 2}$  où les  $U_i$  sont définies positives avec  $\det U_i = \delta > 0$ . Soit  $K = SO(2)U_1 \cup \dots \cup SO(2)U_k$ . Alors

$$K^{(2)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{2 \times 2} : \det F = \delta ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1, \dots, k} |U_i e|^2, \quad \forall e \in S^1\}.$$

Supposons de plus qu'il existe  $n \in \{1, \dots, k\}$  tel que

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_1, \dots, U_n\} = \{U_i \in \mathcal{U} : \exists \tilde{e} \in S^1, |U_i \tilde{e}|^2 > \max_{j=1, \dots, k; j \neq i} |U_j \tilde{e}|^2\}.$$

Alors, il existe un ensemble  $\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset S^1$  tel que

$$K^{qc} = \{F \in \mathbb{M}^{2 \times 2} : \det F = \delta ; |Fe_j|^2 \leq \max_{i=1, \dots, n} |U_i e_j|^2, \forall j = 1, \dots, n\}$$

**Théorème 0.0.2**

Soit  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\} \subset \mathbb{M}_{sym}^{2 \times 2}$  où les  $U_i$  sont définies positives avec  $\det U_i = \delta > 0$ .

Soit  $K = O(2)U_1 \cup \dots \cup O(2)U_k$ . Alors

$$K^{(3)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{2 \times 2} : \det F \leq \delta ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1, \dots, k} |U_i e|^2, \forall e \in S^1\}$$

**Théorème 0.0.3**

Soit  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\} \subset \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}$  où les  $U_i$  sont définies positives avec  $\det U_i = \delta > 0$ .

Supposons qu'il existe  $\mu > 0$  et  $\nu \in S^2$  tels que

$$U_i \nu = \mu \nu, \forall i = 1, \dots, k.$$

Soit  $K = SO(3)U_1 \cup \dots \cup SO(3)U_k$ . Alors

$$K^{(2)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{3 \times 3} : \det F = \delta ; F^T F \nu = \mu^2 \nu ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1, \dots, k} |U_i e|^2, \forall e \in S^2\}$$

Supposons de plus qu'il existe  $n \in \{1, \dots, k\}$  tel que

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_1, \dots, U_n\} = \{U_i \in \mathcal{U} : \exists \tilde{e} \in S^2, |U_i \tilde{e}|^2 > \max_{j=1, \dots, n; j \neq i} |U_j \tilde{e}|^2\}.$$

Alors, il existe un ensemble  $\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset S^2$  tel que

$$K^{qc} = \{F \in \mathbb{M}^{3 \times 3} : \det F = \delta ; F^T F \nu = \mu^2 \nu ; |Fe_j|^2 \leq \max_{i=1, \dots, n} |U_i e_j|^2, \forall e_j \in \mathcal{E}_n\}$$

**Théorème 0.0.4**

Soit  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\} \subset \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}$  où les  $U_i$  sont définies positives avec :  $adj_{33}U_i^2 = \delta^2 > 0$ . (Rappelons que  $adj_{33}U_i^2$  est le sous-déterminant  $2 \times 2$  obtenu en supprimant de  $U_i^2$  la 3<sup>ème</sup> ligne et la 3<sup>ème</sup> colonne)

Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base orthonormale canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $K = SO(3)\hat{U}_1 \cup \dots \cup SO(3)\hat{U}_k$ , où :

$$SO(3)\hat{U}_i = \{Q\hat{U}_i = (QU_i e_1, QU_i e_2), Q \in SO(3)\} \subset \mathbb{M}^{3 \times 2}.$$

Alors :

$$K^{(3)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par :

$$\{F \in \mathbb{M}^{3 \times 2} : \det F^T F \leq \delta^2 ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1, \dots, k} |\hat{U}_i e|^2, \forall e \in S^1\}$$

On utilise cette caractérisation pour construire une approximation interne de l'ensemble  $K$  et montrer l'existence d'une solution régulière pour le problème donné. Dans le cas générale (en l'absence d'une solution régulière), il existe une mesure de Young sous certaines conditions de croissance. Grâce à la caractérisation de l'ensemble  $K^{qc}$ , on étudie l'unicité de cette mesure.