Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Kouba - Alger
Département de Mathématiques

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE DE MAGISTÈRE PRÉSENTÉ PAR :

Fatima SAYAH

Directeur de thèse : **Professeur M.BOUSSELSAL**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

TITRE : **Relaxation de quelques multi-puits problèmes**

Les modèles mathématiques dans les transitions de phases aboutissent au problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad minimiser \quad I(u) = \int_{\Omega} W(Du(x))dx \tag{1}$$

où $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une déformation d'un matériau élastique occupant la configuration de référence Ω et $W : \mathbb{M}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la densité d'énergie du matériau.

Pour toute suite minimisante u_k de la fonctionnelle I , la déformation gradient Du_k doit s'approcher d'un ensemble K ayant une multi-puits structure :

$$K = SO(n)U_1 \cup ... \cup SO(n)U_k,\ k \in \mathbb{N},\ n = 2,3$$

Table des matières

ou

$$K = O(n)U_1 \cup ... \cup O(n)U_k,\ k \in \mathbb{N},\ n = 2, 3$$

où les U_i sont des matrices $n \times n$ symétriques et définies positives.

En termes des mesures, cela signifie que la mesure de young (ν_x) associée à la suite Du_k est supportée sur l'ensemble K.

Avec cette structure de l'ensemble K, la fonction W ne peut pas être quasiconvexe donc les méthodes directes en calcul des variations basées sur la semicontinuité inférieure ne s'appliquent pas pour minimiser la fonctionnelle I.

Cependant, la minimisation de I est liée à l'enveloppe quasiconvexe K^{qc} de K :

$$K^{qc} = \left\{ \begin{array}{c} \xi \in \mathbb{M}^{m\times n} : \varphi(\xi) = 0,\ \forall \varphi : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R} \\ \text{quasiconvexe avec } \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi \,|_K = 0 \end{array} \right\}.$$

En fait, si on minimise I sur des fonctions de Sobolev qui coïncident avec une application affine $u(x) = Fx$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\inf I = 0 \ \Leftrightarrow\ F \in K^{qc}.$$

Le but principale de ce travail est de caractériser l'enveloppe quasiconvexe de l'ensemble K. Plus précisément, on démontre les résultats suivants :

Théorème 0.0.1

Soit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_k\} \subset \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}$ *où les* U_i *sont définies positives avec* $\det U_i = \delta > 0$. *Soit* $K = SO(2)U_1 \cup \cdots \cup SO(2)U_k$. *Alors*

$$K^{(2)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{2\times 2} : \det F = \delta\ ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1,\ldots,k} |U_i e|^2,\ \forall e \in S^1\}.$$

Supposons de plus qu'il existe $n \in \{1, ..., k\}$ *tel que*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_1, ..., U_n\} = \{U_i \in \mathcal{U} : \exists \widetilde{e} \in S^1\ ,\ |U_i \widetilde{e}|^2 > \max_{j=1,\ldots,k; j\neq i} |U_j \widetilde{e}|^2\}.$$

Alors, il existe un ensemble $\mathcal{E}_n = \{e_1, ..., e_n\} \subset S^1$ *tel que*

$$K^{qc} \quad = \quad \{F \in \mathbb{M}^{2\times 2} : \det F = \delta \; ; |Fe_j|^2 \leq \max_{i=1,\dots,n} |U_i e_j|^2, \; \forall j = 1, ..., n\}$$

Théorème 0.0.2

Soit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_k\} \subset \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}$ *où les* U_i *sont définies positives avec* $\det U_i = \delta > 0$.

Soit $K = O(2)U_1 \cup \cdots \cup O(2)U_k$. *Alors*

$$K^{(3)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{2\times 2} : \det F \leq \delta \; ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1,\dots,k} |U_i e|^2, \; \forall e \in S^1\}$$

Théorème 0.0.3

Soit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_k\} \subset \mathbb{M}^{3\times 3}_{sym}$ *où les* U_i *sont définies positives avec* $\det U_i = \delta > 0$.

Supposons qu'il existe $\mu > 0$ *et* $\nu \in S^2$ *tels que*

$$U_i \nu = \mu \nu, \; \forall i = 1, ..., k.$$

Soit $K = SO(3)U_1 \cup \cdots \cup SO(3)U_k$. *Alors*

$$K^{(2)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par

$$\{F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \det F = \delta \; ; F^T F \nu = \mu^2 \nu \; ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1,\dots,k} |U_i e|^2, \; \forall e \in S^2\}$$

Supposons de plus qu'il existe $n \in \{1, ..., k\}$ *tel que*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_1, ..., U_n\} = \{U_i \in \mathcal{U} : \exists \widetilde{e} \in S^2 \; , \; |U_i \widetilde{e}|^2 > \max_{j=1,\dots,n; j\neq i} |U_j \widetilde{e}|^2\}.$$

Alors, il existe un ensemble $\mathcal{E}_n = \{e_1, ..., e_n\} \subset S^2$ *tel que*

$$K^{qc} \quad = \quad \{F \in \mathbb{M}^{3\times 3} : \det F = \delta \; ; F^T F \nu = \mu^2 \nu \; ; |Fe_j|^2 \leq \max_{i=1,\dots,n} |U_i e_j|^2, \; \forall e_i \in \mathcal{E}_n\}$$

Théorème 0.0.4

Soit $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_k\} \subset \mathbb{M}^{3\times 3}_{sym}$ *où les* U_i *sont définies positives avec :* $adj_{33}U_i^2 = \delta^2 > 0$. *(Rappelons que* $adj_{33}U_i^2$ *est le sous-déterminant* 2×2 *obtenu en supprimant de* U_i^2 *la* $3^{\text{ème}}$ *ligne et la* $3^{\text{ème}}$ *colonne)*

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base orthonormale canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Soit $K = SO(3)\hat{U}_1 \cup \cdots \cup SO(3)\hat{U}_k$, *où :*

$$SO(3)\hat{U}_i = \{Q\hat{U}_i = (QU_ie_1, QU_ie_2),\ Q \in SO(3)\} \subset \mathbb{M}^{3\times 2}.$$

Alors :

$$K^{(3)} = K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

et chacune de ces enveloppes est donnée par :

$$\{F \in \mathbb{M}^{3\times 2} : \det F^TF \leq \delta^2 \ ; |Fe|^2 \leq \max_{i=1,\ldots,k} |\hat{U}_ie|^2, \forall e \in S^1\}$$

On utilise cette caractérisation pour construire une approximation interne de l'ensemble K et montrer l'existence d'une solution régulière pour le problème donné. Dans le cas générale (en l'absence d'une solution régulière), il existe une mesure de Young sous certaines conditions de croissance. Grâce à la caractérisation de l'ensemble K^{qc}, on étudie l'unicité de cette mesure.