RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba(Alger)

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtension du garde de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **Équations et inclusions différentielles ordinaires et fractionnaires**

Présentée par : **Besma BOUCHENEB**

Théorie du point fixe dans les espaces localement convexes

Directeur de mémoire : **Abdelhamid BENMEZAI**

Soutenu le 12 /10 /2013 à l'E.N.S-Kouba

Devant le jury composé de

Mr. S. DJEBALI	Professeur	ENS-Kouba	Président
Mr. T. MOUSSAOUI	M. C.(A)	ENS-Kouba	Examinateur
Mme. K. HAMMACHE	M.C.(B)	ENS-Kouba	Examinatrice
Mr. K. BACHOUCHE	M.C.(B)	ENSSEA	Examinateur
Mr. A. BENMEZAI	Professeur	USTHB	Directeur de mémoire

Table des matières

Résumé

Dans notre travail, nous avons étudié quelques théorèmes de point fixe dans des espaces de Banach munis de la topologie faible ; ceux ci peuvent $\hat{e}$tre appliqués directement pour prouver des résultats d'existence de solutions pour certaines équations intégrales non linéaires.

Ce travail est divisé en six chapitres. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté quelques théorèmes de point fixe dans des espaces de Banach. Dans le chapitre 3, nous avons donné quelques théorèmes de point fixe dans des espaces vectoriels topologiques localement convexes, en particulier dans des espaces de Banach munis de la topologie faible.

Dans le chapitre 4, nous avons démontré deux alternatives non linéaires de type Leray-Schauder et une alternative non linéaire de type Krasnosel'skii ; ce dernier résultat est appliqué directement pour résoudre l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} k(t,s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega,$$

posée dans l'espace $L^1(\Omega, X)$, l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur un ensemble mesurable $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach X de dimension finie. La fonction g est une contraction par rapport à la deuxième variable et f (resp. k) est une fonction non linéaire (resp. mesurable).

Dans le chapitre 5, nous avons introduit une nouvelle condition analogue à la condition

de Furi-Pera et qu'on note $(\mathcal{FPIC})_\delta$; elle est définie comme suit

$$(\mathcal{FPIC})_\delta \begin{cases} si\ \{(x_j,\mu_j)\}_{j\geq 1}\ est\ une\ suite\ dans\ \Omega_\delta \times [0,1] \\ convergente\ vers\ (x,\mu)\ avec\ x=\mu F(x)\ et\ 0\leq \mu < 1, \\ alors\ \mu_j F(x_j)\in \Omega\ pour\ j\ assez\ grand, \end{cases}$$

où $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$.
En utilisant la condition $(\mathcal{FPIC})_\delta$, nous avons démontré quelques résultats d'existence pour des applications $k-$set contractions et aussi pour des applications condensantes définies sur des ensembles ouverts bornés, strictement étoilés Ω d'un espace de Banach X.

Dans le dernier chapitre, nous avons utilisé le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff ainsi que la mesure de non compacité faible pour obtenir quelques principes d'existence pour l'équation

$$u(t) = Fu(t), \quad t \in [0,T]$$

posée dans un espace de Banach muni de la topologie faible. Nous avons étudié comme cas particulier l'équation intégrale de Volterra

$$y(t) = h(t) + \int_0^t k(t,s)f(s,y(s))ds, \quad t \in [0,T],$$

où l'intégrale est comprise dans le sens de l'intégrale de Pettis.

Abstract

In this work, we have studied some fixed point theorems in Banach spaces equipped with the weak topology and applied them to prove existence results of solutions for some nonlinear integral equations.

This work is divided into six chapters. In the second chapter, we have presented some fixed point theorems in Banach spaces. In Chapter 3, we have given some fixed point theorems in locally convex spaces, especially in Banach spaces equipped with the weak topology.

In Chapter 4, we have shown three nonlinear alternatives of Leray-Schauder and Krasnosel'skii type involving the weak topology ; this result is applied directly to solve the following integral equation :

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} k(t,s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega,$$

posed in $L^1(\Omega, X)$, the space of Lebesgue integrable functions on a measurable subset Ω of $\mathbb{R}^n$ with values in a finite dimensional Banach space X. Here g is a function satisfying a contraction condition with respect to the second variable while f (resp. k) is a nonlinear (resp. measurable) function.

In Chapter 5, we have presented a new condition similar to the condition of Furi-Pera

and denoted $(\mathcal{FPIC})_\delta$; it is defined as follows

$$(\mathcal{FPIC})_\delta \begin{cases} \text{if } \{(x_j,\mu_j)\}_{j\geq 1} \text{ is a sequence in } \Omega_\delta \times [0,1] \\ \text{ converging to } (x,\mu) \text{ with } x=\mu F(x) \text{ and } 0\leq \mu <1, \\ \text{ then } \mu_j F(x_j)\in\Omega \text{ for } j \text{ sufficiently large,} \end{cases}$$

where $\Omega_\delta := \{x\in\Omega : dist(x,\partial\Omega)<\delta\}$.
Using the condition $(\mathcal{FPIC})_\delta$, we have shown some fixed point theorems for continuous strict $k-$set contractions and more generally condensing maps F defined on bounded open and strictly star-shaped subsets Ω of a Banach space X.

In the last chapter, we have used the Schauder-Tychonoff fixed point theorem whith the weak measure of noncompactness to obtain existence principles for the general operator equation

$$u(t)=Fu(t), \quad t\in[0,T]$$

in a Banach space endowed with the weak topology. As a particular case we have studied the Volterra integral equation

$$y(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s)f(s,y(s))ds, \quad t\in[0,T],$$

where the integral is understood as the Pettis integral.