



## MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

## MAGISTER

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Équations et inclusions différentielles**

Présenté par

**Amina BOUCENNA**

---

---

## Calcul fractionnaire et applications aux problèmes aux limites

---

Directeur de mémoire : **Toufik MOUSSAOUI**

Soutenu le 13 /06/2013

Devant la Commission d'Examen

### JURY

Mr. A. MOKRANE	Prof. ENS-Kouba	Président
Mr. S. DJEBALI	Prof. ENS-Kouba	Examineur
Mr. A. BENMEZAI	Prof. USTHB	Examineur
Mr. M. BENCHOHRA	Prof. Univ. SBA	Examineur
Mr. T. MOUSSAOUI	M.C.(A). ENS-Kouba	Rapporteur

---

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>7</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>9</b>
1 Quelques outils de base . . . . .	9
1.1 Espace de fonctions absolument continues . . . . .	10
2 Critère de compacité sur les intervalles bornés et non bornés . . . . .	11
3 Théorie du point fixe . . . . .	11
4 Méthodes variationnelles . . . . .	12
4.1 Injections continues et compactes . . . . .	12
4.2 Notions de calcul différentiel . . . . .	14
<b>Références bibliographiques</b>	<b>17</b>
<b>II Calcul fractionnaire</b>	<b>19</b>
1 Fonctions élémentaires . . . . .	19
2 Intégrale fractionnaire au sens de Reimann-Liouville . . . . .	20
3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville quand $0 < \alpha \leq 1$ . . . . .	28

4	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans le cas général. . . . .	30
5	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	35
6	Extension de l'intégrale et de la dérivée fractionnaire sur les intervalles non bornés	41
6.1	L'intégrale et la dérivée fractionnaire sur toute la droite réelle . . . . .	41
<b>Références bibliographiques</b>		<b>43</b>
<b>III Existence de Solutions pour un problème aux limites associé à une équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire</b>		
1	Introduction . . . . .	45
2	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	47
3	Dépendance des solutions aux paramètres . . . . .	60
<b>Références bibliographiques</b>		<b>69</b>
<b>IV Solutions non bornées pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire sur la demi-droite</b>		
1	Introduction . . . . .	71
2	Résultat principal . . . . .	82
<b>Références bibliographiques</b>		<b>93</b>
<b>V Existence de solutions pour une classe de problèmes aux limites d'ordre fractionnaire via la théorie des points critiques</b>		
1	Introduction . . . . .	95
2	Espace de Sobolev à dérivées fractionnaires . . . . .	96
3	Le cadre variationnel . . . . .	102
4	Existence de solutions pour le problème (V.1) . . . . .	111
<b>Références bibliographiques</b>		<b>119</b>
<b>Conclusion</b>		<b>121</b>
<b>Références bibliographiques</b>		<b>123</b>

## Abstract

In this work, we have studied some fractional boundary value problems posed on bounded and unbounded intervals of the real line  $\mathbb{R}$  by fixed point theory and variational methods.

Our task in this work is to detail proofs of some papers dealing with the subject in order to make them clearer to readers. To do this, we start in the first chapter by recalling preliminaries which contain some notions and basic tools that we meet thereafter as criteria of compactness and some fixed point theorems, the lower and upper semi-continuity, the Palais-Smale condition, the principle of minimization, mountain pass lemma... etc..

In the second chapter, we set all the basic tools of fractional calculus that we will need later and all the detailed proofs such as the property of the semigroup for fractional integrals, integration by parts of fractional type, ... etc..

We recall that in this paper, we have studied only two types of fractional derivatives which are derived within the meaning of fractional Reimann-Liouville and Caputo fractional derivative.

The third chapter is devoted to the study of existence, uniqueness and dependence continuous of solutions for nonlinear boundary value problems associated with differential fractional equation. Is treated in chapter four a boundary value problem associated to a differential equation with a fractional term that contain a non linear fractional derivative of a lower order posed on the half-line. An appropriate compactness criterion is established, so we can use the Schauder's fixed point theorem on unbounded interval to obtain a result of existence of solutions. In addition, a suitable choice of a Banach space allows us to obtain solutions that may be unbounded. Finally, in the last chapter, using the critical point theory, a new approach is provided to study the existence of solutions to a fractional boundary value problem.

A variational structure is established and various results on the existence of solutions are obtained.

**Keywords** : Fractional differential Equations, critical point theorem, variational methods, fixed point theory, problems on bounded and unbounded intervals.

## Résumé

Dans ce mémoire on a étudié quelques problèmes aux limites fractionnaires posés sur les intervalles bornés et non bornés de la droite réelle  $\mathbb{R}$  par la théorie du point fixe ainsi que des méthodes variationnelles.

Notre tâche dans ce mémoire est de détailler les démonstrations de certains articles qui traitent le sujet afin de les rendre plus claires pour les lecteurs. Pour cela, nous commençons dans le premier chapitre par des préliminaires où nous rappelons quelques notions et outils de base que nous les rencontrerons par la suite tels que les critères de compacité et quelques théorèmes de point fixe, la semi-continuité inférieure et supérieure, la condition de Palais-Smale, le principe de minimisation, le théorème du col,...etc.

Dans le deuxième chapitre, nous avons énoncé tous les outils de base du calcul fractionnaire que nous aurons besoin par la suite ainsi que les démonstrations détaillées tels que la propriété du semi-groupe pour les intégrales fractionnaires, l'intégration par parties de type fractionnaire,...etc. Nous rappelons que dans ce mémoire, nous avons étudié uniquement deux type de dérivées fractionnaires qui sont la dérivée fractionnaire au sens de Reimann-Liouville ainsi que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Le troisième chapitre est consacré à la l'étude de l'existence, l'unicité et la dépendance continue des solutions pour un problème aux limites non linéaire associé à une équation différentielle fractionnaire.

On traite au chapitre quatre un problème aux limites associée à une équation différentielle fractionnaire avec un terme non linéaire dépendant d'une dérivée fractionnaire d'ordre inférieur sur la demi-droite réelle. Un critère de compacité approprié est établi, de sorte qu'on peut utiliser le théorème de point fixe de Schauder sur un intervalle non borné pour obtenir un résultat d'existence de solutions. De plus, un choix approprié d'un espace de Banach nous permet d'obtenir des solutions qui peuvent être non bornées.

Enfin, dans le dernier chapitre, en utilisant la théorie du point critique, une nouvelle

approche est fournie pour étudier l'existence de solutions à un problème aux limites fractionnaire .

Une structure variationnelle est établie et différents résultats sur l'existence de solutions sont obtenus.

**Mots-clés** : Equations différentielles fractionnaires, points critiques, théorème du col, méthodes variationnelles, théorie de point fixe, problèmes posés sur les intervalles bornés et non bornés.

## ملخص

في هذه المذكرة، ندرس وجود حلول لبعض المسائل الحدية ذات المشتقات الكسرية على مجالات محدودة و غير محدودة و هذا بإستخدام كلا من نظرية النقطة الصامدة و النقط الحرجة ، بالإضافة لطريقة التغاير

ففي الفصل الأول قدمنا بعض الأدوات الأساسية التي إستعملناها في مذكرتنا و تشمل بعض نظريات النقطة الصامدة و شروط تراص مجموعات و مبادئ حساب التغاير

كما قمنا في الفصل الثاني بإعطاء مبادئ الحساب الكسري مدعمة ببراهين مفصلة لجميع النظريات المستخدمة

أما في الفصلين الثالث و الرابع، تطرقنا إلى دراسة معادلات تفاضلية ذات مشتقات كسرية مرفقة بشروط تسمح بإيجاد الحلول بطريقة النقطة الصامدة، لكن يكمن الاختلاف بين هذين الفصلين كون الأول يدرس أيضا الوحدانية على مجالات محدودة في حين الثاني يدرس الوجود على المجالات غير المحدودة مع إختيار الفضاءات البنائية الملائمة لوجود الحلول

في الفصل الأخير قمنا بدراسة إحدى المسائل الحدية ذات المشتقات الكسرية بطريقة التصغير و النقاط الحرجة

**كلمات مفتاحية :** معادلات تفاضلية كسرية، نقط حرجة، طريقة التغاير، نظرية النقطة الصامدة، مسائل موضوعة على مجالات محدودة و غير محدودة