République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Équations et inclusions différentielles**

Présenté par

Dahmane BOUAFIA

Sur les problèmes aux limites d'ordre supérieur associés aux E.D.O.

Directeur de mémoire : **Toufik MOUSSAOUI**

Soutenu le 30 /11/2013

Devant la Commission d'Examen

JURY

Mr. S. DJEBALI	Prof. ENS-Kouba	Président
Mr. A. BENMEZAI	Prof. USTHB	Examinateur
Mr. K. BACHOUCHE	M.C.(B) ENSSEA	Examinateur
Mlle. K. HAMMACHE	M.C.(B) ENS-Kouba	Examinatrice
Mr. T. MOUSSAOUI	M.C.(A). ENS-Kouba	Rapporteur

Table des matières

Introduction générale

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires jouent un rôle important dans la théorie de la physique mathématique. Le but de ce travail est d'étudier l'existence, l'unicité et la multiplicité de solutions pour certains problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires d'ordres supérieurs et ceci en utilisant plusieurs techniques qui sont basées sur les méthodes variationnelles telles que le lemme du col, le théorème du point selle ainsi que la théorie des opérateurs fortement monotones.

Depuis la naissance du calcul des variations, on s'est rendu compte que lorsqu' elles s'appliquent, les méthodes variationnelles peuvent obtenir des résultats qui peuvent parfois être plus efficaces que beaucoup d'autres méthodes. En outre, elles s'appliquent à un très grand nombre de situations. Il a été démontré, il y a plusieurs décenies, que les solutions de beaucoup de problèmes sont en fait des points critiques de certaines fonctionnelles.

Dans ce mémoire, on présente quelques-uns des travaux qui utilisent la théorie de point critique pour étudier des problèmes aux limites. Beaucoup de nouveaux résultats ont été obtenus récemment par des chercheurs en utilisant cette approche, et dans certains cas, des résultats semblables n'ont pas été obtenus par d'autres méthodes.

Dans les applications, on établit que la solution proposée d'un problème aux limites est un point critique d'une certaine fonctionnelle J sur un espace approprié, c'est à dire un point u dans l'espace où $J'(u) = 0$. Trouver les points où les dérivées s'annulent seramène à la résolution du problème. La principale difficulté est de trouver les candidats appropriés.

A cet égard, on peut utiliser des considérations géométrique. Mais ces derniers n'impliquent pas des notions de dérivées, et habituellement, les mieux qui peuvent produire des dérivées sont les suites de Palais-Smale, c'est à dire, des suites qui vérifient

$$|J(u_n)| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}^+,$$

$$\|J'(u_n)\|_{X'} \quad \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

L'existence d'une telle suite n'est pas suffisante pour produire un point critique. Il est possible que cette suite soit divergente. Cependant, si l'on peut montrer que la suite possède une sous-suite convergente, alors on obtient en effet un point critique. Une fonctionnelle qui a la propriété que chaque suite de Palais-Smale produit un point critique est dite qu'elle satisfait la condition de Palais-Smale. Certains auteurs ont étudié les équations différentielles d'ordre supérieur en utilisant des méthodes variationnelles et ils ont obtenu beaucoup de résultats. En particulier, F. Li, Q. Zhang, et Z. Liang [1] ont étudié un problème aux limites du quatrième ordre en utilisant la théorie des opérateurs monotones ainsi que la théorie de point critique. Dernièrement, Yang et Zhang [2] ont étudié une équation du quatrième ordre avec des paramètres via des méthodes variationnelles. Dans [1], [3], la technique que les auteurs ont employée, est de transformer le problème aux limites en une équation intégrale avec un noyau défini positif (toutes les valeurs propres sont positives). Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons donné quelques outils de base qui sont utilisés par la suite.

Nous avons divisé le travail en trois sections. Dans la première section, nous avons abordé quelques caractéristiques d'opérateurs non-linéaires comme la continuité, la différentiabilité, les opérateurs de Nemytskii, les opérateurs fortement monotones ainsi que les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons donné aussi un rappel sur le théorème de compacité dans l'espace $C([0,1];\mathbb{R})$ (théorème d'Arzelà-Ascoli).

Dans la deuxième section, nous avons présenté la théorie spectrale d'un opérateur compact.

Nous avons présenté dans la troisième section la théorie de point critique (le lemme du Col (Mountain pass lemma) et le théorème de point selle ainsi que la théorie de minimisation.

Dans le chapitre deux, nous avons présenté les travaux [1], [3], où des résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour le problème aux limites du quatrième ordre suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x, u(x)), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

sont obtenus.
Le principe des opérateurs fortement monotones et la théorie de point critique sont employés pour discuter ce problème.
Le premier résultat dit que si pour chaque $x \in [0,1]$, $f(x,u)$ est une fonction décroissante en u, c'est-à-dire $f(x,u_1) \geq f(x,u_2)$ pour tous les u_1 et u_2 en $\mathbb{R}$ avec $u_1 \leq u_2$, alors le problème (1) a une solution unique dans $C^4[0,1]$.
Pour la démonstration, on a ulilisé le principe des opérateurs fortement monotones.
Le second résultat dit que, s'il existe une constante $a \in [0, \pi^4)$ telle que :

$$[f(x,u) - f(x,v)][u - v] \leq a|u - v|^2, \quad \text{pour tout } x \in [0,1], \text{ et } u,\ v \in \mathbb{R},$$

alors le problème (1) admet une solution unique dans $C^4[0,1]$,
Ici, le même principe des opérateurs fortement monotones est employé.
Le troisième résultat dit que si :

$$\int_0^u f(x,v)dv \leq \frac{a}{2}u^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x), \quad x \in [0,1], u \in \mathbb{R},$$

où $a \in [0, \frac{1}{\lambda_1}), \gamma \in (0,2), b \in L^{\frac{2}{\gamma}}([0,1])$ et $c \in L([0,1])$, alors le problème aux limites (1) admet au moins une solution dans $C^4[0,1]$.
La démonstration de ce résultat est basée sur le principe de minimisation.
Le quatrième résultat dit que sous les conditions suivantes sur la fonction f :

(A_1) il existe $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ et $R > 0$ tel que $\int_0^u f(t,v)dv \leq \mu u f(t,u)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $|u| \geq R$;

(A_2) $\limsup\limits_{u \to 0} \dfrac{f(t,u)}{u} < \dfrac{1}{\lambda_1}$ et $\lim\inf\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(x,u)}{u} > \dfrac{1}{\lambda_1}$ unformément par apport à $x \in [0,1]$,

alors le problème (1) a au moins une solution non nulle dans $C^4[0,1]$.
Pour la démonstration, on a utilisé le théorème du Col qui a été établi par Ambrosetti-Rabinowitz en 1973 dans [4] où on a vérifié la condition de Palais-Smale (P.S) ainsi que les conditions géométriques pour une fonctionnelle appropriée.
Le cinquième résultat dit que sous les conditions sur la fonction f suivantes :

(B_1) $f(x,u)$ est impaire en u c'est-à-dire $f(x,-u) = -f(x,u)$ pour tout $(x,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$

(B_2) il existe $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ et $R > 0$ tel que $\int_0^u f(x,v)dv \leq \mu u f(x,u)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $|u| \geq R$;

(B_3) $\limsup\limits_{u \to 0} \dfrac{f(x,u)}{u} < \dfrac{1}{\lambda_1}$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(x,u)}{u} = +\infty$ uniformément par apport à $x \in [0,1]$,

alors le problème aux limites (1) admet au moins une solution non nulle dans $C^4[0,1]$. Pour la démonstration, nous avons utilisé le théorème de point de selle.
Le chapitre trois consiste à étudier un problème aux limites sur l'intervalle $[0,1]$, avec des conditions mixtes. Le problème est suggéré par des modèles de la physique mathématiques ; ceci a fait l'objet du travail de Fuyi Li, Yuhua Li, Zhanping Liang dans [3].
Leur approche est variationnelle ; les solutions sont obtenues comme des minimiseurs où des points critiques de type passage du Col (mountain pass) et point selle d'une certaine fonctionnelle, en utilisant aussi le principe de l'opérateur fortement monotone. Plus précisément, on a traité le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + \beta u''(x) - \alpha u(x) = f(x, u(x)), & x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Ce problème est une généralisation du problème étudié dans le chapitre précedent (voir [1]), où les paramètres α et β vérifient $\beta < 2\pi^2$, $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$, et $\frac{\alpha}{\pi^4} + \frac{\beta}{\pi^2} < 1$.

Enfin, dans le dernier chapitre, on a étudié l'existence de solutions positives du problème aux limites singulier suivant :

$$\begin{cases} (-1)^m u^{(2m)}(x) = p(x) f(u(x)), & x \in (0,1), \\ u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1) = 0, & i = 0, ..., m-1, \end{cases} \tag{3}$$

où la fonction $p(x)$ peut être singulière aux instants $x = 0$ ou $x = 1$. L'analyse de ce problème s'appuie sur des méthodes variationnelles. Ceci fait l'objet du travail de Yujun Cui dans [5].
L'auteur a cherché des solutions dans l'espace de Sobolev H_0^m et il a utilisé un théorème d'injection qui joue un rôle important dans la démonstration des résultats.
La première valeur propre λ_1 associée à la première fonction propre φ_1 joue un rôle important dans la démonstration des résultats principaux.

Le premier résultat nous assure que le problème aux limites (3) admet une solution positive unique sous l'hypothèse suivante :

(H_1) $f_\infty^+ < \lambda_1 < f_0^- \leq f_0^+ < +\infty$

avec

$$f_0^- = \liminf_{u \to 0} \frac{f(u)}{u}, \quad f_0^+ = \limsup_{u \to 0} \frac{f(u)}{u},$$

$$f_\infty^- = \liminf_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u}, \quad f_\infty^+ = \limsup_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u}\cdot$$

Pour la preuve, on a utilisé le théorème de minimisation.
Le deuxième résultat nous assure que le problème aux limites (3) admet une solution positive unique sous les hypothèses suivantes :

(H_1) $f_0^+ < \lambda_1 < f_\infty^- \leq f_\infty^+ < +\infty$

(H_2) $p \geq 0$, $p \in C(0,1)$, $\exists\, x \in (0,1)$, $p(x) > 0$ et $\lim_{s\to 0} s^{2m-1} \int_s^{1-s} p(\tau)d\tau = 0$,

(H_3) $f \geq 0$ et $f \in C[0,+\infty)$.

Pour la démonstration, on a utilisé le théorème du Col où les deux conditions (H_2), (H_3) sont utilisées pour démontrer la condition (P.S), alors que la condition (H_1) est utilisée pour démontrer les conditions geométriques.

Pour le dernier résultat concernant le problème aux limites (3), on a obtenu une solution positive bornée, en utilisant un problème approché et encore une fois, on a utilisé le principe de minimisation sous l' hypothèse suivante :

(H_4) $f_0^+ < \lambda_1 < f_\infty^- \leq f_\infty^+ = +\infty$.