

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de Magister

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Présenté par

Riyadh NESRAOUI

**Étude d'un problème parabolique issu de la biologie-médecine**

Directeurs de mémoire : Abdelhafid Mokrane et Mohand Moussaoui

Soutenu le : Samedi 16 Novembre 2013

Devant la Commission d'examen composée de :

M. Khaled Boubaker SADALLAH	Professeur, ENS Kouba	Président
M. Smail DJEBALI	Professeur, ENS Kouba	Examineur
M. Abdelaziz CHOUTRI	MC, ENS Kouba	Examineur
M. Abdelhafid MOKRANE	Professeur, ENS Kouba	Directeur de mémoire
M. Mohand MOUSSAOUI	Professeur, ENS Kouba	Directeur de mémoire

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Quelques outils de base</b>	<b>5</b>
1.1 Semi groupes . . . . .	5
1.2 Opérateurs maximaux monotones / symétriques / auto-adjoints . . . . .	6
1.3 Opérateurs m-accrétifs (m-dissipatifs) . . . . .	8
1.4 Le théorème de Hille-Yosida . . . . .	9
1.4.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard . . . . .	9
1.4.2 Énoncé du théorème de Hille-Yosida . . . . .	10
<b>2 Etude du problème parabolique</b>	<b>21</b>
2.1 Présentation du problème . . . . .	21
2.2 Étude du problème stationnaire (2.2) . . . . .	27
2.3 Étude du problème instationnaire (2.3) . . . . .	29
2.4 Existence, unicité et régularité de la solution du problème initial (2.1) . . . . .	34
2.4.1 Quelques propriétés de la solution du problème initial (2.1) . . . . .	34
<b>3 Simulations numériques obtenues en utilisant le logiciel FreeFem++</b>	<b>38</b>
3.1 Résolution numérique du problème elliptique (stationnaire) (2.2) . . . . .	38
3.1.1 Code de programmation . . . . .	39
3.1.2 Présentations graphiques . . . . .	40
3.2 Résolution numérique du problème parabolique (2.3) . . . . .	41

3.2.1	Schéma numérique ( $\theta$ -schéma) correspondant au problème (2.3) . . . . .	42
3.2.2	Code de programmation . . . . .	43
3.2.3	Présentations graphiques . . . . .	44
3.3	Résolution numérique du problème initial (2.1) . . . . .	45
3.3.1	Formulation variationnelle du problème (2.1) correspondant au $\theta$ -schéma . . .	45
3.3.2	Code de programmation . . . . .	46
3.3.3	Présentations graphiques . . . . .	47
3.3.4	Quelques présentations graphiques montrant comment la solution évolue par rapport aux paramètres $c_i$ . . . . .	48
3.3.4.1	Présentations graphiques de l'évolution par rapport à $c_3$ . . . . .	48
3.3.4.2	Présentations graphiques de l'évolution par rapport à $c_4$ . . . . .	51
3.3.4.3	Présentations graphiques de l'évolution par rapport à $c_1$ . . . . .	53
3.3.4.4	Présentations graphiques de l'évolution par rapport à $c_2$ . . . . .	55
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité des solutions d'un problème modèle issu de la biologie-médecine ainsi quelques une de leurs propriétés.

Dans le premier chapitre nous présentons des outils de base nécessaires à l'étude des deux principales parties qui constituent ce mémoire.

Le deuxième chapitre s'attache à l'étude de l'existence, l'unicité et les propriétés de la solution de notre problème.

On s'intéresse dans le dernier chapitre à quelques simulations numériques en utilisant le logiciel FreeFem++ pour visualiser les courbes solutions.

# Abstract

In this work we analyze a mathematical model arising from biology-medicine described by an evolution equation of parabolic type.

In the first chapter we recall some basic tools of elementary functional analysis.

The second chapter is devoted to the questions of existence and uniqueness of the solutions to the model problem as well as to some of their properties.

In the third chapter we present some numerical results performed by a finite element method and the classical  $\theta$ -schema, using the FreeFem++ software.