

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NORMALE SUPERIEURE, VIEUX-KOUBA, ALGER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



THESE

Pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : THEORIE ALGEBRIQUE DES GRAPHS

Présentée par

Mohamed Elamine Talbi

Intitulé de la thèse

**Théories de l'homotopie et de l'homologie des graphes
Cycles hamiltoniens des sphères graphiques et leurs orbites**

Soutenue publiquement le 07 / 12 /2013

Devant le Jury composé de :

M. A. Derbal	Professeur à l'ENS, Vieux-Kouba, Alger	Président
M. R. Benzine	Professeur à l'Université d'Annaba	Examineur
M. Y. Laskri	Professeur à l'Université Badji Mokhtar, Annaba	Examineur
M. A. Zeghib	Directeur de Recherches, CNRS, ENS-Lyon	Examineur
M. D. Benayat	Professeur à l'ENS, Vieux-Kouba, Alger	Directeur de thèse

Contents

Introduction	iv
0 Généralités , Définitions et Notations	1
1 Structure graphique sur les morphismes	3
1.1 L'application exponentielle	3
1.2 Fibré tangent d'un graphe	4
1.3 Composantes connexes	5
1.4 Opérations dans \mathcal{G}	6
1.4.1 Produit cartésien	6
1.4.2 Somme cartésienne	7
1.4.3 Graphes quotients	8
1.4.4 Image réciproque de graphes	8
1.4.5 Somme amalgamée de graphes	9
1.5 Les sphères graphiques S^n et \tilde{S}^n	14
1.5.1 Suspension d'un graphe	15
1.5.2 Rétracte d'un graphe	17
2 Homotopie des graphes	20
2.1 Homotopie	21

2.1.1	Homotopie de chemins	24
2.1.2	Groupes d'homotopie relative supérieurs	27
2.1.3	La suite exacte longue d'homotopie	32
2.2	Fibrations graphiques	38
2.3	Graphes homogènes	46
3	The homology of a graph	49
3.0.1	Singular n-simplices	49
3.0.2	Degenerate singular simplices	51
3.0.3	Relative homology	54
3.0.4	Hurewicz theorem	55
3.1	The excision theorem for the sphere \mathcal{S}^n	57
3.1.1	The Excision theorem	59
3.1.2	Proof of the excision theorem	60
3.1.3	Future work	64
	Bibliography	66

Annexe 1 : Cycles hamiltoniens et orbites de $O(n)$

Annexe 2 : Articles publiés

ملخص الأطروحة

هذا العمل يدخل تحت نطاق أوسع لعمل المشرف في إطار المشكلة المركزية في الطوبولوجيا الجبرية، لحساب زمرة الهوموتوبي للكرات، عمله يستند على افتراض التكافؤ الهوموتوبي و الهومولوجي للكرات الطوبوغرافية و الكرات البيانية المعرفة في هذه الأطروحة. للقيام بذلك، نحتاج إلى نظريات كاملة للهوموتوبي و الهومولوجي للبيانات. هذا هو موضوع هذه الأطروحة و التي تتكون من أربعة أجزاء.

الجزء الأول : نضع المعطيات اللازمة للعمل، بما في ذلك تعريف الكرات البيانية S^n . نحدد مفاهيم تعليق البيان، حاصل بيان مع بيان جزئي والمجموع المدمج للبيانات ونبين أنه جداء في فئة البيانات. والأهم هو أن التطبيقات المولدة بواسطة هذه المنشآت هي تشاكل بيانات.

الجزء الثاني : نظرية هوموتوبي البيانات ترجع إلى عام 1976 وتقتصر على الهوموتوبي المطلقة $\Pi_k(X, x_0)$ ، وقد إستكمالنا بناء النظرية من خلال تحديد النظرية النسبية $\Pi_k(X, A, x_0)$ ، وتبين وجود متتالية دقيقة طويلة مرفقة لأي زوج من البيانات. كما نقدم مفهوم الليف البياني $F \hookrightarrow X \rightarrow B$ ، ونثبت نظرية رفع الهوموتوبي الملخصة في الرسم البياني التالي:

$$\begin{array}{ccc} I_m \times \{0\} & \xrightarrow{\omega} & X \\ \downarrow & \nearrow F & \downarrow p \\ I_m \times I_q & \xrightarrow{\Phi} & B \end{array}$$

الجزء الثالث : تطور نظرية كاملة لهومولوجية البيانات ونبرهن خصائصها الأساسية : (functoriality)، الثبات الهومولوجي، المتتالية الدقيقة المرفقة لزوج مستند، نظرية الاكسيزين، تعليق التماثل. كما أن تطبيق هذه المفاهيم على الكرات S^n يعطي نتائج منها :

$$H_k(S^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

هذا يدل على أن الهومولوجية قادرة على إكتشاف الثقوب ذات البعد n في البيان، وأيضا أن النظرية هي غير بديهية، ونذكر أن نظرية الهومولوجي العقدي ذات البعد 1 هي دائما بديهية، أي صفر في أي بعد أكبر من 1.

الجزء الرابع (الملحق): هذا القسم يتعلق بالرياضيات التجريبية. عندما لا يمكن تحديد كائن رياضي (هيكل، علاقة، دالة، الخ ...) فإن التجربة، أي استخدام التكنولوجيا وتكرار العمليات الحسابية، يمكن أن تكشف في بعض الأحيان عن معلومات حول هذا الكائن. لقد كتبنا برنامج *Mathematica* يسمى $cycles[mat, k]$ الذي يعطي كل الدورات البسيطة ذات الطول k من بيان معطى بمصفوفته الحاصرة *mat* الذي يجعل k يساوي عدد رؤوس البيان، وحصلنا على جميع دورات هاملتون إن وجدت.

نعطي دورات هاميلتون من المجالات S^1, S^2, S^3 . لا نعطي دورات S^4 لأنها كثيرة جدا. كذلك البرنامج $orbit[h]$ يعطي مدار الدور h بزمرة التذاكل ويسمح ببناء كل المدارات تحت فعل الزمرة لدورات هاملتون.