

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba(Alger)
Département de Mathématiques

Thèse

Pour l'obtention du titre de

Docteur en Sciences

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

OPTION: EDO

Présentée par : **Zahira SAHNOUN**

Intitulé de la thèse

**Théorie du point fixe pour les sommes et produits
d'opérateurs dans des espaces localement convexes,
et applications**

Soutenu publiquement le à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

| | | | |
|------------------------|----|-----------------------------|---------------|
| M. ATIK Youcef, | Pr | ENS, Kouba | Président |
| M. BENMEZAI Abdelhamid | Pr | USTHB | Examineur |
| M. MAKHLOUF Amar | Pr | Université d'Annaba | Examineur |
| M. MOULAY Mohamed Said | Pr | USTHB | Examineur |
| M. TAOUDI Mohamed-Aziz | Pr | Univ. Cadi Ayyad, Marrakesh | Examineur |
| M. DJEBALI Smail | Pr | ENS, Kouba | Dir. de thèse |

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 0 | Introduction | 4 |
| 1 | Preliminaries | 10 |
| 1.1 | Semi-norms and locally convex linear topological spaces | 11 |
| 1.2 | Weak topology | 13 |
| 1.3 | The space $C([0, T], B_w)$ | 13 |
| 1.4 | Measure of noncompactness in Banach spaces | 14 |
| 1.5 | Set-valued mappings | 16 |
| 2 | Introduction to Fixed Point Theory and Presentation of Results | 22 |
| 2.1 | What is fixed point theory? | 23 |
| 2.2 | Contraction mapping principle | 25 |
| 2.3 | Theorems of Brouwer, Schauder and Mönch | 28 |
| 2.4 | Nonlinear alternatives of Leray-Schauder type | 34 |
| 2.5 | Fixed point theory relative to the weak topology | 38 |
| 2.5.1 | Fixed point theorems in Hausdorff spaces | 38 |
| 2.5.2 | Fixed point theorems for weakly continuous maps | 39 |
| 2.5.3 | Fixed point theorems for weakly sequentially continuous maps | 41 |
| 2.6 | Fixed point theorems for the sum of two operators | 44 |
| 2.6.1 | Krasnosel'skij's fixed point theorem in locally convex linear spaces | 45 |
| 2.6.2 | Krasnosel'skij's fixed point theorem for weakly continuous maps | 48 |
| 2.6.3 | Krasnosel'skij's fixed point theorem for weakly sequentially continuous maps | 49 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.6.4 | Nonlinear alternative of Krasnosel'skij type | 50 |
| 2.7 | Fixed point theorems for ws -compact mappings | 52 |
| 2.8 | Fixed point theorems for some classes of set-valued mappings | 59 |
| 2.9 | Presentation of results | 61 |
| 3 | Nonlinear Alternatives of Schauder and Krasnosel'skij Types with Ap- plications to Hammerstein Integral Equations in L^1 Spaces | 82 |
| 3.1 | Introduction and Preliminaries | 83 |
| 3.2 | Nonlinear alternatives | 87 |
| 3.2.1 | The weak MNC | 87 |
| 3.2.2 | The case C is unbounded | 89 |
| 3.2.3 | The case C is bounded | 91 |
| 3.2.4 | A Krasnosel'skij type nonlinear alternative | 92 |
| 3.3 | Application to an abstract nonlinear integral equation | 93 |
| 3.3.1 | Preliminaries | 93 |
| 3.3.2 | Assumptions | 94 |
| 3.3.3 | A fixed point formulation | 95 |
| 3.3.4 | Existence results | 96 |
| 3.4 | Concluding remarks | 100 |
| 4 | Fixed Point Theorems with the Furi-Pera Interior Condition on Strictly Star-shaped Sets | 106 |
| 4.1 | Introduction | 107 |
| 4.2 | Preliminaries | 110 |
| 4.2.1 | Measure of noncompactness | 110 |
| 4.2.2 | Minkowski's functional on absorbing sets | 111 |
| 4.3 | Main Results | 112 |
| 4.4 | Examples | 117 |
| 4.4.1 | Example 1 | 117 |
| 4.4.2 | Example 2 | 118 |
| 4.5 | Fixed point theorems with the weak MNC | 119 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | On the Solvability of some Operator Equations and Inclusions in Banach Spaces with the Weak Topology | 129 |
| 5.1 | Introduction | 130 |
| 5.1.1 | Preliminaries | 130 |
| 5.1.2 | Auxiliary results | 132 |
| 5.1.3 | The weak MNC | 133 |
| 5.2 | Existence principles | 135 |
| 5.3 | Application to a Volterra integral equation | 136 |
| 5.3.1 | A special case | 136 |
| 5.3.2 | The general case | 139 |
| 5.4 | Operator and Volterra integral inclusions | 142 |
| 5.4.1 | Preliminaries | 142 |
| 5.4.2 | An abstract result | 143 |
| 5.4.3 | Application to an integral inclusion | 145 |
| 6 | Fixed Point Theorems for some Operator Equations and Inclusions in Banach Spaces Relative to the Weak Topology | 152 |
| 6.1 | Introduction | 153 |
| 6.2 | Operators of Mönch type | 155 |
| 6.2.1 | The general theory | 155 |
| 6.2.2 | Application to a Volterra equation | 157 |
| 6.3 | Operator inclusions | 159 |
| 6.3.1 | The general theory | 159 |
| 6.3.2 | A nonlinear integral inclusion | 161 |
| | Conclusion | 165 |
| | Abstract | 166 |
| | French Abstract | 168 |
| | Arabic Abstract | 170 |

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence de points fixes pour certains opérateurs non linéaires dans des espaces localement convexes, en particulier dans des espaces de Banach munis de leurs topologies faibles. L'objectif de cette thèse est d'établir de nouvelles versions de certains théorèmes de point fixe du type Schauder, Leray-Schauder et Krasnoselskij dans des espaces de Banach munis de leurs topologies faibles; ceux-ci peuvent être appliqués directement pour prouver des résultats d'existence de solutions pour certaines équations et inclusions intégrales non linéaires.

La thèse est divisée en six chapitres. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un aperçu historique sur l'évolution de la recherche sur la théorie du point fixe. Dans le chapitre 3, nous établirons trois alternatives non linéaires de type Leray-Schauder. Dans les deux premières alternatives, nous prouvons des résultats d'existence de point fixe pour des opérateurs définis sur un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach et qui vérifie

$$(\mathcal{A}1) \quad \begin{cases} \text{Si } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans } X, \text{ alors} \\ (Ax_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ admet une sous suite qui converge fortement dans } X. \end{cases}$$

La troisième alternative est un théorème de type Krasnosel'skij; nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de point fixe pour la somme de deux opérateurs A et B . L'opérateur A est supposé faiblement compact et vérifie la condition $(\mathcal{A}1)$ alors que B est une contraction. Ce dernier résultat est appliqué directement pour résoudre l'équation intégrale généralisée suivante :

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} k(t, s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega$$

posée dans l'espace $L^1(\Omega, X)$, l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur un ensemble mesurable $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach X de dimension finie. La

French Abstract

fonction g est une contraction par rapport à la deuxième variable alors que f (resp. k) est une fonction nonlinéaire (resp. mesurable).

Dans le chapitre 4, nous introduisons une nouvelle condition analogue à la condition dite de Furi-Pera et qu'on note (\mathcal{FPLIC}) ; elle est définie comme suit

$$(\mathcal{FPLIC})_\delta \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \{(x_j, \mu_j)\}_{j \geq 1} \text{ est une suite dans } \Omega_\delta \times [0, 1], \text{ pour certains} \\ \delta > 0 \text{ convergente vers } (x, \mu) \text{ avec } x = \mu F(x) \text{ et } 0 \leq \mu < 1, \\ \text{alors } \mu_j F(x_j) \in \Omega \text{ pour } j \text{ assez grand.} \end{array} \right.$$

En utilisant la condition (\mathcal{FPLIC}) , nous démontrons quelques résultats d'existence pour des applications de type contractions d'ensembles et " α -condensée" définies sur des ensembles strictement étoilés d'un espace de Banach E . $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$. $\Omega \ni 0$ est un ensemble strictement étoilé signifie que pour tout $x \in \partial\Omega$, on a $\{tx : t > 0\} \cap \partial\Omega = \{x\}$. Dans les deux derniers chapitres, nous utilisons le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff ainsi que la mesure de noncompacité faible pour obtenir quelques principes d'existence pour l'équation

$$u(t) = Fu(t), \quad t \in [0, T]$$

posée dans un espace de Banach muni de la topologie faible. Notre théorie générale comprendra comme cas particulier l'équation intégrale de Volterra

$$y(t) = h(t) + \int_0^t k(t, s)f(s, y(s))ds, \quad t \in [0, T],$$

où l'intégrale est comprise dans le sens de l'intégrale de Pettis. Les inclusions opérationnelles et intégrales associées aux équations précédentes sont également étudiées.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو إثبات وجود نقاط صامدة لتتابع متراصة بضعف معرفة على جزء مغلق من فضاء بناخي مزود بطبولوجيته الضعيفة، و من ثمّ تطبيق هذه النتائج لإيجاد حلول ضعيفة لمعادلات تكاملية عامة. لإثبات النتائج المطروحة سنستعمل بعض نظريات النقطة الصامدة المعروفة سابقاً كنظرية شاورد و نظرية كراسنسلسكي. قسمنا الأطروحة إلى ستة أبواب : في الباب الأول نذكر ببعض المفاهيم. في الباب الثاني نقدم لمحة وجيزة عن تطور نظرية النقطة الصامدة. في الباب الثالث نبرهن ثلاث نظريات من نوع لوري شاورد، ثمّ سنستعمل هذه النظريات لإثبات وجود حلول للمعادلة

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} k(t, s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in \Omega$$

في فضاء التتابع القابلة للمكاملة حسب لويغ $L^1(\Omega, X)$ ، حيث g تقلص بالنسبة للمتغير الثاني و f تابع لكارتيدوري. النتائج المتحصل عليها تعميم نتائج أخرى منشورة في مقالات سابقة. في الباب الرابع سنقدم شرط جديد من نوع فوري يبرأ و نقدم نتائج وجود نقاط صامدة لتتابع معرفة على مجموعات منجّمة. في البابين الخامس و السادس، نستعمل نظرية النقطة الصامدة لشاورد لإثبات وجود حلول للمعادلتين العامة و الخاصة

$$u(t) = Fu(t), \quad t \in [0, T]$$

$$y(t) = h(t) + \int_0^t k(t, s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

في فضاء التتابع المستمرة بضعف $C([0, T], B_w)$. كما سندرس بعض مسائل الاحتواءات المرفقة بالمعادلتين السابقتين في نفس الفضاء.