RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba(Alger)
Département de Mathématiques

Thèse
Pour l'obtension du titre de
Docteur en Sciences
SPÉCIALITÉ: **MATHÉMATIQUES**
OPTION: **EDO**

Présentée par : **Zahira SAHNOUN**

Intitulé de la thèse

Théorie du point fixe pour les sommes et produits d'opérateurs dans des espaces localement convexes, et applications

Soutenu publiquement le à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

M. ATIK Youcef,	Pr	ENS, Kouba	Président
M. BENMEZAI Abdelhamid	Pr	USTHB	Examinateur
M. MAKHLOUF Amar	Pr	Université d'Annaba	Examinateur
M. MOULAY Mohamed Said	Pr	USTHB	Examinateur
M. TAOUDI Mohamed-Aziz	Pr	Univ. Cadi Ayyad, Marrakesh	Examinateur
M. DJEBALI Smail	Pr	ENS, Kouba	Dir. de thèse

Contents

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence de points fixes pour certains opérateurs non linéaires dans des espaces localement convexes, en particulier dans des espaces de Banach munis de leurs topologies faibles. L'objectif de cette thèse est d'établir de nouvelles versions de certains théorèmes de point fixe du type Schauder, Leray-Schauder et Krasnoselskij dans des espaces de Banach munis de leurs topologies faibles; ceux-ci peuvent être appliqués directement pour prouver des résultats d'existence de solutions pour certaines équations et inclusions intégrales non linéaires.

La thèse est divisée en six chapitres. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un aperçu historique sur l'évolution de la recherche sur la théorie du point fixe. Dans le chapitre 3, nous établirons trois alternatives non linéaires de type Leray-Schauder. Dans les deux premiers alternatives, nous prouvons des résultats d'existence de point fixe pour des opérateurs définis sur un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach et qui vérifie

$$(\mathcal{A}1) \quad \begin{cases} \text{Si } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans} X, \text{ alors} \\ (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une sous suite qui converge fortement dans } X. \end{cases}$$

La troisième alternative est un théorème de type Krasnosel'skij; nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de point fixe pour la somme de deux opérateurs A et B. L'opérateur A est supposé faiblement compact et vérifie la condition $(\mathcal{A}1)$ alors que B est une contraction. Ce dernier résultat est appliqué directement pour résoudre l'équation intégrale généralisée suivante :

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_\Omega k(t,s) f(s, y(s))\, ds, \quad t \in \Omega$$

posée dans l'espace $L^1(\Omega, X)$, l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur un ensemble mesurable $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach X de dimension finie. La fonction g est une contraction par rapport à la deuxième variable alors que f (resp. k) est une fonction nonlinéaire (resp. mesurable).

Dans le chapitre 4, nous introduisons une nouvelle condition analogue à la condition dite de Furi-Pera et qu'on note $(\mathcal{FPIC})$; elle est définie comme suit

$$(\mathcal{FPIC})_\delta \begin{cases} \text{si } \{(x_j,\mu_j)\}_{j\geq 1} \text{ est une suite dans } \Omega_\delta \times [0,1], \text{ pour certains} \\ \delta > 0 \text{ convergente vers } (x,\mu) \text{ avec } x = \mu F(x) \text{ et } 0 \leq \mu < 1, \\ \text{alors } \mu_j F(x_j) \in \Omega \text{ pour } j \text{ assez grand.} \end{cases}$$

En utilisant la condition $(\mathcal{FPIC})$, nous démontrons quelques résultats d'existence pour des applications de type contractions d'ensembles et " α-condensée" définies sur des ensembles strictement étoilés d'un espace de Banach E. $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist }(x, \partial\Omega) < \delta\}$. $\Omega \ni 0$ est un ensemble strictement étoilé signifie que pour tout $x \in \partial\Omega$, on a $\{tx : t > 0\} \cap \partial\Omega = \{x\}$. Dans les deux derniers chapitres, nous utilisons le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff ainsi que la mesure de noncompacité faible pour obtenir quelques principes d'existence pour l'équation

$$u(t) = Fu(t), \quad t \in [0,T]$$

posée dans un espace de Banach muni de la topologie faible. Notre théorie générale comprendra comme cas particulier l'équation intégrale de Volterra

$$y(t) = h(t) + \int_0^t k(t,s) f(s, y(s)) ds, \quad t \in [0,T],$$

où l'intégrale est comprise dans le sens de l'intégrale de Pettis. Les inclusions opérationnelles et intégrales associées aux équations précédentes sont également étudiées.

ملخص

الهَدف من هذه الأَطروحة هو إِثبَات وجود نقَاط صَامدة لتوَابع متَرَاصة بضعف معرّفة علَى جزء مغلق من فضَاء بنَاخي مزوّد بطبولوجيته الضعيفة، و من ثمّ تطبيق هذه النّتَائِج لَايجَاد حلول ضعيفة لمعَادلَات تكَاملية عَامّة. لَاثبَات النتَائِج المطروحة سنستعمل بعض نظريَات النقطة الصَامدة المعروفة سَابقًا كنظرية شَاودر و نظرية كرَاسنسلسكي. قسّمنَا الأَطروحة إِلَى ستة ابوَاب : في البَاب الأَول نذكر ببعض المفَاهيم. في البَاب الثَاني نقدم لمحة وجيزة عن تطور نظرية النّقطة الصَامدة. في البَاب الثَالث نبرهن ثلَاث نظريَات من نوع لوري شَاودر، ثمّ سنستعمل هذه النظريَات لَاثبَات وجود حلول للمعَادلة

$$y(t) = g(t, y(t)) + \lambda \int_{\Omega} k(t,s) f(s, y(s))\, ds, \qquad t \in \Omega$$

في فضَاء التوَابع القَابلة للمكَاملة حسب لوبيغ $L^1(\Omega, X)$ ، حيث g تقلص بَالنسبة للمتغير الثَاني و f تَابع لكَارتيودوري. اَلنتَائِج المتحصل عليهَا تعمم نتَائِج أَخرَى منشورة في مقَالَات سَابقة. في البَاب الرَّابع سنقدم شرط جديد من نوع فوري بيرَا و نقدم نتَائِج وجود نقَاط صَامدة لتوَابع معرفة علَى مجموعَات منجّمة. في البَابين الخَامس و السَّادس، نستعمل نظرية النقطة الصَامدة لشَاودر لَاثبَات وجود حلول للمعَادلتين العَامة و الخَاصة

$$u(t) = Fu(t), \qquad t \in [0,T]$$

$$y(t) = h(t) + \int_0^t k(t,s) f(s, y(s)) ds, \qquad t \in [0,T],$$

في فضَاء التوَابع المستمرة بضعف $C([0,T], B_w)$. كمَا سندرس بعض مسَائِل الَاحتوَاءَات المرفقة بَالمعَادلتين السَّابقتين في نفس الفضَاء.