REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger
Département de Mathématiques

THESE

Pour l'obtention du grade de : **Doctorat en Sciences**
Spécialité : **MATHEMATIQUES**
Option : **E.D.P.**

Présentée le
09 juin 2011 à 14 h

Par **Nadji HERMAS**

Intitulé de la thèse :

Calcul symbolique intrinsèque des opérateurs pseudo-différentiels agissant sur les densités lisses d'une variété différentiable

Devant le Jury composé de :

MOKRANE Abdelhafid, Professeur ENS-Kouba, Président
MOUSSAOUI Mohand, Professeur, E.C.L. (France), Examinateur
BOUZAR Chikh, Professeur, U. d'Oran-Essenia, Examinateur
ZEGHIB Abdelghani, D.R., ENS-Lyon, France, Examinateur
LEMRABET Keddour, Professeur, USTHB, Directeur de thèse
DJEBALI Smail, Professeur, ENS-Kouba, co-Directeur de thèse

TABLE DES MATIERES

ABSTRACT

In this thesis, we present a generalized calculus for pseudodifferential operators on an arbitrary smooth manifold M. This symbolic calculus has two characters; first, it is intrinsic, this means that it doesn't depend on the different coordinate systems of M. Secondly, it works well in the case where we use the classes of Hörmander $S^{m}_{\rho,\delta}$ with the condition $\max(\delta,1/3)<\rho\leq 1$, whereas the usual calculus based on the coordinate systems of M, works well only under the condition $1-\rho\leq\delta<\rho\leq 1$ (which implies $1/2<\rho\leq 1$).

The language of linear connections which comes from the global analysis, has a fundamental role in our survey on the symbolic calculus.

In this scientific work, we treated the trivial case in the sense of the vector bundles and the case where the symbols of the considered operators are sections of smooth vector bundles over $T^{*}M$.

To construct an intrinsic symbolic calculus on the manifold M, we have need of that which we call the phase functions of pseudodifferential type. These classes of the functions are generally defined on sets of the form

$$W^{*}=\{(x,\xi,y)\in T^{*}M\times M:(x,y)\in W,\xi\in T^{*}_{x}M\}$$

where $W\subset M\times M$ are open neighborhoods of the diagonal Δ_{M}. But since long time, it became clear that these classes are bound to the family of the connections on M. In fact, for all connection on M, there is a family of the phase functions associated to this connection. For example, the phase function which we find in the theory of pseudodifferential operators in IR^{n}, is the phase function associated with the Levi-Civita connection of the Riemannian manifold IR^{n}.

The symbolic calculus on the open sets of IR^{n} appear simple because it is written in the standard Cartesian system which is defined in all IR^{n}. All normal coordinate systems corresponding to the Levi-Civita connection on IR^{n}, are bound linearly to this system. But this is not the case when we deal with the pseudodifferential operators on arbitrary manifolds. Because in the last case, a favorite connection doesn't exist, and the normal coordinate systems corresponding to the family of the connections on M, are not universal and depend on the points of M. We signal that the last property appear in IR^{n} if we replace the Levi-Civita connection by a non-flat connection in the survey of the symbolic calculus.

In this thesis, we used some symbols and amplitudes of Hörmander's classes corresponding to the family of the connections on M, and it is clear that one can generalize easily this work to contain other classes of symbols and amplitudes.

The first part from this thesis contains three chapters. The chapter 1 contains elementary results about the properties of the connections that we can find in any book dedicated to the survey of the connections. But these results are very important to comprehend the language used here in the determination of the symbols, for this reason we was obliged to present them in this thesis.

In the chapter 2, we collect the notions and the properties of basis of the smooth densities, then we generalize some operations of derivations on the functions and the tensors to the case of the densities and tensor densities. One signals that the smooth densities play an essential role in this work.

In the third chapter, we study some oscillatory integrals and in the fourth chapter, we use this survey to define new classes of pseudodifferential operators and to construct the indicated symbolic calculus. Let's note that this type of the integrals constitutes a fundamental tool in the theory of pseudodifferential operators and Fourier integral operators.

In the second part, we studied a subject of the global analysis concerning the extension of some classic results of the differential geometry to the infinite dimensional Riemannian geometry. More precisely, we proved, by a method of type Nash-Moser, the existence of geodesics of the weak Riemannian Lie groups

$$\left(DiffH^{\infty}(IR^{n});g_{H^{k}}\right)=\left(Diff(IR^{n})\cap\left(Id+H^{\infty}(IR^{n};IR^{n})\right),g_{H^{k}}\right)$$

and $\left(Diff(T^{n});g_{H^{k}}\right)$, where $g_{H^{k}}$ is the weak Sobolev metric of order k. Next, we study the Riemannian exponential mapping induced by this metric.

For $k=1$, the gotten result immediately gives the local existence of solution in $C^{\infty}\left(\,;H^{\infty}(IR^{n};IR^{n})\right)$ (respectively in $C^{\infty}\left(\,;X(T^{n})\right)$) of the n-dimensional analog of Camassa-Holm'equation on the Euclidean space IR^{n} (respectively on the torus T^{n}).

ملخص

نقدم في هذه الأطروحة حسابا رمزيا للمؤثرات شبه التفاضلية على منوعة تفاضلية M بدون حافة. لهذا الحساب ميزتان: أولا إنه ذاتي '' بمعنى أنه لا يتعلق بجمل الإحداثيات المختلفة لـ M، وثانيا هو يعمل جيدا مع أصناف رموز Hörmander تحت الشرط $\max(\delta,1/3)<\rho\le 1$، في حين نجد أن الحساب الرمزي العادي المعتمد على جمل الإحداثيات المختلفة لـ M لا يعمل سوى تحت الشرط $1-\rho\le\delta<\rho\le 1$ الذي يؤدي ضمنيا إلى أن $1/2<\rho\le 1$.

في هذا العمل الذي نستخدم فيها نظرية الرابطات الخطية 'Connexions linéaires' كما نجدها في التحليل الكلي، ندرس بالتوازي الحالة التافهة بمعنى الفيبريات الشعاعية 'Fibrés vectoriels' التي عولجت سابقا والحالة التي تكون فيها رموز المؤثرات مقاطع ملساء 'Sections lisses' لفيبري شعاعي على المنوعة T^*M.

لإنشاء أي حساب رمزي للمؤثرات شبه التفاضلية على المنوعة M نحتاج إلى ما يسمى 'توابع الطور شبه التفاضلية'، وهو صنف من التوابع معرف غالبا على مجموعات مفتوحة من الشكل

$$W^*=\left\{(x,\xi,y):(x,y)\in W,\xi\in T_x^*M\right\}$$

حيث $W\subset M\times M$ هي جوارات مفتوحة للقطر $\Delta_M=\left\{(x,x):x\in M\right\}$. لقد اتضح من أعمال علمية سابقة أن هذه التوابع مرتبطة بشكل وثيق بعائلة الرابطات الخطية للمنوعة M. في الواقع، لكل رابطة خطية على M عائلة توابع طور شبه تفاضلية مرفقة بها. فمثلا تابع الطور الكلاسيكي الذي يستخدم في نظرية المؤثرات شبه التفاضلية على IR^n هو في الحقيقة تابع الطور المرفق برابطة 'Levi-Civita' لمنوعة ريمان IR^n.

إن الحساب الرمزي في IR^n يبدو سهلا لأنه مكتوب في نظام الإحداثيات الديكارتي المعرف في كامل IR^n. علما أن كل نظم الإحداثيات الناظمية المرفقة برابطة 'Levi-Civita' لـ IR^n ترتبط خطيا بهذا النظام. لكن ليست هذه الحالة عندما نعالج الحساب الرمزي للمؤثرات شبه التفاضلية على منوعة كيفية M، حيث لا توجد رابطة خطية قانونية، كما أن النظم الإحداثيات الناظمية المرفقة بالرابطات الخطية للمنوعة M ليست عالمية وتتعلق بنقاط ومناطق M. ويكفي أن نعرف أن الخاصية الأخيرة تظهر عندما نستبدل رابطة 'Levi-Civita' برابطة أخرى ليست مستوية.

لقد استخدمنا في هذا العمل رموز وسعات Hörmander المرفقة برابطات M، ونؤكد أن النتائج المتوصل إليها هنا يمكن توسيعها لتشمل رموز وسعات أخرى.

الجزء الأول من هذه الأطروحة يتكون من ثلاثة فصول. في الفصل الأول، نقدم بعض العناصر الأولية لنظرية الرابطات الخطية التي نجدها في كتب التحليل الشامل. وفي الفصل الثاني، نعرض خواص الكثافات ثم نقوم بتعميم بعض عمليات الاشتقاق على التوابع والموترات إلى حالة الكثافات وموترات الكثافات. هذان الفصلان ضروريان لفهم اللغة المستخدمة في تحديد رموز المؤثرات شبه التفاضلية.

في الفصل الثالث، ندرس بعض التكاملات المتذبذبة، وفي الفصل الرابع نستخدم هذه الدراسة لإنشاء أصناف جديدة من المؤثرات شبه التفاضلية ولبناء تحليل رمزي لهذه الأصناف. نشير فقط إلى أن التكاملات المتأرجحة تشكل عموما وسيلة أساسية في دراسة المؤثرات شبه التفاضلية والمؤثرات التكاملية لفورييه.

في الجزء الثاني من هذه الأطروحة، ندرس موضوعا آخر يندرج ضمن التحليل الشامل ويتعلق بتوسيع بعض نتائج الهندسة التفاضلية إلى هندسة ريمان غير منتهية البعد، حيث نقوم، مستخدمين تقنية 'Nash-Moser'، بإثبات وجود الخطوط الجيوديزية لزمرتي 'Lie-Riemann ' الضعيفتين

$$\left(DiffH^{\infty}(IR^n),g_{H^k}\right)=\left(Diff(IR^n)\bigcap\left(Id+\bigcap_{j\in IN}H^j(IR^n)\right),g_{H^k}\right)$$

و $\left(Diff(T^n),g_{H^k}\right)$، علما أن g_{H^k} تشير إلى مترية Sobolev الضعيفة ذات الرتبة k. بعد ذلك نقوم بدراسة التطبيق الأسي لريمان الناتج عن هذه المترية.

من أجل $k=1$، النتيجة المتحصل عليها تعطي مباشرة الوجود المحلي والوحدانية في $C^{\infty}\left(\ ;H^{\infty}(IR^n,IR^n)\right)$ (على التوالي في $C^{\infty}\left(\ ;X(T^n)\right)$) لمعادلة 'Camassa-Holm' على IR^n (على التوالي لمعادلة 'Camassa-Holm' على T^n).