

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba- Alger
Département de Mathématiques



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : Zakaria HAMDI

Intitulé

**Unicité et non unicité de la solution approchée d'un problème
quasilinéaire elliptique et l'approximation numérique d'une
équation intégrale de type Volterra à noyau logarithmique**

Soutenu publiquement le 15.07.2010 devant le jury composé de :

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr.A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. EL.H. Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. A. Choutri	Maître assistant	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Directeur de thèse

Table des matières

Notations	8
Introduction	9
0 Rappels Et Définitions	14
0.1 Espaces L^p	14
0.2 Théorème du point fixe de Schauder	15
0.3 Espaces de Sobolev	16
0.4 Lemme de Lax-Milgram	17
0.5 Opérateurs de superposition	17
0.6 La Méthode des éléments finis	18
I Unicité et non unicité de la solution d'un problème quasi-linéaire elliptique et de son approximation numérique	26
1 Unicité de la solution du problème quasilineaire elliptique	27
1.1 Existence d'une solution	28
1.2 Unicité de la solution	31
1.3 Classe des contre-exemples	38
1.4 Quelques remarques	44
2 Unicité et non unicité de la solution approchée	46
2.1 Cas de dimension 1	51
2.2 Cas de dimension 2	59

II Solution de Legendre pour une équations intégrale avec noyau logarithmique	69
1 Préliminaires	70
1.1 Classification des équations intégrales	70
1.2 Polynômes orthogonaux	73
2 description de la méthode	76
3 L'ordre de convergence	81
4 Exemple numérique	88
A Calcule explicite	91
B Programmation	94
Bibliographie	97

Résumé

Dans la première partie de ce mémoire nous nous intéressons d'abord à l'étude de l'unicité de la solution du problème quasilinear elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f & \text{dans } \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

Ensuite, nous nous intéressons à l'étude de l'unicité de la solution dans le cas discret. Nous approchons le problème (1) par une méthode d'éléments finis P_1 conforme et nous montrons que si le pas du maillage est assez petit le problème discret associé à (1) admet une solution unique. Dans le cas échéant on donne des contre-exemples.

Dans la deuxième partie. Nous approchons une équation intégrale de type Volterra à noyau logarithmique par les polynômes de Legendre, on montre un résultat de convergence et on donne des essais numériques.

Abstract

In the first part of this dissertation we are interested in studying the uniqueness of the solution of quasi-linear elliptic problem as follows :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f & \text{in } \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

Then, we are interested in the study of the uniqueness of the solution in the discrete case. We approach the problem (1) by the finite element method and we prove that if the mesh size is small enough then there exists a unique solution the discrete problem associated with (1). In the contrary case we give counterexamples. In the second part. we approximate the solution of Volterra integral equation with logarithmic kernel by Legendre polynomials and we prove a result about convergence and give some numerical tests.

ملخص

في الجزء الأول من هذه المذكرة نهتم بدراسة وحدانية الحل للمسألة الشبه ناقصية التالية :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f & \text{على } \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

بعد ذلك نهتم بدراسة وحدانية الحل للمسألة في الحالة المتقطعة. نقرب المسألة (1) بطريقة العناصر المنتهية P_1 و نبرهن حين تكون خطوة التقسيم صغيرة كفاية أن المسألة المقربة المرافقة ل (1) تتمتع بحل وحيد. في حالة العكس نعطي أمثلة مضادة. في الجزء الثاني نقوم بتقريب معادلة تكاملية من صنف *Volterra* ذات نواة لوغاريتمية بإستعمال كثيرات حدود *Legendre* ، نبرهن التقارب و نقوم ببعض الإختبارات العددية.