MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, VIEUX-KOUBA, ALGER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE
Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ :**MATHÉMATIQUES**
OPTION: **ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES**
Présenté par:

TAHMI Nabil

Intitulé:

UN THÉORÈME DE BATEMAN SUR LA FONCTION PHI D'EULER

Soutenu publiquement le **17/06/2012** à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de:

Mr. BENAYAT Djilali	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. HERNANE Mohand Ouamar	Professeur	l'USTHB	Examinateur.
Mr. BENCHERIF Farid	M.C.A	l'USTHB	Examinateur.
Mr. MECHIK Rachid	M. Assistant catégorie A	l'USTHB	Examinateur.
Mr. DERBAL Abdallah	M.C.A	E.N.S-Kouba	Directeur de mémoire.

Table des Matières

Résumé

Soit φ la fonction arithmétique d'Euler définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $\varphi(n) = \sum_{1<m\leq n,(m,n)=1} 1$ et $\Phi(x)$ la fonction réelle définie, pour tout nombre réel $x > 0$, par $\Phi(x) = \sum_{\varphi(n)\leq x} 1$, $\Phi(x)$ désigne le nombre des entiers naturels n tel que $\varphi(n) \leq x$.

Il est connue [6] que $\Phi(x) \sim Ax$ $(x \to +\infty)$ où A est une costante effective donnée par $A = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \simeq 1,9435964....$

En 1972, P. Bateman étudia le reste $\Phi(x) - Ax$, il montra que pour x suffisamment grand et θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$, on a

$$\Phi(x) = Ax + O\left(x \exp\left(-\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ln x)(\ln\ln x)}\right)\right).$$

La méthode de Bateman est analytique, elle est basée sur l'intégration le long d'un contour du plan complexe en utilisant le théorème des résidus et la formule de Perron.

Le but de ce mémoire est de présenter une démonstration détaillée de ce résultat en apportant quelques simplifications.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier contient quelques outils fondamentaux utils pour l'étude de ce sujet. Dans le deuxième chapitre on établit des majorations explicites, sur le contour de Bateman, des deux fonctions $\zeta(s)$ de Riemann et $G(s)$ définie par

$$G(s) = \prod_p \left(1 + (p-1)^{-s} - p^{-s}\right) \ (\Re(s) > 0).$$

Dans le troisième chapitre on présente la démonstration du théorème de Bateman cité cidessus. Enfin, nous terminons par une annexe contenant une estimation du reste $\Phi(x) - Ax$, en utilisant la même méthode et un contour similaire à celui de Bateman. Le résultat obtenu est moins important que celui de Bateman.