

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, VIEUX-KOUBA, ALGER  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE



MÉMOIRE  
Présenté pour l'obtention du diplôme de  
MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES  
OPTION: ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES  
Présenté par:

TAHMI Nabil

Intitulé:

**UN THÉORÈME DE BATEMAN SUR  
LA FONCTION PHI D'EULER**

Soutenu publiquement le **17/06/2012** à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de:

Mr. BENAYAT Djilali	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. HERNANE Mohand Ouamar	Professeur	l'USTHB	Examineur.
Mr. BENCHERIF Farid	M.C.A	l'USTHB	Examineur.
Mr. MECHIK Rachid	M. Assistant catégorie A	l'USTHB	Examineur.
Mr. DERBAL Abdallah	M.C.A	E.N.S-Kouba	Directeur de mémoire.

# Table des Matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Notation</b>	<b>4</b>
<b>Résumé</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Préliminaire et quelques outils de base</b>	<b>9</b>
1.1 Préliminaire . . . . .	9
1.1.1 Sur la fonction $\varphi$ d'Euler . . . . .	9
1.1.2 Sur la fonction $\Phi$ d'Euler . . . . .	10
1.1.3 Sur la fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	12
1.2 Quelques outils de base . . . . .	14
1.2.1 la formule sommatoire d'Abel . . . . .	14
1.2.2 La formule de Perron . . . . .	16
1.3 Le théorème d'Erdős-Turán sur la fonction $\Phi(x)$ d'Euler . . . . .	23
<b>2 Majoration de <math>\zeta(s)</math>, <math>G(s)</math> dans le domaine de Bateman</b>	<b>28</b>
2.1 Majoration de $\zeta(s)$ dans $D_{T_0, \theta}$ . . . . .	29
2.2 Majoration de $G(s)$ dans $D_{T_0, \theta}$ . . . . .	30
<b>3 Le théorème de Bateman</b>	<b>34</b>
3.1 Le théorème de Bateman . . . . .	34
3.1.1 Lemmes préparatifs . . . . .	36
3.1.2 Majoration de $H(s)$ sur le courbe de Bateman $ABCDEF$ . . . . .	37
3.2 Démonstration du théorème . . . . .	42

<b>4</b>	<b>ANNEXE</b>	<b>44</b>
4.1	Majoration des fonctions $\zeta(s)$ , $G(s)$ . . . . .	45
4.1.1	Majoration de $\zeta(s)$ dans $D_{T_0}$ . . . . .	45
4.1.2	Majoration de $G(s)$ dans $D_{T_0}$ . . . . .	46
4.2	Estimation du reste $R(x) = \Phi(x) - Ax$ . . . . .	48
4.2.1	Théorème . . . . .	48
4.2.2	Lemmes préparatifs . . . . .	50
4.2.3	Majoration de $H(s)$ sur le domaine $ABCDEF$ . . . . .	51
4.2.4	Démonstration du théorème . . . . .	56

# Résumé

Soit  $\varphi$  la fonction arithmétique d'Euler définie, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par  $\varphi(n) = \sum_{1 < m \leq n, (m,n)=1} 1$   
et  $\Phi(x)$  la fonction réelle définie, pour tout nombre réel  $x > 0$ , par  $\Phi(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} 1$ ,

$\Phi(x)$  désigne le nombre des entiers naturels  $n$  tel que  $\varphi(n) \leq x$ .

Il est connue [6] que  $\Phi(x) \sim Ax$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) où  $A$  est une constante effective donnée par  $A = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \simeq 1,9435964\dots$

En 1972, P. Bateman étudia le reste  $\Phi(x) - Ax$ , il montra que pour  $x$  suffisamment grand et  $\theta$  un nombre réel tel que  $0 < \theta < 1$ , on a

$$\Phi(x) = Ax + O\left(x \exp\left(-\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{(\ln x)(\ln \ln x)}\right)\right).$$

La méthode de Bateman est analytique, elle est basée sur l'intégration le long d'un contour du plan complexe en utilisant le théorème des résidus et la formule de Perron.

Le but de ce mémoire est de présenter une démonstration détaillée de ce résultat en apportant quelques simplifications.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier contient quelques outils fondamentaux utiles pour l'étude de ce sujet. Dans le deuxième chapitre on établit des majorations explicites, sur le contour de Bateman, des deux fonctions  $\zeta(s)$  de Riemann et  $G(s)$  définie par

$$G(s) = \prod_p (1 + (p-1)^{-s} - p^{-s}) \quad (\Re(s) > 0).$$

Dans le troisième chapitre on présente la démonstration du théorème de Bateman cité ci-dessus. Enfin, nous terminons par une annexe contenant une estimation du reste  $\Phi(x) - Ax$ , en utilisant la même méthode et un contour similaire à celui de Bateman. Le résultat obtenu est moins important que celui de Bateman.