

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger
Département de Mathématiques



THESE

Pour l'obtention du grade de : **Doctorat en Sciences**
Spécialité : **MATHEMATIQUES**
Option : **E.D.O.**

Présentée par
MOUSSAOUI Toufik
Intitulée

**PROBLEMES AUX LIMITES
ASSOCIES À DES E.D.O. DU
SECOND ORDRE**

Devant le Jury composé de :

Président :	A. Mokrane	Professeur, ENS-Kouba
Examineur :	B.K. Saadallah	Professeur, ENS-Kouba
Examineur :	M. Benchohra	Professeur, U. S.Bel-Abbès
Examineur :	A. Benmezai	M.C., USTHB
Examineur :	S.M. Bouguima	M.C., Univ. Tlemcen
Invité :	M. Yebdri	Professeur, Univ. Tlemcen
Rapporteur :	S. Djebali	Professeur, ENS-Kouba

Table des matières

0	INTRODUCTION (Fr)	4
1	Survey sur les problèmes aux limites de Dirichlet associés à des EDO du second ordre	11
1.1	PROBLÈME NON LINÉAIRE AUTONOME	11
1.1.1	Existence d'une solution positive.	12
1.1.2	Existence de deux solutions positives	12
1.1.3	Existence de trois solutions positives	13
1.1.4	Multiplicité de solutions positives	13
1.2	PROBLÈME NON LINÉAIRE NE DEPENDANT PAS DE LA DERIVÉE	15
1.2.1	Solutions positives avec une nonlinéarité de signe quelconque	15
1.2.2	Solutions multiples avec une nonlinéarité asymptotiquement linéaire	17
1.2.3	Solutions multiples dans les cas sur-linéaire et sous-linéaire . .	19
1.3	LE PROBLÈME NON LINÉAIRE DEPENDANT DE LA DERIVÉE	21
1.3.1	Le cas d'un second membre lipschitzien borné	21
1.3.2	Le cas d'un second membre lipschitzien	21
1.3.3	Le cas d'un second membre continue borné	22
1.3.4	Sur la condition de croissance de Nagumo-Bernstein	22
1.3.5	Suffisance et nécessité de la condition de Nagumo-Bernstein .	24

1.3.6	La condition de Nagumo-Bernstein pour l'équation $u'' = g(x, u, u') + h(x, u, u')$	26
1.4	LE PROBLÈME NON LINÉAIRE SUR LES INTERVALLES NON BORNÉS	29
1.5	References	30
2	INTRODUCTION (En)	32
3	EXISTENCE RESULTS FOR SOME BVPs ASSOCIATED WITH SECOND ORDER ODEs	39
3.1	Introduction	40
3.1.1	The problem	40
3.1.2	Definitions	41
3.1.3	Fixed point formulation	41
3.2	A first existence result	42
3.3	The case of the sum of two nonlinearities	45
3.4	A further result	49
3.5	Concluding remarks	52
3.6	References	53
4	Boundary Value Problems for Doubly Perturbed First Order Ordinary Differential Systems	54
4.1	Introduction	54
4.2	Preliminaries	56
4.3	Existence of Solutions	56
4.3.1	Example	60
4.4	Existence of Extremal Solutions	61
4.5	References	65
5	A class of Second Order BVPs On Infinite Intervals	66

5.1	Introduction	66
5.2	A generalized polynomial growth condition	68
5.3	Existence of positive solutions	72
5.4	A further type of growth	74
5.5	The problem on the positive half line	77
	5.5.1 Setting of the problem	77
	5.5.2 Preliminaries	79
5.6	Weak solutions	84
5.7	References	88
6	Qualitative Properties and Existence of Solutions for a Generalized Fisher-like Equation	90
6.1	Motivation and introduction	90
6.2	Problem on the negative half-line	94
	6.2.1 Case of nonexistence and qualitative properties	94
	6.2.2 Existence of solutions	96
6.3	Problem on the positive half-line	101
	6.3.1 Setting of the problem	101
	6.3.2 Preliminaries	102
	6.3.3 Main result	103
	6.3.4 The case $p = 1$	107
6.4	Problem on the full real line	107
6.5	Applications	109
6.6	Concluding remarks	110
6.7	References	111

Chapitre 0

INTRODUCTION (Fr)

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains problèmes aux limites associés à des EDO du second ordre. Ces derniers sont largement étudiés dans la littérature. Pour la convenance du lecteur, nous avons réservé tout un chapitre (chapitre 1) pour rassembler l'essentiel de ces résultats. Notre contribution est alors présentée dans les chapitres 2 à 5, ce que nous allons passer en revue ci-dessous.

Dans le premier chapitre nous présentons un survey sur les problèmes aux limites de Dirichlet associés à des E.D.O. du second ordre posés sur les intervalles bornés et non bornés de \mathbb{R} . Certains résultats sont classiques, d'autres plus récents.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques résultats d'existence pour certains problèmes aux limites associés à des EDO du second ordre. Nous ne supposons pas une condition de type Nagumo-Bernstein sur la fonction non linéaire et nous obtenons des résultats d'existence pour une nouvelle classe de fonctions. Plus précisément, nous considérons le problème aux limites de Dirichlet suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} u'' = f(t, u, u'), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où la fonction $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Dans la première section de ce chapitre, un résultat d'existence est démontré sous

Introduction

l'hypothèse de croissance suivante :

$$|f(t, x, y)| \leq G(|x|, |y|), \quad \forall (t, x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

où $G:]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue croissante par rapport à ses deux arguments et satisfait

$$\exists R_0 > 0, \quad G(R_0, R_0) \leq R_0. \quad (3)$$

La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Schauder.

Comme conséquence du théorème précédent, nous déduisons l'existence d'au moins une solution au problème (1) sous l'hypothèse (2) et la condition de croissance sous linéaire suivante

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x, x)}{x} < 1. \quad (4)$$

Dans la deuxième section du premier chapitre, nous supposons que la fonction non linéaire f admet la décomposition

$$f(t, u, u') = g(t, u, u') + h(t, u, u') \quad (5)$$

où la fonction h est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ et satisfait la condition de signe

$$x.h(t, x, y) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (6)$$

et la fonction g est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$, satisfait (2) et il existe $\alpha \geq 0$ tel que l'ensemble

$$\mathcal{A}_\alpha := \{x > 0, x \leq (\alpha + 1) G(x, x)\} \neq \emptyset \text{ et } \sup \mathcal{A}_\alpha < \infty. \quad (7)$$

Nous démontrons que sous les hypothèses (6) et (7), le problème (1) admet au moins une solution classique. La démonstration de ce résultat est basée sur le théorème du point fixe de Schaeffer. Comme conséquence du théorème précédent, nous déduisons l'existence d'au moins une solution au problème (1) sous les hypothèses (6) , $\mathcal{A}_\alpha \neq \emptyset$ pour un certain α et

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha + 1)G(x, x)}{x} < 1.$$

Introduction

Dans la dernière section de ce premier chapitre, nous considérons un terme non linéaire de la forme (5) où la fonction h est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$, satisfait la condition de signe (6); par contre la fonction g est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ satisfait au lieu de la condition (2), l'hypothèse de croissance de type variables séparées, suivante

$$|g(t, x, y)| \leq \psi(x)\phi(y), \quad \forall t \in (0, 1), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

où ψ et ϕ sont deux fonctions continues strictement positives satisfaisant respectivement

$$\psi(x) \leq \psi(-x), \quad \forall x \geq 0 \quad (9)$$

$$\phi(-x) \leq \phi(x), \quad \forall x \geq 0. \quad (10)$$

En posant $\mathcal{A} := \{x \geq 0, \Phi(x) \leq \Psi(x)\}$ avec $\Phi(x) := \int_0^x \frac{t}{\phi(t)} dt$ et $\Psi(x) := \int_0^x \psi(t) dt$, on démontre que, sous les hypothèses (5)-(6), (8)-(10), le problème (1) admet au moins une solution classique pourvu que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et

$$0 < \sup \mathcal{A} < \infty. \quad (11)$$

Dans le troisième chapitre, nous donnons des résultats d'existence pour certains problèmes aux limites associés à un système d'EDO du premier ordre présentant une double perturbation de la forme :

$$x'(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t)) + G(t, x(t)), \quad a.e. \quad t \in [0, 1]; \quad (12)$$

$$Mx(0) + Nx(1) = \eta. \quad (13)$$

Ici les fonctions $F, G : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont de Carathéodory, $A(\cdot)$ est une matrice ($n \times n$) continue, M et N sont deux matrices ($n \times n$) constantes, et $\eta \in \mathbb{R}^n$. Le problème (12)-(13) englobe des équations différentielles du second ordre avec des conditions périodiques ainsi que des problèmes de Sturm-Liouville non linéaires.

Dans la première section de ce chapitre, nous supposons les hypothèses suivantes :

- La fonction $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de Carathéodory et satisfait :

$$\exists l \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+), \quad \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq l(t)\|y_1 - y_2\|,$$

Introduction

pour presque tout $t \in [0, 1]$ et tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

• La fonction G est continue et il existe une fonction $q \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $q(t) > 0$ pour presque tout $t \in [0, 1]$ et une fonction continue croissante $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$ telle que

$$\|G(t, y)\| \leq q(t)\psi(\|y\|) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1] \quad \text{et pour tout } y \in \mathbb{R}^n.$$

- $k^*\|l\|_{L^1} < 1$ pour un certain $k^* > 0$.
- Il existe $r > 0$ tel que $\Psi(r) < \beta r$ pour un certain $\beta > 0$,

Sous les hypothèses précédentes, nous montrons que le problème aux limites (12)-(13) admet au moins une solution $x \in AC([0, 1], \mathbb{R}^n)$, où $AC([0, 1], \mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $[0, 1]$.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous prouvons l'existence de solution maximale et de solution minimale pour le problème aux limites (12)-(13) sous des conditions de monotonie convenables sur la fonction non linéaire f . Plus précisément, nous supposons les hypothèses suivantes :

- Les fonction $F(t, y)$ et $G(t, y)$ sont strictement croissantes par rapport à y pour presque tout $t \in [0, 1]$.
- Le problème (12)-(13) admet une sous-solution v et une sur-solution w avec $v \leq w$.
- Le noyau k associé au problème (12)-(13) préserve l'ordre, i.e $k(t, s)v(s) \geq 0$ si $v \geq 0$.

Sous les hypothèses précédentes, on montre que le problème (12)-(13) admet une solution maximale et une solution minimale sur $[0, 1]$ par construction de suites monotones.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions une classe de problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés.

Dans la première section de ce chapitre, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u = h(x, u), & -\infty < x < +\infty. \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Introduction

Le paramètre $c > 0$ est une constante réelle positive et $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} h(x, 0) = 0$; le paramètre $\lambda > 0$ est peut être vu comme une valeur propre du problème.

Nous supposons alors qu'il existe une fonction $\Psi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue et croissante telle que :

$$|h(x, u)| \leq q(x)\Psi(|u|), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2$$

pour une certaine fonction continue et positive q , avec la restriction $\frac{\alpha\Psi(M_0)}{M_0} \leq 1$ où M_0 et α sont des constantes positives. L'existence d'au moins une solution pour le problème (14) est alors prouvé.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous admettons l'hypothèse :

$$h(x, u) \leq H(x, |u|)$$

où $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et croissante par rapport à son deuxième argument, vérifiant l'hypothèse intégrale :

$$\exists c_* > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, c_*) dx \leq c_* \sqrt{c^2 + 4\lambda}.$$

Un résultat d'existence est alors démontré.

Dans la troisième section de ce chapitre, l'existence d'une solution bornée pour le problème (14) est prouvée sous des conditions nouvelles sur la fonction non linéaire h :

- $\exists M_0 > 0$ tel que $|y| > M_0 \Rightarrow yh(x, y) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Il existe une fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante par rapport à son deuxième argument telle que

$$|h(x, y)| \leq H(x, |y|), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, M_0 + 1) dx < \infty.$$

- $|h(x, y)| \leq q(x)\psi(|y|), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante et q une fonction vérifiant une certaine condition.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{|y| \leq M_0 + 1} |h(x, y)| = 0$.

Introduction

Nous démontrons que si la première hypothèse de signe est vérifiée avec une des trois autres hypothèses précédentes, alors le problème (14) admet une solution bornée.

Nous considérons ensuite le problème suivant posé sur la demi-droite réelle positive :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u = h(x, u(x)), & x \in I \\ u(0) = u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

où

$h : I \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue vérifiant

$$\exists p > 0 : p \neq 1, \quad h(x, u) \leq a(x) + b(x)u^p, \quad \forall (x, u) \in I \times \mathbb{R}^+$$

et $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues vérifiant certaines conditions et le minimum de la fonction $h(x, u)$ sur un certain ensemble est supérieur ou égal à une quantité bien déterminée. L'existence d'au moins une solution positive est alors prouvée.

Dans la dernière section de ce chapitre, nous cherchons une solution faible pour le problème (14) en supposant que $h(x, u) = q(x)g(u)$ est une fonction de Carathéodory avec $q \in L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < +\infty$), vérifiant une certaine condition et g est telle que

$$\exists k, \sigma > 0, \quad |g(y)| \leq k|y|^\sigma, \quad \text{pour p.p. } x \in \mathbb{R} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Nous démontrons que le problème (14) admet une solution dans l'espace de Lebesgue $L^r(\mathbb{R})$ pour un certain $r > 0$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème linéaire

$$\begin{cases} (\mathcal{E}_u) \quad -u'' + cu' + \lambda u = f(x)u, & -\infty < x < +\infty. \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue positive vérifiant de plus

$$\frac{c^2}{4} - f \in L^1(\mathbb{R}), \quad (a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c^2}{4} - f(x) \right) dx < 0. \quad (b) \quad (17)$$

$$\text{Il existe } a > 0 \text{ tel que } f(x) \leq \frac{c^2}{4}; \quad \forall x, |x| \geq a. \quad (c)$$

Introduction

Le premier résultat obtenu fournit des solutions u à l'équation (\mathcal{E}_u) telles que $ue^{-\frac{cx}{2}} \in H^1(\mathbb{R})$, mais nous ne récupérons pas la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.

Nous nous intéressons ensuite au problème aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u = h(x, u(x)), & x \in I \\ u(0) = u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Ici $h: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui n'est pas nécessairement positive mais vérifie la condition de croissance polynomiale :

$$\exists p > 0 : p \neq 1, |h(x, u)| \leq a(x) + b(x)|u|^p, \quad \forall (x, u) \in I \times \mathbb{R}$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions positives et continues vérifiant certaines propriétés. On montre l'existence d'au moins une solution pour le problème (18).

Enfin, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u = h(x, u), & -\infty < x < +\infty. \\ u(-\infty) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

posé sur toute la droite réelle et où h vérifie les hypothèses suivantes :

$$(a) \quad |h(x, u)| \leq a(x) + b(x)|u|, \quad \forall x, u \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad a^* = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx < \infty, \quad b^* = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x)dx < \sqrt{c^2 + 4\lambda}.$$

Alors le problème (19) admet au moins une solution.