REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger
Département de Mathématiques

THESE

Pour l'obtention du grade de : **Doctorat en Sciences**
Spécialité : **MATHEMATIQUES**
Option : **E.D.O.**

Présentée par
MOUSSAOUI Toufik
Intitulée

PROBLEMES AUX LIMITES ASSOCIES À DES E.D.O. DU SECOND ORDRE

Devant le Jury composé de :

Président :	A. Mokrane	Professeur, ENS-Kouba
Examinateur :	B.K. Saadallah	Professeur, ENS-Kouba
Examinateur :	M. Benchohra	Professeur, U. S.Bel-Abbès
Examinateur :	A. Benmezai	M.C., USTHB
Examinateur :	S.M. Bouguima	M.C., Univ. Tlemcen
Invité :	M. Yebdri	Professeur, Univ. Tlemcen
Rapporteur :	S. Djebali	Professeur, ENS-Kouba

Table des matières

Chapitre 0

INTRODUCTION (Fr)

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains problèmes aux limites associés à des EDO du second ordre. Ces derniers sont largement étudiés dans la littérature. Pour la convenance du lecteur, nous avons réservé tout un chapitre (chapitre 1) pour rassembler l'essentiel de ces résultats. Notre contribution est alors présentée dans les chapitres 2 à 5, ce que nous allons passer en revue ci-dessous.

Dans le premier chapitre nous présentons un survey sur les problèmes aux limites de Dirichlet associés à des E.D.O. du second ordre posés sur les intervalles bornés et non bornés de $\mathbb{R}$. Certains résultats sont classiques, d'autres plus récents.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques résultats d'existence pour certains problèmes aux limites associés à des EDO du second ordre. Nous ne supposons pas une condition de type Nagumo-Bernstein sur la fonction non linéaire et nous obtenons des résultats d'existence pour une nouvelle classe de fonctions. Plus précisement, nous considérons le problème aux limites de Dirichlet suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} u'' &= f(t,u,u'), \quad 0<t<1 \\ u(0) &= u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

où la fonction $f\colon\ [0,1]\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Dans la première section de ce chapitre, un résultat d'existence est démontré sous l'hypothèse de croissance suivante :

$$|f(t,x,y)| \leq G(|x|,|y|), \quad \forall\,(t,x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

où $G\colon\ ]0,+\infty[^2 \longrightarrow]0,+\infty[$ est une fonction continue croissante par rapport à ses deux arguments et satisfait

$$\exists\, R_0 > 0, \quad G(R_0,R_0) \leq R_0. \tag{3}$$

La démonstration est basée sur le théorème du point fixe de Schauder.

Comme conséquence du théorème précédent, nous déduisons l'existence d'au moins une solution au problème (1) sous l'hypothèse (2) et la condition de croissance sous linéaire suivante

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{G(x,x)}{x} < 1. \tag{4}$$

Dans la deuxième section du premier chapitre, nous supposons que la fonction non linéaire f admet la décomposition

$$f(t,u,u') = g(t,u,u') + h(t,u,u') \tag{5}$$

où la fonction h est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ et satisfait la condition de signe

$$x.h(t,x,y) \geq 0, \quad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

et la fonction g est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^2$, satisfait (2) et il existe $\alpha \geq 0$ tel que l'ensemble

$$\mathcal{A}_\alpha\colon = \{x > 0,\ x \leq (\alpha+1)\ G(x,x)\} \neq \emptyset \ \text{ et } \sup \mathcal{A}_\alpha < \infty. \tag{7}$$

Nous démontrons que sous les hypothèses (6) et (7), le problème (1) admet au moins une solution classique. La démonstration de ce résultat est basée sur le théorème du point fixe de Schaeffer. Comme conséquence du théorème précédent, nous déduisons l'existence d'au moins une solution au problème (1) sous les hypothèses (6) , $\mathcal{A}_\alpha \neq \emptyset$ pour un certain α et

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{(\alpha+1)G(x,x)}{x} < 1.$$

Dans la dernière section de ce premier chapitre, nous considèrons un terme non linéaire de la forme (5) où la fonction h est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^2$, satisfait la condition de signe (6) ; par contre la fonction g est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ satisfait au lieu de la condition (2), l'hypothèse de croissance de type variables séparées, suivante

$$|g(t,x,y)| \leq \psi(x)\phi(y), \quad \forall\, t \in (0,1),\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

où ψ et ϕ sont deux fonctions continues strictement positives satisfaisant respectivement

$$\psi(x) \leq \psi(-x), \quad \forall\, x \geq 0 \tag{9}$$

$$\phi(-x) \leq \phi(x), \quad \forall\, x \geq 0. \tag{10}$$

En posant $\mathcal{A} \colon = \{x \geq 0, \quad \Phi(x) \leq \Psi(x)\}$ avec $\Phi(x) \colon = \int_0^x \frac{t}{\phi(t)}\,dt$ et $\Psi(x) \colon = \int_0^x \psi(t)\,dt$, on démontre que, sous les hypothèses (5)-(6), (8)-(10), le problème (1) admet au moins une solution classique pourvu que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et

$$0 < \sup \mathcal{A} < \infty. \tag{11}$$

Dans le troisième chapitre, nous donnons des résultats d'existence pour certains problèmes aux limites associés à un système d'EDO du premier ordre présentant une double perturbation de la forme :

$$x'(t) = A(t)x(t) + F(t,x(t)) + G(t,x(t)), \quad a.e. \quad t \in [0,1]; \tag{12}$$

$$Mx(0) + Nx(1) = \eta. \tag{13}$$

Ici les fonctions $F, G : [0,1]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont de Carathéodory, $A(.)$ est une matrice $(n\times n)$ continue, M et N sont deux matrices $(n\times n)$ constantes, et $\eta \in \mathbb{R}^n$. Le problème (12)-(13) englobe des équations différentielles du second ordre avec des conditions périodiques ainsi que des problèmes de Sturm-Liouville non linéaires.

Dans la première section de ce chapitre, nous supposons les hypothèses suivantes :

• La fonction $F : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de Carathéodory et satisfait :

$$\exists\, l \in L^1([0,1],\mathbb{R}_+),\ \|F(t,y_1) - F(t,y_2)\| \leq l(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour presque tout $t \in [0,1]$ et tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$.

• La fonction G est continue et il existe une fonction $q \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $q(t) > 0$ pour presque tout $t \in [0,1]$ et une fonction continue croissante $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,\infty)$ telle que

$$\|G(t,y)\| \leq q(t)\psi(\|y\|) \quad \text{p.p} \quad t \in [0,1] \quad \text{et pour tout} \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

• $k^*\|l\|_{L^1} < 1$ pour un certain $k^* > 0$.

• Il existe $r > 0$ tel que $\Psi(r) < \beta r$ pour un certain $\beta > 0$,

Sous les hypothèses précédentes, nous montrons que le problème aux limites (12)-(13) admet au moins une solution $x \in AC([0,1],\mathbb{R}^n)$, où $AC([0,1],\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $[0,1]$.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous prouvons l'existence de solution maximale et de solution minimale pour le problème aux limites (12)-(13) sous des conditions de monotonicité convenables sur la fonction non linéare f. Plus précisement, nous supposons les hypothèses suivantes :

• Les fonction $F(t,y)$ et $G(t,y)$ sont strictement croissantes par rapport à y pour presque tout $t \in [0,1]$.

• Le problème (12)-(13) admet une sous-solution v et une sur-solution w avec $v \leq w$.

• Le noyau k associé au problème (12)-(13) préserve l'ordre, i.e $k(t,s)v(s) \geq 0$ si $v \geq 0$.

Sous les hypothèses précédentes, on montre que le problème (12)-(13) admet une solution maximale et une solution minimale sur $[0,1]$ par construction de suites monotones.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions une classe de problèmes aux limites du second ordre sur les intervalles non bornés.

Dans la première section de ce chapitre, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u = h(x,u), & -\infty < x < +\infty. \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Le paramètre $c > 0$ est une constante réelle positive et $h\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x,0) = 0$; le paramètre $\lambda > 0$ est peut etre vu comme une valeur propre du problème.

Nous supposons alors qu'il existe une fonction $\Psi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ continue et croissante telle que :

$$|h(x,u)| \leq q(x)\Psi(|u|),\ \forall\,(x,u) \in \mathbb{R}^2$$

pour une certaine fonction continue et positive q, avec la restriction $\frac{\alpha\Psi(M_0)}{M_0} \leq 1$ où M_0 et α sont des constantes positives. L'existence d'au moins une solution pour le problème (14) est alors prouvé.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous admettons l'hypothèse :

$$h(x,u) \leq H(x,|u|)$$

où $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et croissante par rapport à son deuxième argument, vérifiant l'hypothèse intégrale :

$$\exists\, c_* > 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,c_*)\,dx \leq c_*\sqrt{c^2+4\lambda}.$$

Un résultat d'existence est alors démontré.

Dans la troisième section de ce chapitre, l'existence d'une solution bornée pour le problème (14) est prouvée sous des conditions nouvelles sur la fonction non linéaire h :

- $\exists\, M_0 > 0$ tel que $|y| > M_0 \ \Rightarrow\ yh(x,y) \leq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
- Il existe une fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et croissante par rapport à son deuxième argument telle que

$$|h(x,y)| \leq H(x,|y|),\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,M_0+1)\,dx < \infty.$$

- $|h(x,y)| \leq q(x)\psi(|y|),\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et croissante et q une fonction vérifiant une certaine condition.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sup_{|y|\leq M_0+1} |h(x,y)| = 0$.

Nous démontrons que si la première hypothèse de signe est vérifiée avec une des trois autres hypothèses précedentes, alors le problème (14) admet une solution bornée.
Nous considérons ensuite le problème suivant posé sur la demi-droite réelle positive :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u'' + cu' + \lambda u &=& h(x, u(x)), \quad x \in I \\ u(0) = u(+\infty) &=& 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

où

$h : I \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue vérifiant

$$\exists\, p > 0 : \ p \neq 1, \ h(x, u) \leq a(x) + b(x)u^p, \quad \forall\, (x, u) \in I \times \mathbb{R}^+$$

et $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues vérifiant certaines conditions et le minimum de la fonction $h(x, u)$ sur un certain ensemble est supérieur ou égal à une quantité bien déterminée. L'existence d'au moins une solution positive est alors prouvée.
Dans la dernière section de ce chapitre, nous cherchons une solution faible pour le problème (14) en supposant que $h(x, u) = q(x)g(u)$ est une fonction de Carathéodory avec $q \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < +\infty)$, vérifiant une certaine condition et g est telle que

$$\exists\, k, \sigma > 0, \ \ |g(y)| \leq k|y|^\sigma, \ \text{pour p.p. } x \in \mathbb{R} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Nous démontrons que le problème (14) admet une solution dans l'espace de Lebesgue $L^r(\mathbb{R})$ pour un certain $r > 0$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\mathcal{E}_u) \ -u'' + cu' + \lambda u &=& f(x)u, \quad -\infty < x < +\infty. \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) &=& 0, \end{array}\right. \tag{16}$$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue positive vérifiant de plus

$$\frac{c^2}{4} - f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad (a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c^2}{4} - f(x)\right) dx < 0. \qquad (b) \tag{17}$$

$$\text{Il existe } a > 0 \text{ tel que } f(x) \leq \frac{c^2}{4}; \quad \forall\, x, \ |x| \geq a. \quad (c)$$

Le premier résultat obtenu fournit des solutions u à l'equation $(\mathcal{E}_u)$ telles que $ue^{-\frac{cx}{2}} \in H^1(\mathbb{R})$, mais nous ne récuperons pas la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$.
Nous nous intéressons ensuite au problème aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u &= h(x, u(x)), \quad x \in I \\ u(0) = u(+\infty) &= 0. \end{cases} \tag{18}$$

Ici $h\colon\, I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui n'est pas necessairement positive mais vérifie la condition de croissance polynomiale :
$\exists\, p > 0 :\ p \neq 1,\ |h(x,u)| \leq a(x) + b(x)|u|^p, \quad \forall\, (x,u) \in I \times \mathbb{R}$
où $a, b\ :\ I\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions positives et continues vérifiant certaines propriétés. On montre l'existence d'au moins une solution pour le problème (18).
Enfin, nous considérons le problème :

$$\begin{cases} -u'' + cu' + \lambda u &= h(x, u), \quad -\infty < x < +\infty. \\ u(-\infty) = u(+\infty) &= 0, \end{cases} \tag{19}$$

posé sur toute la droite réelle et où h vérifie les hypothèses suivantes :

$$(a) \quad |h(x,u)| \leq a(x) + b(x)|u|,\ \forall\, x, u \in \mathbb{R}.$$
$$(b) \quad a^* = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx < \infty, \quad b^* = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x)dx < \sqrt{c^2 + 4\lambda}.$$

Alors le problème (19) admet au moins une solution.