République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Équations et inclusions différentielles ordinaires et fractionnaires**

Présenté par

Madjid HALAOUA

Étude de quelques problèmes aux limites avec des poids indéfinis

Directeur de mémoire : **Abdelhamid BENMEZAI**

Soutenu le 30/05/2013

Devant la commission d'examen

JURY

M. S. DJEBALI	Professeur	ENS-Kouba	Président
M. T. MOUSSAOUI	M.C.(A)	ENS-Kouba	Examinateur
M. K. BACHOUCH	M.C.(B)	ENSSEA	Examinateur
Mle. K. HAMMACHE	M.C.(B)	ENS-Kouba	Examinatrice
M. A. BENMEZAI	Professeur	USTHB	Rapporteur

Table des matières

Introduction générale

Ce travail consiste à étudier quelques problèmes aux limites avec poids indéfinis par la théorie de bifurcation.
Notre travail s'appuie essentiellement sur les articles [33], [34] publiés en 2009 par R. Y. Ma et X.L. Han. Nous avons aussi tiré grand profit de l'article [30], publié par P. H. Rabinowitz en 1971 et de l'article [31], publié par P. H. Rabinowitz en 1973.
Le travail se propose de reprendre systématiquement toute les démonstrations de l'article [33] et de l'article [34] en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large. Cela nous amène à rappeler ou à détailler certaines notions fondamentales utilisées (telles la théorie de bifurcation, le degré topologique, la fonction de Green, théorèmes de l'oscillation de Sturm,...). Mais, ces notions préliminaires sont disponibles dans tout ouvrage de référence en Analyse Fonctionnelle.

Aprés cette bréve introduction, passons maintenant à la description de son contenu et de son organisation. Dans ce mémoire, nous traitons principalement la question d'existence des solutions nodales et positives, et la stabilité des solutions positives de quelques problèmes aux limites avec poids indéfinis en utilisant la théorie de bifurcation.

Dans un premier temps, nous avons présenté quelques préliminaires contenant le théorème d'existence et d'unicité, le théorème des fonctions implicites ainsi que la théorie fondamentale de la fonction de Green accompagnés de certaines propriétés du degré topologique, d'abord en dimension finie (degré de Brouwer), puis en dimension infinie (degré de Leray-Schauder). Ce chapitre s'avère a être un préquis incontournable pour les chapitres qui suivent.

Le chapitre deux est consacré a la théorie de bifurcation. Les phénomènes de bifurcation ont été utilisés dans beaucoup domaines de la physique et ont été intensivement étudiés, c'est souvent le cas dans les applications où les problèmes sont sous la forme

$$u = \lambda K u + H(\lambda, u), \tag{1}$$

avec $K : E \to E$ un opérateur linéaire compact et $H : \mathbb{R} \times E \to E$ une application

compacte telle que $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ au voisinage de $u = 0$ uniformément par rapport à λ et λ dans un intervalle borné.
En fait, un point $(\lambda_0, 0)$ est appelé un point de bifurcation de (1) relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ si tout voisinage de ce point contient des solutions de l'équation (1), i.e.
il existe une suite de solutions (λ_n, u_n) de (1) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0 \text{ et } \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Dans ce contexte, Krasnosel'skii a montré un résultat de bifurcation locale qui affirme que si λ_0 est une valeur caractéristique de K de multiplicité algébrique impaire, le point $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation de (1) relativement à la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$. P. H. Rabinowitz a montré sous les hypothèses du théorème de Krasnosel'skii que la bifurcation a des conséquences globales.
En effet,
si λ_0 est une valeur caractéristique de K de multiplicité algébrique impaire et B dénote l'ensemble de solutions non triviales de (1), il existe une composante connexe Σ telle que

$$(\lambda_0, 0) \in \Sigma \subset \overline{B}.$$

De plus, cette composante est ou bien non bornée ou bien elle rejoint un point $(\lambda_1, 0)$, $\lambda_1 \neq 0$ et λ_1 est une valeur caractéristique de K de multiplicité algébrique impaire. Krasnosel'skii et P. H. Rabinowitz utilisent dans les démonstrations de ces théorèmes la réduction de Lyapunov-Schmidt. L'idée de la réduction de Lyapunov-Schmidt est la décomposition de l'espace E en somme directe d'un espace propre et sons supplémentaire et décrire la réduction d'un problème posé sur des espaces de dimension infinies en un problème posé sur des espaces de dimension finies. Cette méthode permet aussi de montrer un résultat de bifurcation globale (théorème de Crandall-Rabinowitz).
Une application de ces résultats globaux de bifurcation nous amène à la bifurcation à l'infini.
En fait, un point (μ, ∞) est appelé un point de bifurcation à l'infini pour (1) si tout voisinage de ce point contient des solutions de l'équation (1),
i.e.
il existe une suite de solutions (λ_n, u_n) de (1) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty \text{ et } \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \mu.$$

Dans ce travail un théorème a été donné dans le cas où L est un opérateur linéaire compact, μ une valeur caractéristique de L de multiplicité algébrique impaire et

K une application continue sur $\mathbb{R} \times E$ et l'application $u \mapsto \|u\|^2 H(\lambda, \frac{u}{\|u\|^2})$ est complètement continue telle que

$$K(\lambda, u) = o(\|u\|)$$

au voisinage de $u = \infty$ uniformément par rapport à λ et λ dans un intervalle borné. En effet,
sous les hypothèses précédentes (μ, ∞) est un point de bifurcation à l'infini pour l'équation suivante :

$$u = \lambda L u + K(\lambda, u). \tag{2}$$

De plus, l'équation (2) possède une composante connexe $\mathcal{D}$ des solutions non triviales qui est non bornée et rencontre le point (μ, ∞).

Concernons le troisième chapitre, nous avons démontré que si la fonction de poids h est continue et change de signe sur $[0, 1]$, le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) = \lambda h(t) u(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

est appelé un problème avec poids indéfinis et il admet deux suites de valeurs propres simples et de multiplicité algébrique simple.
Plus précisément, il est bien connu que si la fonction de poids h est continue et positive sur $[0, 1]$, le problème (3) admet une suite de valeurs propres simples

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ..., \ \lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty,$$

et de multiplicité algébrique simple, telles que la fonction propre φ_k correspendante à λ_k admet exactement $k - 1$ zéros simples sur $[0, 1]$.
Dans le cas où la fonction de poids h change de signe, on utilise la théorie d'oscillation pour montrer que le problème (3) admet deux suites de valeurs propres simples

$$0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < ... < \lambda_k^+ < ..., \ \lim_{k \to \infty} \lambda_k^+ = +\infty$$

et

$$0 > \lambda_1^- > \lambda_2^- > ... > \lambda_k^- > ..., \ \lim_{k \to \infty} \lambda_k^- = -\infty,$$

et de multiplicité algébrique simple, telles que la fonction propre $\varphi_k^{\pm}$ correspendante à $\lambda_k^{\pm}$ admet exactement $k - 1$ zéros simples sur $[0, 1]$.

Dans le quatrième chapitre, on étudie l'existence de solutions nodales du problème

$$\begin{cases} -u''(t) = r h(t) f(u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

sous les hypothèses suivantes :
(H_1) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $sf(s) > 0$ pour $s \neq 0$;
(H_2) Il existe $f_0, f_\infty \in (0, \infty)$ tels que $f_0 = \lim\limits_{|s| \to 0} \dfrac{f(s)}{s}, \quad f_\infty = \lim\limits_{|s| \to \infty} \dfrac{f(s)}{s}.$
(H_3) $h \in \mathcal{C}([0,1])$ qui change de signe.
Comme nous allons voir par la suite, une fonction u est appelée fonction nodale si elle est non triviale et toutes ses zéros sont simples.
Ma et Thompson faisont usage du théorème de bifurcation globale de P. H. Rabinwitz et ont établi sous les hypothèses (H_1) et (H_2) le résultat qui affirme que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour un paramètre réel r tel que

$$\frac{\lambda_k}{f_\infty} < r < \frac{\lambda_k}{f_0}$$

ou bien

$$\frac{\lambda_k}{f_0} < r < \frac{\lambda_k}{f_\infty};$$

le problème (4) admet deux solutions u_k^+ et u_k^- telles que u_k^+ admet $k-1$ zéros sur $(0,1)$ et positive au voisinage de 0, et u_k^- admet $k-1$ zéros sur $(0,1)$ et elle est négative au voisinage de 0, où h est une fonction continue positive et non identiquement nulle sur tout sous-intervalle de $[0,1]$, et λ_k la valeur propre d'ordre k du problème linéaire

$$\begin{cases} -u''(t) = \mu h(t) u(t), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Notons que tous les résultats ci-dessus ont été obtenus sous la condition $h \geq 0$. La question qui se pose est quel sont les changements si la fonction de poids h change du singe ? Précisément, nous faisons l'hypothèse (H_3).
Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et $(H3)$ et en utilisant le théorème de bifurcation globale de P. H. Rabinwitz on obtient le résultat qui affirme que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour un paramètre réel r tel que

$$r \in (\frac{\lambda_k^+}{f_\infty}, \frac{\lambda_k^+}{f_0}) \cup (\frac{\lambda_k^-}{f_0}, \frac{\lambda_k^-}{f_\infty})$$

ou bien

$$r \in (\frac{\lambda_k^+}{f_0}, \frac{\lambda_k^+}{f_\infty}) \cup (\frac{\lambda_k^-}{f_\infty}, \frac{\lambda_k^-}{f_0}),$$

le problème (4) admet deux solutions u_k^+ et u_k^- telles que u_k^+ admet $k-1$ zéros sur $(0,1)$ et positive au voisinage de 0, et u_k^- admet $k-1$ zéros sur $(0,1)$ et elle est négative au voisinage de 0, avec $\lambda_k^\mp$ la valeur propre d'ordre k du problème linéaire (5) sous l'hypothèse (H_3).

Enfin, dans le dernier chapitre, en utilisant le théorème de bifurcation de Crandall-Rabinowitz on étudie l'existence et la stabilité de solutions positives du

problème (4) sous les hypothèses suivantes :
(H_1) $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(0) = f(s_1) = f(s_2) = 0$, $0 < s_1 \leq s_2$, et

$$f(s) > 0 \text{ pour } (0, s_1) \cup (s_2, +\infty), \quad f(s) < 0 \text{ pour } (s_1, s_2);$$

(H_2) Il existe $f_0, f_\infty \in (0, \infty)$ tels que $f_0 = \lim\limits_{|s| \to 0} \dfrac{f(s)}{s}$, $\quad f_\infty = \lim\limits_{|s| \to \infty} \dfrac{f(s)}{s}$;
(H_3) $h \in \mathcal{C}([0,1])$ qui change de signe ;
(H_4) $f^{''}(s) < 0$ pour $s \in [0, s_1)$.
Comme nous allons voir par la suite, (λ_0, u_0) est appelée solution stable du problème (4) si toutes les valeurs propres de l'opérateur linéarisé K sont strictement positives, avec

$$Kw = -w'' - \lambda_0 h(t) f^{'}(u_0) w.$$

À la fin de ce mémoire, nous avons donné un nombre assez grand des références bibliographiques au lecteur intéréssé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger ce mémoire. Cette liste est bien sûr non exhaustive et certaines entrées ne sont pas citées dans le texte.