

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
École Normale Supérieure, Kouba- Alger  
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : **Karim BOUOUDEN**

Intitulé

# Le réarrangement relatif et son application aux injections des espaces de Sobolev à exposant variable

Soutenu publiquement le ... 2010 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

A. MOKRANE	Professeur	E.N.S-Kouba	Président
M. BOUSSELSAL	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur
L. ZITOUNI	Maître assistant A	E.N.S-Kouba	Examinatrice
Y. ATIK	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations</b>	<b>3</b>
1.1	Notations . . . . .	3
1.2	Introduction . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Quelques outils de base</b>	<b>11</b>
2.1	Espaces réflexifs . . . . .	11
2.2	Espaces $L^p$ classiques . . . . .	12
2.3	Espaces de Sobolev classiques . . . . .	13
2.4	Réarrangements . . . . .	14
2.4.1	Réarrangement décroissant . . . . .	14
2.4.2	Inégalité de Hardy-Littlewood . . . . .	15
2.5	Réarrangement relatif . . . . .	15
2.5.1	Réarrangement relatif . . . . .	15
2.5.2	Inégalité de Hardy-Littlewood pour le réarrangement relatif . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Espaces de Lebesgue à exposant variable</b>	<b>22</b>
3.1	Espaces de fonctions de Banach . . . . .	22
3.2	Espaces de Lebesgue à exposant variable . . . . .	23
3.2.1	Espaces $L^{p(\cdot)}$ . . . . .	23
3.3	L'étude de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood . . . . .	39
3.4	Espaces de Sobolev à exposant variable $W^{k,p(\cdot)}$ . . . . .	50

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
<b>4 Espaces à exposant variable et réarrangement</b>	<b>55</b>
4.1 Résultats sur les espaces à exposant variable et réarrangement . . . .	55
4.2 Lemme de Nekvinda . . . . .	60
4.3 Continuité du rearrangement relatif . . . . .	63
4.4 Théorème de Vitali . . . . .	69
<b>5 Applications aux injections de Sobolev</b>	<b>71</b>
5.1 Injections de Sobolev . . . . .	71

## Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier le réarrangement relatif d'une fonction mesurable définie dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  et ce en vue de son application aux injections des espaces de Sobolev à exposant variable. Ces espaces sont construits sur les espaces de Lebesgue à exposant variable, notés  $L^{p(\cdot)}$ . On montre que les techniques développées pour les réarrangements monotones et relatives dans le cadre des espaces de Lebesgue classiques, qui sont invariants par réarrangement, sont applicables dans le cadre des espaces de Lebesgues à exposant variable, qui ne sont pas invariants par réarrangement.

Le mémoire est composé de quatre chapitres : dans le premier, on donne quelques résultats classiques concernant les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev standards, et on présentera le réarrangement monotone et le réarrangement relatif avec certaines de leurs propriétés.

Dans le second chapitre, on étudie les espaces de Lebesgue à exposant variable et les espaces de Sobolev à exposant variable  $W^{k,p(\cdot)}$ .

Dans le troisième chapitre, on énoncera quelques résultats concernant le réarrangement relatif dans les espaces de Lebesgue à exposant variable.

Et enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'application du réarrangement aux injections de Sobolev à exposant variable.

Ce travail est basé essentiellement sur les articles :

- A. Fiorenza et J.M. Rakotoson, *Relative rearrangement and Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$  with variable exponent* [7].
- O. Kováčik et J. Rákosník, *On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$*  [15].

## Abstract

The aim of this memoir is the study of the relative rearrangement of a measurable function, defined on open bounded set  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^N$  in order to apply it to embedding of variable exponent Sobolev spaces. These spaces are constructed on the variable exponent Lebesgue spaces, denoted  $L^{p(\cdot)}$ . We prove that the techniques developed for monotone and relative rearrangements in classical Lebesgue spaces, which are invariant by rearrangement, are applicable in the framework of variable exponent Lebesgue spaces which are not invariant by rearrangement.

The memoir is composed of four chapters : in the first one, we give some classical results about Lebesgue spaces and Sobolev spaces, and present monotone and relative rearrangements with some of their properties.

In the second chapter, we study variable exponent Lebesgue spaces and variable exponent Sobolev spaces  $W^{k,p(\cdot)}$ .

In the third chapter, we give some results about relative rearrangement in the framework of variable exponent Lebesgue spaces.

Finally, the last chapter is devoted to the application of rearrangement to Sobolev embeddings.

This work is based essentially on the paper :

- A. Fiorenza et J.M. Rakotoson, *Relative rearrangement and Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$  with variable exponent* [7].
- O. Kováčik et J. Rákosník, *On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$*  [15].

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة اعادة الترتيب النسبي لتابع قيوس، معرف على ميدان  $\Omega$  مفتوح و محدود من  $\mathbb{R}^N$ ، وهذا قصد تطبيقه في احتواءات فضاءات سوبلاف ذات الأس المتغير. هذه الفضاءات مبنية على فضاءات لوبيغ ذات الأس المتغير  $L^{p(\cdot)}$ . نبرهن على أنه يمكن تطبيق تقنيات اعادة الترتيب والرتيب والنسبي، التي صممت في اطار فضاءات لوبيغ الكلاسيكية، وهي لامتغيرة نسبة إلى اعادة الترتيب، في اطار فضاءات لوبيغ ذات الأس المتغير، وهي لا تتمتع بخاصية اللاتغير نسبة إلى اعادة الترتيب.

تحتوي المذكرة على أربعة فصول : نقدم في الأول بعض التعاريف والنتائج الكلاسيكية الخاصة بفضاءات لوبيغ وسوبلاف التقليدية، ثم نناول اعادة الترتيب والرتيب والنسبي.

وفي الفصل الثاني، نقوم بدراسة فضاءات لوبيغ وسوبلاف ذات الأس المتغير  $W^{k,p(\cdot)}$ . أمّا في الفصل الثالث فنقدم بعض النتائج والمبرهنات المتعلقة باعادة الترتيب النسبي في فضاءات لوبيغ ذات الأس المتغير.

وفي الأخير، نخصص الفصل الرابع لتقديم بعض تطبيقات اعادة الترتيب النسبي للحصول على احتواءات فضاءات سوبلاف ذات الأس المتغير. إننا في هذا العمل نعتمد أساسا على المقاتين :

- A. Fiorenza et J.M. Rakotoson, *Relative rearrangement and Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$  with variable exponent* [7].
- O. Kováčik et J. Rákosník, *On spaces  $L^{p(x)}$  and  $W^{k,p(x)}$*  [15].