République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCE

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

Fares MOKHTARI

Problèmes paraboliques anisotropes à données dans un espace d'Orlicz ou mesures

Directeur de thèse : **Youcef ATIK**

Soutenue le 15 09 2011

Devant la Commission d'Examen

JURY

A. MOKRANE	Prof. ENS-Kouba	Président
Y. ATIK	Prof. ENS-Kouba	Directeur
J.M. RAKOTOSON	Prof. Univ. Poitiers	Examinateur
M.S. MOULAY	Prof. USTHB	Examinateur
H. OUAZAR	M.C (A) ENS-Kouba	Examinateur
M. BOUKRA	M.C UMMTO	Examinateur

Table des Matières

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudie l'existence d'une solution faible du problème parabolique anisotrope du type

$$(P)\qquad \begin{cases} \partial_t u + Au + F(t,x,u,Du) &= \mu \ \text{ sur } \ Q \doteq]0,T[\times\Omega;\\ u(0,\cdot) &= \mu_0 \ \text{ sur } \ \Omega;\\ u &= 0 \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\partial\Omega, \end{cases}$$

où μ_0 est une mesure de Radon bornée sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ régulier et borné, μ est une mesure de Radon bornée sur Q et l'opérateur A est défini par $Au = -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(t,x,u,Du))$. Les fonctions $\widehat{a}$ et F vérifient les conditions $(\widehat{a}.1) - (\widehat{a}.3)$ et (F).
Notre travail généralise quelques résultats dans les travaux de Boccardo-Gallouët-Marcellini (cas elliptique anisotrope), Li-Zhao (cas parabolique anisotrope) et Dall'aglio-Orsina (cas parbolique isotrope).
Nos recherches ont fait l'objet de deux publications dans des journaux internationaux. La première intitulée **Anisotropic parabolic problems with measures data** publiée en 2010 dans le journal Differential Equations And Applications.
La deuxième intitulée **Anisotropic parabolic problems with Orlicz data** a été acceptée pour publication en 2011 dans le journal Mathematical Methods in the Applied Sciences. Elle est relative au cas où les données du problème μ et μ_0 sont plus régulières, appartenant à l'espace d'Orlicz généralisée associée à la fonction $s \mapsto |s|\ln(1+|s|)$. La solution faible dont on prouve l'existence est ici plus régulière que dans le cas où les données sont des mesures.
La résolution du problème (P) se fait en plusieurs étapes :

1. **Approximation de problème (P) par une suite de problème (P_n) réguliers à données dans un espace de Sobolev réflexif.**
2. **Estimations uniformes sur les solution approchées et leurs troncatures.**
   Ces estimations à caractère anisotrope, sont établies en utilisant l'inégalité anisotrope de Sobolev :
   $$\|u\|_{L^s(\Omega)} \le C\Big(\prod_{i=1}^{N}\|u\|_{L^{\alpha_i}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{N}}$$
   $$u \in X_0^{1,\overrightarrow{\alpha}}(\Omega) = \Big\{v \in L^{\alpha_+}(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{\alpha_i}(\Omega),\ i=1,\dots,N \quad \text{et} \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}$$
   où $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,...,N)$, $\alpha_i > 1$, $i=1,\dots,N$ et $s = N(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} - 1)^{-1}$ si $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} > 1$. Ces estimations sont nouvelles dans le cas anisotrope.
3. **Passage à la limite dans (P_n).**
   Il réalisé en adaptant la méthode que Rakotoson a utilisé dans le cas parabolique isotrope et qui est basée sur un lemme fondamental de compacité donnant la convergence p.p des gradients (Du_n).

   Pour traiter le cas anisotrope, on a prouvé une généralisation du lemme utilisé par Rakotoson.

Mots clés : Equation parabolique, mesure de Radon, problème anisotrope, espace d'Orlicz.

Abstract

In this thesis, we study the following anisotropic parabolic problem

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u + Au + F(t,x,u,Du) &= \mu \text{ in } Q \doteq]0,T[\times\Omega; \\ u(0,\cdot) &= \mu_0 \text{ in } \Omega; \\ u &= 0 \text{ on }]0,T[\times\partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded open set of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $T > 0$ a real number, μ is a Radon's bounded measure on Q, μ_0 a Radon's bounded measure on Ω, and A is the operator given by $Au = -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(t,x,u,Du))$. Here, we suppose that $\widehat{a}$ and F are functions verifying the conditions $(\widehat{a}.1) - (\widehat{a}.3)$, and (F).
Our work is a generalization of some results of Boccardo-Gallouët-Marcellini (anisotropic elliptic case), Li-Zhao (anisotropic parabolic case), and Dall'aglio-Orsina (isotropic parabolic case).
Our research has been the subject of two publications in internationals journals. The first entitled **Anisotropic parabolic problems with measures data** published in 2010 in the journal of Differential Equations and Applications.
The second entitled **Anisotropic parabolic problems with Orlicz data** which has been accepted for publication in 2011 in the journal of Mathematical Methods in The Applied Science. It is relative for the case μ and μ_0 are more regular, belonging to the generalized Orlicz space associated with the function $s \mapsto |s|\ln(1+|s|)$. The weak solution which we prove the existence here it is more regular than in the case where the data are measures.
The resolution of the problem (P) is done in several steps :

1. **Approximation of problem (P) by a sequence of regular problem (P_n) with data in a reflexive Sobolev space.**
2. **Uniforms estimates on approximate solutions and their truncations.**
   These estimates of anisotropic nature, are established by using the anisotropic Sobolev inequality :
   $$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C\Big(\prod_{i=1}^{N} \|u\|_{L^{\alpha_i}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{N}}$$
   $$u \in X_0^{1,\overrightarrow{\alpha}}(\Omega) = \Big\{v \in L^{\alpha_+}(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{\alpha_i}(\Omega),\ i = 1,\ldots,N \quad \text{et} \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}$$
   where $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, $\alpha_i > 1$, $i = 1,\ldots,N$ and $s = N(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i} - 1)^{-1}$ if $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i} > 1$. These estimates are new in the anisotropic case.
3. **Passage to the limit in (P_n).** It is realized by adapting the method that Rakotoson is used in the isotropic parabolic case and it is based on a fundamental compactness Lemma giving convergence p.p of gradient (Du_n).
   To treat the anisotropic case, we proved a generalization of the Lemma used by Rakotoson.

Keywords : Parabolic equations, Radon's mesure, anisotropic problems, Orlicz space.