

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

## **THÈSE**

Pour l'obtention du grade de

### **DOCTEUR EN SCIENCE**

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

**Fares MOKHTARI**

---

---

### **Problèmes paraboliques anisotropes à données dans un espace d'Orlicz ou mesures**

---

Directeur de thèse : **Youcef ATIK**

Soutenue le 15 09 2011

Devant la Commission d'Examen

#### **JURY**

A. MOKRANE	Prof. ENS-Kouba	Président
Y. ATIK	Prof. ENS-Kouba	Directeur
J.M. RAKOTOSON	Prof. Univ. Poitiers	Examineur
M.S. MOULAY	Prof. USTHB	Examineur
H. OUAZAR	M.C (A) ENS-Kouba	Examineur
M. BOUKRA	M.C UMMTO	Examineur

---

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>9</b>
<b>Notations</b>	<b>11</b>
<b>I Inégalités anisotropes de Sobolev</b>	<b>15</b>
1 Inégalité de Sobolev . . . . .	15
2 Norme mêlée . . . . .	17
2.1 Inégalité de Hölder . . . . .	18
2.2 Normes mêlées permutées . . . . .	19
3 Inégalité anisotrope . . . . .	22
4 Injections anisotropes de Sobolev . . . . .	29
<b>Références bibliographiques</b>	<b>31</b>
<b>II Cas <math>1 + N/(N + 1) &lt; p_i &lt; \bar{p}(N + 1)/N</math> et <math>F = 0</math></b>	<b>33</b>
1 Hypothèses et notations . . . . .	34
2 Positions du problème . . . . .	38
3 Approximation de $(P)$ . . . . .	39
4 Estimations uniformes . . . . .	46
5 Un lemme fondamental de compacité . . . . .	68
6 Passage à la limite dans les problèmes approchés . . . . .	76

<b>Références bibliographiques</b>	<b>79</b>
<b>III Cas <math>1 + \frac{N}{N+1} &lt; p_i &lt; \bar{p}(N+1)/N</math> et <math>F \neq 0</math></b>	<b>81</b>
1 Approximation du problème $(P')$ . . . . .	82
2 Passage à la limite dans $(P'_n)$ . . . . .	85
<b>Références bibliographiques</b>	<b>87</b>
<b>IV Cas où <math>\mu \in L^1(0, T; L_\gamma(\Omega))</math> et <math>\mu_0 \in L_\gamma(\Omega)</math></b>	<b>89</b>
1 Espaces d'Orlicz . . . . .	90
2 N-fonctions . . . . .	90
3 Condition $\Delta_2$ et fonction complémentaire $\tilde{\gamma}$ . . . . .	94
3.1 Condition $\Delta_2$ . . . . .	94
3.2 Fonction complémentaire . . . . .	95
4 Cas où $\mu_0 \in L_\gamma(\Omega)$ et $\mu \in L^1(0, T; L_\gamma(\Omega))$ . . . . .	98
5 Approximation du problème $(P)$ . . . . .	99
6 Construction d'une solution de $(P)$ . . . . .	105
7 Passage à la limite dans $(P_n)$ . . . . .	107
<b>Références bibliographiques</b>	<b>111</b>
<b>V Les T-ensembles (cas anisotropes) et leurs propriétés</b>	<b>113</b>
1 Le problème $(P_0)$ : Cas $1 < p_i < \bar{p}(N+1)/N$ . . . . .	113
2 Les T-ensembles et leurs propriétés . . . . .	116
3 T-ensemble : cas anisotrope . . . . .	117
<b>Références bibliographiques</b>	<b>127</b>
<b>VI Application à la résolution des problèmes anisotropes paraboliques : Cas</b>	
$1 < p_i < \bar{p}(N+1)/N$	<b>129</b>
1 Cas $1 < p_i < \bar{p}(N+1)/N$ à données mesures . . . . .	129
2 Estimations des solutions approchées . . . . .	130
3 Construction d'une solution de $(P_0)$ . . . . .	133
4 Existence de la solution relaxée de $(P_0)$ . . . . .	136
4.1 Deux lemmes fondamentaux . . . . .	136
5 Preuve du Théorème VI.1 . . . . .	146
5.1 Passage à la limite . . . . .	147

6	Cas $1 < p_i < \bar{p}(N + 1)/N$ où $\mu_0 \in L_\gamma(\Omega)$ et $\mu \in L^1(0, T; L_\gamma(\Omega))$ . . . . .	149
---	--	-----

<b>Références bibliographiques</b>	<b>153</b>
------------------------------------	------------

## Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence d'une solution faible du problème parabolique anisotrope du type

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au + F(t, x, u, Du) = \mu \text{ sur } Q \doteq ]0, T[ \times \Omega; \\ u(0, \cdot) = \mu_0 \text{ sur } \Omega; \\ u = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\mu_0$  est une mesure de Radon bornée sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  régulier et borné,  $\mu$  est une mesure de Radon bornée sur  $Q$  et l'opérateur  $A$  est défini par  $Au = -\operatorname{div}(\hat{a}(t, x, u, Du))$ . Les fonctions  $\hat{a}$  et  $F$  vérifient les conditions  $(\hat{a}.1) - (\hat{a}.3)$  et  $(F)$ .

Notre travail généralise quelques résultats dans les travaux de Boccardo-Gallouët-Marcellini (cas elliptique anisotrope), Li-Zhao (cas parabolique anisotrope) et Dall'aglio-Orsina (cas parabolique isotrope).

Nos recherches ont fait l'objet de deux publications dans des journaux internationaux. La première intitulée **Anisotropic parabolic problems with measures data** publiée en 2010 dans le journal *Differential Equations And Applications*.

La deuxième intitulée **Anisotropic parabolic problems with Orlicz data** a été acceptée pour publication en 2011 dans le journal *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. Elle est relative au cas où les données du problème  $\mu$  et  $\mu_0$  sont plus régulières, appartenant à l'espace d'Orlicz généralisée associée à la fonction  $s \mapsto |s| \ln(1 + |s|)$ . La solution faible dont on prouve l'existence est ici plus régulière que dans le cas où les données sont des mesures.

La résolution du problème  $(P)$  se fait en plusieurs étapes :

1. **Approximation de problème  $(P)$  par une suite de problème  $(P_n)$  réguliers à données dans un espace de Sobolev réflexif.**
2. **Estimations uniformes sur les solutions approchées et leurs troncatures.**

Ces estimations à caractère anisotrope, sont établies en utilisant l'inégalité anisotrope de Sobolev :

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C \left( \prod_{i=1}^N \|u\|_{L^{\alpha_i}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{N}}$$

$$u \in X_0^{1, \vec{\alpha}}(\Omega) = \left\{ v \in L^{\alpha^+}(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{\alpha_i}(\Omega), i = 1, \dots, N \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

où  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ ,  $\alpha_i > 1$ ,  $i = 1, \dots, N$  et  $s = N(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} - 1)^{-1}$  si  $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} > 1$ . Ces estimations sont nouvelles dans le cas anisotrope.

3. **Passage à la limite dans  $(P_n)$ .**

Il est réalisé en adaptant la méthode que Rakotoson a utilisé dans le cas parabolique isotrope et qui est basée sur un lemme fondamental de compacité donnant la convergence p.p des gradients  $(Du_n)$ .

Pour traiter le cas anisotrope, on a prouvé une généralisation du lemme utilisé par Rakotoson.

**Mots clés :** Equation parabolique, mesure de Radon, problème anisotrope, espace d'Orlicz.

## Abstract

In this thesis, we study the following anisotropic parabolic problem

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + Au + F(t, x, u, Du) = \mu & \text{in } Q \doteq ]0, T[ \times \Omega; \\ u(0, \cdot) = \mu_0 & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a smooth bounded open set of  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ),  $T > 0$  a real number,  $\mu$  is a Radon's bounded measure on  $Q$ ,  $\mu_0$  a Radon's bounded measure on  $\Omega$ , and  $A$  is the operator given by  $Au = -\operatorname{div}(\hat{a}(t, x, u, Du))$ . Here, we suppose that  $\hat{a}$  and  $F$  are functions verifying the conditions  $(\hat{a}.1) - (\hat{a}.3)$ , and  $(F)$ .

Our work is a generalization of some results of Boccardo-Gallouët-Marcellini (anisotropic elliptic case), Li-Zhao (anisotropic parabolic case), and Dall'aglio-Orsina (isotropic parabolic case).

Our research has been the subject of two publications in international journals. The first entitled **Anisotropic parabolic problems with measures data** published in 2010 in the journal of Differential Equations and Applications.

The second entitled **Anisotropic parabolic problems with Orlicz data** which has been accepted for publication in 2011 in the journal of Mathematical Methods in The Applied Science. It is relative for the case  $\mu$  and  $\mu_0$  are more regular, belonging to the generalized Orlicz space associated with the function  $s \mapsto |s| \ln(1 + |s|)$ . The weak solution which we prove the existence here it is more regular than in the case where the data are measures.

The resolution of the problem  $(P)$  is done in several steps :

1. **Approximation of problem  $(P)$  by a sequence of regular problem  $(P_n)$  with data in a reflexive Sobolev space.**
2. **Uniforms estimates on approximate solutions and their truncations.**

These estimates of anisotropic nature, are established by using the anisotropic Sobolev inequality :

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C \left( \prod_{i=1}^N \|u\|_{L^{\alpha_i}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{N}}$$

$$u \in X_0^{1, \vec{\alpha}}(\Omega) = \left\{ v \in L^{\alpha^+}(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{\alpha_i}(\Omega), i = 1, \dots, N \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

where  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ ,  $\alpha_i > 1$ ,  $i = 1, \dots, N$  and  $s = N(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} - 1)^{-1}$  if  $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} > 1$ . These estimates are new in the anisotropic case.

3. **Passage to the limit in  $(P_n)$ .** It is realized by adapting the method that Rakotoson is used in the isotropic parabolic case and it is based on a fundamental compactness Lemma giving convergence p.p of gradient  $(Du_n)$ .

To treat the anisotropic case, we proved a generalization of the Lemma used by Rakotoson.

Keywords : Parabolic equations, Radon's mesure, anisotropic problems, Orlicz space.