

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : MECHROUK SALIMA

Sous la direction du professeur : MOKRANE ABDELHAFID

**Problème à N -membranes d'un système dégénéré
quasi-linéaire.**

Soutenu publiquement le 07.07.2009 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. A. Choutri	Chargé de cours	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. El. H. Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examineur.

Table des matières

Notations	3
Introduction	6
1 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle	16
1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$	16
1.1.1 Quelques résultats d'intégration	17
1.1.2 L'équi-intégrabilité	18
1.2 Quelques propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	20
1.2.1 Quelques inégalités utiles et injections importantes	21
1.3 Les opérateurs monotones, hémicontinus, bornés et pseudo-monotones.	23
1.3.1 Opérateurs monotone.	23
1.3.2 Opérateurs hémicontinus.	23
1.3.3 Opérateurs bornés.	24
1.3.4 Opérateurs pseudo-monotones.	24
1.3.5 Opérateurs de pénalisation.	26
1.4 Quelques théorèmes.	27
2 Existence et unicité de solution pour une inéquation variationnelle elliptique	34
2.1 Position du problème	34

2.2	Approximation par pénalisation	37
2.2.1	Problème pénalisé	38
2.2.2	Changement de l'inconnue	40
2.3	Existence et unicité de solution pour le problème pénalisé	42
2.4	Estimation à priori et convergence faible dans les espaces $(W^{1,p}(\Omega))^N$. . .	58
2.5	Convergence forte dans les espaces $(W^{1,p}(\Omega))^N$, et erreur d'approximation	64
2.6	Passage à la limite	79
3	Inégalités de Lewy-Stampacchia et régularité de solution d'une inéquation variationnelle elliptique	80
3.1	Les inégalités de Lewy-Stampacchia.	80
3.2	Régularité de solution du problème (2.1)	84
3.2.1	Problème quasi-linéaire	84
3.2.2	Régularité hölderienne de solution du problème (2.1)	85
4	Convergence des ensembles de coïncidence	91
4.1	Définitions	92
4.2	Formulation d'un système des ensembles de coïncidence	92
4.3	Stabilité des ensembles de coïncidence	106
5	Comparaison entre Azevedo et <i>al.</i> [3] et Mokrane-Murat [17]	122
5.1	Problème posé	122
5.2	Approximation par pénalisation	123
5.3	Estimation à priori de la solution approchée u_ε	124
5.4	Passage à la limite	125
5.5	Preuve de l'inégalité de Lewy-Stampacchia	126
5.6	Comparaison	127
	Bibliographie	131

Résumé

On se donne un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne.

Soit A un opérateur quasi-linéaire défini par :

$$Av = -\operatorname{div} a(x, \nabla v) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'objet de ce mémoire qui s'appuie essentiellement sur l'article [3], consiste à :

1. Etudier la régularité de solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}_N \\ \text{tel que } \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a(x, \nabla u_i) \cdot \nabla (v_i - u_i) \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i), \quad (\mathcal{P}) \\ \forall v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{K}_N, \end{array} \right.$$

où, \mathbb{K}_N désigne un convexe fermé non vide de $(W^{1,p}(\Omega))^N$ qui est défini pour $1 < p < \infty$,

par :

$$\mathbb{K}_N = \left\{ v = (v_1, \dots, v_N) \in (W^{1,p}(\Omega))^N : v_1 \geq \dots \geq v_N \text{ p.p. dans } \Omega, \right. \\ \left. v_i - \varphi_i \in W_0^{1,p}(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}$$

tel que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in (W^{1,p}(\Omega))^N$ vérifie certaines propriétés sur le bord.

De plus, les fonctions f_1, \dots, f_N sont telles que :

$$f_1, \dots, f_N \in L^q(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{ll} q = 1 & \text{si } p > d, \\ q > 1 & \text{si } p = d, \\ q = \frac{dp}{d+p-d} & \text{si } 1 < p < d. \end{array} \right.$$

On suppose aussi que $a(\cdot, \cdot)$ est une fonction de Carathéodory i.e. mesurable par rapport à la première variable, continue par rapport à la deuxième, définie de $\Omega \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d , vérifiant les conditions suivantes :

Pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p, \quad 1 < p < \infty, \\ \bullet \exists \beta > 0 \text{ tel que } |a(x, \xi)| \leq \beta |\xi|^{p-1}, \quad (\text{croissance}) \\ \bullet [a(x, \xi) - a(x, \eta)] \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad \text{si} \quad \xi \neq \eta. \end{array} \right.$$

L'étude de la régularité nous ramène à démontrer que la solution du problème (\mathcal{P}) vérifie les inégalités de Lewy-Stampacchia suivantes :

$$\bigwedge_{j=1}^i f_j \leq Au_i \leq \bigvee_{j=i}^N f_j \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad i = 1, \dots, N$$

où,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j=1}^i f_j &= \inf \{f_1, \dots, f_i\}. \\ \bigvee_{j=i}^N f_j &= \sup \{f_i, \dots, f_N\}. \end{aligned}$$

2. Prouver que la solution du problème (\mathcal{P}) résout le système suivant :

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u_i) = f_i + \sum_{1 \leq j < k \leq N, j \leq i \leq k} b_i^{j,k} \chi_{j,k} \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

où $b_i^{j,k}$ désigne une certaine combinaison linéaire des fonctions f_i et $\chi_{j,k}$ les fonctions caractéristiques des ensembles de coïncidence suivants :

$$I_{j,k} = \{x \in \Omega; u_j(x) = \dots = u_k(x)\}.$$

Ceci nous a amené à étudier la stabilité de ces ensembles de coïncidence dans $L^s(\Omega)$, tels que $1 \leq s < \infty$, sous certaines conditions qui ont été imposées sur les fonctions f_i , $i = 1, \dots, N$.

3. Comparer la méthode de démonstration utilisée par ces auteurs avec celle utilisée par A. Mokrane et F. Murat [17] dans le cas scalaire et pour un opérateur pseudo-monotone.

Mots clés : Inéquation variationnelle, Inégalité de Lewy-Stampacchia, Stabilité des ensembles de coïncidence, Système dégénéré, Problème quasi-linéaire.

Abstract

Let Ω be a bounded open set of \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, with Lipschitz boundary $\partial\Omega$.

We consider the quasi-linear operator :

$$Av = -\operatorname{div} a(x, \nabla v) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

The aim of this work which is based on the article [3] is to :

1. Study the régularity of solution of the variational inequality :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}_N, \\ \text{such that } \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a(x, \nabla u_i) \nabla (v_i - u_i) \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i), \\ \forall v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{K}_N, \end{array} \right. \quad (\mathcal{P})$$

where a is a Carathéodory function satisfies the following conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists \alpha > 0 \quad a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p, \quad 1 < p < \infty, \\ \bullet \exists \beta > 0 \quad |a(x, \xi)| \leq \beta |\xi|^{p-1}, \\ \bullet [a(x, \xi) - a(x, \eta)] \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad \text{if } \xi \neq \eta. \end{array} \right.$$

\mathbb{K}_N is the closed convex non empty subset of the Sobolev space $(W^{1,p}(\Omega))^N$ defined by :

$$\mathbb{K}_N = \left\{ v = (v_1, \dots, v_N) \in (W^{1,p}(\Omega))^N : v_1 \geq \dots \geq v_N \text{ a.e. in } \Omega \right. \\ \left. v_i - \varphi_i \in W_0^{1,p}(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}$$

where the function $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in (W^{1,p}(\Omega))^N$ satisfies some properties on the boundary; moreover the forces $f_1, \dots, f_N \in L^q(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ are such that

$$\left\{ \begin{array}{ll} q = 1 & \text{if } p > d, \\ q > 1 & \text{if } p = d, \\ q = \frac{dp}{dp+p-d} & \text{if } 1 < p < d. \end{array} \right.$$

The study of the regularity amounts to proving that the solution of problem (\mathcal{P}) satisfies the following Lewy-Stampacchia inequatities :

$$\bigwedge_{j=1}^i f_j \leq Au_i \leq \bigvee_{j=i}^N f_j \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad i = 1, \dots, N$$

where,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j=1}^i f_j &= \inf \{f_1, \dots, f_i\}. \\ \bigvee_{j=i}^N f_j &= \sup \{f_i, \dots, f_N\}. \end{aligned}$$

2. To show that the solution of the problem (\mathcal{P}) solves a system of the form :

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u_i) = f_i + \sum_{1 \leq j < k \leq N, j \leq i \leq k} b_i^{j,k} \chi_{j,k} \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

where each $b_i^{j,k}$ represents a certain linear combination of the functions f_i and $\chi_{j,k}$ is the characteristic functions of the coincidence sets :

$$I_{j,k} = \{x \in \Omega; u_j(x) = \dots = u_k(x)\}.$$

Under suitable assumptions on the functions f_i we analyse the stability of the coincidence sets in $L^s(\Omega)$, with $1 \leq s < \infty$.

3. Compare the method of proof used by these authors which that employed by A. Mokrane & F. Murat [17] in the scalar case and for pseudo-monotone operator.

Key words : Variational Inequatity, Lewy-Stampacchia Inequatity, Stability of the Coincidence Sets, Degenerate systems and quasi linear problem.