RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtension du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par : **MECHROUK SALIMA**

Sous la direction du professeur : **MOKRANE ABDELHAFID**

Problème à N-membranes d'un système dégénéré quasi-linéaire.

Soutenu publiquement le 07.07.2009 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. A. Choutri	Chargé de cours	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. El. H. Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examinateur.

Table des matières

Résumé

On se donne un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d,\ d \geq 1,$ de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Soit A un opérateur quasi-linéaire défini par :

$$Av = -\operatorname{div} a(x, \nabla v) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'objet de ce mémoire qui s'appuie essentiellement sur l'article [3], consiste à :

1. Etudier la régularité de solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{K}_N \\ \text{tel que } \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a(x, \nabla u_i) \cdot \nabla(v_i - u_i) \geq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i\,(v_i - u_i), \qquad (\mathcal{P}) \\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{K}_N, \end{cases}$$

où, $\mathbb{K}_N$ désigne un convexe fermé non vide de $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^N$ qui est défini pour $1 < p < \infty$, par :

$$\mathbb{K}_N = \Big\{ v = (v_1, \ldots, v_N) \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^N : \ v_1 \geq \cdots \geq v_N \ \ \texttt{p.p. dans } \Omega, \\ v_i - \varphi_i \in W_0^{1,p}(\Omega), i = 1, \ldots, N \Big\}$$

tel que $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^N$ vérifie certaines propriétés sur le bord. De plus, les fonctions$f_1, \ldots, f_N$ sont telles que :

$$f_1, \ldots, f_N \in L^q(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$$

où

$$\begin{cases} q = 1 & \text{si} \quad p > d, \\ q > 1 & \text{si} \quad p = d, \\ q = \frac{dp}{dp+p-d} & \text{si} \quad 1 < p < d. \end{cases}$$

On suppose aussi que $a(\cdot\,,\,\cdot)$ est une fonction de Carathéodory i.e. mesurable par rapport à la première variable, continue par rapport à la deuxième, définie de $\Omega \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant les conditions suivantes :

Pour $\texttt{p.p.}$ $x \in \Omega$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{cases} \bullet\, \exists\, \alpha > 0 \, \text{tel que } a(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p, \;\; 1 < p < \infty, \\ \bullet \exists\, \beta > 0 \, \text{tel que } |a(x,\xi)| \leq \beta|\xi|^{p-1}, \;\; \text{(croissance)} \\ \bullet \big[a(x,\xi) - a(x,\eta)\big]\cdot(\xi-\eta) > 0 \quad \text{si} \qquad \xi \neq \eta. \end{cases}$$

L'étude de la régularité nous ramène à démontrer que la solution du problème $(\mathcal{P})$ vérifie les inégalités de Lewy-Stampacchia suivantes :

$$\bigwedge_{j=1}^{i} f_j \leq A u_i \leq \bigvee_{j=i}^{N} f_j \quad \texttt{p.p. dans } \Omega, \;\; i = 1, \dots, N$$

où,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j=1}^{i} f_j &= \inf\{f_1, \dots, f_i\}. \\ \bigvee_{j=i}^{N} f_j &= \sup\{f_i, \dots, f_N\}. \end{aligned}$$

2. Prouver que la solution du problème $(\mathcal{P})$ résout le système suivant :

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u_i) = f_i + \sum_{1\leq j<k\leq N,\, j\leq i\leq k} b_i^{j,k}\chi_{j,k} \quad \texttt{p.p. dans } \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

où $b_i^{j,k}$ désigne une certaine combinaison linéaire des fonctions f_i et $\chi_{j,k}$ les fonctions caractéristiques des ensembles de coïncidence suivants :

$$I_{j,k} = \big\{x \in \Omega;\, u_j(x) = \cdots = u_k(x)\big\}.$$

Ceci nous a amené à étudier la stabilité de ces ensembles de coïncidence dans $L^s(\Omega)$, tels que $1 \leq s < \infty$, sous certaines conditions qui ont été imposées sur les fonctions $f_i, \; i = 1, \dots, N$.

3. Comparer la méthode de démonstration utilisée par ces auteurs avec celle utilisée par A. Mokrane et F. Murat [17] dans le cas scalaire et pour un opérateur pseudo-monotone.

Mots clés : Inéquation variationnelle, Inégalité de Lewy-Stampacchia, Stabilité des ensembles de coïncidence, Système dégénéré, Problème quasi-linéaire.

Abstract

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^d,\ d \geq 1$, with Lipshitz boundary $\partial\,\Omega$.

We consider the quasi-linear operator :

$$Av = -\mathrm{div}\, a(x, \nabla v) \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

The aim of this work which is based on the article [3] is to :

1. Study the régularity of solution of the variational inequality :

$$\begin{cases} \text{Find } u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}_N, \\ \text{such that } \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a(x, \nabla u_i)\, \nabla(v_i - u_i) \geq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i\,(v_i - u_i), \\ \forall v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{K}_N, \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

where a is a Carathéodory function satisfies the following conditions :

$$\begin{cases} \bullet\, \exists\, \alpha > 0 \ \ a(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p, \ \ 1 < p < \infty, \\ \bullet \exists\, \beta > 0 \ \ |a(x,\xi)| \leq \beta|\xi|^{p-1}, \\ \bullet \big[a(x,\xi) - a(x,\eta)\big]\cdot(\xi - \eta) > 0 \quad \text{if} \qquad \xi \neq \eta. \end{cases}$$

$\mathbb{K}_N$ is the closed convexe non empty subset of the Sobolev space $\big(W^{1,p}(\Omega)\big)^N$ defined by :

$$\mathbb{K}_N = \Big\{ v = (v_1, \dots, v_N) \in \big(W^{1,p}(\Omega)\big)^N \ : \ v_1 \geq \dots \geq v_N \ \texttt{a.e. in} \quad \Omega \\ v_i - \varphi_i \in W_0^{1,p}(\Omega), i = 1, \dots, N \Big\}$$

where the function $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \big(W^{1,p}(\Omega)\big)^N$ satisfies some properties on the boundary ; moreover the forces : $f_1, \dots, f_N \in L^q(\,\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ are such that

$$\begin{cases} q = 1 & \text{if} \quad p > d, \\ q > 1 & \text{if} \quad p = d, \\ q = \frac{dp}{dp+p-d} & \text{if} \quad 1 < p < d. \end{cases}$$

The study of the regularity amounts to proving that the solution of problem $(\mathcal{P})$ satisfies the following Lewy-Stampacchia inequatities :

$$\bigwedge_{j=1}^{i} f_j \leq Au_i \leq \bigvee_{j=i}^{N} f_j \quad \text{a.e. in} \quad \Omega, \; i = 1, \dots, N$$

where,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j=1}^{i} f_j &= \inf \{f_1, \dots, f_i\}. \\ \bigvee_{j=i}^{N} f_j &= \sup \{f_i, \dots, f_N\}. \end{aligned}$$

2. To show that the solution of the problem $(\mathcal{P})$ solves a system of the form :

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u_i) = f_i + \sum_{1 \leq j < k \leq N,\, j \leq i \leq k} b_i^{j,k} \chi_{j,k} \quad \text{a.e. in} \quad \Omega, \quad i = 1, \dots, N,$$

where each $b_i^{j,k}$ represents a certain linear combination of the functions f_i and $\chi_{j,k}$ is the caracteristic functions of the coincidence sets :

$$I_{j,k} = \big\{x \in \Omega \,;\, u_j(x) = \cdots = u_k(x)\big\}.$$

Under suitable assumptions on the functions f_i we analyse the stability of the coincidence sets in $L^s(\Omega)$, with $1 \leq s < \infty$.

3. Compare the method of proof used by these authors which that employed by A. Mokrane & F. Murat [17] in the scalar case and for pseudo-monotone operator.

Key words : Variational Inequatity, Lewy-Stampacchia Inequatity, Stability of the Coincidence Sets, Degenerate systems and quasi linear problem.