

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique

Ecole Normale Supérieure Kouba, Alger



المدرسة العليا للأساتذة القبة الجزائر

Département de Mathématique

قسم الرياضيات

**MÉMOIRE**

Pour l'obtention du grade de

**Magister**

SPÉCIALITÉ: **MATHÉMATIQUES**

OPTION: **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par : Souhila SABIT

Intitulé

**Optimisation topologique pour l'opérateur**

**Grad-shafranov**

devant le jury composé de :

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur
Mr. M. Jaoua	Professeur	Université Nice Sophia Antipolis	Rapporteur
Mr. I. Jbaili	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur

Le 05 Janvier 2012 à h

vous êtes invités à ma soutenance

Bienvenues

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Origine et modélisation du problème</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.1 Modélisation du problème . . . . .	11
1.2 Modèle mathématique . . . . .	12
1.2.1 Les équations de Maxwell et l'équation d'équilibre du plasma : . . .	12
1.2.2 L'identification de la frontière du plasma . . . . .	15
1.2.3 Le problème inverse . . . . .	16
1.3 La méthode du gradient topologique : . . . . .	17
<b>2 Calcul de la sensibilité topologique</b>	<b>19</b>
2.1 La sensibilité topologique pour le cas Dirichlet : . . . . .	19
2.1.1 Cadre abstrait : . . . . .	20
2.1.2 Problème de Laplace perturbé . . . . .	22
2.1.3 Sensibilité topologique . . . . .	24
2.1.4 Développement asymptotique de la fonction coût (Cas Dirichlet) .	27
2.1.5 Démonstrations . . . . .	28
2.2 La sensibilité topologique pour le cas de Neumann : . . . . .	36
2.2.1 Cadre abstrait : . . . . .	36
2.2.2 Problème de Laplace avec une perturbation Neumann . . . . .	38
2.2.3 Sensibilité topologique . . . . .	39
2.2.4 Développement asymptotique de la fonction coût (Cas Neumann) .	45

2.2.5 Démonstrations . . . . .	46
<b>3 Résultats Numériques</b>	<b>51</b>
3.1 Validation du calcul direct . . . . .	54
3.2 Validation du développement asymptotique . . . . .	56
3.3 Identification par le gradient topologique . . . . .	62
<b>Conclusion</b>	<b>65</b>
<b>Notations</b>	<b>67</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

## ملخص

إن إعادة بناء التوازن المغناطيسي للبلازما داخل توكاماك هو عنصر أساسي للوصول إلى أنظمة ذات جودة عالية.

تعتبر مسألة توازن البلازما في توكاماك مسألة حرة الحافة، حيث تعرف نهاية البلازما كمساحة لآخر تدقق مغناطيسي مغلق.

تدعى معادلة التوازن داخل شكل متناظر محوريًا داخل البلازما، بمعادلة غراد - شفرانوف. ونظرًا لأهميتها الاقتصادية، فقد جلبت مسألة التحكم في البلازما اهتمام الرياضياتيين والمهندسين.

سنقدم في عملنا هذا، طريقة جديدة، حيث تعتمد في مقاربتنا على تحليل الحساسية الطوبولوجية. ومن ثم أعيد بناء مجال البلازما بإحداثيات ثغرات داخل المجال الابتدائي. ونعرف موقع وشكل الثغرات بمنحنى لتابع سلمي، يسمي بالتدرج الطوبولوجي. يحسب التدرج الطوبولوجي انطلاقًا من تمديد مقاربي طوبولوجي لمؤثر غراد - شفرانوف.

وبصفة أدق يحسب التدرج الطوبولوجي بوصفه أول حد لتغير تابع الكلفة المرتبط بإحداثيات ثغرات صغيرة داخل المجال الابتدائي.

تؤدي المقاربة المعطاة إلى خوارزمية عددية دقيقة وسريعة. وقد أوضحنا فعالية الطريقة المقترحة ببعض الأمثلة العددية.

## Résumé

La reconstruction en temps réel de l'équilibre magnétique du plasma dans un Tokamak est un point clé pour accéder à des régimes à haute performance. Le problème de l'équilibre du plasma dans un Tokamak est un problème à frontière libre dans lequel la limite de plasma est définie comme étant la surface du dernier flux magnétique fermé.

A l'intérieur du plasma, l'équation d'équilibre dans une configuration axisymétrique est appelée l'équation de Grad-Shafranov. En raison de son importance économique, le problème du contrôle du plasma a longtemps bénéficié d'une attention considérable de la part des ingénieurs et des mathématiciens. Par conséquent, l'accord le plus développé des méthodes de contrôle de la théorie où d'optimisation paramétrique.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode. Notre approche est basée sur l'analyse de sensibilité topologique. Le domaine du plasma est reconstruit par l'insertion des trous à l'intérieur d'un domaine initial. L'emplacement et la forme des trous insérés sont définis par une courbe de niveau d'une fonction scalaire, appelée le gradient topologique. Le gradient topologique est calculé à partir d'une expansion asymptotique topologique pour l'opérateur de Grad-Shafranov. Plus précisément, le gradient topologique est calculé comme le premier terme d'une variation de la fonction de coût en ce qui concerne l'insertion de petits trous dans le domaine initial.

L'approche proposée conduit à un algorithme numérique rapide et précis. Son efficacité est illustrée par quelques exemples numériques.

## Abstract

The real-time reconstruction of the plasma magnetic equilibrium in a Tokamak is a key point to access high performance regimes. The problem of the plasma equilibrium in a Tokamak is a free boundary problem in which the plasma boundary is defined as the last closed magnetic flux surface.

Inside the plasma, the equilibrium equation in an axisymmetric configuration is called the Grad-Shafranov equation. Due to its economic importance, the plasma control problem has long been receiving considerable attention by engineers and mathematicians. Therefore, the most developed methods deal with theory control or parametric optimization.

In this work, we propose a new method. Our approach is based on the topological sensitivity analysis. The plasma domain is reconstructed by inserting some holes inside a fixed initial one. The location and shape of the inserted holes are defined by a level curve of a scalar function, called the topological gradient. The topological gradient is calculated from a topological asymptotic expansion for the Grad-Shafranov operator. More precisely, the topological gradient is derived as the leading term of a cost function variation with respect the insertion of small hole in the initial domain.

The proposed approach leads to a fast and accurate numerical algorithm. Its is illustrated by some numerical examples.