RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba Alger
Département de Mathématiques

N°d 'ordre : MAG/01/2012

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**
Présenté par : **ABDELAZIZ HELLAL**
Intitulé :

SUR L'ÉTUDE DE L'INÉGALITÉ DE LEWY-STAMPACCHIA PAR LA MÉTHODE DE PÉNALISATION

Soutenu publiquement le 04/01/2012 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de :

Mr Khaled Sadallah	Professeur	E.N.S-Kouba	Président
Mr EL-Hacène Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr Abdelaziz Choutri	Chargé de cours	E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr Abdelhafid Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Promoteur

Table des matières

Abstract

We study in this memory the Lewy-Stampacchia's inequality for elliptic variational inequalities with an obstacle different from zero involving fairly Leray-Lions operators, this inequality was proved by a penalization method, using a density lemma which asserts that the positive cone of $W_0^{1,p}(\Omega)$ is dense in the positive cone of $W^{-1,p'}(\Omega)$. This lemma was proved again by a penalization method.

My work is based on the article of A. Mokrane, F. Murat following :

$$A.\ Mokrane,\ F.\ Murat,\ A\,proof\ of\ the\ Lewy-Stampacchia's\ Inequality$$

$$by\ a\ Penalization\ Method,\ Potential\ Analysis\ 9:105-142,\ (1998).$$

First of all we treat the linear case with an obstacle different from zero, then we prove the following Lewy-Stampacchia's inequality :

$$\mu = -\Delta u - f \leq (f + \Delta\psi)^-,$$

holds in the framework of elliptic variational problem with an obstacle of the type : find a function u which satisfy

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega DuD(v-u)dx \geq \langle f, v-u\rangle, & \forall\, v \in K(\psi), \\ u \in K(\psi), \end{cases}$$

where

$$K(\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) : \quad v \geq \psi \ \text{ a.e in } \ \Omega\}.$$

the obstacle ψ, which belongs to $H^1(\Omega)$ whith $\psi \leq 0$ on $\partial\Omega$, and the right-hand side f, which are assumed to be such that $g = f + \Delta\psi$ belongs to the space

$$V_2^\star = (H^{-1}(\Omega))^+ - (H^{-1}(\Omega))^+.$$

We worked in the so called ordered dual space $V_2^\star$ of $H_0^1(\Omega)$.

Key words :

Variational inequalities, penalization, Lewy-Stampacchia's inequality, the existence, ordered dual space .

Résumé

On étudie dans ce mémoire l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour les inéquations variationnelles elliptiques avec un obstacle différent de zéro, faisant participer les opérateurs de Leray-Lions assez généraux, cette inégalité a été prouvée par la méthode de pénalisation en utilisant un lemme de densité qui affirme que le cône positif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est dense dans le cône positif de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Ce lemme de densité a été aussi prouvé par la méthode de pénalisation.

Mon travail est basé sur l'article de A. Mokrane, F. Murat suivant

$$A.\ Mokrane,\ F.\ Murat,\ A\,proof\ of\ the\ Lewy-Stampacchia's\ Inequality$$

$$by\ a\ Penalization\ Method,\ \textit{Potential Analysis}\ 9:105-142,\ (1998).$$

Tout d'abord, on reprend la même démonstration donnée de l'article dans le cas linéaire avec un obstacle différent de zéro, alors on démontre l'inégalité de Lewy-Stampacchia suivante :

$$\mu = -\Delta u - f \leq (f + \Delta\psi)^-,$$

prise dans le cadre d'un problème variationnel elliptique avec un obstacle de type : on cherche une fonction u telle que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega DuD(v-u)dx \geq \langle f, v-u\rangle, & \forall\, v \in K(\psi), \\ u \in K(\psi), \end{cases}$$

où

$$K(\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) : \quad v \geq \psi \ \text{ p.p \ dans } \ \Omega\}.$$

l'obstacle ψ appartient à $H^1(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et la fonction f du membre de droite est telle que $g = f + \Delta\psi$ appartienne à l'espace

$$V_2^\star = (H^{-1}(\Omega))^+ - (H^{-1}(\Omega))^+.$$

On a travaillé dans l'espace $V_2^\star$ appelé dual d'ordre de l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Mots clés :
Inégalités variationnelles, pénalisation, l'inégalité de Lewy-Stampacchia, l'existence, espaces dual d'ordre.

ملخّص

ندرس في هذه المذكرة متراجحة $Lewy - Stampacchia$ ، (ليفي - ستامباكيا) المتعلقة بمتراجحات التغيّرية الناقصية بحاجز غير معدوم، و مرفقة بمؤثرات من نوع $Leray - Lions$ ، (لري - ليونس) في حالتها الأكثر شمولا، تبرهن هذه المتراجحة باستخدام طريقة الإعاقة، يعتمد البرهان على كثافة المخروط الموجب للفضاء $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، في المخروط الموجب للفضاء $W^{-1,p'}(\Omega)$ التي تمّ إثباتها كذلك بطريقة الإعاقة نفسها.

يتمحور عملنا هذا على مقالة للأستاذين ع. مقران و ميرا. ف الأتية :

A. Mokrane, F. Murat, A proof of the Lewy – Stampacchia's Inequality by a Penalization Method, Potential Analysis 9 : 105 – 142, (1998).

تتمثل مساهتنا في إثبات متراجحة $Lewy - Stampacchia$ ، (ليفي - ستامباكيا) في الحالة الخطية بحاجز غير معدوم التالية :

$$\mu = -\Delta u - f \leq (f + \Delta\psi)^{-},$$

و التي تأخذ في شكل مسألة تغيّرية ناقصية بحاجز كما يلي :

المطلوب إيجاد تابع u يحقّق

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega DuD(v-u)dx \geq \langle f, v-u \rangle, & \forall\, v \in K(\psi), \\ u \in K(\psi). \end{cases}$$

حيث $K(\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega)$ و $v \geq \psi\}$ شك في Ω و الحاجز ψ يحقّق $\psi \in H^1(\Omega)$ مع $\psi \leq 0$ على $\partial\Omega$ و الطرف الأيمن في المتباينة السابقة f فهو يعرف كما يلي $g = f + \Delta\psi$ مع $g \in V_2^\star = (H^{-1}(\Omega))^+ - (H^{-1}(\Omega))^+$ ، اخترنا العمل في الفضاء $V_2^\star$ المسمى الفضاء الثّنوي المرتّب للفضاء $H_0^1(\Omega)$.

الكلمات الفاتحة :

المتراجحات التغيّرية، الإعاقة، متراجحة ليفي و ستامباكيا، الوجود، الفضاء الثّنوي المرتّب .