

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE VIEUX- KOUBA, ALGER  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



## MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : M.KARRAS

## THÈME

# Majoration Explicite du Nombre de Diviseurs D'un Entier

Soutenue le dimanche 17/06/2012 devant le jury composé de:

<i>Mr. BENAYAT Djilali</i>	<i>Professeur</i>	ENS.kouba	Président
<i>Mr. HARNANE Mohand. Ouamar</i>	<i>Professeur</i>	USTHB	Examineur
<i>Mr. BENCHERIF Farid</i>	<i>Maître de Conférences.A</i>	USTHB	Examineur
<i>Mr. MECHIK Rachid</i>	<i>Maître Assistant.A</i>	USTHB	Examineur
<i>Mr. DERBAL Abdallah</i>	<i>Maître de Conférences.A</i>	ENS.kouba	Directeur de mémoire

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations et préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1	Notations . . . . .	6
1.2	Définitions et théorèmes . . . . .	7
1.2.1	La fonction $\pi(x)$ . . . . .	7
1.2.2	La fonction $\theta(x)$ . . . . .	8
1.2.3	La fonction $d(n)$ . . . . .	8
1.2.4	Limite supérieure et limite inférieure . . . . .	9
1.2.5	Fonctions arithmétiques multiplicatives . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Théorème de Wigert</b>	<b>17</b>
2.1	Théorème de Wigert . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Les nombres hautement composés supérieurs</b>	<b>22</b>
3.1	Les nombres hautement composés supérieurs . . . . .	23
3.1.1	La structure des nombres hautement composés supérieurs (h.c.s) .	24
<b>4</b>	<b>Théorème principal</b>	<b>32</b>
4.1	Théorème principal . . . . .	33
4.2	Fin de démonstration du Théorème (4.1.1) . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>42</b>
5.1	Définitions . . . . .	43
5.1.1	Diviseur unitaire . . . . .	43
5.1.2	Le nombre de diviseurs unitaires d'un entier $n$ . . . . .	43
5.2	Étude de la fonction $d^*(n)$ . . . . .	44
5.2.1	Majoration explicite de la fonction $d^*(n)$ . . . . .	44

## Résumé

Pour un entier  $n \geq 2$ , on note par  $d(n)$  la fonction arithmétique le nombre de diviseurs de  $n$ , il est connu que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(d(n)) \ln(\ln n)}{(\ln 2)(\ln n)} = 1,$$

ce qui prouve que la fonction  $g(n) = \frac{\ln(d(n)) \ln(\ln n)}{(\ln 2)(\ln n)}$  est majorée.

J. L. Nicolas et G. Robin ont démontré que le maximum absolu de  $g(n)$  est atteint en nombre  $N = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$  et vaut  $1.5379\dots$

Le but de ce mémoire est de présenter une démonstration détaillée d'abord du théorème de Wigert, ensuite de celui de J. L. Nicolas et G. Robin.

La démonstration du dernier théorème est basée sur la connaissance et le calcul effectif des nombres hautement composés supérieurs (h.c.s.) de S. Ramanujan.

En annexe, on présente quelques résultats élémentaires sur la fonction  $d^*(n)$  le nombre de diviseurs unitaires de l'entier  $n$ . Ainsi un programme écrit en Matlab nous permet de calculer les premiers nombres h.c.s.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ecole Normale Supérieure,  
Kouba**

**DIRECTION DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
ET DE LA POST-GRADUATION**



المدرسة العليا للأساتذة / القبّة

مديرية البحث العلمي والدراسات

لما بعد التدرج

## Résumé du Mémoire de Magister en Mathématiques

présenté par<sup>(1)</sup>

Karras Meselem

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

THÈME

### Majoration Explicite du Nombre de Diviseurs d'un Entier

#### ملخص

في هذه المذكرة نقدم تفصيلا لبرهان نظرية هامة مضمونها:

ليكن  $d(n)$  عدد قواسم العدد الطبيعي  $n$ .

من أجل كل عدد طبيعي  $(n \geq 2)$  العبارة  $g(n) = \frac{\ln(d(n)) \ln(\ln n)}{\ln 2 \ln n}$  تبلغ قيمتها العظمى عند العدد

الطبيعي  $N = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 6983776800$  وقيمتها العظمى هي  $g(N) = 1.5379$ .

هذه النظرية توصل إليها كل من الرياضيين J.L. Nicolas, G. Robin وهذا باعتمادهما على نتيجة هامة للرياضي (Wigert) وعلى متتالية من الأعداد الطبيعية (h.c.s.) متعلقة بالدالة  $d(n)$  ، عرفها الرياضي S. Ramanujan من قبل.

ولتقديم هذا العمل نقوم أولا بعرض نتيجة Wigert مع البرهان ثم نقوم بعرض الشكل العام للأعداد (h.c.s.) مع بعض الخواص المتعلقة بها ثم نعتمد على توطنات تساعدنا في الوصول إلى برهان النظرية السابقة الذكر.

الكلمات الدالة: نتيجة (Wigert)، الأعداد الطبيعية (h.c.s.).

(1) Sous la direction de : Abdellah Derball, Maître de conférences à l'ENS Vieux Kouba Alger