

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : **FOUKRACH DJAMAL**

Intitulé

Intégration Asymptotique d'EDO non Linéaires

Soutenu publiquement le .. juin 2007 à l'E.N.S de Kouba, Alger

devant le jury composé de :

Mr. M. Bousselsal	Professeur,	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. S. Djebali	Professeur,	E.N.S-Kouba	Rapporteur.
Mr. A.-K. Sadallah	Professeur,	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. A. Benmezai	Maître de Conférences,	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. T. Moussaoui	Chargé de cours,	E.N.S-Kouba	Examineur.

Table des matières

Notations	4
0 Introduction	5
1 Éléments d'analyse fonctionnelle et de théorie de point fixe	23
1.1 Notions générales sur les équations différentielles ordinaires	23
1.2 Quelques outils d'analyse fonctionnelles	27
1.2.1 Quelques notions d'analyse	27
1.2.2 Quelques théorème d'analyse fonctionnelle	28
1.2.3 Fonctions de classe H	29
1.3 Éléments de théorie de point fixe	32
1.4 Quelques inégalités intégrales	33
2 Résultats portant uniquement sur le comportement asymptotique	38
2.1 Introduction	38
2.2 Conditions suffisantes d'existence et de comportement asymptotique	39
2.2.1 Autres résultats	48
2.3 Quelques généralisations	65
2.3.1 Résultats principaux	65
2.3.2 Commentaires	72
3 Espaces de fonctions et critères de compacité	75
3.1 Espaces de fonctions et complétudes	75
3.1.1 L'espace de fonctions $A(t_0)$	75

3.1.2	L'espace de fonctions $V(t_0)$	76
3.1.3	L'espace de fonctions $W(t_0)$	78
3.2	Critères de compacité	80
3.3	Un lemme utile	84
4	Existence globale et comportement asymptotique	87
4.1	Introduction	87
4.2	Résultats principaux	88
4.2.1	Énoncés des résultats	88
4.2.2	Sur la croissance de la non linéarité	89
4.3	Démonstrations des résultats principaux	93
4.3.1	Lemmes auxiliaires	93
4.3.2	Démonstration des théorèmes	95
4.4	Discussion et commentaires	122
4.4.1	Cas où $G(+\infty) < +\infty$	122
4.4.2	Nécessité des conditions	131
4.4.3	Le cas linéaire	132
4.4.4	Non oscillation des solutions	134
5	Cas où la non linéarité f ne dépend pas de la dérivée	136
5.1	Introduction	136
5.2	Conditions suffisantes pour le comportement asymptotique désiré	137
5.3	Commentaires	142
5.4	Exemples	146
6	Résultats plus généraux sur le comportement asymptotique	149
6.1	Introduction	149
6.2	Énoncés des résultats	150
6.3	Discussion	152
6.4	Un lemme utile	155

7	Quelques résultats récents	157
7.1	Résultats généraux	157
7.1.1	Introduction	157
7.1.2	Résultat d'existence globale et comportement de type linéaire . . .	157
7.1.3	Non bornitude de l'ensemble des conditions initiales	166
7.1.4	Cas des équations perturbées	175
7.2	Autres résultats	180
7.2.1	Cas d'une équation générale	181
7.2.2	Cas d'une équation particulière	184
	Bibliographie	186

ملخص

في هذه المذكرة، نعتبر المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية غير الخطية:

$$u'' + f(t, u, u') = 0, \quad t \geq t_0. \quad (م)$$

و بعض الحالات الخاصة، حيث التابع f يحقق بعض الخواص المتعلقة بالتزايد التي نشير إليها في المذكرة. نهتم بدراسة الوجود المطلق و الوجود المحلي بجوار $+\infty$ وبالسلوك التقاربي من النوع الخطي للحلول بجوار $+\infty$ المتعارف عليه (بالخاصية L) في بعض الموءلفات.

أولا نقدم شروط كافية أين تكون الحلول مقاربة للمستقيمات ذات المعادلات $at + b$ حيث a, b ثوابت حقيقية.

نعرض كذلك نظريات جديدة تضمن وجود الحلول بسلوك تقاربي محدد، من الشكل $u(t) = at + b + o(t)$ أو $u(t) = at + o(1)$ لما $t \rightarrow +\infty$ مع a, b ثابتان حقيقيان. نقدم كذلك البراهين المفصلة لهذه النظريات. الحالة الخاصة $f(t, u, u') = f(t, u)$ نالت اهتماما خاصا السنوات الأخيرة. نثبت بشأنها وجود الحلول $u(t)$ الممكن تمثيلها بـ $u(t) = at + b + o(1)$ لما $t \rightarrow +\infty$.

نبرهن أنه تحت شروط محددة المعادلة (م) تقبل حولا تتمتع بسلوك تابع خطي بجوار $+\infty$. النظريات المقدمة تكمل و تعميم بعض النتائج الحديثة. من أجل صنف من المعادلات غير الخطية نثبت أن ميدان الشروط الإبتدائية من أجل الحلول التي تتمتع بسلوك تقاربي معطى مسبقا غير محدود. زيادة على ذلك نقدم نتائج عامة قد عرضت في هذا الإتجاه موءخرا.

الكلمات الفاتحة:

المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية، الوجود المطلق، السلوك الخطي عند الانهية، الحل غير متذبذب، نظرية النقطة الصامدة، السلوك التقاربي المعطى مسبقا.

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons l'équation différentielle non linéaire du second ordre

$$(\mathcal{E}) \quad u'' + f(t, u, u') = 0, \quad t \geq t_0.$$

et à certains de cas particuliers où la non linéarité f satisfait certaines conditions de croissances qui seront indiquées ultérieurement, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale, à l'existence locale à l'infini et au comportement asymptotique de *type linéaire* à l'infini désigné par "*propriété (L)*" dans la littérature des solutions. Premièrement, nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles les solutions sont asymptotes aux droites $at + b$, où a, b sont des constantes réelles.

Nous présentons également des résultats récents qui garantissent l'existence de solutions de l'équation (\mathcal{E}) avec un comportement asymptotique indiqué a priori : ou bien $u(t) = at + o(t)$ ou bien $u(t) = at + b + o(1)$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, où a, b sont des constantes réelles données ; on présente de manière détaillées les preuves des théorèmes. Le cas particulier où $f(t, u, u') = f(t, u)$ a été également étudié très récemment. Nous présentons l'existence de solutions $u(t)$ qui s'écrivent asymptotiquement comme $u(t) = at + b + o(1)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Les théorèmes présentés complètent et généralisent des résultats connus dans la littérature. Finalement, pour une classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre, nous démontrons l'existence global de solutions sous des hypothèses assez faibles. De plus, on montre pour une autre classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre que la région des données initiales pour les solutions avec le comportement asymptotique désiré est non bornée. Enfin des résultats généraux sur ce sujet terminent ce mémoire.

Mots clés : Equation différentielle non linéaire du second ordre, Existence globale, Comportement de type linéaire à l'infini, Solution non oscillante, Théorie du point fixe, Comportement asymptotique prescrit.

Abstract

In this work, we are considered with the second-order nonlinear ordinary differential equation

$$(\mathcal{E}) \quad u'' + f(t, u, u') = 0, \quad t \geq t_0.$$

and some of its particular cases. We are interested in the study of the global existence, the local existence near $+\infty$, as well as in the *linear-like* behavior at infinity referred to as *Property (L)* in the literature. Firstly, we present sufficient conditions under which the solutions are asymptotic to lines $at + b$ where a, b are real constants.

We present also new theorems which guarantee the existence of solutions with the asymptotic behavior a priori specified : either $u(t) = at + o(t)$ or $u(t) = at + b + o(1)$ as $t \rightarrow +\infty$, where a, b are given real constants. Detailed proofs of theorems will be provided. The case when $f(t, u, u') = f(t, u)$ has been also studied very recently. We establish the existence of solutions $u(t)$ which can be expanded asymptotically as $u(t) = at + b + o(1)$ when $t \rightarrow +\infty$, where $a, b \in \mathbb{R}$.

It will be shown that under rather mild conditions, equation (\mathcal{E}) possesses solutions which behave like linear functions at infinity. We present theorems which extend and complement other works available in the literature. Furthermore, we prove for another class of second-order nonlinear ordinary differential equations, that the region of the initial data for the solutions with desired asymptotic behavior is unbounded.

Key words :

Nonlinear second-order differential equation, Global existence, Linear-like behavior at infinity, Non-oscillatory solutions, Fixed point theory, Prescribed asymptotic behavior.