RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtension du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par : **MOSTEFAOUI ZAHIA**

Intitulé

Sur quelques problèmes de minimisation liés à des fonctionnelles non quasi-convexes.

Soutenu publiquement le 07.05.2007 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.
Mr. S. Djebali	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. B.K. Sadallah	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur.

Table des matières

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier l'existence de minimiseurs pour quelques problèmes de type :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{I(u)=\int_\Omega f(Du)dx,\ u\in u_{\xi_0}+W_0^{1,p}(\Omega\,;\mathbb{R}^m)\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $u_{\xi_0}=\xi_0.x,\ x\in\bar{\Omega}$, ξ_0 est une matrice donnée de taille $m\times n$. $Du=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}}$ désigne la matrice Jacobienne de u, $f:\mathbb{R}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction semi-continue inférieurement non quasi-convexe et $\mathbb{R}^{m\times n}$ désigne l'ensemble des matrices réelles $m\times n$.

Il est connu que si f est quasi-convexe, $u_{\xi_0}(x)=\xi_0.x$ est une solution de $(\mathcal{P})$. Nous nous intéréssons alors au cas où

$$\xi_0\in K=\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\,Qf(\xi)<f(\xi)\}.$$

Nous donnons des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence de solutions de $(\mathcal{P})$ à partir du problème relaxé associé à $(\mathcal{P})$. Ensuite nous appliquons les résultats démontrés à un problème de surface minimale et nous démontrons l'existence de minimiseurs pour d'autre problèmes.

Mots clés :

Relaxation, Enveloppes convexes généralisées, propriété de relaxation, propriété d'aproximation.

Abstract

The aim of this work is to study the existence of minimizer for some problems of the type

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\left\{I(u)=\int_\Omega f(Du)dx,\ u\in u_{\xi_0}+W_0^{1,p}(\Omega\,;\mathbb{R}^m)\right\}$$

where Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$, $u_{\xi_0}=\xi_0.x,\ x\in\bar{\Omega}$, ξ_0 is a matrix of size $m\times n$. $Du=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq m}}$ denotes the jacobian matrix, $f:\mathbb{R}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ is a lower semicontinuous function wich is not quasiconvex and $\mathbb{R}^{m\times n}$ denotes the set of all real $m\times n$ matrices.

It is know that if f is a quasi convex function, the function $u_0(x)=\xi_0.x$ is a solution of $(\mathcal{P})$. We interesse here to the case where

$$\xi_0\in K=\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ Qf(\xi)<f(\xi)\}.$$

We give necessary or sufficient conditions for proving the existence of solution of problem $(\mathcal{P})$ by studying the relaxed problem associated to $(\mathcal{P})$. We apply this results to a vectorial problem related to minimal surface and we give some existence result for other problems.

Key words :

Relaxation, Generalized convex hulls, Relaxation property, Approximation property.

ملخّص

الهدف من هذا البحث هو دراسة وجود عناصر أصغريّة لبعض المسائل من الصّنف $(\mathcal{P})$

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf\Big\{I(u)=\int_\Omega f\big(Du(x)\big)\,dx,\ u\in u_{\xi_0}+W_0^{1,\infty}(\Omega\,,\mathbb{R}^m)\Big\}$$

حيث $u_{\xi_0}(x)=\xi_0\cdot x$ ، $x\in\overline{\Omega}$ ، ξ_0 مصفوفة ذات m سطر و n عمود، Ω جزء مفتوح ومحدود من $\mathbb{R}^n$. $Du=\big((\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{ij}\big)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$ تمثّل المصفوفة اليعقوبيّة للتّابع u و $f:\mathbb{R}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع نصف مستمر سفليّا وليس شبه محدّب، $\mathbb{R}^{m\times n}$ يرمز لفضاء المصفوفات الحقيقيّة $m\times n$.

من المعروف أنّه إذا كان f شبه محدّب فإنّ $u_{\xi_0}(x)=\xi_0\cdot x$ هو حلّ للمسألة $(\mathcal{P})$ ، لذا نهتمّ بالحالة الّتي يكون فيها

$$\xi_0\in\big\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}: Qf(\xi)<f(\xi)\big\}$$

حيث نرمز بـ Qf للغلاف شبه المحدّب للتّابع f . نعطي عندئذ شروطا لازمة أو كافية لوجود حلول للمسألة $(\mathcal{P})$ انطلاقا من المسألة المرتخية المرفقة بها. وبعدها نطبّق النّتائج المحصّل عليها على مسألة السّطح الأصغري كما نبرهن وجود حلول لبعض المسائل الأخرى.

كلمات مفتاحيّة

إرتخاء ، الغلافات المحدّبة المعمّمة، خاصيّة الإرتخاء ، خاصيّة التّقريب.