République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba (Alger)

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Département de Mathématiques

Spécialité : **Analyse**. Option : **EDO**

Présenté par

BOUNEGAB Zineb

Degrés topologiques pour les applications multivoques et applications

Soutenu le 12 /10 /2013 Devant le Jury composé de

Y. ATIK, ENS-Kouba,	Professeur,	Président
A. BENMEZAI, U.S.T.H.B.,	Professeur,	Examinateur
T. MOUSSAOUI, ENS-Kouba,	M.C.(A),	Examinateur
K. HAMMACHE, ENS-Kouba,	M.C.(B),	Examinatrice
S. DJEBALI, ENS-Kouba,	Professeur,	Rapporteur

Table des matières

I PRÉLIMINAIRES **12**

1 Analyse fonctionnelle **13**
1.1 Espaces vectoriels topologiques localement convexes 13
1.1.1 Espaces vectoriels topologiques 13
1.1.2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes . . 13
1.2 Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) 14
1.3 Définition de l'autoadjoint 15
1.4 Géométrie du simplexe 15
1.5 Rétraction 17
1.6 Partition de l'unité 17
1.7 Connexité 18
1.7.1 Composantes connexes 18
1.8 Mesure de non compacité de Kuratowski 19

2 Analyse multivoque **22**
2.1 Notations 22
2.2 Genéralités 22
2.2.1 Définitions 22
2.2.2 Composition, image inverse 23
2.3 Notions de continuité 23
2.3.1 Les multi-applications s.c.s 23
2.3.2 Les multi-applications s.c.i. 25
2.3.3 Cas des espaces métriques 26
2.3.4 Continuité de quelques opérations 27
2.4 Mesurabilité d'application multivoque 29
2.4.1 Les sélections 29
2.4.2 Théorème d'extension de Dugundji pour les applications multivoques 30
2.5 Limites d'ensembles 31

3 Degré de Leray-Schauder pour les applications univoques 34
3.1 Le degré topologique en dimension finie 34
3.1.1 Le cas singulier 35
3.1.2 Propriétés du degré 36
3.1.3 Constance sur les composantes connexes 38
3.1.4 Composition d'applications 39
3.1.5 Extensions de la définition du degré 39
3.1.6 Extension aux ouverts non bornés 39
3.1.7 Application : le théorème du point fixe de Brouwer, 1912 40
3.2 Le degré topologique en dimension infinie 40
3.2.1 Application propre 41
3.2.2 Propriétés du degré de Leray-Schauder 42

II DEGRÉS D'APPLICATIONS MULTIVOQUES 43

4 Le degré de T.W. Ma 44
4.1 Champs de vecteurs compacts 44
4.2 Réduction à la dimension finie 45
4.3 Réduction à la perturbation compacte de l'identité 47
4.4 Définition et propriétés 50
4.4.1 Définition du degré 50
4.4.2 Propriétés du degré 53

5 Le degré de R. Robert et J.M. Lasry 72
5.1 Définition d'un degré dans $\mathbb{R}^n$ 72
5.1.1 Notions de suiveur 72
5.1.2 Propriétés du degré sur $\mathbb{R}^n$ 75
5.2 Définition du degré en dimension infinie 79
5.2.1 Définition du degré 80
5.2.2 Propriétés du degré 87

6 Autres définitions du degré 90
6.1 Le degré de Hukuhara 90
6.1.1 Limites de suites monotones de multi-applications s.c.s. 90
6.1.2 Lemmes 90
6.1.3 Démonstration du théorème fondamental 92
6.1.4 Quelques propositions 93
6.1.5 Définition d'un degré dans $\mathbb{R}^n$ 94
6.1.6 Propriétés du degré dans $\mathbb{R}^n$ 96
6.1.7 Définition d'un degré en dimension infinie 98
6.1.8 Propriétés de degré en dimension infinie 99
6.2 Le degré de Cellina-Lasota 100
6.2.1 Théorème d'approximation de Cellina 100
6.2.2 Théorème antipodal 101
6.2.3 Définition du degré 101
6.2.4 Propriétés du degré 103

7 Degré pour les applications multivoques asymptotiquement compactes 105
7.1 Le degré de W.V. Petryshyn et P.M. Fitzpatrick 105
7.1.1 Définition du degré 105
7.1.2 Propriétés du degré 108
7.2 Le degré de J.R.L. Webb 112
7.2.1 Définition du degré 113
7.2.2 Propriétés du degré 116

8 Degré pour les applications multivoques condensantes 121
8.1 Multi-applications condensantes 121
8.2 Définition d'un degré 123
8.2.1 Degré pour les multi-applications fondamentalement restrictibles 123
8.2.2 Approximation homotopique compacte 125

III APPLICATIONS 127

9 Théorèmes de point fixe 128
9.1 Multi-applications rentrante et sortante 133
9.2 Indice de point fixe 135
9.3 Extension du théorème de Borsuk 135
9.4 Extension du théorème de Borsuk-Ulam 136
9.5 Quelques propriétés combinatoires 136
9.6 Théorèmes de point fixe pour les applications multivoques asymtotiquement compactes 139

10 Applications aux équations aux derivées partielllles 145
10.1 Un théorème de semi-continuité 145
10.2 Un exemple 147
10.3 Un exemple voisin 149
10.4 Une application du théorème de Borsuk 150

11 Théorèmes des multi-applications ouvertes 151
11.1 Extension du théorème d'invariance du domaine de Brouwer . 151
11.2 Cas de multi-applications condensantes 153

Résumé

Ce mémoire a pour objectif d'étudier le degré topologique pour les applications multivoques semi-continues supérieurement, définies sur un espace localement convexe et séparé. En premier lieu, nous présentons quelques préliminaires d'analyse fonctionnelle, d'analyse multivoque sur le degré topologique pour les applications univoques. Nous aborderons ensuite les différentes définitions du degré topologique pour les multi-applications, à savoir le degré de Ma (1972), le degré de Lasry et Robert (1974), le degré de Hukuhara (1967) et le degré de Cellina et Lasota (1969). Nous considérons également le degré topologique pour les multi-applications asymptotiquement compactes introduit par Petryshyn et Fitzpatrick (1974) d'une part, et Webb (1974) d'autre part. Enfin, nous donnons la définition du degré topologique pour les multi-applications condensantes de Borisovish, Obukhovskii et Zecca (2001). La dernière partie de notre travail est consacrée aux applications du degré à la théorie du point fixe appliquée à la résolution d'équations aux dérivées partielles.
Mots clés : multi-application, semi-continue supérieurement, degré topologique, espace localement convexe séparé, point fixe.

Abstract

The purpose of this thesis is to study different kinds of the topological degree for upper semi-continuous multi-valued maps, defined on locally convex separable space. We start with some preliminaries concerning multi-valued analysis, functional analysis, and topological degree for single-valued maps. Then we present different definitions of the topological degree in the multi-valued case : degree of Ma, degree of Lasry and Robert, degree of Hukuhara, and degree of Cellina and Lasota. A topological degree for ultimately compacts multi-valued maps introduced independently by Petryshyn and Fitzpatrick, and Webb is also given. We end with the definition of a topological degree for condensing multivalued maps as given by Borisovish, Obukhovskii and Zecca. The last part of our work deals with some applications to the fixed point theory in multi-valued analysis with applications to the solvability of partial differential equations.
Keywords : semi-continuous multi valued maps, topological degree, locally convex separable space, fixed point.