

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للأساتذة القبة الجزائر Ecole Normale Supérieure Kouba, Alger

Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

## MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de  
Magister

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : Abderrezak SAID

Intitulé

*Etude d'un problème parabolique non linéaire à croissance naturelle dans un domaine général*

Date de soutenance : 25/06/2007

Composition du jury

Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Président</b>
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Rapporteur</b>
Mr. B.K. Sadallah	Professeur	E.N.S-Kouba	<b>Examineur</b>
Mr. A. Choutri	Chargé de cours	E.N.S-Kouba	<b>Examineur</b>
Mr. E. Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	<b>Examineur</b>

# Table des matières

<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>11</b>
1.1 Distributions et espaces de Sobolev . . . . .	11
1.2 Distributions et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles . . . . .	13
1.3 Injections et inégalités . . . . .	15
1.4 critères de convergence . . . . .	16
1.5 Lemmes et résultats divers . . . . .	19
1.6 Un résultat de compacité . . . . .	20
<b>2 Position du problème</b>	<b>22</b>
2.1 Hypothèses sur les données . . . . .	23
2.2 Hypothèses sur $a(x, t, s, \xi)$ . . . . .	23
2.3 Hypothèses sur $H(x, t, s, \xi)$ . . . . .	24
2.4 Énoncés des principaux théorèmes . . . . .	24
2.5 Approximation du problème . . . . .	27
<b>3 Estimation sous les hypothèses (2.1), (2.2), (2.3) :</b>	<b>30</b>

<b>4</b>	<b>Estimation sous les hypothèses (2.1), (2.12), (2.2), (2.13).</b>	
	<b>Estimation sous les hypothèses (2.10),(2.11).</b>	<b>53</b>
4.1	Estimation sous les hypothèses (2.1), (2.12), (2.2), (2.13) : . . . . .	53
4.2	Estimation sous les hypothèses (2.10),(2.11) : . . . . .	61
<b>5</b>	<b>La convergence forte de <math>\nabla u_n</math> et le passage à la limite</b>	<b>70</b>
5.1	La convergence forte de $\nabla u_n$ . . . . .	70
5.1.1	proposition 4 . . . . .	71
5.1.2	preuve de la proposition 4 . . . . .	73
5.2	Le passage à la limite . . . . .	79
	<b>Bibliographie</b>	<b>82</b>

## ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود وصقالة حلول لمسائل مكافئية غير خطية يظهر فيها حد غير خطي ذو تزايد طبيعي بالنسبة للتدرج، بالإضافة إلى أن طرفها الأساسي هو مؤثر لـ Leray-Lions وهي من الشكل

$$u' - \operatorname{div} a(x, t, u, \nabla u) + \mu u = H(x, t, u, \nabla u) + f(x, t)$$

حيث  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  مع  $\Omega$  مجال مفتوح وكيفي من  $\mathbb{R}^N$  بالإضافة إلى الشرط الإبتدائي  $u(0) = u_0$

نعمد أولاً إلى فرض شروط حول  $u_0$  و  $f$  والتي تضمن وجود حلول بمفهوم التوزيعات لهذه المسألة. لكن هذه الشروط لا تضمن محدودية الحلول، وعليه للحصول على حلول محدودة نضطر إلى تقوية الشروط المفروضة على المعطيات.

### الكلمات الفاتحة

المسائل المكافئية غير الخطية، الحد من الرتبة الأولى غير خطي، حلول محدودة وغير محدودة، الوجود والصقالة.

# Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et la régularité des solutions au sens des distributions de problèmes paraboliques non linéaires qui présentent un terme du premier ordre à croissance quadratique par rapport au gradient et dont la partie principale est un opérateur de type de Leray-Lions.

Le problème est sous la forme  $u' - \operatorname{div} a(x, t, u, \nabla u) + \mu u = H(x, t, u, \nabla u) + f(x, t)$  dans  $Q_T$  tel que  $Q_T = \Omega \times [0, T]$ ,  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^N$  avec une condition initiale  $u(0) = u_0$ .

Nous donnons des conditions suffisantes sur  $f$  et  $u_0$  qui assurent l'existence de solutions au sens des distributions. Ces conditions sur les données n'impliquent pas en général que les solutions soient bornées. Mais quand nous imposons des conditions plus fortes sur les données, nous démontrons que les solutions sont bornées.

## Mots clés

Problèmes paraboliques non linéaires, Terme d'ordre un non linéaire, Existence et régularité, Solution bornée et non bornée.

# Abstract

the purpose of this paper is to study the existence and regularity of distributional solutions for a nonlinear parabolic problems having a first order term which grows quadratically in the gradient and whose principal part is the Leray-Lions operator.

The problem is in the form  $u' - \operatorname{div} a(x, t, u, \nabla u) + \mu u = H(x, t, u, \nabla u) + f(x, t)$  in  $Q_T = \Omega \times [0, T]$ ,  $\Omega$  is an open set in  $\mathbb{R}^N$  which can have infinite measure, with an initial condition  $u(0) = u_0$ .

We give sufficient conditions on  $u_0$  and  $f$  in order to have distributional solutions, we point out that the assumptions on the data do not guarantee in general the boundedness of the solutions. Moreover, a boundedness result is proved when the assumptions on the data are strengthened.

## **Keywords**

Nonlinear parabolic problems, Nonlinear first-order term, Existence and regularity, Bounded and unbounded solutions.