RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Vieux-Kouba, Alger
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

pour l'obtention du garde de **Magister**

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

présenté par

Leila ZITOUNI

ÉTUDE DU RÉARRANGEMENT RELATIF ET APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARIELLES

Soutenu le 21 juin 2004 devant la commission d'examen :

M. BOUSSELSAL	Professeur, ENS, Kouba	Président
A. MOKRANE	Maître de conférence, ENS, Kouba	Examinateur
S. DJEBALI	Maître de conférence, ENS, Kouba	Examinateur
Y. ATIK	Professeur, ENS, Kouba	Rapporteur

Table des matières

Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier le réarrangement relatif d'une fonction mesurable définie sur un ouvert (borné ou non borné) et de présenter quelques applications aux équations aux dérivées partielles de type elliptique et parabolique.

Le concept du réarrangement monotone d'une fonction est basé sur la notion de symétrisation qui transforme un solide de $\mathbb{R}^3$ en une boule de même volume (symétrisation de Schwarz). La première étude systématique de la notion de réarrangement a été faite, en 1934, par G.H. Hardy, J.E. Littlewood et G. Pólya dans leur livre "Inequalities" [24]. Depuis, cette théorie a connu beaucoup de développement par C. Bandle, B. Kawohl, J. Mossino, J.M. Rakotoson, G. Talenti, R. Temam et d'autres. Un de ces développements est la notion de réarrangement relatif, qui est la dérivée directionnelle de l'application : $u \longmapsto u_*$, où u_* est le réarrangement décroissant de u. Le calcul du réarrangement relatif a été donné pour la première fois en 1981, par Mossino et Temam [32], dans la direction des fonctions bornées. Ensuite, Mossino et Rakotoson [31] ont étendu ce calcul dans la direction des fonctions L^p, $1 \leq p \leq \infty$, et ils ont montré que le réarrangement monotone est aussi un réarrangement relatif. Toutefois, il ne présente pas exactement les mêmes propriétés. Par exemple, ce réarrangement n'est pas monotone et il ne conserve pas les normes L^p, mais on a $\|v_{*u}\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}$, où v_{*u} est le réarrangement relatif de v par rapport à u. En 1978, Alvino et Trombetti [5] ont introduit une notion similaire à celle du réarrangement relatif. Cette notion a été utilisée par les mathématiciens de l'école de Naples (voir [3], [4]).

Dans ce travail, nous nous basons essentiellement sur l'article [38] de Rakotoson (2001), où il s'agit de présenter de nouvelles propriétés du réarrangement relatif. On prouve des inégalités ponctuelles de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif. Ces relations apparaissent comme un outil puissant pour obtenir d'autres inégalités, comme les inégalités ponctuelles de Pólya-Szegö, et comme un moyen efficace pour effectuer des estimations a priori.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Notons Ω_* l'intervalle ouvert $(0, |\Omega|)$.

On dira qu'un ensemble de fonctions V satisfait la propriété de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif (notée **PSR**), s'il existe une fonction mesurable positive K telle que, pour presque tout $s \in \Omega_*$

$$-u_*'(s) \leq K(s)|\nabla u|_{*u}(s),\ \forall u \in V \tag{1}$$

avec $u_* \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega_*)$, où u_* est le réarrangement décroissant de u et $|\nabla u|_{*u}$ est le réarrangement relatif de $|\nabla u|$ par rapport à u.

Si Ω est non borné, pour pouvoir définir u_* sur Ω_*, nous supposons que $u \geq 0$ dans Ω.

Nous démontrerons que de tels ensembles existent. Voici quelques exemples.

Si $V = W_0^{1,1}(\Omega)$ ou $V = \bigcup\limits_{1 \leq p \leq \infty} \{u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \geq 0\}$, alors V satisfait la propriété **PSR**.

Si Ω est un ouvert borné connexe possédant la propriété du cône intérieur, alors $V = W^{1,1}(\Omega)$ satisfait la propriété **PSR**.

Utilisant l'inégalité (1) et la relation simple :

$$u_*(\sigma) - u_*(\sigma') = -\int_\sigma^{\sigma'} \frac{du_*}{ds}(s)\, ds, \tag{2}$$

on remarque qu'une fois qu'on a l'estimation du réarrangement relatif du gradient de la fonction u par rapport à u, on peut obtenir l'estimation de u_* et par conséquent, on aura l'estimation de u dans un espace de Lebesgue ou dans un espace invariant par réarrangement (comme les espaces de Lorentz ou les espaces d'Orlicz).

Nous prouverons aussi l'inégalité de Hölder pour le réarrangement relatif. Cette inégalité nous permet d'avoir la relation suivante :

$$|\nabla u|_{*u}(s) \leq \Big[(|\nabla u|^p)_{*u}\Big]^{1/p}(s) \quad \text{p.p. } s \in \Omega_*, \tag{3}$$

où $u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ (1 \leq p < \infty)$.

La propriété de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif, permet d'obtenir les *inégalités de Pólya-Szegö* dans les espaces de Lorentz. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \geq 0$. Alors pour tout $s \in \Omega_*$, on a

$$\int_0^s |\nabla u_\star|_*(\sigma)\, d\sigma \leq \int_0^s (|\nabla u|_{*u})_*(\sigma)\, d\sigma \leq \int_0^s |\nabla u|_*(\sigma)\, d\sigma,$$

où $u_\star$ est le réarrangement sphérique décroissant de u. En particulier,

$$\||\nabla u_\star|\|_{(p,q)} \leq \||\nabla u|_{*u}\|_{(p,q)} \leq \||\nabla u|\|_{(p,q)},$$

avec $\|\cdot\|_{(p,q)}$ est la norme de l'espace de Lorentz $L^{(p,q)}(\Omega)$. Ces inégalités généralisent des résultats obtenus par Rakotoson-Temam [42] et Alvino [2]. En utilisant une proposition prouvée par Bennett-Sharpley [6] et Chong-Rice [11], on montre que ces relations ponctuelles impliquent des inégalités de Pólya-Szegö dans tout espace invariant par réarrangement. Soit (X, ρ) un espace normé inclu dans l'ensemble des fonctions mesurables sur un ouvert. Si ρ est une norme de Fatou invariante par réarrangement, alors

$$\rho(|\nabla u_\star|) \leq \rho(|\nabla u|_{*u}) \leq \rho(|\nabla u|).$$

Les inégalités de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif sont très utiles pour établir des *estimations a priori.* Pour obtenir de telles estimations, on se base sur les estimations ponctuelles de $(|\nabla u|^m)_{*u}$. En utilisant les inégalités ponctuelles de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif, l'inégalité (3) et la relation (2), on peut obtenir des estimations ponctuelles de $|\nabla u|_{*u}$ et de $|u|_*$. Par exemple, dans le chapitre 6, on démontre les estimations ponctuelles suivantes. On pose $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid v(x) > v_*(s)\}$, pour $s \in \Omega_*$, on a

$$\begin{aligned}(|\nabla v|^p)_{*v}(s) \quad &\leq \quad \frac{p'}{\alpha(v_*)}[k_{*v}(s) + \beta(v_*)(s)] \\ &\quad + \frac{\alpha(v_*)^{-p'}}{(N\omega_N^{1/N})^{p'} s^{p'/N'}} \times \Big| \int_{\Omega_s} (f - F)\mathrm{sign}\,(u)\, dx \Big|^{p'}, \qquad (4)\end{aligned}$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}\int_\Omega \hat{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\Phi(s, u)\, dx \quad &+ \quad \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\Phi(s, u)\, dx \\ &= \int_\Omega f(x)\Phi(s, u)\, dx, \qquad (5)\end{aligned}$$

avec $\Phi(s, u) = (v - v_*(s))_+\mathrm{sign}\,(u),\ v = |u|$ et sous des hypothèses bien choisies sur $\hat{a}$. En utilisant ces estimations, on obtient facilement le résultat de régularité suivant : si $f \in L^1_+(\Omega),\ p = N$ et $F \cdot \mathrm{sign}\,(u) \geq 0$, alors le gradient du réarrangement sphérique décroissant de la solution u de l'équation (5), appartient à l'espace de Lorentz $L^{N,\infty}(\Omega)$. Plus précisément,

$$|\nabla u_\star|_*(s) \leq (N\omega_N^{1/N})^{1/N'} \Big[s^{-1/N'} \int_0^s f_*(t)\, dt \Big]_*^{\frac{1}{N-1}}.$$

Ce résultat de régularité a été obtenu par Dolzmann-Hungerbühler-Müller [17], mais par une autre méthode et sans cette estimation. Notons que l'existence d'une solution décroissante symétrique et sphérique peut s'obtenir en utilisant la méthode de Korkut-Pašić-Zubrinić [26].

Les inégalités de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif peuvent aussi être utilisées pour obtenir des estimations a priori pour des équations de type parabolique, c'est pour cette raison que nous avons démontré quelques relations ponctuelles pour les fonctions dépendant du temps. Soit u une fonction de $W^{1,r}(0, T; L^p(\Omega))$, $(1 \leq r \leq \infty,\ 1 \leq p < \infty,\ 0 < T \leq \infty)$, avec $u \geq 0$ pour Ω non borné. Si $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction décroissante lipschitzienne avec $\Phi(0) = 0$ ($\Phi(u) \geq 0$ si Ω est non borné), alors

$$\Big(\frac{\partial\Phi(u)}{\partial t}\Big)_{*u} = \frac{\partial\Phi(u_*)}{\partial t} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_*), \quad Q_* = (0, T) \times \Omega_*.$$

Cette formule permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\Big| \int_0^s \frac{\partial \Phi(u_*)}{\partial t}(t,\sigma)\, d\sigma \Big| \leq \int_0^s \Big| \frac{\partial \Phi(u)}{\partial t} \Big|_*(t,\sigma)\, d\sigma, \text{ p.p. } s \in (0, |\Omega|) \text{ et p.p. } t.$$

Ces relations ponctuelles nous permettent donc d'obtenir des estimations a priori pour des équations paraboliques et de prouver quelques résultats de régularité. Par exemple, on prouve que $u(t) \in L^{p,q}(\Omega)$ p.p. t et pour tout $s \in (0, |\Omega|)$, on a

$$\int_0^t |\nabla u|_*^{p-1}(\tau, s)\, d\tau \leq \frac{2}{N\omega_N^{1/N}} \cdot \frac{1}{s} \int_s^{|\Omega|} \frac{g(t,\sigma)}{\sigma^{1-1/N}}\, d\sigma,$$

où $u(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t)\Phi(s, u(t))\, dx + \int_\Omega \hat{a} \cdot \nabla \Phi(s, u(t))\, dx = \int_\Omega f(t)\Phi(s, u(t))\, dx,$$

où $\Phi(s, u(t)) = (v(t) - v_*(t,s))_+ \operatorname{sign} u(t)$ et avec des hypothèses convenables sur $\hat{a}$, $u(0)$ et $f(t)$.

En utilisant les relations ponctuelles pour le réarrangement relatif, Rakotoson [39] a prouvé que $\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \mid u \geq 0, \ \|\nabla u\|_{N,1}\} \subset L^\infty(\Omega)$. Plus précisément,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq (N\omega_N)^{-1/N} \|\nabla u\|_{N,1},$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$. Ce résultat n'est pas nouveau, il a été démontré par Alvino-Lions-Trombetti [4], par exemple, mais la méthode utilisée par Rakotoson est plus courte. En appliquant le théorème de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif, on peut déduire d'autres estimations a priori. Par exemple,

$$(|\nabla v|^p)_{*v}^{1/p}(s) \leq b_{\alpha N} s^{-p'/pN'} \Big[\int_0^s |f|_{*v}(\sigma)\, d\sigma \Big]^{p'/p},$$

avec $v = |u|$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $(1 < p < \infty)$, satisfait l'équation :

$$-\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, \nabla u)) = f \quad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

Notons que des résultats similaires concernant les estimationa priori pour les équations elliptiques ont été obtenus par Talenti [48], [49], [50] et Mossino [30], mais en utilisant des techniques faisant intervenir la fonction de distribution $m_u(t) = \operatorname{mes}\{x \in \Omega \mid u(x) > t\}$. Tandis que cette nouvelle méthode utilise directement les propriétés du réarrangement relatif et la propriété de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif.

Signalons enfin que Rakotoson [40] a pu obtenir des inégalités d'interpolation en utilisant des relations ponctuelles pour le réarrangement relatif.

Ce travail est composé de six chapitres :
Dans le premier chapitre, nous avons regroupé quelques outils de base qui nous

serons utiles tout au long des chapitres suivants.
Au deuxième chapitre, nous avons rappelé les notions de réarrangement monotone (décroissant, croissant et sphérique), et du réarrangement relatif d'une fonction mesurable, ainsi que quelques propriétés classiques.
Dans le troisième chapitre, après avoir défini la propriété de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif, nous prouvons quelques relations ponctuelles.
Le quatrième chapitre est consacré à la généralisation de l'inégalité de Pólya-Szegö aux espaces de Lorentz, en utilisant les inégalités ponctuelles de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif.
Au cinquième chapitre, nous prouvons d'autres inégalités ponctuelles et inégalités intégrales, qui seront utilisées pour obtenir des estimations a priori pour des équations paraboliques.
Enfin, nous terminerons notre mémoire en donnant quelques estimations a priori pour des équations aux dérivées partielles de type elliptique et parabolique.
Ce travail est constitué de six chapitres $1, \ldots, 6$, eux-mêmes divisés en sections $1, 2, \ldots$ La numérotation choisie pour l'énoncé des théorèmes, définitions, remarques,... est une numérotation à trois chiffres : le premier correspond au chapitre, le deuxième à la section.