

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure



Département de Mathématiques
MÉMOIRE
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES
OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par :

MEDJERAB OUARDIA

Titre

**Problème elliptique quasi-linéaire dégénéré à donnée
sommable**

Devant le jury, composé de M^{rs}

M. BOUSSELSAL	Professeur	ENS-Kouba	Président
B.K. SADALLAH	M.C.	ENS-Kouba	Examineur
A. MOKRANE	M.C.	ENS-Kouba	Examineur
YOUCEF ATIK	Professeur	ENS-Kouba	Rapporteur

24 juin 2004
E.N.S. Vieux-Kouba, Alger

Table des matières

Notations	2
1 Introduction	4
2 Résultats d'analyse fonctionnelle	9
2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$	9
2.2 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	10
2.2.1 Injection compacte	11
2.2.2 Convergence faible et faible-*	11
2.2.3 Convergence en mesure	12
2.2.4 Quelques résultats classiques	13
2.2.5 Inégalités importantes	14
2.3 Quelques propositions	15
2.4 Points singuliers et points réguliers	16
2.5 Module de continuité	16
2.6 Quelques propriétés des matrices carrés	17
2.6.1 Définitions	17
2.6.2 Matrices symétriques	17
2.6.3 Matrices anti-symétriques	18
2.6.4 Décompositions des matrices carrés	18
2.6.5 Racine carré d'une matrice carré	19
3 Définition de solution renormalisée	20
3.1 Hypothèses	20
3.2 Quelques commentaires	21
3.3 Notations	21
3.4 Définition d'une solution renormalisée	22
3.4.1 Commentaires sur la définition de solution renormalisée	24
4 Résultat d'existence	32
4.1 Formulation de l'existence	32
4.2 Preuve du théorème d'existence	33
4.2.1 Première étape : Approximation	33
4.2.2 Deuxième étape : Estimations a priori	38

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	97
4.2.3 Troisième étape : Passage à la limite	44
4.2.4 Quatrième étape : La fonction u limite des, u^ε est solution renormalisée de (1.1)–(1.2)	52
4.3 Quelques estimations et remarques sur les solutions renormalisées	58
5 Résultat d’unicité	62
5.1 Hypothèses et commentaires	62
5.2 Résultat d’unicité	68
5.3 Preuve du théorème 5.1	69
6 Appendice	85
6.1 Construction d’une fonction ψ	85
6.1.1 Preuve du lemme 6.1	86
6.2 Conditions plus faible donnant (5.2)	87
6.2.1 Preuve du lemme 6.2	87
Bibliographie	93

Résumé

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N et f est une fonction de $L^1(\Omega)$. Le but de notre travail est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution renormalisée du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \text{ frontière de } \Omega, \end{cases}$$

où $A : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

où α est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ telle que

$$\int_{-\infty}^0 \alpha(s)ds = \int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = +\infty.$$

On suppose que :

$$\begin{aligned} \alpha(s) = 0 &\Rightarrow A(x, s) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, \\ \forall k \geq 0, \exists A_k \geq 0, & |A(x, s)| \leq A_k, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \\ |A(x, s)\xi|^2 &\leq A_k A(x, s)\xi \cdot \xi, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Notre étude s'appuie essentiellement sur l'article : "Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data" publié par D. Blanchard, F. Désir et O. Guibé. Laboratoire d'Analyse Numérique, d'Université Paris VI. Prépublication N° R 02023.

Cet article introduit la notion de solution renormalisée, prouve l'existence d'une telle solution u et -modulo des hypothèses supplémentaire- établit l'unicité de $\tilde{\alpha} \circ u$ avec $\tilde{\alpha}$ est la primitive de la fonction α et nulle à l'origine.

Notre travail a consisté principalement à comprendre cette notion de solution renormalisée, à réécrire le travail de D. Blanchard, *et al* en essayant de détailler les démonstrations, les notions fondamentales utilisées.

Mots clés : Équation elliptique quasi-linéaire, solution renormalisée, donnée sommable, problème dégénéré, existence et unicité des solutions.

Abstract

Let Ω be a bounded subset of \mathbb{R}^N and f a function of $L^1(\Omega)$. The aim of our work is to study the existence and uniqueness of the renormalized solution of the problem :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \text{ the boundary of } \Omega, \end{cases}$$

where $A : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ is a Carathéodory function which satisfies

$$A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

where α is function from \mathbb{R} into \mathbb{R}_+ such that

$$\int_{-\infty}^0 \alpha(s)ds = \int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = 0.$$

We assume that :

$$\begin{aligned} \alpha(s) = 0 &\Rightarrow A(x, s) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, \\ \forall k \geq 0, \exists A_k \geq 0, & |A(x, s)| \leq A_k, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \\ |A(x, s)\xi|^2 &\leq A_k A(x, s)\xi \cdot \xi, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Our study is mainly based on the paper "Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data" by D. Blanchard, F. Désir and O. Guibé, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI. Prepublication N° R 02023.

This paper introduces notion of renormalized solution, she proves existence of such a solution u and under additional assumption, establishes the uniqueness of $\tilde{\alpha} \circ u$, where $\tilde{\alpha}$ the antiderivative of α which vanishes at zero.

Our work consists principally to understand this notion of renormalized solution, to rewrite the work of D. Blanchard *et al* by detailing the proofs and the used fundamental notions.

Key words : elliptic quasi-linear equation, renormalized solution, summable datum, degenerated problem, existence and uniqueness of solutions.

الملخص

ليكن Ω ميدان مفتوح من \mathbb{R}^N و f تابع كمول. الهدف من عملنا هذا هو دراسة وجود و وحدانية الحل المعير للمسالة :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث : $\partial\Omega$ حافة الميدان Ω و $A : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ تابع لكراتيودوري يحقق :

$$A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

α تابع مستمر معرف من \mathbb{R} في \mathbb{R}_+ بحيث

$$\int_{-\infty}^0 \alpha(s)ds = \int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = +\infty.$$

$$\alpha(s) = 0 \Rightarrow A(x, s) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\forall k \geq 0, \exists A_k \geq 0, |A(x, s)| \leq A_k, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k,$$

$$|A(x, s)\xi|^2 \leq A_k A(x, s)\xi \cdot \xi, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq k, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

دراستنا تعتمد اساسا على المقال : « Quasi-linear degenerate elliptic problems »
D. Blanchard, F. Désir et O. Guibé. Laboratoire « المنجز من with L^1 data
d'Analyse Numérique, d'Université Paris VI
يستخدم في هذا المقال مفهوم
الحل المعير، يبين وجود حل u و باضافة شروط اخرى، يبين وحدانية $\tilde{\alpha} \circ u$ مع
 $\tilde{\alpha}$ التابع الاصيلي للتابع α المعدوم عند المبدء.

عملنا اساسا، يتمثل في فهم مفهوم الحل المعير، اعادة كتابة عمل D. Blanchard
ورفقاؤه مع تقديم البراهين المفصلة، كذا تقديم المفاهيم الاساسية المستخدمة.
الكلمات الفاتحة : معادلة ناقصية غير خطية، حلول معيرة، معطى كمول،
مسالة منحلة، وجود و وحدانية الحلول.