RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES
OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par :

MEDJERAB OUARDIA

Titre

Problème elliptique quasi-linéaire dégénéré à donnée sommable

Devant le jury, composé de M^{rs}

M. BOUSSELSAL	Professeur	ENS-Kouba	Président
B.K. SADALLAH	M.C.	ENS-Kouba	Examinateur
A. MOKRANE	M.C.	ENS-Kouba	Examinateur
YOUCEF ATIK	Professeur	ENS-Kouba	Rapporteur

24 juin 2004
E.N.S. Vieux-Kouba, Alger

Table des matières

Résumé

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et f est une fonction de $L^1(\Omega)$. Le but de notre travail est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution renormalisée du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x,u)\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \text{ frontière de } \Omega, \end{cases}$$

où $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$A(x,s)\xi \cdot \xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

où α est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)ds = \int_{0}^{+\infty} \alpha(s)ds = +\infty.$$

On suppose que :

$$\begin{aligned} &\alpha(s) = 0 \Rightarrow A(x,s) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\forall k \geq 0, \ \exists A_k \geq 0, \ |A(x,s)| \leq A_k, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ |s| \leq k, \\ &|A(x,s)\xi|^2 \leq A_k A(x,s)\xi \cdot \xi, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ |s| \leq k, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Notre étude s'appuie essentiellement sue l'article : "Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data" publié par D. Blanchard, F. Désir et O. Guibé. Laboratoire d'Analyse Numérique, d'Université Paris VI. Prépublication N° R 02023.

Cet article introduit la notion de solution renormalisée, prouve l'existence d'une telle solution u et -modulo des hypothèses supplémentaire- établie l'unicité de $\tilde{\alpha} \circ u$ avec $\tilde{\alpha}$ est la primitive de la fonction α et nulle à l'origine.

Notre travail a consisté principalement à comprendre cette notion de solution renormalisée, à réecrire le travail de D. Blanchard, *et al* en essayant de détailler les démonstrations, les notions fendamentales utilisées.

Mots clés : Équation elliptique quasi-linéaire, solution renormalisée, donnée sommable, problème dégénéré, existence et unicité des solutions.

Abstract

Let Ω be a bounded subset of $\mathbb{R}^N$ and f a function of $L^1(\Omega)$. The aim of our work is to study the existence and uniqueness of the renormalized solution of the problem :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \text{ the bonndary of } \Omega, \end{cases}$$

where $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ is a Carathéodory function which satisfies

$$A(x,s)\xi \cdot \xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

wwhere α is function from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}_+$ such that

$$\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)ds = \int_{0}^{+\infty} \alpha(s)ds = 0.$$

We assume that :

$$\begin{aligned} &\alpha(s) = 0 \Rightarrow A(x,s) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\forall k \geq 0,\ \exists A_k \geq 0,\ |A(x,s)| \leq A_k, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ |s| \leq k, \\ &|A(x,s)\xi|^2 \leq A_k A(x,s)\xi \cdot \xi, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ |s| \leq k,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Our study is mainly based on the paper "Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data" by D. Blanchard, F. Désir and O. Guibé, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI. Prepublication N° R 02023.

This paperintroduces notion of renormalized solution, she proves existence of such a solution u and under additioal assumption, establishes the uniqueness of $\tilde{\alpha} \circ u$, where $\tilde{\alpha}$ the antiderivative of α which vanishes at zero.

Our work consists principally to understand this notion of renormalized solution, to rewrite the work of D.Blanchard *et al* by detailing the proofs and the used fundamental notions.

Key words : elliptic quasi-linear equation, renormalized solution, summable datum, degenerated problem, existence and uniqueness of solutions.

الملخص

ليكن Ω ميدان مفتوح من $\mathbb{R}^N$ و f تابع كمول. الهدف من عملنا هذا هو دراسة وجود و وحدانية الحل المعير للّمسالة :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث : $\partial\Omega$ حافة الميدان Ω و $A : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ تابع لكراتيودوري يحقق :

$$A(x,s)\xi\cdot\xi \geq \alpha(s)|\xi|^2, \quad \forall s\in\mathbb{R},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N,\ p.p.\ x\in\Omega,$$

α تابع مستمر معرف من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}_+$ بحيث

$$\int_{-\infty}^{0}\alpha(s)ds = \int_{0}^{+\infty}\alpha(s)ds = +\infty.$$

$$\begin{aligned} &\alpha(s) = 0 \Rightarrow A(x,s) = 0, \quad p.p.\ x\in\Omega,\ \forall s\in\mathbb{R}, \\ &\forall k\geq 0,\ \exists A_k\geq 0,\ |A(x,s)|\leq A_k, \quad p.p.\ x\in\Omega,\ \forall s\in\mathbb{R},\ |s|\leq k, \\ &|A(x,s)\xi|^2 \leq A_k A(x,s)\xi\cdot\xi, \quad p.p.\ x\in\Omega,\ \forall s\in\mathbb{R},\ |s|\leq k,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

دراستنا تعتمد اساسا على المقال : » Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data « المنجز من D. Blanchard, F. Désir et O. Guibé. Laboratoire d'Analyse Numérique, d'Université Paris VI . يستخدم في هذا المقال مفهوم الحل المعير، يبين وجود حل u و باضافة شروط اخرى، يبين وحدانية $\tilde{\alpha}\circ u$ مع $\tilde{\alpha}$ التابع الاصلي للّتابع α المعدوم عند المبدء.

عملنا اساسا، يتمثل في فهم مفهوم الحل المعير، اعادة كتابة عمل D. Blanchard و رفقاوئه مع تقديم البراهين المفصلة، كدا تقديم المفاهيم الاساسية المستخدمة.

الكلمات الفاتحة : معادلة ناقصية غير خطية، حلول معيرة، معطى كمول، مسالة منحلة، وجود و وحدانية الحلول.