THESE

Présentée

Au département de Mathématiques de
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE KOUBA

Par

Ghania BENHAMIDA

Pour l'obtention du grade de Magister

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Calcul des Variations

Thème

Sur les relations d'extrémalité d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle non convexe et du problème relaxé associé

Soutenue publiquement le 03-07-2001.
Devant le jury, composé de M :

Y. Atik	Maître de conférences	E.N.S. Kouba	Président
M. Bousselsal	Maître de conférences	E.N.S. Kouba	Directeur de thèse
A. Mokrane	Maître de conférences	E.N.S Kouba	Examinateur
M. Abid	Maître de conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur

RESUME

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de type suivant :

$$(P) \quad \inf\left\{ F(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_a^b f_i(x, u(x), u'_i(x))dx, u \in \left[W^{1,p}(a,b)\right]^N u(a) = \alpha, u(b), \alpha, \beta \in \Re^N \right\}$$

Il est bien connu que sans l'hypothèse de convexité sur f_i par rapport à la troisième composante, le problème (P) peut ne pas admettre de solution. Pour contourner cette difficulté nous introduisons ce qu'on appelle problème relaxé (PR)

$$(PR) \inf\left\{ F^{**}(u) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i^{**}(x, u(x), u'_i(x))dx, u \in \left[W^{1,p}(a,b)\right]^N, p > 1, u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\}$$

où f_i^{**} désigne la convexifiée de f_i par rapport à son troisième argument. Nous démontrons des résultats d'existence et de régularité de la solution de (PR), ensuite moyennant la mesure de Young nous donnons une condition suffisante pour que le problème (P) admet au moins une solution.

Abstract

In this work, we are concerned with the following problem

$$(P)\inf\left\{F(u)=\sum_{i=1}^{N}\int_a^b f_i(x,u(x),u'_i(x))dx, u\in\left[W^{1,p}(a,b)\right]^N, p>1, u(a)=\alpha, u(b)=\beta\right\}$$

It is well known that, under a convexity assumption upon f_i in terms with the third component, problem (P) may not have solution. To pass round this difficult, we introduce what is called the relaxed problem which we denote by (PR)

$$(PR)\inf\left\{F^{**}(u)=\sum_{i=1}^{N}\int_a^b f_i^{**}(x,u(x),u'_i(x))dx, u\in\left[W^{1,p}(a,b)\right]^N, p>1, u(a)=\alpha, u(b)=\beta\right\}$$

where f_i^{**} stands for the convexified of f_i with respect to the third argument. We prove some existence and regularity results for problem (PR); using Young measur, we then give a sufficient condition for problem (P) admits at least one solution.