

Etude de certaines propriétés des nombres et
polynômes de Bernoulli et d'Euler

Laala KHALDI

Table des matières

Remerciements	6
Notations	7
Article d’Emma Lehmer étudié dans ce mémoire	9
Emma Markovna Trotskaya Lehmer	10
Introduction	12
Les relations de l’article d’Emma Lehmer	14
La bibliographie et les remarques en bas de page de l’article d’Emma Lehmer	18
1 Nombres et polynômes de Bernoulli et d’Euler	20
1.1 Introduction	20
1.2 Suites de polynômes d’Appell	24
1.3 Automorphismes remarquables ϕ et ψ de $K[x]$	27
1.4 Polynômes et nombres de Bernoulli et d’Euler	31
1.5 Relations de récurrence pour $(B_n(x))_n$ et $(E_n(x))_n$	39
1.6 Relations de récurrence pour $(B_n)_n$ et $(E_n)_n$	41
1.7 Expressions des polynômes d’Euler et de Bernoulli à l’aide des nombres de Bernoulli	43
1.8 Séries génératrices exponentielles	45
1.9 Détermination de $B_n(t)$ pour $t \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$	47
1.9.1 Formules de Raabe	47

1.9.2	Valeurs des polynômes de Bernoulli aux points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	50
1.10	Sommation des puissances numériques	55
1.10.1	Applications	63
2	Congruences dans un groupe et congruences dans un anneau	65
2.1	Introduction	65
2.2	Etude de l'anneau $\mathbb{Z}_{(n)}$ des n -entiers	66
2.3	Congruences dans un groupe commutatif	67
2.3.1	Exemples de congruences définies sur un groupe.	68
2.4	Congruences dans un anneau commutatif unitaire	69
2.5	Congruences dans l'anneau \mathbb{Z}	70
2.5.1	Fonction indicatrice φ d'Euler et le théorème d'Euler	70
2.5.2	Congruence pour le coefficient binomial	72
2.5.3	Petit théorème de Fermat	72
2.5.4	Théorème de Wilson	72
2.5.5	Théorème de Babbage	73
2.5.6	Congruences pour les sommes de puissances :	74
2.5.7	Etude des quotients de Fermat et de Wilson	76
2.6	Congruences dans l'anneau $\mathbb{Z}_{(n)}$	78
2.7	Congruences dans l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$	80
2.7.1	Congruence entre puissance négative et somme de puissances positives d'un entier	81
2.7.2	Théorème de Wolstenholme et congruences modulo p et modulo p^2 pour $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^m}$	82
2.7.3	Théorème d'Eisenstein	87
2.7.4	$\frac{p^{k-m}}{k} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour $p > m \geq 1$ et pour tout entier $k \geq m$	89
2.8	Théorème de Von-Staudt et Clausen et théorème de Kummer	90
2.8.1	Théorème de Von Staudt-Clausen	90
2.8.2	Théorème de Kummer	95
2.9	Applications des théorèmes de von Staudt-Clausen et de Kummer	96

3	Congruences d'Emma Lehmer	99
3.1	Congruences pour $B_m\left(\frac{p}{n}\right)$	100
3.2	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} (p - nr)^m$	103
3.2.1	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} (p - nr)^m$	103
3.2.2	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} (p - nr)^{2k-1}$ pour $n = 2, 3, 4$ et 6	104
3.2.3	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} (p - nr)^{p-2}$ pour $n = 2, 3, 4$ et 6 à l'aide des quotients de Fermat et de Wilson	107
3.2.4	Calcul de w_{17} à l'aide de la relation (3.25)	109
3.2.5	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} (p - nr)^{2k}$ pour $n = 2$ et $n = 4$	110
3.3	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} r^m$ et théorème de Schwindt	112
3.3.1	Congruences modulo p pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} r^{2k-1}$ pour $n = 2, 3, 4$ et 6	112
3.3.2	Congruences modulo p^2 pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} r^{2k-1}$ et $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} r^{2k}$	112
3.3.3	Théorème de Schwindt (1933)	115
3.3.4	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} r^{2k-1}$ et $\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} r^{2k}$	118
3.3.5	Congruences pour $\sum_{r=1}^{p-1} r^{2k+1}$ et $\sum_{r=1}^{p-1} r^{2k}$	120
3.4	Congruences pour $\sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r^{2k}}$, $\sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r^{2k-1}}$ et $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} \frac{1}{r^2}$	122
3.5	Congruences pour $\sum_{r=1}^{p-1} r^m q_r$ et $\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} r^{2k-1} q_r$	125
3.6	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} \frac{1}{r} q_{p-nr}$ pour $n = 2, 3, 4, 6$	131
3.7	Congruences pour $\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor} \frac{1}{p-nr}$ pour $n = 2, 3, 4, 6$ à l'aide des quotients de Fermat	139
3.8	Applications au premier cas du dernier théorème de Fermat	142
3.9	Congruences pour les coefficients binomiaux $\binom{p-1}{\lfloor \frac{p}{n} \rfloor}$ pour $n = 2, 3, 4, 6$	147
4	Quelques généralisations et extensions de congruences d'Emma Lehmer	152
4.1	Introduction	152
4.2	Généralisation d'une congruence d'Emma Lehmer (2000)	152
4.3	Extension d'une congruence d'Emma Lehmer (2002)	153
4.4	Extension de congruences d'Emma Lehmer (2007) et (2009)	153
4.5	Extension d'une congruence d'Emma Lehmer par Cai, Fu et Zhou (2007)	154

4.6 Amélioration d'une congruence d'Emma Lehmer	154
Conclusion	157
Annexe 1 : Quelques commandes MAPLE	158
Annexe 2 : Auteurs cités	160

Introduction

Ce mémoire, consacré à une étude approfondie de l'article d'Emma Lehmer[31] intitulé : "On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson", comporte quatre chapitres.

Les deux premiers chapitres de ce mémoire sont consacrés à des rappels et des compléments utiles à la compréhension de l'article d'Emma Lehmer. Ces compléments et la présentation originale de plusieurs notions concernant certaines propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli et d'Euler ou des congruences sont largement inspirés d'un cours de Post Graduation donné par mon Professeur, monsieur Bencherif [6]. Les deux derniers chapitres concernent l'étude de l'article d'Emma Lehmer et l'énoncé de certaines extensions ou généralisations récentes de résultats de cet article.

Le premier chapitre porte plus précisément sur une étude des nombres et polynômes de Bernoulli et d'Euler. Dans ce chapitre, nous commençons par définir les suites de polynômes d'Appell. Nous étudions des propriétés importantes et générales de ces suites de polynômes. Nous définissons ensuite de manière naturelle les suites de polynômes et de nombres de Bernoulli et d'Euler et prouvons que ces deux suites de polynômes sont des suites de polynômes d'Appell. Nous retrouvons ainsi aisément plusieurs propriétés de ces polynômes et nombres de Bernoulli et d'Euler.

Le deuxième chapitre porte sur une étude générale des propriétés des congruences définies dans un groupe commutatif ou dans un anneau commutatif. Nous rappelons les principaux théorèmes d'arithmétique dans l'anneau \mathbb{Z} des entiers. Nous étudions plus particulièrement les propriétés des congruences définies dans l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ des p -entiers. Nous démontrons certains résultats célèbres tels que les théorèmes de Wolstenholme, le théorème d'Eisenstein concernant certains nombres harmoniques, le théorème de Von-Staudt et Clausen concernant les nombres de Bernoulli. Nous rappelons les théorèmes des congruences de Kummer concernant les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler.

Le troisième chapitre constitue la partie essentielle de ce mémoire. Ce chapitre est consacré à une étude approfondie du fameux article d'Emma Lehmer. Nous détaillons minutieusement les preuves des nombreux résultats contenus dans cet article en y apportant des compléments et des précisions.

Au quatrième chapitre, nous signalons certaines généralisations et certaines extensions récentes de résultats d'Emma Lehmer.

Nous concluons enfin notre mémoire en rappelant toutes les perspectives intéressantes de recherche qu'offrent les généralisations et les extensions possibles de certains résultats de l'article d'Emma Lehmer.