

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : ZAOUCHE EL MEHDI

Intitulé

**Sur les différentes notions de convexités des ensembles  
et des fonctions, liées aux calculs des variations.**

Soutenu publiquement le 07.07.2009 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. EL.H. Ouazar	M. De conférences	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. A. Choutri	C. De cours	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.

# Table des matières

Notations	8
<b>1 Introduction</b>	<b>12</b>
Introduction	12
<b>2 Notions de convexité au sens généralisé</b>	<b>19</b>
2.1 Notions de convexité pour les fonctions . . . . .	19
2.2 Notions de convexité pour les ensembles . . . . .	39
2.2.1 Définitions et propriétés . . . . .	39
2.2.2 Résultats de séparation pour les ensembles polyconvexes . . . . .	56
2.2.3 Les enveloppes convexes d'ensembles au sens généralisé . . . . .	60
2.2.4 Points extrêmes, théorème de Minkowski et fonction de Choquet .	81
2.3 Appendice : définitions, résultats concernant l'enveloppe . . . . .	93
<b>3 Exemples d'enveloppes d'ensembles et de fonctions</b>	<b>95</b>
3.1 Ensemble défini par une fonction quasiaffine . . . . .	97
3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières . . . . .	101
3.3 Extension du cas d'un ensemble défini par une fonction quasiaffine . . . . .	108
3.4 Surfaces minimales . . . . .	115
3.5 Enveloppes de fonctions . . . . .	121
3.6 Appendice : valeurs singulières . . . . .	126

<b>4 Inclusions différentielles :</b>	
<b>existence de solutions</b>	<b>135</b>
4.1 Rappel sur le théorème d'existence général . . . . .	136
4.2 La propriété de relaxation . . . . .	152
4.2.1 Une condition suffisante pour la propriété de relaxation . . . . .	152
4.2.2 Problème d'incompressibilité . . . . .	156
4.2.3 L'inclusion $Du(x) \in \partial K$ . . . . .	164
4.3 Applications . . . . .	172
4.3.1 Inclusion différentielle définie par une fonction quasiaffine . . . . .	172
4.3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières . . . . .	175
4.3.3 Extension du cas d'une inclusion définie par une fonction quasiaffine . . . . .	182
4.3.4 Surfaces minimales . . . . .	184
4.3.5 Gradient avec un nombre fini de valeurs sans connection de rang 1 . . . . .	189
<b>5 Problèmes de minimisation non quasiconvexes</b>	<b>197</b>
5.1 Conditions suffisantes d'existence . . . . .	198
5.2 Conditions nécessaires d'existence . . . . .	201
5.3 Applications . . . . .	212
5.3.1 Intégrales qui dépendent de fonctions quasiaffines . . . . .	212
5.3.2 Intégrales qui dépendent des valeurs singulières du gradient . . . . .	216
5.3.3 Intégrale du type surfaces minimales . . . . .	219
5.3.4 L'énergie de Saint Venant-Kirchhoff . . . . .	226
5.4 Appendice : quelques résultats élémentaires sur les enveloppes convexes . . . . .	235
<b>Bibliographie</b>	<b>243</b>

## Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'étude des différentes notions de convexité dans l'espace des matrices  $\mathbb{R}^{N \times n}$ . Cette étude nous permet de trouver des solutions de quelques problèmes d'inclusions différentielles du type :

On cherche  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  solution de

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E$  est un ensemble donné de  $\mathbb{R}^{N \times n}$ ,  $Du = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$  désigne la matrice jacobienne de  $u$  et  $\varphi$  est la donnée au bord.

Par ailleurs dans la dernière partie de ce mémoire, nous étudions l'existence de solutions pour quelques problèmes de minimisation de la forme :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} f(Du(x)) dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\},$$

où  $u_{\xi_0} = \xi_0 x$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N \times n}$  et  $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction densité d'énergie non quasi-convexe.

**Mots-clés :**

Enveloppe, convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang 1 convexe, séparément convexe, quasiaffine, matrice, inclusions différentielles, problèmes de minimisation, relaxation.

## Abstract

In this dissertation, we are interested in the study of the various concepts of convexity in space of matrices  $\mathbb{R}^{N \times n}$ . This study allows us to find solutions of some problems of differential inclusions of type :

One seeks  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  solution of

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{a.e. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a bounded subset of  $\mathbb{R}^n$ ,  $E$  is a given subset of  $\mathbb{R}^{N \times n}$ ,  $Du = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$  denotes the jacobian matrix of  $u$  and  $\varphi$  gives  $u$  on the boundary  $\partial\Omega$ .

In the second part of this dissertation, we study the existence of solutions to some problems of minimization of the form :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} f(Du(x)) dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\},$$

where  $u_{\xi_0} = \xi_0 x$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N \times n}$  and  $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  is a function density of energy not quasiconvex.

### Key-words :

Envelope, convex, polyconvex, quasiconvex, rank 1 convex, separately convex, quasilinear, matrix, differential inclusions, minimizing problems, relaxation.