

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : ANALYSE NON LINÉAIRE

Présenté par : ZAOUCHE EL MEHDI

Intitulé

**Sur les différentes notions de convexités des ensembles
et des fonctions, liées aux calculs des variations.**

Soutenu publiquement le 07.07.2009 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. EL.H. Ouazar	M. De conférences	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. A. Choutri	C. De cours	E.N.S-Kouba	Examineur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.

Table des matières

Notations	8
1 Introduction	12
Introduction	12
2 Notions de convexité au sens généralisé	19
2.1 Notions de convexité pour les fonctions	19
2.2 Notions de convexité pour les ensembles	39
2.2.1 Définitions et propriétés	39
2.2.2 Résultats de séparation pour les ensembles polyconvexes	56
2.2.3 Les enveloppes convexes d'ensembles au sens généralisé	60
2.2.4 Points extrêmes, théorème de Minkowski et fonction de Choquet .	81
2.3 Appendice : définitions, résultats concernant l'enveloppe	93
3 Exemples d'enveloppes d'ensembles et de fonctions	95
3.1 Ensemble défini par une fonction quasiaffine	97
3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières	101
3.3 Extension du cas d'un ensemble défini par une fonction quasiaffine	108
3.4 Surfaces minimales	115
3.5 Enveloppes de fonctions	121
3.6 Appendice : valeurs singulières	126

4 Inclusions différentielles :	
existence de solutions	135
4.1 Rappel sur le théorème d'existence général	136
4.2 La propriété de relaxation	152
4.2.1 Une condition suffisante pour la propriété de relaxation	152
4.2.2 Problème d'incompressibilité	156
4.2.3 L'inclusion $Du(x) \in \partial K$	164
4.3 Applications	172
4.3.1 Inclusion différentielle définie par une fonction quasiaffine	172
4.3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières	175
4.3.3 Extension du cas d'une inclusion définie par une fonction quasiaffine	182
4.3.4 Surfaces minimales	184
4.3.5 Gradient avec un nombre fini de valeurs sans connection de rang 1	189
5 Problèmes de minimisation non quasiconvexes	197
5.1 Conditions suffisantes d'existence	198
5.2 Conditions nécessaires d'existence	201
5.3 Applications	212
5.3.1 Intégrales qui dépendent de fonctions quasiaffines	212
5.3.2 Intégrales qui dépendent des valeurs singulières du gradient	216
5.3.3 Intégrale du type surfaces minimales	219
5.3.4 L'énergie de Saint Venant-Kirchhoff	226
5.4 Appendice : quelques résultats élémentaires sur les enveloppes convexes	235
Bibliographie	243

Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'étude des différentes notions de convexité dans l'espace des matrices $\mathbb{R}^{N \times n}$. Cette étude nous permet de trouver des solutions de quelques problèmes d'inclusions différentielles du type :

On cherche $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ solution de

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , E est un ensemble donné de $\mathbb{R}^{N \times n}$, $Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$ désigne la matrice jacobienne de u et φ est la donnée au bord.

Par ailleurs dans la dernière partie de ce mémoire, nous étudions l'existence de solutions pour quelques problèmes de minimisation de la forme :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} f(Du(x)) dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\},$$

où $u_{\xi_0} = \xi_0 x$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N \times n}$ et $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction densité d'énergie non quasi-convexe.

Mots-clés :

Enveloppe, convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang 1 convexe, séparément convexe, quasiaffine, matrice, inclusions différentielles, problèmes de minimisation, relaxation.

Abstract

In this dissertation, we are interested in the study of the various concepts of convexity in space of matrices $\mathbb{R}^{N \times n}$. This study allows us to find solutions of some problems of differential inclusions of type :

One seeks $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ solution of

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{a.e. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded subset of \mathbb{R}^n , E is a given subset of $\mathbb{R}^{N \times n}$, $Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$ denotes the jacobian matrix of u and φ gives u on the boundary $\partial\Omega$.

In the second part of this dissertation, we study the existence of solutions to some problems of minimization of the form :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} f(Du(x)) dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\},$$

where $u_{\xi_0} = \xi_0 x$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N \times n}$ and $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function density of energy not quasiconvex.

Key-words :

Envelope, convex, polyconvex, quasiconvex, rank 1 convex, separately convex, quasilinear, matrix, differential inclusions, minimizing problems, relaxation.