RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtension du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**

Présenté par : **ZAOUCHE EL MEHDI**

Intitulé

Sur les différentes notions de convexités des ensembles et des fonctions, liées aux calculs des variations.

Soutenu publiquement le 07.07.2009 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr. Y. Atik	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. EL.H. Ouazar	M. De conférences	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. A. Choutri	C. De cours	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Rapporteur.

Table des matières

Résumé

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'étude des différentes notions de convexité dans l'espace des matrices $\mathbb{R}^{N\times n}$. Cette étude nous permet de trouver des solutions de quelques problèmes d'inclusions différentielles du type :

On cherche $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ solution de

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, E est un ensemble donné de $\mathbb{R}^{N\times n}$, $Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j\le n}}$ désigne la matrice jacobienne de u et φ est la donnée au bord.

Par ailleurs dans la dernière partie de ce mémoire, nous étudions l'existence de solutions pour quelques problèmes de minimisation de la forme :

$$(P) \quad \inf \left\{ \int_\Omega f(Du(x))dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \right\},$$

où $u_{\xi_0} = \xi_0 x,\ \xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ est une fonction densité d'énergie non quasiconvexe.

Mots-clés :

Enveloppe, convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang 1 convexe, séparément convexe, quasiaffine, matrice, inclusions différentielles, problèmes de minimisation, relaxation.

Abstract

In this dissertation, we are interested in the study of the various concepts of convexity in space of matrices $\mathbb{R}^{N\times n}$. This study allows us to find solutions of some problems of differential inclusions of type :

One seeks $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ solution of

$$\begin{cases} Du(x) \in E, & \text{a.e. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded subset of $\mathbb{R}^n$, E is a given subset of $\mathbb{R}^{N\times n}$, $Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq N \\ 1\leq j\leq n}}$ denotes the jacobian matrix of u and φ gives u on the boundary $\partial\Omega$.

In the second part of this dissertation, we study the existence of solutions to some problems of minimization of the form :

$$(P) \quad \inf\left\{ \int_\Omega f(Du(x))dx : u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\},$$

where $u_{\xi_0} = \xi_0 x$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ and $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ is a function density of energy not quasiconvex.

Key-words :

Envelope, convex, polyconvex, quasiconvex, rank 1 convex, separately convex, quasiaffine, matrix, differential inclusions, minimizing problems, relaxation.