REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

N° d'ordre: MAG/… /2009

MÈMOIRE

PRESENTÉ A

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE KOUBA-ALGER
DÉPARTEMENT DE Mathématiques

POUR OBTENIR LE DIPLÔME DE

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : Analyse non linéaire

OPTION : Equations Différentielles

PAR

Farhouh KORICHI

Problèmes aux limites du second ordre associés aux équations dynamiques sur les échelles de temps

Soutenu le …………..

Devant la commission d'examen composée de :
M. MOKRANE Abdelhafid, Professeur, ENS Kouba, Président
M. BENMEZAI Abdelhamid, Maître de Conférences B, USTHB, Examinateur
M. OUAHAB Abdelghani, Maître de Conférences B, Université SBA, Examinateur
M. MOUSSAOUI Toufik, Maître de Conférences A, ENS Kouba, Examinateur
M. DJEBALI Smail, Professeur, ENS Kouba, Directeur de thèse
M. Fujita Yashima Hisao, Professeur, Université de Turin, Italie, Invité

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intérésse à l'étude de quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles du second ordre sur des ensembles appelés échelles de temps ; ces équations sont appelées équations dynamiques car elles peuvent s'adapter aux équations différentielles ou aux équations aux différences. Dans un premier temps, on commence par développer la théorie de ces ensembles qui a été introduite par Stefan Hilger dans sa thèse doctorale pour unifier l'analyse discrète et l'analyse continue (classique) en 1988. Ceci nous permettra également d'étudier quelques équations dynamiques sur les échelles de temps, ainsi que quelques problèmes aux limites associés.
On commence d'abord par présenter la structure des échelles de temps et on développe ensuite l'étude des équations dynamiques du premier et second ordre ainsi que quelques problèmes à valeurs initiales associés.
Enfin, on établit des résultats récents sur l'existence et l'unicité de quelques problèmes aux limites associés à des équations dynamiques du second ordre, et ce en appliquant quelques théorèmes de point fixe, la méthode de sous et sur solution ainsi que la théorie du degré topologique de Leray et Schauder.
Le mémoire se subdivise essentiellement en deux parties :
La première partie, intitulée "Structure et équations différentielles dans les échelles de temps", comprend trois chapitres : le premier donne quelques généralités sur les échelles de temps concernant l'analyse de manière générale ou des éléments de topologie générale.

Dans le deuxième chapitre, on présente quelques définitions des équations exponentielles généralisées et quelques résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes aux limites associés à des équations dynamiques du premier ordre.

Le troisième chapitre est consacré à une étude des équations dynamiques du deuxième ordre ; on y donne des définitions des fonctions hyperboliques et trigonométriques généralisées. À la fin de ce chapitre, on fournit des résultats d'existence à des problèmes à valeurs initiales associés à des équations dynamiques du second ordre.

La deuxième partie s'intitule "étude de quelques problèmes aux limites du second ordre dans les échelles de temps". Cette partie est divisée en six chapitres et se termine par un chapitre annexe ; on commence dans le chapitre quatre par donner des résultats généraux concernant la fonction de Green et ses propriétés pour le problème aux limites de type double delta suivant :

$$\begin{cases} (px^{\Delta})^{\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \quad t \in [a, \sigma^2(b)], \\ \alpha x(a) - \beta x^{\Delta}(a) = 0, \\ \gamma x(\sigma^2(b)) - \delta x^{\Delta}(\sigma(b)) = 0, \end{cases}$$

où p, q sont deux fonctions à définir dans les chapitres qui suivent. Dans le chapitre cinq, on étudie des problèmes de type double delta avec conditions aux bords de type Dirichlet, et ce en appliquant le théorème du point fixe de Schauder. On rappelle ensuite la méthode de sous et sur solution et on l'applique en vue de démontrer un autre résultat d'existence. De même, on étudie le cas très particulier des échelles de temps réguliers. Pour le cas vectoriel, on se restreint à donner un résultat d'existence en appliquant la théorie du degré topologique de Brouwer en dimension finie.

Dans le sixième chapitre, on étudie quelques problèmes associés à des équations de type double delta et avec des conditions aux bords de type focal. On étudie l'existence de solutions positives en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder lorsque la non linéarité du second membre ne dépend pas de la dérivée, et un autre résultat d'existence de solutions bornées loesque le second membre dépendent de la dérivée.

Dans le septième chapitre, on étudie quelques problèmes avec des conditions aux bords linéaires et on établit des résultats d'existence et d'unicité de solutions à des problèmes dépendant d'un paramètre λ ; des résultats de non existence sont aussi présentés.

Dans le huitième chapitre, on étudie le même type de problèmes mais avec des conditions aux bords non linéaires ; on introduit de nouvelles notions de compatibilité des conditions aux bords avec un ensemble bien défini ; on établit des résultats d'existence et d'unicité de solutions bornées.

Dans le neuvième chapitre, on s'intéresse à un autre type de problèmes qui sont les problèmes à dérivées mixtes de la forme :

$$\begin{cases} -[p(t)y^{\Delta}(t)]^{\nabla} + q(t)y(t) = h(t), & t \in [a,b], \\ \alpha y(\rho(a)) - \beta y^{[\Delta]}(\rho(a)) = 0, & \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = 0, \end{cases}$$

où $y^{[\Delta]}(t) = p(t)y^{\Delta}(t)$ est dite la quasi-Δ-dérivée de $y(t)$.
On calcule la fonction de Green associée à ce type de problèmes, et on établit quelque résultats d'existence de solution positive.

Enfin, dans le dernier chapitre, celui des annexes, on rassemble quelques théorèmes de point fixe ainsi que d'autres résultats qui ont été utilisés dans ce mémoire.

Mots clés échelles de temps, équations dynamiques du premier et du second ordre, point fixe, cône, probléme aux limites, existence de solution.

Summary

In this report, we are interested in the study of some boundary values problems associated with differential equations of the second order on a time scale ; these equations are known as second order dynamic equations for they contain both differential and difference equations. We will first recall main parts of this theory which was introduced for the first times by Stefan Hilger in his doctoral thesis in 1988 in order to unify the discrete and continuous analysis.
We will make profit of this study to consider some boundary value problems associated with dynamic equations.
We begin by giving the structure of the time scales together with its main properties. Then we develop the study of some dynamic equations of the first and second order and also some initial values problems.
Finally, the most important part of our work will be devoted to giving existence and uniqueness results for some boundary value problems associated to dynamic equations of second order, by applying some fixed point theorems combined with the theory of Leray and Schauder topological continuation method, and the method of upper and lower solution.
The report is divided into two parts :

The first one entitled "Structures and differential equations in the time scales" comprises three chapters ; in the first one, we present the general structure of time scales : definitions, topology, continuity and integration.

In the second chapter, we give definitions of the generalized exponential equations and some existence and uniqueness results of solutions for some boundary values problems associated with first order dynamic equations.

In the third chapter, we study some second order dynamic equations, and we give definitions of the generalized hyperbolic and trigonometric functions.

At the end of this chapter, we give some existences results to some initial value problems associated with second order dynamic equations.

The second part is entitled : "study of some second order boundary values problems in the time scales". This part is divided into six chapters : in the second one, we present several general results regarding the Green's function and its properties for the double delta type boundary value problems :

$$\begin{cases} (px^{\Delta})^{\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \quad t \in [a, \sigma^2(b)]. \\ \alpha x(a) - \beta x^{\Delta}(a) = 0, \\ \gamma x(\sigma^2(b)) - \delta x^{\Delta}(\sigma(b)) = 0. \end{cases}$$

where p, q are two functions to be defined in the following chapters.

In chapter five, we study double delta problems with Dirichlet boundary conditions, by applying the Schauder fixed point theorem ; then, we use the method of upper and lower solution to prove existence results.
Also, we study the particular case of regular time scales. For the vectorial case, we give one existence result by application of the Brouwer topological degree theorem.

In the sixth chapter, we study further problems with double delta equations and focal boundary conditions. We give existence of positive solution using the nonlinear Leray-Schauder alternative for some problems where the right-hand side does not depend on the derivative ; also additional results of existence of bounded solutions where non linearity depends on the derivative are given ; finally, we present a multiplicity result.

In the seventh chapter, we study the same problem with linear boundary conditions ; we establish some existence and uniqueness results of solutions for some problems depending on a parameter λ, and also non-existence results ; then we give an application of the comparison method.

In the eighth chapter, we study again the same type of problem with non-linear boundary conditions ; we introduce the notion of compatibility of the boundary conditions with a well defined set ; we establish some existence and uniqueness results of bounded solutions.

In the ninth chapter, we study another type of problems which are problems with mixed derivatives of the form :

$$\begin{cases} -[p(t)y^{\Delta}(t)]^{\nabla} + q(t)y(t) = h(t), & t \in [a,b] \\ \alpha y(\rho(a)) - \beta y^{[\Delta]}(\rho(a)) = 0, & \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = 0, \end{cases}$$

where $y^{[\Delta]}(t) = p(t)y^{\Delta}(t)$ is called the quasi delta derivative of $y(t)$.
We compute the Green's function associated with this kind of problems, and we establish some existence results of positive solution.
In the last chapter, we recall some fixed point theorem and other results used in the present work.

Key words time scales, First and second order dynamics equations, Fixed point, Boundary values problems, Existance of solutions.

compendiato

In questa memoria, siamo interessate, a l'esame di alcuni problemi ai limiti associati ad equazioni differenziali del secondo ordine su una scala di tempo chiamò le equazioni dinamiche. Mentre sviluppando la teoria di questi wholes che sono stati presentati da Stefan Hilger nella sua tesi di dottorato per unificare il discreto e continua analisi.
Effettivamente, l'esame delle equazioni dinamiche in una scala di tempo generalizzò i due casi, quella delle semplici equazioni differenziali ed equazioni alle differenze.
Di questo profitto, il nostro lavoro consiste nello studiare dei problemi ai limiti di questo tipo. abiamo cominciò col dare la struttura delle scale di tempo e sviluppare poi l'esame delle equazioni dinamiche del primo e secondo ordine i problemi a valori iniziali ed associati.

nelle fino, abiamo stabilisce risultati interessanti sull'esistenza e l'unicità di alcuni problemi ai limiti associati ad equazioni dinamiche del secondo ordine, questo come applicando teoremi di punti fixo, metodi di monete e su soluzione così come la teoria del grado. La memoria è divisa in due parte : Prima intitolata Struttura e equazione differentials nelle scale di tempo. contiene tre capitoli, il primo è interessato alla struttura generale delle scale di tempo" definizioni, topologia, la continuità e l'integrazione."

Nel secondo capitolo uno dà definizioni delle equazioni esponenziali generalizzate e dei risultati di esistenza e l'unicità di soluzioni dei problemi ai limiti associano ad equazione dinamica del primo ordine.

Nel terzo capitolo uno fa un esame delle equazioni dinamiche del secondo ordine, ed uno dà definizioni degli funzioni iperbolici e trigonometriche generalizzate. Alla fine di questo capitolo si dà dei risultati di esistenze di soluzioni dei

problemi per siglare socio di valori ad equazioni dinamiche del secondo ordine.

Seconda parte intitolata esame di alcuni problemi ai limiti del secondo ordine nelle scale di tempo. Questa parte è divisa in sei capitoli ed il capitolo supplementare, uno comincia nel capitolo quattro col dando risultati generali riguardo alla funzione di Green e le sue proprietà per i problemi ai limiti di tipo delta doppio il prossimo

$$\begin{cases} (px^{\Delta})^{\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) = 0, \qquad t \in [a, \sigma^2(b)], \\ \alpha x(a) - \beta x^{\Delta}(a) = 0, \\ \gamma x(\sigma^2(b)) - \delta x^{\Delta}(\sigma(b)) = 0. \end{cases}$$

dove p, q è due funzioni per dare i capitoli che seguono.

Nella continuazione nel cinque capitolo uno comincia a studi i problemi di tipo il doppio delta ha le condizioni nei lati del tipo di Derichlet, applicando il teorema di punti fixo di Schauder per mostrare l'esistenza di soluzione positiva e limitata. Poi uno presenta il metodo di soto e sopra soluzione e l'applica per dimostrare un altro risulta di esistenza di soluzione. E ancheabiamo studiare un caso molto particolare delle scale di tempo che è le scale di tempi regolari. Per il caso vettoriale uno taglia dare ad un risultato di esistenza un candidato la teoria del grado topologico di Brouwer.

Nel sesto capitolo uno studia i problemi vanno bene con le stesse equazioni di tipo doppio delta ma alle condizioni ai lati di tipo focale. Uno studia soluzione positiva esistenza uno che usa il non alternativa lineare di Laray-Schauder per un secondo non membro dipendente del derivativo,e degli altri risultati di esistenza di soluzione limitata per un secondo membro dipendente del derivativo ed in fine uno dà ad un risultato delle molteplicità.

Nel settimo capitolo uno studia il tipo di problema ma ha le condizioni nei lati lineare, uno stabilì dei risultati di esistenza e l'unicità di soluzioni dei problemi dipendenti di in parametro di λ, e anche del non esistenza risultati, nelle fino da applicatione del metodo di paragone.

Nell'ottavo capitolo uno studia sempre lo stesso tipo di problema ma alle condizioni al lati non lineari, uno presenta le nozioni di notizie della compatibilità delle condizioni nei lati con un molto definito intero, uno stabilì dei risultati di esistenza e l'unicità di soluzioni limitati.

Nel nono capitolo uno studia un altro tipo di problemi che sono i problemi a mescolato derivativo della forma :

$$\begin{cases} -[p(t)y^{\Delta}(t)]^{\nabla} + q(t)y(t) = h(t), & t \in [a,b] \\ \alpha y(\rho(a)) - \beta y^{[\Delta]}(\rho(a)) = 0, & \gamma y(b) + \delta y^{[\Delta]}(b) = 0. \end{cases}$$

Dove $y^{[\Delta]}(t) = p(t)y^{\Delta}(t)$ è detto il quasi-Δ-derivativo di y.
Abiamo calcolato la funzione di Green associare a problemi, e abiamo stabilì dei risultati di esistenza di soluzione positiva.

Nell'ultimo capitolo, il capitolo supplementare abiamo tenta di dare ogni teorema di punto fixo e stesso di altro teorema che ha fu usato nella nostra memoria.

الملخص

في هذه المذكرة التي تحمل عنوان: **مسائل حدية من الدرجة الثانية المرفقة بمعادلات ديناميكية على السلم الزمني،** نهتم بدراسة المسائل الحدية المرفقة بمعادلات تفاضلية عادية على السلم الزمني والتي تسمى المعادلات الديناميكية.

سنقوم بتفصيل طريقة السلالم الزمنية التي ظهرت في مذكرة الدكتوراه لستيفان هيلجر سنة 1988 , لتوحيد التحليل المستمر في مجموعة الأعداد الحقيقية و الغير مستمر في مجموعة الأعداد الصحيحة.

الهدف من دراسة المعادلات التفاضلية الديناميكية في السلم الزمني هو تعمم الحالتين المعادلات التفاضلية العادية و المعادلات ذات التغيرات.

لهذا جاءت مذكرتنا لتعطي دراسة بعض المسائل الحدية المرفقة بهذا النوع من المعادلات التفاضلية.

جاء تقسيم مذكرتنا إلى جزئين رئيسيين و احتوى كل جزء على وحدات. ففي الجزء الأول بدأنا دراستنا بإعطاء بعض التعاريف و خواص السلم الزمني و خواص التوابع المعرفة على السلم الزمني من استمرارية , تفاضلية تكامل .

في الجزء الثاني ندرس بعض المسائل الحدية المرفقة بمعادلات ديناميكية من الدرجة الثانية دراسة الوجود و الوحدانية و كذا محدودية الحلول بتطبيق نظريات النقطة الصامدة و طرق المقارنة و بعض الطرق الأخرى.