REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Vieux –Kouba, Alger
Département de Mathématiques

MEMOIRE

Pour l'obtention du grade de **MAGISTERE**

Spécialité : **MATHEMATIQUES**

Option : ***Analyse fonctionnelle***

Présenté par

Sihem KASDALI

EXISTENCE DE SOLUTION FORTE D'UNE INEQUATION VARIATIONNELLE PARABOLIQUE NON LINEAIRE

Soutenue le 29 septembre 2002

Devant le jury, composé de Mrs :

D. Téniou	Professeur	U.S.T.H.B	Président
A. Mokrane	Maître de conférence	E.N.S - Kouba	Rapporteur
M. Bousselsal	Maître de conférence	E.N.S - Kouba	Examinateur
S. Djebali	Maître de conférence	E.N.S - Kouba	Examinateur
A.K. Saadellah	Maître de conférence	E.N.S - Kouba	Examinateur

Table des Matières

Résumé de Mémoire de Magistère en Analyse Fonctionnelle
Intitulé
Existence de solution forte d'une inéquation variationnelle parabolique non linéaire
Présenté par : **Sihem KASDALI**
Sous la direction de : Mr **Abdelhafid MOKRANE**

Mots-clés : Inéquation variationnelle, Solution forte, Inégalité de Lewy-Stampacchia.
Résumé : Notre travail consiste a étudier la notion d'inéquation variationnelle à travers l'article de Maria Agostina Vivaldi sur "*Existence of strong solution for nonlinear parabolic variational inequalities*", Nonlinear Analysis, Theory, methods & Applications, Vol. 11, No. 2, pp 285-295, 1987, i.e. [35]. Cet article se propose d'établir l'existence de solution forte :[1]

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K = \left\{ v \in L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap L^\infty\left(Q\right), v \leq \psi \text{ p.p. dans } Q \right\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\ u(0) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \\ \text{tel que } \ \langle E(u) + F(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K, \end{array}\right\} \qquad (2.0)$$

où la solution u vérifie l'inégalité de Lewy-Stampacchia suivante [2]:

$$0 \wedge \left(E_u\psi + F(\psi)\right) \leq E\left(u\right) + F\left(u\right) \leq 0\,.$$

ψ désigne l'obstacle (la contrainte), K le convexe des contraintes, fermé. Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $Q = \Omega \times (0,T)$. Les fonctions a_{ij} sont des fonctions de Carathéodory, bornées et satisfaisant une certaine condition de coercitivité. Le terme f est une fonction de Carathéodory ayant une croissance quadratique par rapport au gradient.
Les inéquations variationnelles sont issuent des problèmes de calcul de variations à des extrémas avec contraintes. Certaines d'entres-elles (parabolique), ont été introduite par J. L. Lions et G. Stampacchia [23]; celles-ci interviennent dans l'étude de nombreux problèmes notament les problèmes mécaniques (plasticité, liaisons unilatérales) et de physique [17], de contrôle optimale [18]...
Notre travail a consisté dans une première étape, a traduire cet article de l'anglais au français, puis nous avons commencé a le détailler et l'enrichire, dans le sens; donner des démonstrations complètes et détaillées, où dans certaines parties, il a fallu adapter des résultats pris d'autres articles où livres ([12], [25]...) aux espaces et aux hypothèses de travail. De plus, des explications supplémentaires et des remarques ont été donné à fur et à mesure que cela nous semblé être utile et pertinant.
Dans un autre chapitre de ce travail, nous énonçons un début de travail qui n'a aucun rapport avec l'article étudié. Nous établissons un résultat d'existence relative à une inéquation variationnelle linéaire avec obstacle non nul ψ (cas elliptique et parabolique), où

[1] Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), à frontière régulière $\partial\Omega$.
Q le cylindre $\Omega \times (0,T)$ où T un nombre réel positif. $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ et $\Gamma = \Omega \times \{0\}$.
[2] $f \wedge g = \inf\left(f, g\right)$.

dans le cas elliptique une inégalité duale de type de Lewy-Stampacchia est aussi prouvée. L'opérateur considéré est le laplacien.
Dans le cas elliptique, on se donne le problème :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (u,\mu) \in H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ -\triangle\, u - f = \mu \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ \mu \geq 0 \\ u \geq \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ \langle u, \mu \rangle = 0 \end{array}\right\} \tag{3.0}$$

où la solution satisfait l'inégalité de Lewy-Stampacchia suivante:

$$\mu \leq (f - \triangle\psi)^-$$

ψ désigne l'obstacle, élément de $H^1(\Omega)$ et est négatif sur la frontière de Ω. Ce genre de problème a été étudié par de nombreux auteurs, notament, J .L .Lions [21], et A. Mokrane [25]. Ici, nous reprenons la démarche donnée dans [25], pour le cas du laplacien, mais en considérant le cas d'un obstacle non nul, la méthode adoptée pour prouver l'existence et l'inégalité de Lewy-Stampacchia est celle de la pénalisation, et repose également sur un résultat de densité du cône positif de $H_0^1(\Omega)$ dans le cône positif de $H^{-1}(\Omega)$, pris de [25].
Le second problème à étudier, de nature parabolique :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } (u,\mu) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u - f = \mu \\ u_{|\Sigma\cup\partial\Omega} = 0 \\ u \geq \psi \quad \text{p.p. dans } Q \\ \langle u, \mu \rangle = 0 \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

Dans ce problème, l'existence est un résultat tout à fait classique (voir [21]). De manière formelle, nous reprenderons les mêmes étapes vus dans le cas elliptique, avec bien entendu les changements appropriés.

Ecole Normale Superieure of Kouba, Algiers Department of Mathematics

Summarized of Memory of Magister in Functional Analysis
Heading

Existence of strong solution for nonlinear parabolic variational inequalities

Presented by: Sihem Kasdali
Under the direction of: Mr. Abdelhafid Mokrane

Key words: Variational inequalities, strong Solution, Lewy-Stampacchia's inequality.

Summary: Our work consists has to study the concept of variational inequalities through the article of Maria Agostina Vivaldi on " Existence of strong solution for nonlinear parabolic variational inequalities ", Nonlinear Analysis, Theory, methods & Applications, vol. 11, No 2, pp 285-295, 1987, i.e. [35]. This article proposes to establish the existence of strong solution:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Find } u \in K = \{v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q),\, v \le \psi \text{ e.w. in } Q\},\\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^1(Q) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\, u(0) = 0 \text{ in } \Omega,\\ \text{such as } \langle E(u) + F(u), v - u\rangle \ge 0, \forall\, v \in K,\end{array}\right\} \quad (2.0)$$

ψ indicate the obstacle (the constraint), K the convex one of the constraints, closed. Ω open limited of $\mathbb{R}^N$ and $Q = \Omega \times (0,T)$. The functions has a_{ij} are related to Carathéodory, limited and satisfying a certain condition of coercitivity. The term F is related to Carathéodory having a quadratic growth compared to the gradient.

The variational inequations are issuent problems of calculus of variations to extrémas with constraints. Some of enter they (parabolic), were introduced by J L Lions and G Stampacchia [23]; those intervene in the study of many problems in particular the mechanical problems (plasticity, unilateral connections) and of physics [17] , of control optimal [18]...

Our work consisted in a first stage, has to translate this article of English to French, then we started has to detail it and the enrichire, in the direction; to give complete and detailed demonstrations, where in certain parts, it was necessary to adapt results taken of other articles where books ([12], [25]...) with spaces and the working hypotheses. Moreover, additional explanations and remarks were given to fur and as that seemed to us to be useful and relevant.

In another chapter of this work, we state a beginning of work which does not have any relationship with the studied article. We establish a result of existence relating to a linear variational inequation with obstacle not no one (elliptic and parabolic case), where in the elliptic case a dual inequality of type of Lewy-Stampacchia is also proven. The operator considered is the Laplacian.

In the elliptic case, one gives oneself the problem: Find $(u,\mu) \in H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ such as

$$\left.\begin{array}{l} -\triangle u - f = \mu \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ \mu \ge 0 \\ u \ge \psi \text{ e.w. in } \Omega \\ \langle u, \mu \rangle = 0 \end{array}\right\} \quad (3.0)$$

where the solution u satisfy Lewy-Stampacchia's inequality

$$\mu \leq (f - \triangle\psi)^{-}.$$

ψ indicating the obstacle, element of $H^1(\Omega)$ negative on the border Ω ans f element of $H^{-1}(\Omega)$. This kind of problem was studied by many authors, in particular, J L Lions [21], and A. Mokrane [25].
Here, we take again the step given in [25], for the case of the Laplacian, but by considering the case of an obstacle not no one, the method adopted to prove the existence and the inequality of Lewy-Stampacchia is that of the penalization, and also rests on a result of density of the positive cone of $H^{1}(\Omega)$ in the positive cone of $H^{-1}(\Omega)$ taken [25].
The second problem to be studied, of parabolic nature:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Find } (u,\mu) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u - f = \mu \\ u(x,0) = 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq \psi \ \text{ e.w. in } Q \\ \langle u, \mu \rangle = 0 \text{ e.w. in } \Omega \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

In this problem, the existence is a completely traditional result (see [21]). In a formal way, we will take again the same stages seen in the elliptic case, with of course the suitable changes.

where the solution u satisfy Lewy-Stampacchia's inequality

$$\mu \leq (f - \triangle\psi)^{-}.$$

ψ indicating the obstacle, element of $H^1(\Omega)$ negative on the border Ω ans f element of $H^{-1}(\Omega)$. This kind of problem was studied by many authors, in particular, J L Lions [21], and A. Mokrane [25].
Here, we take again the step given in [25], for the case of the Laplacian, but by considering the case of an obstacle not no one, the method adopted to prove the existence and the inequality of Lewy-Stampacchia is that of the penalization, and also rests on a result of density of the positive cone of $H^{1}(\Omega)$ in the positive cone of $H^{-1}(\Omega)$ taken [25].
The second problem to be studied, of parabolic nature:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Find } (u,\mu) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u - f = \mu \\ u(x,0) = 0 \text{ in } \Omega \\ u \geq \psi \text{ e.w. in } Q \\ \langle u, \mu \rangle = 0 \text{ e.w. in } \Omega \end{array}\right\} \tag{3.24}$$

In this problem, the existence is a completely traditional result (see [21]). In a formal way, we will take again the same stages seen in the elliptic case, with of course the suitable changes.

المدرسة العليا للأساتذة القبة
قسم الرياضيات

ملخص مذكرة ماجستير في التحليل التابعي غير الخطي

العنوان

وجود حل قوي لمتراجحة تغيرية غير خطية مكافئة

أعداد قصدعلي سهام

اشراف الأستاذ مقران عبد الحفيظ

الكلمات المفاتيح : متراجحة تغيرية، حل قوي، متراجحة Lewy-Stampacchia .

الملخص : ليكن Ω مفتوح محدود من $\mathbb{R}^N$ حيث $(N \geq 2)$. يهدف هذا العمل لدراسة مفهوم متراجحة تغيرية من خلال مقال :

Maria Agustina Vivaldi :" *Existence of strong solution for nolinear parabolic variational inequalities*", Nolinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol.11, No.2, pp 285 – 295, 1987,

هذا المقال يهدف إلى برهان وجود حل قوي للمسألة :

$$(Ep) \qquad \begin{cases} u \in K, \frac{\partial u}{\partial t} \in L_1(Q) + L_2(0,T; H^{-1}(\Omega)), u(0) = 0 \\ \langle E(u) + F(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K \end{cases}$$

ومتراجحة تقوية من نمط Lewy-Stampacchia .

التوابع a_{ij} هي توابع لكاراتيودوري، محدودة وتحقق شرط القهرية، التابع f أيضا تابع لكارتيودوري متمتع بتزايد تربيعي نسبة للتدرج.

المتراجحات التغيرية ناتجة من مسائل الحساب التغيري لشروط حدية مرتبطة بحواجز درست من طرف J. L. Lions و G. Stampacchia وباحثين آخرين. واجد تطبيقاتها في ميادين شتى.

في مرحلة أولى، قمنا بترجمة المقال من الإنجليزية إلى الفرنسية، ثم بدراسته وتفصيله وذلك بالإتيان ببراهين كاملة واعطاء كل المراحل، حيث استدعى الأمر في بعض الحالات إلى الاستعانة بنتائج مقالات أخرى، وتعديلها إلى الإشكالية المطروحة في هذه الدراسة.

في فصل آخر نقدم بداية لعمل مستقل عن الدراسة السابقة، حيث ندرس متراجحة Lewy-Stampacchia في حالة متراجحة تغيرية (ناقصية ومكافئة) مع حاجز غير معدوم. المؤثر المعتبر هو مؤثر لابلاس وطريقة الحل المتبعة هي طريقة الجزاء.

في الحالة الناقصية، المسألة المطروحة هي :

$$(P_0) \qquad \begin{cases} (u,\mu) \in H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ -\Delta u - f = \mu \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \quad u \geq \psi p.p.\Omega \\ \mu \geq 0, \langle u, \mu \rangle = 0 \end{cases}$$

حيث الحل يحقق متراجحة Lewy-Stampacchia التالية : $\mu \leq (f - \Delta\psi)^-$ ، و ψ تمثل الحاجز حيث $\psi \in H^1(\Omega)$ وهو سالب على حافة Ω .

نتطرق في هذه الأطروحة كذلك للمسألة المكافئة الخطية المرفقة للمسألة الناقصية أعلاه.