الأستاذ يوسف عتيق

المدرسة العليا للأساتذة ــ القبة

قسم الرياضيات

حول
نظرية القياس والمكاملة

تذكير نظري

تمارين ومسائل للحل

وأخرى مع حلولها المفصلة

القبة ــ الجزائر 1997 وَ 2009

تصدير الطبعة الأولى

عزيز(تـ)ي الطالب(ة)، السلام عليكم وبعد،

من أجلك تحملت عناء تحضير هذه المجموعة من التمارين والمسائل!

قسمت هذه المجموعة إلى ثلاثة أقسام. يضم القسم الأول تذكيرا نظريا مرفقا بتمارين للحل ويضم القسم الثاني بعض المواضيع المختارة وهي مواضيع الامتحانات التي قدمتها في السنتين الدراسيتين 95–1996 وَ 96–1997 لاختبار تحصيل طلبة نظرية القياس والمكاملة (عدر 304).

وتجد في نهاية القسم الثالث قائمة ببعض المراجع المختارة قد تفيدك أثناء دراستك وهي بكل تأكيد تمكنك من تعميق معلوماتك في نظرية القياس والمكاملة.

إننا نعتقد أن التذكير النظري (الذي قدمناه بدون أي برهان) يساعدك أثناء حل التمارين التي تعتبر محاولاتك لحلها مهمة بمكان ونجاحك في إيجاد حلولها المقياس الوحيد الذي يقيّم فهمك للدروس.

أمّا المواضيع المختارة فإنها تعطيك فكرة عمّا هو منتظر منك في الامتحانات! هذا إذا تحدثنا عن الامتحانات فقط! أمّا إذا راعينا ـ بصفة عامة ـ الفوائد التربوية المنتظرة من جراء وضع مثل هذه المجموعة من التمارين بين يديك فنقول:

أولا، إنها تعطيك فرصة أخرى للعمل؛ لأنه لا بد من أن يدفعك فضولك إلى الإطلاع على المواضيع التي أعطيت لطلبة في ظروف مثل ظروفك ومستوى مثل مستواك.

ثانيا، إنها ستساعدك على فهم دروسك بكيفية أفضل، حيث إن كل هذه التمارين مرفقة بحلولها .

عليك أن تستفيد بذكاء من الحلول المعطاة! إذا اكتفيت بقراءة نص التمرين أو

المسألة ثمّ الحل الموافق لها مباشرة دون أن تفكِّر فيه وتبحث بنفسك مدة كافية عن هذا الحل، فتكون فائدتك هزيلة أو معدومة. ينبغي إذن قبل الإطلاع على حل أي موضوع أن يستغرق بحثك عنه وتفكيرك فيه مدة تفوق مرتين مدة الامتحان، أي من أربع إلى ست ساعات!

يجب أن تغتنم هذه الفرصة لكي تتعلم كيفية تحرير أجوبتك.

ويجب أن تولي عناية كبيرة بتحرير ما توصلت إليه وكأنك مطالب بتقديمه إلى أستاذك! أذكر ما تريد فعله بدقة في كل خطوة من خطوات الحل.

يجب أن تختار لكتابة أجوبتك (أثناء عملك في المنزل وفي الامتحان) أحسن **قلم** وأحسن **خط** .

إسمعي أنتِ، نعم أنتِ! لا بد أنكِ ترين نفسكِ جميلة! كوني إذن صادقة مع نفسكِ إلى أقصى حد! إجعلي كل ما يصدر منكِ جميلا، بما فيه ورقة الامتحان التي تقدمينها إلى المصحح! فكري في قول أبي الطيب المتنبي:

وما قلت من شعر تكاد بيوته إذا كتبت يبيض من نورها الحبر.

وأنت أيها الوسيم، كن وسيما في عملك، قدم أفضل ما عندك! لا تنس قول أبي الطيب المتنبي:

على قدر أهل العزم تأتي العزائم وتأتي على قدر الكرام المكارم

وتعظم في عين الصغير صغارها وتصغر في عين العظيم العظائم.

لا أحب أن أنهي كلامي هذا قبل أن أقول لك إن المكاملة (القياس) علم قديم وصعب جدا ساهم في وضع أسسه وتشييده العديد من الفحول، العباقرة، فأوصلوه، بعد أكثر من عشرين قرنا، إلى مستوى راقٍ يتطلب منك الكثير من العمل والتفكير ولو كان هدفك هو فقط الإلمام بأفكاره الأولية.

إني لأجد نفسي أكرر أمرا بديهيا جدا، وهو أنه لا يمكن بأي حال من الأحوال تعلُّم الرياضيات مهما كان مستواها دون تخصيص وقت معتبر لحل التمارين والمسائل. إن نسيت هذا الأمر فاتتك فرصتك في تعلُّم الرياضيات!

وأخيرا من واجبي أن أنبه القاريء إلى أنني لا أذكر أني قمت بعمل كان صوابي فيه أكثر من خطأي! إن العمل الموجود بين يدك مملوء إذن بالأخطاء الإملائية والرياضياتية والمطبعية وغيرها ... فلا تتعجب عند اكتشافها ولا تتردد في تنبيهي إليها. إني في إنتظارك!

نبهتني الأستاذة دوجة هبول إلى عدة أخطاء إكتشفتها أثناء إشرافها على الأعمال الموجهة فشكرا جزيلا لها!

حظ سعيد وصبر جميل، والله المستعان على تحمل مشقة العمل
الجزائر في 30 أكتوبر 1997 مـ
يوسف عتيق

تصدير الطبعة الثانية

تختلف هذه الطبعة عن سابقتها من حيث إن أجزاءها الثلاثة عرفت إضافات. أضيف إلى الجزء الأول ملخصات تتعلق بالتكاملات المضاعفة ومبرهنة فوبيني وفضاءات لوبيغ L^p وخواصها. كما أضيف في الجزء الثاني 32 موضوعا (اختبارا) جديدا. وعرف الجزء الثالث إضافة حلولا (كاملة أو منقوصة) لبعض المواضيع الجديدة وعددها 15 .

تسهيلا لربط المعلومات، نحن في هذه الطبعة نرفق من حين إلى آخر وفي الجزء الأول (التذكير) المصطلح العربي بالمصطلح الفرنسي.

فيما يخص الرموز المستخدمة للإشارة إلى بعض التوابع فإننا نفضل استخدام الرموز التي يسخدمها التاك TEX . إننا على سبيل المثال نستخدم الرموز التالية:

اسم التابع	رمزه
التابع الأسي	exp
اللّوغريتم الطبيعي	ln
الجيب المثلثي	sin
الجيب القطعي	sinh
الظل المثلثي	tan
الظل القطعي	tanh

اسم التابع	رمزه
قوس التجيب المثلثي	arccos
قوس الجيب المثلثي	arcsin
قوس الظل المثلثي	arctan
التجيب المثلثي	cos
التجيب القطعي	cosh
التظل المثلثي	cot
التظل القطعي	coth

ونذكر بالرموز المستخدمة للإشارة إلى مجموعات الأعداد المألوفة:

- ○ مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ ؛ $\mathbb{N}^\star=\{1,2,3,\ldots\}$.
- ○ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.
- ○ مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}^\star\right\}$.
- ○ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
- ○ مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ ، $i^2=-1$.

سوف نستخدم، من حين إلى آخر، بعض الاختصارات نذكر منها:

الاختصار	المعنى	المقابل الفرنسي
شك	شبه كليا	p.p. (presque partout)
حكت = شك	حيث ما كان تقريبا	
مك	مهما كان	partout = pour tout
إذاا	إذا وفقط إذا	ssi (si et seulement si)

تنبيه

١ـ تمثل المواضيع التي نقدمها في الجزء ب (الثاني) امتحانات قدمت في قسم الرياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة لطلبة ليسانس الرياضيات. نحن قدمنا نصوصها كما هي تقريبا ولذا فقد تجد فيها بعض التكرارات، فمعذرة. إذا قدمنا الموضوع ولم نقدم حله (في الجزء جـ) فنتبع رقمه بنجمة، مثل «الموضوع الـ $15^\star$» وإذا قدم الحل منقوصا فنرفق الرقم بإشارة ناقص، مثل «الموضوع الـ 17^-». إذا كان الموضوع مرفقا بحله فنكتفي بذكر رقمه، دون إشارة آخرى.

٢ـ نحن نكتب الأرقام العربية بشكليها المغربي والمشرقي. نذكّر بالمعادلات:

٠ $=0$ ، ١ $=1$ ، ٢ $=2$ ، ٣ $=3$ ، ٤ $=4$ ،
٥ $=5$ ، ٦ $=6$ ، ٧ $=7$ ، ٨ $=8$ ، ٩ $=9$.

وعلى سبيل المثال، في جدول محتويات الكتاب، الموجود في الأخير، عليك أن تقرأ رقم الصفحة بالشكل المشرقي وتحوله ذهنيا إلى الشكل المغربي عند بحثك عن الصفحة المطلوبة.

وعلى بركة الله

حظ سعيد وصبر جميل، والله المستعان على تحمل مشقة العمل
الجزائر في 31 أكتوبر 2009 مـ
الأستاذ يوسف عتيق

نضد هذا العمل باستخدام ArabTEX للأستاذ كلاوس لاغالي Klaus Lagally .

الفصل ١

تذكير

نستخدم في كلي ما يلي الرمز $\overline{\mathbb{R}}$ للاشارة إلى حقل الاعداد الحقيقية المكتمل، أي إلى المجموعة المحصل عليها بإضافة العنصرين $+\infty$ وَ $-\infty$ إلى حقل الاعداد الحقيقية حيث لدينا $-\infty < x < +\infty$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ ونزوده بالجمع والضرب العاديين ونصطلح على أنّ

$$\begin{aligned}(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) &= (\pm\infty) + x = (\pm\infty), \qquad \forall x \in \mathbb{R};\\ (\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty, &\quad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty;\\ x \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times x &= \pm\infty, \quad x > 0\\ &= 0, \quad x = 0\\ &= \mp\infty, \quad x < 0.\end{aligned}$$

مع عدم إعطاء معنى لِـ $(\pm\infty) + (\mp\infty)$.

1.1 النهايات السفلى والعليا

1.1.1 في حالة الاعداد•

1.1.1.1 **تعريف** • لِتكن $\{x_n\}$ متتالية من $\mathbb{R}$. نعرف النهاية السفلى لهذه المتتالية بأن

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \doteq \sup_{n\geq 0}\{\inf_{k\geq n} x_k\}$$

ونعرف النهاية العليا للمتتالية ذاتها بان

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \doteq \inf_{n\geq 0}\{\sup_{k\geq n} x_k\}\cdot$$

2.1.1 في حالة المجموعات•

1.2.1.1 **تعريف •** لتكن X مجموعة وَ $\{A_n\}$ متتالية من أجزائها. نعرف النهاية السفلى والنهاية العليا لهذه المتتالية بأن

$$\liminf_n A_n \doteq \bigcup_{n\geq 0}\Big\{\bigcap_{k\geq n} A_k\Big\} \doteq \sup_{n\geq 0}\Big\{\inf_{k\geq n} A_k\Big\}$$

وَ

$$\limsup_n A_n \doteq \bigcap_{n\geq 0}\Big\{\bigcup_{k\geq n} A_k\Big\} \doteq \inf_{n\geq 0}\Big\{\sup_{k\geq n} A_k\Big\}\cdot$$

يجب بطبيعة الحال أخذ الحدين السفلي والعلوي نسبة إلى علاقة الترتيب الجزئي المتمثلة في الاحتواء $\subset$ بين أجزاء X .

نقول عن متتالية أجزاء من X إنها متقاربة إذا كانتا نهايتاها السفلى والعليا متساويتين ونشير إلى قيمتهما المشتركة بِـ $\lim_{\infty} A_n$.

تأكد من أن كل متتالية رتيبة من أجزاء X متقاربة.

3.1.1 **في حالة التوابع •** ليكن (X,d) فضاء متريا وَ x_0 عنصرا من X وَ $\rho > 0$ عددا حقيقيا. نشير بِـ $B^\star(x_0,\rho)$ إلى الجلة المخروزة ذات المركز x_0 ونصف القطر ρ ، أي أن

$$B^\star(x_0,\rho) = \{x \in X \mid 0 < d(x_0,x) < \rho\}\cdot$$

ليكن f تطبيقا لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ ولتكن a نقطة تراكم للجزء D . لنضع

$$M(a,\rho) = \sup\{f(x) \mid x \in B^\star(x_0,\rho)\cap D\}$$

وَ

$$m(a,\rho) = \inf\{f(x) \mid x \in B^\star(x_0,\rho)\cap D\}\cdot$$

تأكد من أن $m(a,\rho)$ متناقصة وان $M(a,\rho)$ متزايدة نسبة إلى ρ .

1.3.1.1 تعريف • نعرف النهاية السفلى للتّابع f عند النقطة a بأن
$$\underline{\lim}_a f \doteq \lim_{\rho\downarrow 0} m(a,\rho) = \sup_{\rho>0} m(a,\rho)$$

ونعرف النهاية العليا للتّابع f عند النقطة a بان

$$\overline{\lim_a} f \doteq \lim_{\rho\downarrow 0} M(a,\rho) = \inf_{\rho>0} M(a,\rho).$$

2.3.1.1 تعريف • ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f تطبيقا لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ $a \in D$. نقول إن f نصف مستمر سفليا (semi-continu inférieurement) عند النقطة a إذا كانت
$$\underline{\lim}_a f \geq f(a)$$
ونقول إنه نصف مستمر علويا عند النقطة a إذا كان
$$\overline{\lim}_a f \leq f(a).$$
واذا كان f نصف مستمرا سفليا (علويا على التوالي) عند كل نقطة من D قلنا إنه نصف مستمر سفليا (علويا على التوالي) على D .

تأكد من أن الدالة المميزة للاعداد الناطقة المحصورة بين 0 وَ 1 نصف مستمرة سفليا عند كل نقطة ناطقة ومستمرة علويا عند كل نقطة صماء.

3.3.1.1 تعريف • لتكن $\{f_i\}_{i\in I}$ جماعة توابع حقيقية معرفة على جزء D من فضاء متري. نسمي الغلاف السفلي (العلوي على التوالي) لهذه الجماعة التابع $\inf_{i\in I} f_i$ المعرف عند كل نقطة $x \in D$ بأن

$$\Big(\inf_{i\in I} f_i\Big)(x) = \inf_{i\in I} f(x) \qquad \Big(\Big(\sup_{i\in I} f_i\Big)(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)\Big) \text{ على التوالي}$$

4.3.1.1 التوابع اللّيبشيتزية والتوابع المستمرة مطلقا•

4.3.1.1 .١ تعريف • نقول عن تابع حقيقي g معرف على جزء D من $\mathbb{R}$ إنه **يحقق شرط ليبشيتز (أو إنه ليبشيتزي)** إذا وجد ثابت $C > 0$ (يدعى بثابت ليبشيتز Lipschitz) يحقق
$$|g(x) - g(y)| \leq C|x-y|, \quad \forall x,y \in D.$$

وإذا وجد ثابت $C > 0$ وعدد $\alpha \in]0,1[$ بحيث
$$|g(x) - g(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in D$$
فنقول إن g يحقق **شرط هولدار** Hölder **(أو إنه هولداري)** على D بثابت يساوي C وبأس يساوي α.

تأكد من أن التابع $x \longmapsto \arctan x$ يحقق شرط ليبشيتز على $\mathbb{R}$ وان التابع $x \longmapsto \sqrt{x}$ يحقق شرط هولدار على $\mathbb{R}_+$ بأس يساوي $\frac{1}{2}$.

4.3.1.1 .٢ تعريف • نقول عن تابع حقيقي f معرف على مجال $[a, b]$ من $\mathbb{R}$ إنه **مستمر مطلقا** (**absolûment continue**) على هذا المجال إذا أمكن مرافقة كل $\varepsilon > 0$ بعدد $\rho > 0$ بحيث، مهما كانت الجماعة المتهية من المجالات غير المتقاطعة
$$\{]a_1, b_1[, \ ]a_2, b_2[, ..., \ ]a_n, b_n[\}$$
ذات إتحاد محتوى في $[a, b]$ والطول الكلي $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \rho$ ، يكون لدينا
$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

4.3.1.1 .٣ مبرهنة• **إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا على $[a, b]$ فتكون التوابع**

$f + g$ ، fg ، kf مع k ثابت

مستمرة مطلقا. وكذلك، إذا كان $f \geq m > 0$ فيكون $\frac{1}{f}$ مستمرا مطلقا.

5.3.1.1 تذبذبات وتقلّبات التوابع•

5.3.1.1 .١ تعريف • f تابع حقيقي معرف على جزء D من $\mathbb{R}$. إذا كان f محدودا على جزء A من ميدان تعريفه فان العدد الموجب
$$\Omega_A f = \sup_A f - \inf_A f$$
يدعى **بتذبذب** (**oscillation**) التابع f على A. لتكن c نقطة من D ولنفرض أن f محدود على $A_{\rho_0} \doteq D \cap I(c, \rho_0)$ ، حيث $I(c, \rho_0)$ هو المجال المفتوح الذي مركزه c ونصف قطره ρ_0 . يدعى العدد $\omega_c f$ المعرف بِـ $\omega_c f \doteq \inf\limits_{0<\rho\leq\rho_0} \Omega_{A_\rho} f$ **بتقلّب** f عند النقطة c.

تأكد من أن $\omega_c f = \lim_{\rho\downarrow 0} \Omega_{A_\rho} f$. وكذلك من أن $|\lim_{c+} f - \lim_{c-} f| \leq \omega_c f$.

4.1.1 الاستمرار المتساوي•

1.4.1.1 **تعريف•** نقول عن متتالية توابع $\{f_n\}$ معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$ إنها **متساوية الاستمرار (équicontinue)** على D إذا أمكن رفق كل عدد $\varepsilon > 0$ بعدد $\delta > 0$ صيفته أن:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in D,\ |x - y| \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.1 تمـاريـن حول النهايات وما إليها

.1 ا) تأكد من أن النهايتين السفلى والعليا موجودتان في $\overline{\mathbb{R}}$ من أجل كل متتالية حقيقية $\{x_n\}$.

ب) أحسب النهايتين السفلى والعليا للمتتاليات المعطاة بحدها العام :

$$1.\quad a_n = (-1)^n, \qquad 2.\quad b_n = (1 + \sin\frac{n\pi}{2})^{\frac{1}{n}}, \qquad 3.\quad c_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$4.\quad d_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad 5.\quad e_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}\cdot$$

.2 $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ متتاليتان حقيقيتان. أثبت أنه إذا كان $x_n \leq y_n$ ، مهما كان n ، كانت

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

.3 أثبت، من أجل كل متتاليتين حقيقيتين محدودتين $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ ، أن

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

أعط أمثلة تبين أنه يمكن للمتباينات السابقة أن تكون تامة.

4. $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ متتاليتان حقيقيتان. بفرض $\{a_n\}$ متقاربة فبين أن

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n,\ \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

5. بين أن $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\liminf\limits_{n\to\infty}\{-a_n\}$.

6. $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ متتاليتان عناصرهما من $\mathbb{R}_+$. بين، مفترضا أن $\overline{\lim}\, x_n \neq 0$ أو $\overline{\lim}\, y_n \neq \infty$ ، أن $\overline{\lim}\, x_n y_n \leq \left(\overline{\lim}\, x_n\right) \overline{\lim}\, y_n$.

7. أثبت أنه حتى تتقارب المتتالية الحقيقية $\{x_n\}$ نحو ℓ يلزم ويكفي أن يكون لدينا $\limsup x_n = \liminf x_n = \ell$.

8. لتكن $\{a_n\}$ متتالية حقيقية وَ $p : \mathbb{N}^\star \longmapsto \mathbb{N}^\star$ تطبيقا متزايدا تماما. بين أن

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_{p(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} a_{p(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

استنستج أنه إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فإن كل متتالية مستخرجة منها متقاربة وتتقارب نحو نفس النهاية.

9. $\{A_n\}$ متتالية من أجزاء مجموعة X. تأكد من أن نهايتها العليا $\overline{\lim}_\infty A_n$ هي المجموعة المكونة من عناصر X التي تنتمي إلى مالانهاية من الاجزاء A_n وأن نهايتها السفلى $\underline{\lim}_\infty A_n$ هي المجموعة المكوّنة من عناصر X التي تنتمي إلى كل الأجزاء A_n عدا عدد منته منها.

10. لتكن X مجموعة وَ A وَ B جزئين منها. عين النهايتين السفلى والعليا للمتتالية $\{A_n\}$ المعرفة بِـ $A_{2n} = A$ وَ $A_{2n+1} = B$ ، $n \in \mathbb{N}$.

11. عين النهايتين السفلى والعليا لِمتتاليات أجزاء $\mathbb{R}$ التالية:

ا) $A_{2n} = [0,1]$ وَ $A_{2n+1} = [1,2]$ ، $n \in \mathbb{N}$.

ب) $B_n = [0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}]$ ،

جـ) $A_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n}[$ وَ $A_{2n+1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$ ، $n \in \mathbb{N}$.

د) A_n هو المجال المغلق الذي طرفاه 0 وَ a_n حيث $\{a_n\}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو نهاية $a > 0$. ناقش الحالات الممكنة.

12. لتكن $\{A_n\}$ متتالية من أجزاء مجمواعة X. أثبت أن:

ا) $\liminf_{\infty} A_n \subset \limsup_{\infty} A_n$. ب) $^c(\limsup_{\infty} A_n) = \liminf_{\infty} {}^cA_n$ ، حيث ^cA_n مثلا، يشير إلى متممة A_n نسبة إلى X. جـ) $^c(\liminf_{\infty} A_n) = \limsup_{\infty} {}^cA_n$.

13. لتكن X مجموعة وَ $\{E_n\}$ وَ $\{F_n\}$ متتاليتين من أجزائها. أثبت أن

$$\begin{aligned}(\underline{\lim}\, E_n) \cup \underline{\lim}\, F_n &\subset \underline{\lim}(E_n \cup F_n)\\ &\subset (\underline{\lim}\, E_n) \cup \overline{\lim}\, F_n\\ &\subset \overline{\lim}(E_n \cup F_n) = \big(\overline{\lim}\, E_n\big) \cup \overline{\lim}\, F_n.\end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned}(\underline{\lim}\, E_n) \cap \underline{\lim}\, F_n &= \underline{\lim}(E_n \cap F_n)\\ &\subset (\underline{\lim}\, E_n) \cap \overline{\lim}\, F_n\\ &\subset \overline{\lim}(E_n \cap F_n) \subset \big(\overline{\lim}\, E_n\big) \cap \overline{\lim}\, F_n.\end{aligned}$$

استنتج أنه إذا كانت $\{E_n\}$ متقاربة نحو E وكانت $\{F_n\}$ متقاربة نحو F كانت $\{E_n \cap F_n\}$ متقاربة نحو $E \cap F$ وكانت $\{E_n \cup F_n\}$ متقاربة نحو $E \cup F$.

14. لتكن X مجموعة و B جزءا منها وَ $\{A_n\}$ متتالية من أجزائها. بين أن

ا) $B \setminus \limsup_n A_n = \liminf_n (B \setminus A_n)$ ؛

ب) $B \setminus \liminf_n A_n = \limsup_n (B \setminus A_n)$.

جـ) أثبت أن:

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap {}^c\Big[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \,\Delta\, A_{n+1})$$

حيث $A_n \Delta A_{n+1} = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_n)$ الذي يدعى بالفرق التناظري بين المجموعتين المعتبرتين. استنتج أن $\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n = \limsup_n (A_n \Delta A_{n+1})$.

15. لتكن $\{A_n\}$ متتالية عناصرها أجزاء من مجموعة X وَ $p:\mathbb{N}^\star \longmapsto \mathbb{N}^\star$ تطبيقا متزايدا تماما. بين أن

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \le \liminf_{n\to\infty} A_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} A_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

استنتج أنه إذا كانت المتتالية المجموعاتية $\{A_n\}$ متقاربة فإن كل متتالية مستخرجة منها متقاربة وتتقارب نحو نفس النهاية.

16. لتكن Ψ الدالة المميزة للاعداد الناطقة الموجودة بين 0 وَ 1 ؛ أي أن $\Psi(x)=1$ إذا كان $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ وَ $\Psi(x)=0$ إذا كان $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$. أوجد النهايتين السفلى والعليا للتابع Ψ عند نقطة $a \in [0,1]$.
نفس السؤال، عند النقطة $a=0$ ، بالنسبة إلى التابع f المعرف بان $f(x)=\frac{1}{x}$ إذا كان $x>0$ وَ $f(x)=0$ إذا كان $x\le 0$.
نفس السؤال كذلك، عند النقطة $a\in\mathbb{R}$ ، بالنسبة إلى التابع g المعرف بان $g(x)=\frac{1}{q}$ إذا كان $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ في شكله المختزل مع $q>0$ وَ 0 إذا كان $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

17. ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f وَ g تطبيقين لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ a نقطة تراكم لِ D . أثبت

ا) أنه إذا كان f محدودا فإن $\overline{\lim}_a f$ وَ $\underline{\lim}_a f$ عددان متهيان .

ب) أن $\underline{\lim}_a f \le \overline{\lim}_a f$.

أعط مثالا حيث تكون هذه المتباينة تامة.

ج) أنه إذا كان $f\le g$ على D كان

$$\overline{\lim}_a f \le \overline{\lim}_a g, \qquad \underline{\lim}_a f \le \underline{\lim}_a g.$$

د) أن $\overline{\lim}_a f = -\,\underline{\lim}_a(-f)$.

هـ) أن

$$\begin{aligned}\liminf_a f + \liminf_a g &\le \liminf_a (f+g)\\ &\le \liminf_a f + \limsup_a g\\ &\le \limsup_a f + \limsup_a g \le \limsup_a (f+g).\end{aligned}$$

و) أنه حتى تكون $\lim_a f$ موجودة يلزم ويكفي أن تكون $\overline{\lim}_a f = \underline{\lim}_a g$.
أثبت كذلك أنه إذا كانت $\lim_a f$ موجودة كانت $\lim_a f = \overline{\lim}_a f = \underline{\lim}_a f$.

18. ليكن n عددا طبيعيا وَ f التابع المعرف بان $f(0) = 0$ وَ $f(x) = x^{-n}$ من أجل $x \neq 0$. أدرس نصف استمرار التابع f السفلي والعلوي عند النقطة $a = 0$.

19. f تطبيق لجزء D من فضاء متري X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ $a \in D$.

ا) بين أنه حتى يكن f نصف مستمرا سفليا عند a يلزم وَ يكفي أنه، من أجل كل عدد $\lambda < f(a)$ ، يوجد عدد $0 < \rho$ بحيث $f(B(a,\rho)) > \lambda$ ؛ $f(B(a,\rho))$ هي صورة الجلة المفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ وفق التابع f .

ب) أثبت أنه بعكس كل المتباينات نحصل على قضية صحيحة نسبة إلى نصف الاستمرار العلوي.

ج) أثبت أنه حتى يكون f مستمرا سفليا عند a يلزم ويكفي أن يكون

$$f(a) = \underline{\lim}_a f.$$

د) أثبت أنه حتى يكون f مستمرا علويا عند a يلزم ويكفي أن يكون

$$f(a) = \overline{\lim}_a f.$$

20. f تابع حقيقي معرف على جزء A من $\mathbb{R}$. بين أن تذبذب التابع f على A يعطى بالعبارة $\Omega_A f = \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$.

21. أثبت أنه حتى يكون التابع الحقيقي f مستمرا عند نقطة c من ميدان تعريفه D يلزم ويكفي أن يكون تقلّبه عند هذه النقطة معدوما.

22. ليكون f تابعا حقيقيا معرفا على مجال $[a,b]$ ولتكن، من أجل كل عدد طبيعي n ، المجموعة $\mathcal{T}_n = \{x \in [a,b] \mid \omega_x f \geq \frac{1}{n}\}$. بين أن المجموعة $\mathcal{T}_n$ مغلقة.

23. f تابع حقيقي محدود على $[a,b]$ ولتكن c نقطة داخلية في هذا المجال حيث $0 < \omega_c f$. أثبت أن تذبذب f على أحد المجالين $[a,c]$ أو $[c,b]$ يفوق $\frac{1}{2}\omega_c f$.

24. عين الغلافين السفلي والعلوي للتوابع الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن

1. $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = |x|,\ f_4(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0,\ f_4(0) = -1.$

2. $f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x^3.$

25. أثبت أن الغلاف العلوي لكل جماعة $\{f_i\}_{i\in I}$ من التوابع الحقيقية النصف مستمرة علويا على فضاء متري أو جزء منه نصف مستمر علويا على ميدان تعريفه وان الغلاف السفلي لجماعة منتهية من التوابع الحقيقية النصف مستمرة سفليا مستمر سفليا على ميدان تعريفه.

26. أثبت أن كل تابّع حقيقي ليبشيتزي على مجال $[a, b]$ مستمر مطلقا على هذا المجال.

27. أثبت المبرهنة 4.3.1.1.3 ، أي أثبت أنه إذا كان f وَ g تابعين مستمرين مطلقا على مجال متراص فتكون التوابع

$f+g$ وَ fg وَ kf مع k ثابت

مستمرة مطلقا. وكذلك، إذا كان $f \geq m > 0$ فيكون $\frac{1}{f}$ مستمر مطلقا على المجال نفسه.

28. أثبت أن مفهوم الاستمرار المطلق يبقى بدون تغيير إذا إستبدلت الفئة المتهية من المجالات غير المتقاطعة الواردة في التعريف بفئة عدودة غير متهية من المجالات غير المتقاطعة واستبدل المجموع المتهي المرفق بها بمجموع غير منته.

29. أثبت أنه يمكن تعويض المتباينة $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ الواردة في تعريف الاستمرار المطلق بالمتباينة الاضعف منها $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} [f(b_i) - f(a_i)]\right| \leq \varepsilon$ وهذا دون تغيير معنى التعريف.

30. أدرس الاستمرار المطلق على $[a, 1]$ مع $0 < a$ للتابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

31. ليكن f وَ g التابعين المعرفين على $[0,1]$ بأن $f(x)=\sqrt{x}$ وَ $g(x)=x^2|\sin\frac{1}{x}|$. بين أن f ، g ، $g\circ f$ مستمرة مطلقا إلا أن $f\circ g$ غير مستمر مطلقا.

32. ليكن g تابعا معرفا على $[a,b]$ وصورته هي المجال $[c,d]$ وليكن f تابعا معرفا على $[c,d]$. أثبت أنه إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا وكان g رتيبا فان $f\circ g$ مستمر مطلقا.

33. أثبت **مبرهنة الانتشار:** إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية توابع متساوية الاستمرار على جزء متراص D من $\mathbb{R}$ وكانت متقاربة ببساطة على جزء كثيف من D فإن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على D.

34. أثبت **مبرهنة التراص:** إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية محدودة بانتظام عناصرها توابع متساوية الاستمرار على جزء متراص D من $\mathbb{R}$ فيمكن إستخراج منها متتالية جزئية $\{f_\nu\}$ متقاربة بانتظام على D.

35. ليكن g تابعا معرفا على $[a,b]$ وصورته هي المجال $[c,d]$ وليكن f تابعا معرفا على $[c,d]$. أثبت أنه إذا كان g ليبشيتزيا على $[a,b]$ وَ كان f مستمرا مطلقا على $[c,d]$ فان $f\circ g$ مستمر مطلقا على $[a,b]$.

3.1 تكامل ريمان (Intégrale de Riemann)

1.3.1 **تقسيمات مجال •** ليكن $[a,b]$ مجالا مغلقا ومحدودا. نسمي **تقسيما** لِ $[a,b]$ كل مجموعة متهية من الأعداد الحقيقية

$$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \quad \text{بحيث} \quad a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b.$$

ونسمي المجالات $[x_0,x_1]$ ، ... ، $[x_{n-1},x_n]$ ، المعينة بواسطة التقسيم P ، **بقطع** هذا التقسيم ، عدد القطع يساوي n. سنكتب $\delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ، $i=1$ ، ... ، n ونسمي العدد الموجب تماما δx_i **بطول القطعة** $[x_{i-1},x_i]$. نرمز بِـ δP إلى طول أطول قطعة في التقسيم P ، أي أن

$$\delta P=\max\{\delta x_i \mid i=1,\ldots,n\}$$

ونسمي δP **بوسيط** أو **نظيم** التقسيم P. نقول عن التقسيم P' إنه **أدق** من التقسيم P إذا كان $P' \supset P$ ، أي إذا كانت كل نقطة مستخدمة في P مستخدمة كذلك في P'. واضح عندئذ أن $\delta P \geq \delta P'$. نرمز بِـ $\mathcal{P}_{a,b}$ إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$. إن عناصر $\mathcal{P}_{a,b}$ هي إذن مجموعات متهية من نقاط $[a,b]$ مرتبة تماما وتنطبق نقطة اليسار مع a ونقطة اليمين مع b.

1.1.3.1 **مجاميع ريمان** (Sommes de Riemann)• ليكن f تابعا معرفا ومحدودا على $[a,b]$ ولنشير بِـ m وَ M إلى حديه الأدنى والأعلى، على التوالي على $[a,b]$:

$$m = \inf_{[a,b]} f, \qquad M = \sup_{[a,b]} f.$$

واضح أنه إذا كان P تقسيما ما للمجال $[a,b]$ فإن f محدود على كل قطعة $[x_{i-1},x_i]$ من قطع P. لنرمز بِـ $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ وبِـ $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ إلى الحدين الأدنى والأعلى للّتابع f على $[x_{i-1},x_i]$ ، على التوالي، من أجل $i = 1$ ، ... ، n.
ولنشكل المجموعين:

$$\underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta x_i \quad \text{وَ} \quad \overline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i .$$

يدعى الأول **بمجموع ريمان السفلي** أمّا الثاني فيدعى **بمجموع ريمان العلوي** للّتابع f الموافقين للتقسيم P. واضح أن:

$$m(b-a) \leq \underline{R}(f,P) \leq \overline{R}(f,P) \leq M(b-a), \; \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}.$$

يمكنك أن تثبت أنه إذا كان التقسيم P' أدق من P كان:

$$\underline{R}(f,P) \leq \underline{R}(f,P') \quad \text{وَ} \quad \overline{R}(f,P') \leq \overline{R}(f,P).$$

2.3.1 ثلاثة تعاريف متكافئة لتكامل ريمان•

1.2.3.1 **التعريف الأول•** نقول عن تابع محدود $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ إنه **ريمان واحد كمول على** $[a,b]$ إذا كان

$$\underline{\int_a^b} f \doteq \sup_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} \underline{R}(f,P) = \inf_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} \overline{R}(f,P) \doteq \overline{\int_a^b} f$$

ونسمي القيمة المشتركة للحدين الأسفل والأعلى السابقين بتكامل ريمان واحد للتابع f على $[a,b]$ ونشير إليها تقليديا بـ $\int_a^b f$ ، إلا أننا فيما يلي نشير إليها كذلك بـ R_1 .
إن هذا العدد في حالة وجوده **وحيد** .

يدعى $\underline{\int_a^b} f$ (على التوالي $\overline{\int_a^b} f$) بتكامل ريمان السفلي (على التوالي العلوي) للتابع f على $[a,b]$. إن تكاملي ريمان السفلي والعلوي موجودان دائما من أجل كل تابع محدود على مجال متراص. لاحظ أن:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

ليكن $\mathcal{P}_{a,b} \ni P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. نسمي **تقسيما وسطا نسبة إلى** P كل «**مجموعة**» $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ تحقق نقطها المتباينات **الواسعة** :

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

يمكن إذن لنقطتين متواليتين من Q أن تنطبقا. يشار بـ $\mathcal{W}(P)$ إلى كل التقسيمات الوسطى نسبة إلى التقسيم P للمجال $[a,b]$. ليكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ وَ $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ تقسيما وسطا نسبة إليه. إننا نضع:

$$R(f, P, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i.$$

تدرعى هذه العبارة **بمجموع ريمان للتابع** f **الموافق للتقسيمين** P وَ Q . لاحظ أن:

$$\underline{R}(f, P) \leq R(f, P, Q) \leq \overline{R}(f, P), \ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}, \ \forall Q \in \mathcal{W}(P).$$

2.2.3.1 **التعريف الثاني•** نقول عن تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ إنه **ريمان إثنان كمول على** $[a,b]$ إذا وجد عدد R_2 يحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث يكون لدينا

$$|R(f, P, Q) - R_2| \leq \varepsilon, \ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}, \ \delta P \leq \rho, \ \forall Q \in \mathcal{W}(P).$$

العدد R_2 **وحيد** في حالة وجوده.

3.2.3.1 **التعريف الثالث•** نقول عن تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ إنه **ريمان ثلاثة كمول على** $[a,b]$ إذا وجد عدد R_3 يحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد تقسيم $P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{a,b}$ بحيث يكون لدينا

$$|R(f,P,Q) - R_3| \leq \varepsilon, \ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}, P \supset P_\varepsilon, \ \forall Q \in \mathcal{W}(P).$$

العدد R_3 **وحيد** في حالة وجوده.

نسمي الأعداد R_1 وَ R_2 وَ R_3 (في حالة وجودها) **بتكاملات ريمان الأول وَ الثاني وَ الثالث**، على التوالي، لتّابع f على $[a,b]$.

4.2.3.1 **مبرهنة • إذا كان التابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ريمان إثنين كمولا فهو ريمان ثلاثة كمولا ولدينا $R_2 = R_3$ ، حيث R_2 هو تكامل ريمان الثاني وَ R_3 هو تكامل ريمان الثالث.**

5.2.3.1 **مبرهنة • إذا كان التابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ريمان ثلاثة كمولا على $[a,b]$ فهو محدود على هذا المجال.**

6.2.3.1 **مبرهنة • إذا كان التابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ريمان ثلاثة كمولا على $[a,b]$ فهو ريمان واحد كمول على المجال نفسه ولدينا $R_3 = R_1$.**

7.2.3.1 **قضية • إذا كان التابع الحقيقي f محدودا على $[a,b]$ كان**

$$\lim_{\delta P \to 0} \underline{R}(f,P) = \underline{\int_a^b} f \quad \text{وَ} \quad \lim_{\delta P \to 0} \overline{R}(f,P) = \overline{\int_a^b} f \ .$$

8.2.3.1 **لازمة • ليكن $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا محدودا. حتى يكون $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ (أي حتى يكون f ريمان واحد كمولا) يلزم ويكفي أن يكون لدينا:**

$$\lim_{\delta P \to 0} [\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P)] = 0.$$

9.2.3.1 **مبرهنة • ليكن f تابعا معرفا ومحدودا على $[a,b]$. إذا كان f ريمان واحد كمولا على $[a,b]$ فهو ريمان إثنان كمول على المجال نفسه ولدينا $R_1 = R_2$.**

10.2.3.1 **تعريف** • نقول عن مجموعة E من $\mathbb{R}$ إنها **مجموعة مهملة (أو صفرية)** إذا أمكن مرافقة كل عدد $0<\varepsilon$ بمتتالية $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ، من المجالات المفتوحة والمحدودة، تغطي E (أي $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$) وبحيث $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta I_n \leq \varepsilon$ ، حيث يشير δI_n إلى طول المجال I_n أي إذا كان $I_n =]a_n, b_n[$ كان $\delta I_n = b_n - a_n$.

يمكنك أن تتأكد من أن كل مجموعة أعداد حقيقية قابلة للعد هي مجموعة صفرية.

11.2.3.1 **مبرهنة • إذا كان التابع** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **ريمان كمولا فإن مجموعة جميع نقط تقطعه صفرية.**

3.3.1 التقاربات وتكامل ريمان•

1.3.3.1 **تعريف•** نقول عن متتالية توابع $\{f_n\}$ معرفة على $[a,b]$ إنها **ريمان كمولة عنصر بعنصر** على $[a,b]$ إذا كان f_n ريمان كمول مهما كان n وكانتا المتتاليتان $\{f_n\}$ وَ $\{\int_a^b f_n\}$ متقاربتين مع التابع $\lim_n f_n$ ريمان كمول وَ $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n$.

4.1 تمارين حول تكامل ريمان

1. أحسب، مستخدما تعريف تكامل ريمان بواسطة المجاميع السفلى والعليا، التكاملات التالية:

$$1.\ \int_a^b x, \qquad 2.\ \int_a^b x^m \ \text{(حيث } m \text{ عدد طبيعي موجب)},$$
$$3.\ \int_a^b e^x, \qquad 4.\ \int_a^b \sin x, \qquad 5.\ \int_a^b \frac{1}{x^2},\ 0<a<b.$$

2. ا) استخدم تعريف التكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ بواسطة المجاميع لتحسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\{\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\cdots+\tfrac{1}{2n}\}.$$

ب) أحسب، مستعملا تكامل تابع ملائم، النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\}.$$

.3 أثبت أن كل تابع رتيب على مجال متراص $[a,b]$ قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال.

.4 a وَ b عددان حقيقيان مع $b>a$ وَ f تابع حقيقي موجب وقابل للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$. أثبت أن $\sqrt{f}$ قابل للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

.5 أثبت أنه إذا كان f تابعا ريمان كمولا على $[a,b]$ واذا وجد عددان m وَ M بحيث $0<m\leq f\leq M$ على $[a,b]$ فان التكامل $\int_a^b\frac{1}{f}$ موجود.

.6 أثبت أن كل تابع محدود التغيّر على مجال $[a,b]$ قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال.

.7 أثبت **مبرهنة نيوتن ـ ليبنيتز** : إذا كان f تابعا ر ـ كمولا على مجال متراص $[a,b]$ وكان يتمتع بتابع أصلي F على هذا المجال فإن:

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

.8 ليكن التابع ϕ المعرف على $[0,1]$ بأن $\phi(0)=0$ وَ $\phi(x)=\frac{1}{q}$ إذا كان $x=\frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما وَ $\phi(x)=0$ إذا كان $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. بين أن ϕ ريمان كمول على $[0,1]$ مع $\int_0^1\phi=0$. هل يمكن للتابع ϕ أن يتمتع بتابع أصلي؟

.9 ليكن g تابعًا ر ـ كمولًا على مجال متراص $[a,b]$ وليكن التابع G المعرف على $[a,b]$ بأن

$$G(x)=\int_a^x g.$$

بين أن G مستمر مطلقًا على $[a,b]$.

10. أثبت أن اتحاد كل فئة عدودة من المجموعات الصفرية هو مجموعة صفرية.

11. أثبت أنه إذا كان f تابعا محدودا وريمان كمولا على مجال متراص فان مجموعة نقط تقطعه مجموعة صفرية.

12. أثبت أنه إذا كانت مجموعة نقط تقطع تابع f صفرية على $[a,b]$ فان هذا التابع قابل للمكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$.

13. أثبت أن المتتالية التابعية $\{nx(1-x)^n\}$ كمولة عنصر بعنصر على $[0,1]$. هل هي متقاربة بانتظام على هذا المجال؟

14. أثبت أن كل متتالية توابع ريمان كمولة على $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام على هذا المجال كمولة عنصر بعنصر على $[a,b]$.

15. لتكن $\{f_n\}$ متتالية محدودة بانتظام عناصرها توابع مستمرة على $[a,b]$ ولفرض وجود تابع f معرف على هذا المجال بحيث تؤول المتتالية $\{f_n\}$ بانتظام نحوه على $[a,c]$ مهما كان $c \in]a,b[$. أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

16. لتكن المتتالية التابعية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بأن $f(x)=\frac{1}{n}$ إذا كان $x \in [0,n]$ والا $f(x)=0$. أثبت أن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}_+$ نحو التابع المعدوم إلا أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n \neq \int_a^b f.$$

17. أثبت مبرهنة **أرزلا** : إذا تقاربت ببساطة متتالية، محدودة بانتظام، $\{f_n\}$ عناصرها توابع ريمان كمولة نحو تابع f ريمان كمول على $[a,b]$ فان

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

5.1 التوابع ذات التغيّر المحدود

1.5.1 التغيّر المحدود•

1.1.5.1 **تعريف•** ليكن f تابعا معرفا علي **مجال** $[a,b]$ وَ $P=\{x_0,...,x_n\}$ تقسيما لهذا المجال. نسمي العدد الموجب:

$$V_f(P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

بتغيُّر f الموافق للتقسيم P . واضح أنه إذا كان P' تقسيما أدق من P ، بمعنى أن $P'\supset P$ ، كان

$$V_f(P)\leq V_f(P').$$

لنعتبر مجموعة تغيُّرات f الموافقة لكل تقسيمات المجال $[a,b]$. إذا كانت محدودة قلنا إن f **ذو تغيُّر محدود** (à variation bornée) **على** $[a,b]$. ونسمي العدد:

$$V_a^b(f)=\sup\{V_f(P)|P\in\mathcal{P}_{a,b}\}$$

بالتغيُّر الكلي (variation totale) **للتابع** f **على** $[a,b]$. لنذكِّر بأن $\mathcal{P}_{a,b}$ يشير إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$.

لنعتبر الاعداد $f(x_i)-f(x_{i-1})$ ، $i=1$ ، ... ، n ونرمز بِـ $M_f(P)$ إلى مجموع الموجبة منها وبِـ $-S_f(P)$ إلى مجموع السالبة منها. ولنعرف **التغيّر الكلي الموجب** وَ **التغير الكلي السالب** للتابع f على $[a,b]$ بأن (على التوالي)

$$P_a^b(f)=\sup\{M_f(P)\mid P\in\mathcal{P}_{a,b}\} \text{ ، } S_a^b(f)=\sup\{S_f(P)\mid P\in\mathcal{P}_{a,b}\}.$$

2.1.5.1 **مبرهنة• إذا كان f وَ g تابعين يتمتعان بتغيرين محدودين على المجال $[a,b]$ فإن التوابع $f+g$ ، $f-g$ ، $|f|$ ، fg ، kf مع k ثابت تتمتع بالخاصية نفسها. ثمّ إذا وجد عدد m صفته أن $|f|\geq m>0$ على $[a,b]$ فيكون $\frac{1}{f}$ محدود التغير على نفس المجال.**

تقدم المبرهنتان التاليتان علاقات بين مفاهيم الإشتقاق وتكامل ريمان والتغير المحدود. تقدم الثانية صيغة لحساب التغير الكلي.

3.1.5.1 **مبرهنة•** إذا كان f قابلا للإشتقاق وكان $|f'| \leq M$ على $[a,b]$ فإنه محدود التغيّر على هذا المجال، ثم إن تغيّره أقل من $M(b-a)$.

4.1.5.1 **مبرهنة• إذا كان f قابلا للإشتقاق على $[a,b]$ وكان $|f'|$ ر ـ كمولا على هذا المجال فإن f محدود التغيّر ولدينا:**

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'|.$$

إن التغيّر على مجال مرتبط بكيفية بسيطة جدا بالتغيّر على المجالات الجزئية. لنفرض أن f معرف على $[a,b]$ ولنأخذ نقطة c بحيث $a < c < b$. إذا كان P_1 وَ P_2 تقسيمين للمجالين $[a,c]$ وَ $[c,b]$ على التوالي فمن التعريف نرى أن

$$V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P_1 \cup P_2).$$

وواضح أنه إذا كان f محدود التغيّر على $[a,c]$ وَ $[c,b]$ فهو كذلك على $[a,b]$ ولدينا:

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f).$$

يمكن التعميم إلى أي تجزئة عدد قطعها منته.

5.1.5.1 **مبرهنة• إذا كان f مستمرا مطلقا على $[a,b]$ فهو محدود التغيّر على هذا المجال.**

2.5.1 **تفكيك التوابع ذات تغيّر محدود•** ليكن f تابعا محدود التغيّر على $[a,b]$. عندئذ ، من أجل x من $]a,b]$ يكون التغير الكلي $V_a^x(f)$ موجودا. لنرمز إليه بِـ $T_f(x)$ ونضع $T_f(a) = 0$. نسمي التابع T_f ، المعرف على $[a,b]$ ، **بتابع التغيّر الكلي** للتابع f . إن T_f متزايد على $[a,b]$ محدود. نسمي التابع R_f المعطى بأن $R_f = T_f - f$ **بالتابع المترسب** من f على $[a,b]$. إن هذا التابع متزايد كذلك على $[a,b]$. يُمكِّن تزايد تابع التغير الكلي والتابع المترسب من إكتشاف تمييز بسيط للتوابع ذات التغيّر المحدود.

1.2.5.1 **مبرهنة• حتى يكون التابع f محدود التغيّر على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون فرق تابعين متزايدين.**

2.2.5.1 **مبرهنة• ليكن f تابعا تغيّره محدود على $[a,b]$. حتى يكون f مستمرا عند نقطة c من $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون تابع تغيّره الكلي T_f مستمرا عند c.**

3.2.5.1 **لازمة• حتى يكون تابع مستمر f محدود التغيّر على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون الفرق بين تابعين متزايدين مستمرين.**

إن المفهوم الهندسي للتغيّر المحدود مرتبط إرتباطا وثيقا بمفهوم طول منحن: ليكن $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ منحنيا وسيطيا مستويا معطى بـ $\Gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ ، $t \in [a,b]$. لاحظ أنه يمكن للمنحني أن يقطع نفسه وأن يكون غير مستمر أو غير محدود. ليكن $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$. إذا ربطنا النقطة $N_0 = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ بالنقطة $N_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1))$ بقطعة مستقيمة وواصلنا حتى يتم ربط النقطة $N_{n-1} = (\varphi(t_{n-1}), \psi(t_{n-1}))$ بالنقطة $N_n = (\varphi(t_n), \psi(t_n))$ فنحصل على تقريب لطول Γ بتشكيل العبارة:

$$L(\Gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \Big[(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2 \Big]^{1/2}.$$

إن الخطوة الموالية هي اعتبار تقسيمات آخذةً في التدقيق وندرك أنه كلما كان التقسيم أدق كان التقريب أفضل. هذا يحثنا على تعريف طول منحن كالتالي:

4.2.5.1 **تعريف•** ليكن $\Gamma = (\varphi, \psi) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ منحنيا وسيطيا مستويا. يدعى العدد $L(\Gamma) = \sup_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} L(\Gamma, P)$ **بطول المنحني** Γ. إذا كان $L(\Gamma)$ متهيا قلنا إن Γ **قَيُوم** (rectifiable) .

5.2.5.1 **مبرهنة• حتى يكون المنحني $\Gamma = (\varphi, \psi) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ قيوما يلزم ويكفي أن يكون φ وَ ψ محدودي التغيّر.**

3.5.1 التغير المحدود والاستمرار المطلق على المجالات غير المحدودة•

1.3.5.1 **تعريف•** نقول عن تابع معرف على $\mathbb{R}$ إنه ذو تغيّر محدود على $\mathbb{R}$ إذا كان محدود التغير على كل مجال متراص من $\mathbb{R}$.

يمكنك أن تثبت أن كل تابع رتيب على $\mathbb{R}$ محدود التغيّر على $\mathbb{R}$.

ينتج من هذا أن الفرق بين تابعين رتيبين على $\mathbb{R}$ تابع محدود التغيّر على $\mathbb{R}$.

2.3.5.1 **مبرهنة• إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على مجال كيفي كان $f+g$ وَ fg كذلك. وإذا كان f مصغورا (مكبورا على التوالي) بعدد موجب (سالب على التوالي) تماما فإن $\frac{1}{f}$ محدود التغيّر.**

في حالة $\mathbb{R}$ يعرف تابع التغيّر الكلي للتابع f بأنه $T_f(x) = -V_x^0(f)$ إذا كان $x < 0$ وَ $T_f(x) = V_0^x(f)$ إذا كان $x \geq 0$ ويعرف التغيّر الكلي للتابع f على $\mathbb{R}$ بأنه العدد $\lim_\infty T_f - \lim_{-\infty} T_f$ الذي يمكن أن يكون غير منته. يعرف التابع R_f المترسب من f بأن $R_f = T_f - f$. كل من T_f وَ R_f تابع متزايد على $\mathbb{R}$ ولذا يمكن كتابة كل تابع محدود التغيّر على $\mathbb{R}$ كفرق تابعين متزايدين.

3.3.5.1 **تعريف•** نقول عن تابع معرف على $\mathbb{R}$ بأنه مستمر مطلقا على $\mathbb{R}$ إذا كان مستمرا مطلقا على كل مجال محدود من $\mathbb{R}$.

4.3.5.1 **مبرهنة• إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا على $\mathbb{R}$ كانت التوابع $f+g$ ، fg ، kf ، مع k ثابت، كذلك. ثم إذا كان f مستمرا مطلقا على $\mathbb{R}$ كان محدود التغيّر على $\mathbb{R}$.**

6.1 تمارين حول التوابع ذات التغير المحدود

1. أثبت المبرهنة 2.1.5.1 ، أي أثبت أنه إذا كان f وَ g تابعين يتمتعان بتغيّرين محدودين على المجال $[a,b]$ فان التوابع $f+g$ ، $f-g$ ، fg ، $|f|$ ، kf مع k ثابت تتمتع بالخاصية نفسها. ثم ، إذا وجد عدد m صفته أن $|f| \geq m > 0$ على $[a,b]$ فيكون $\frac{1}{f}$ محدود التغيّر على المجال نفسه.

2. أثبت أن كون تابع محدود التغيّر على مجال يستلزم أن هذا التابع محدود على هذا المجال.

.3 إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على مجال $[a,b]$ فبين أن

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

هل المساواة واردة بصفة عامة؟

.4 بين أنه إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على $[a,b]$ وَ كان $|f|$ وَ $|g|$ مكبورين على التوالي بِـ A وَ B كان $V_a^b(fg) \leq AV_a^b(g) + BV_a^b(f)$.

.5 بين أنه إذا كان f محدود التغيّر على $[a,b]$ وكان $|f| \geq m > 0$ فان

$$V_a^b\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m^2} V_a^b(f).$$

.6 أثبت أن التابع f المعرف على $[-1,1]$ بأن

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x^q} & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

محدود التغيّر إذا كان $p > q > 0$ لكنّه ليس كذلك إذا كان $q \geq p > 0$.

.7 أثبت أن كل حدودية ذات تغيّر محدود على أي مجال متراص.

.8 أثبت أن $V_f(P) = M_f(P) + S_f(P)$ مهما كان $P \in \mathcal{P}_{a,b}$.

بين أنه إذا كان f محدود التغيّر فان $M_a^b(f)$ وَ $S_a^b(f)$ متنهيان.

$M_a^b(f)$ هو التغيّر الكلي الموجب وَ $S_a^b(f)$ هو التغيّر الكلي السالب للتابع f .

.9 أثبت أنه إذا كان f محدود التغيّر فان $V_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f)$.

7.1 تكامل ستيلجس (Intégrale de Stieltjes)

1.7.1 **تكامل ستيلجس•** ليكن f وَ g تابعين حقيقيين معرفين على مجال $I = [a,b]$. وليكن $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تقسيما للمجال I وَ $Q = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ تقسيما وسطا نسبة إلى P ، أي أن $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \; i = 1, \dots, n$. نعرف **مجموع** ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على I الموافق للتقسيم P وللتقسيم الوسط Q بأنه

العدد $S(f,g,P,Q)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i$ ، حيث $\delta g_i = g(x_i)-g(x_{i-1})$. **لاحظ** التشابه بين $S(f,g,P,Q)$ وَ مجموع ريمان $R(f,P,Q)$ في التعريف الثاني لتكامل ريمان.

1.1.7.1 **تعريف •** نقول عن عدد S إنه تكامل ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على $I=[a,b]$ ونقول عن f إنه **ستيلجس كمول نسبة إلى** g **على** I إذا أمكن مرافقة كل $\varepsilon>0$ بعدد $\rho>0$ صفته أن

$$|S(f,g,P,Q)-S|\le\varepsilon,\ \forall P\in\mathcal{P}_{a,b},\ \delta P\le\rho,\ \forall Q\in\mathcal{M}(P).$$

يمكن البرهان على أن S ، إن وجد، وحيد؛ فيشار إليه بِـ $\int_a^b f\,dg$ أو $(S)\int_a^b f\,dg$.

يمكن النظر إلى تكامل ستيلجس بأنه «نهاية» مجاميع ستيلجس عندما يوؤل δP ، وسيط التقسيم P ، إلى صفر. ونكتب رمزيا $\displaystyle\int_a^b f\,dg=\lim_{\delta P\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i$. ونكمل التعريف بأن نضع $\int_b^a f\,dg=-\int_a^b f\,dg$ إذا كان $b>a$ وَ $\int_a^a f\,dg=0$. نسمي التابع f **بالتابع المكمَل** ونسمي التابع g **بالتابع المكامِل**.

2.1.7.1 **تعريف •** ليكن f وَ g تابعين معرفين على $[a,b]$. نقول عن مجموعة كل مجاميع ستيلجس $S(f,g,P,Q)$ ، الموافقة لكل زوج من التقسيمات والتقسيمات الوسطى نسبة إليها، إنها لكوشي إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0,\ |S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')|\le\varepsilon,$$
$$\forall P',\ \forall P''\in\mathcal{P}_{a,b},\delta P'\le\rho,\delta P''\le\rho,\ \forall Q'\in\mathcal{W}(P'),\ \forall Q''\in\mathcal{W}(P'').$$

3.1.7.1 **مبرهنة • حتى يكون التابع f ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع g على مجال $[a,b]$ يلزم ويكفي أن تكون مجموعة مجاميع ستيلجس $S(f,g,P,Q)$ لكوشي.**

2.7.1 شروط كافية للقابلية للمكاملة حسب ستيلجس•

1.2.7.1 **مبرهنة • إذا كان f مستمرا على $[a,b]$ وكان g متزايدا على المجال نفسه فإن التابع f ستيلجس كمول على $[a,b]$ نسبة إلى g .**

2.2.7.1 مبرهنة • إذا كان f ريمان كمولا على $[a,b]$ وكان g يتمتع بمشتق g' مستمر على المجال نفسه فإن $\int_a^b fg'$ وَ $\int_a^b f\,dg$ موجودان وهما متساويان.

3.7.1 ثنائية خطية تكامل ستيلجس (Bilinéarité de l'intégrale de Stieltjes) •

1.3.7.1 مبرهنة • إذا كان f_1 وَ f_2 تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى تابع g على $[a,b]$ فإن التابع $k_1f_1 + k_2f_2$ ، حيث k_1 وَ k_2 ثابتان ستيلجس كمول نسبة إلى g ولدينا:

$$\int_a^b (k_1f_1 + k_2f_2)\,dg = k_1\int_a^b f_1\,dg + k_2\int_a^b f_2\,dg.$$

2.3.7.1 مبرهنة • إذا كان التابع f ستيلجس كمولا نسبة إلى g_1 وَ g_2 على $[a,b]$ فإنه ستيلجس كمول نسبة إلى $k_1g_1 + k_2g_2$ على نفس المجال ولدينا:

$$\int_a^b f\,d(k_1g_1 + k_2g_2) = k_1\int_a^b f\,dg_1 + k_2\int_a^b f\,dg_2.$$

3.3.7.1 **ملاحظة** • لنذكّر أنه إذا كان g محدود التغيّر على $[a,b]$ فيمكن كتابته على الشكل $g = g_1 - g_2$ مع g_1 وَ g_2 تابعين متزايدين. بما أن $\int_a^b f\,dg_1$ وَ $\int_a^b f\,dg_2$ موجودين، من أجل f مستمر، وهذا وفقا للمبرهنة 1.2.7.1 ، فينتج من المبرهنة 1.3.7.1 أن f ستيلجس كمول نسبة إلى $g_1 - g_2$ ، أي أن $\int_a^b f\,dg$ موجود إذا كان f مستمرا وكان g محدود التغيّر.

4.7.1 مجال المكاملة •

1.4.7.1 مبرهنة • إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ وكان c بحيث $a < c < b$ فإنّ f ستيلجس كمول نسبة إلى نفس التابع على $[a,c]$ وَ $[c,b]$. ولدينا:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg. \tag{1.1}$$

2.4.7.1 لازمة • إذا كان $\int_a^b f\,dg$ موجودا وكان $[a,b] \supset [c,d]$ فإن $\int_c^d f\,dg$ موجود.

5.7.1 المكاملة بالتجزئة•

1.5.7.1 مبرهنة • إذا كان f ستلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فإن g ستيلجس كمول نسبة إلى f ولدينا العلاقة:

$$\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df. \tag{2.1}$$

6.7.1 تبديل المتغير•

1.6.7.1 مبرهنة • ليكن f تابعا ستلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ وليكن h تابعا متزايدا تماما ومستمرا على مجال $[p,q]$ بحيث $h(p)=a$ وَ $h(q)=b$. لنعتبر التابعين F وَ G المعرفين بـ $F=f\circ h$ وَ $G=g\circ h$. عندئذ يكون التابع F ستيلجس كمولا نسبة إلى G على $[p,q]$ ولدينا

$$\int_p^q F\,dG = \int_a^b f\,dg.$$

7.7.1 شروط أخرى تتصل بوجود تكامل ستيلجس•

1.7.7.1 مبرهنة • إذا كان التابع f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فعند كل نقطة من هذا المجال يكون إما f أو g مستمرا.

2.7.7.1 مبرهنة • ليكن f تابعا محدودا وَ g تابعا متزايدا على $[a,b]$. لنرمز بـ T إلى مجموعة نقط تقطعات f. لنعتبر، من أجل كل نقطة x من T ، المجموعة

$$B_x = \{y\in\mathbb{R} \mid g(x-)\le y\le g(x+)\}$$

ولنضع $B=\bigcup_{x\in T} B_x$. عندئذ، حتى يكون التابع f ستيلجس كامولا نسبة إلى g على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن تكون المجموعة B صفرية (مهملة).

3.7.7.1 لازمة • إذا كان f_1 وَ f_2 محدودين وكان g متزايدا على $[a,b]$ وكان $\int_a^b f_1\,dg$ وَ $\int_a^b f_2\,dg$ موجودين فإن $\int_a^b f_1f_2\,dg$ وَ $\int_a^b |f_1|\,dg$ موجودان.

4.7.7.1 **لازمة • إذا كان f مستمرا وكان g متزايدا على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f\,dg$ موجود.**

8.7.1 **مكاملة التوابع غير المحدودة •**

1.8.7.1 **مبرهنة • إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فيوجد تابع محدود h بحيث:**

$$\int_a^x h\,dg = \int_a^x f\,dg \quad \text{مهما كان} \quad x \in [a,b].$$

9.7.1 **التكامل غير المحدد•** لتكن x_0 نقطة من $[a,b]$ ولنفرض أن f تابع ستيلجس كمول نسبة إلى تابع مكامِل g متزايد على $[a,b]$. عندئذ، يكون التكامل $\int_a^x f\,dg$ موجودا مهما كان $x \in [a,b]$. يمكن إذن تعريف التابع:

$$\varphi(x) = \int_a^x f\,dg, \;\; x \in [a,b]$$

الذي يدعى **التكامل غير المحدد، المنطلق من** x_0 **، للتابع** f **نسبة لـ** g **على** $[a,b]$.

وخلافا لما يحدث في حالة تكامل ريمان، فان التكامل غير المحدود هذا غير مستمر. وعلى سبيل المثال، إذا كان g متقطعا من اليسار عند نقطة c من $]a,b[$ وكان f_c يساوي 0 على $[a,c]$ وَ 1 في $]c,b]$ ، فانه من السهل إثبات أن التكامل غير المحدد $\int_a^x f_c\,dg$ متقطع عند النقطة c. إلا أنه من الممكن إثبات مبرهنة إستمرار التكامل غير المحدد التالية:

1.9.7.1 **مبرهنة • إذا كان g مستمرا عند نقطة c من $[a,b]$ وكان للتابع f تكامل غير محدد φ نسبة إلى التابع g على $[a,b]$ فإن f مستمر عند النقطة c.**

2.9.7.1 **مبرهنة • إذا كان g متزايدا وكان φ هو التكامل غير المحدد للتابع f نسبة إلى g فان التابع φ محدود التغيّر على المجال نفسه.**

3.9.7.1 **مبرهنة • لنفرض أن g متزايد وَ f يتمتع بتكامل غير محدد φ نسبة إلى g على $[a,b]$. لنفرض كذلك أن f مستمر وَ g قابل للإشتقاق عند نقطة c من $[a,b]$. عندئذ يكون φ قابلا للإشتقاق عند c ولدينا $\varphi'(c) = f(c)g'(c)$.**

4.9.7.1 **مبرهنة • إذا كان** g **تابعا متزايدا وكان** φ **التكامل غير المحدد لتابع** h **نسبة إلى** g **وكان** f **تابعا مستمرا على** $[a,b]$ **فإن** f **كامل نسبة إلى** φ **على** $[a,b]$ **ولدينا** $\int_a^b d\varphi = \int_a^b fh\,dg$.

10.7.1 المتتاليات والسلاسل•

1.10.7.1 **مبرهنة • لتكن** $\{f_n\}$ **متتالية توابع متقاربة بانتظام نحو تابع** f **على** $[a,b]$. **إذا كان كل تابع** f_n **ستيلجس كمول نسبة إلى تابع** g **محدود التغيّر على** $[a,b]$ **فإن** f **ستيلجس كمول نسبة إلى** g **على** $[a,b]$ **ولدينا** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dg = \int_a^b f\,dg$.

2.10.7.1 **لازمة • إذا كانت السلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **متقاربة بإنتظام على** $[a,b]$ **وكان كل تابع** f_n **ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع** g **محدود التغيّر على** $[a,b]$ **فان** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **ستيلجس كمول نسبة إلى** g **ولدينا**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\,dg = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)\,dg.$$

3.10.7.1 **مبرهنة • لتكن** $\{g_n\}$ **متتالية توابع محدودة التغيّر على** $[a,b]$ **بحيث تكون** $\{V_a^b(g_n-g)\}$ **متقاربة نحو الصفر، حيث** $g=\lim_n g_n$. **إذا كان** f **مستمرا على** $[a,b]$ **فإن**

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg.$$

11.7.1 تكامل ستيلجس المعمم •

1.11.7.1 **تعريف •** ليكن f وَ g تابعين معرفين على مجال $[a,b]$. نقول عن عدد، نرمز إليه بـ $\oint_a^b f\,dg$ ، إنه **تكامل ستيلجس المعمم للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$ ونقول إن f **ستيلجس معمم كمول نسبة إلى** g **على** $[a,b]$ ، إذا أمكن تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists P_\varepsilon\in\mathcal{P}_{a,b},\ \forall P\in\mathcal{P}_{a,b},\ \forall Q\in\mathcal{W}(P)$$
$$\Big(P\supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(f,g,P,Q)-\oint_a^b f\,dg|<\varepsilon\Big)\cdot$$

ومثل في حالة تكامل ستيلجس نرفق التعريف بـ

$\oint_b^a f\,dg = -\oint_a^b f\,dg$ في حالة $a > b$ وَ $\oint_a^a f\,dg = 0$.

2.11.7.1 **مبرهنة • ليكن f تابعا ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى g على كلا المجالين $[a,c]$ وَ $[c,b]$. عندئذ يكون f ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ ولدينا:**

$$\oint_a^b f\,dg = \oint_a^c f\,dg + \oint_c^b f\,dg.$$

12.7.1 دور التقطعات في تكامل ستيلجس المعمم •

1.12.7.1 **مبرهنة • لنفرض أن التابع f ستيلجس معمم كمول نسبة إلى التابع g على $[a,b]$. عندئذ لا توجد نقطة من $[a,b]$ حيث يكون f وَ g متقطعين من اليمين معا أو من اليسار معا.**

2.12.7.1 **مبرهنة • ليكن f وَ g تابعين محدودين ولا يتمتعان بنقط تقطع مشتركة على $[a,b]$. إذا كان f ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فيكون ستيلجس كمولا نسبة إلى نفس التابع على المجال ذاته.**

13.7.1 **تكامل ريمان وستيلجس•** ليكن f تابعا محدودا على $[a,b]$ وَ ليكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما لهذا المجال. وكما في حالة تكامل ريمان، نعرف $m = \inf\{f(x) \mid a \le x \le b\}$ وَ $M = \sup\{f(x) \mid a \le x \le b\}$ وَ $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$ وَ $M_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$. لنفرض أن g تابع مزايد على $[a,b]$ وليكن، كالعادة، $\delta g_i = g(x_{i-1}) - g(x_i)$. نعرف **مجموعي ريمان وستيلجس السفلي والعلوي** للتابع f نسبة إلى g الموافقين لِـ P بأنهما، على التوالي:

$$\underline{RS}(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta g_i \quad \text{وَ} \quad \overline{RS}(f,g,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta g_i.$$

بما أن δg_i موجب فإنه، مثل في حالة ريمان، لدينا:

$$\underline{RS}(f,g,P) \leq \overline{RS}(f,g,P),\ \ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}.$$

وكذلك، إذا كان $P^\star$ تقسيما أدق من P ، لدينا

$$\overline{RS}(f,g,P^\star) \leq \overline{RS}(f,g,P) \quad \text{وَ} \quad \underline{RS}(f,g,P) \leq \underline{RS}(f,g,P^\star)$$

ينتج من هذا أنه، من أجل كل تقسيمين P' وَ P'' للمجال $[a,b]$ ، لدينا:

$$\underline{RS}(f,g,P') \leq \overline{RS}(f,g,P''). \tag{3.1}$$

إذن، أن كل مجاميع ريمان وستيلجس السفلى مكبورة (بأي مجموع علوي) وبالتالي تتمتع بحد أعلى يرمز إليه بِـ $\underline{R\!\!\int_a^b} f\,dg$ ويسمى **تكامل ريمان وستيلجس السفلي للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$. وكذلك، مجموعة مجاميع ريمان العليا تتمتع بحد أدنى $\overline{R\!\!\int_a^b} f\,dg$ يدعى **تكامل ريمان وستيلجس العلوي للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$.

واضح من (3.1) أن $\overline{R\!\!\int_a^b} f\,dg \leq \underline{R\!\!\int_a^b} f\,dg$.

1.13.7.1 **تعريف •** إذا كان f تابعا محدودا وكان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وإذا كان تكاملي ريمان وستيلجس السفلي والعلوي للتابع f نسبة إلى g متساويين فنشير إلى القيمة المشتركة لهذين التكاملين بِـ $R\!\!\int_a^b f\,dg$ ونسمّه **تكاملي ريمان وستيلجس للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$.

إننا نذيل هذا التعريف بأن نضع $R\!\!\int_b^a f\,dg = -R\!\!\int_a^b f\,dg$ من أجل $b > a$ وَ $R\!\!\int_a^a f\,dg = 0$.

8.1 تمارين حول تكامل ستيلجس

.1 أوجد قيمة التكامل $\int_0^3 f\,dg$ حيث f تابع مستمر على $[0,3]$ وَ g التابع المعرف بأن $g(x) = 0$ إذا كان $0 \leq x < 2$ وَ $g(2) = k$ وَ $g(x) = 1$ إذا كان

$3 \geq x > 2$.

2. أثبت، من أجل f مستمر، أن $\int_0^n f\,d[x] = \sum_{i=1}^{n} f(i)$ ، حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح للعدد x ؛ إنه العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق $x \geq [x] > x - 1$.

3. أحسب التكاملات التالية:

$$1. \int_0^4 e^{2x}\,d[x], \quad 2. \int_0^3 x^2\,d([x]-x), \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\cos x, \quad 4. \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,d|\sin x|.$$

4. لتكن Ψ الدالة المميزة للاعداد الناطقة التي تنتمي إلى المجال $[a,b]$ وليكن g تابعا بحيث $g(a) \neq g(b)$. أثبت أن التابع Ψ غير ستيلجس كمول على $[a,b]$ نسبة إلى g.

5. g تابع متزايد على $[a,b]$. أثبت أنه حتى يكون f س ـ كمولا نسبة إلى g يلزم ويكفي أن يتحقق ما يلي:
مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث $|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P,Q^\star)| \leq \varepsilon$ من أجل كل تقسيم P وسيطه $\delta P \leq \rho$ وكل تقسيمين Q وَ $Q^\star$ وسطين نسبة إلى P.

6. أثبت أنه إذا كان f مستمرا وَ g محدود التغيُّر على $[a,b]$ فإن $|\int_a^b f\,dg| \leq MV_a^b(g)$ حيث M كابر لِـ $|f|$ وَ $V_a^b(g)$ التغيُّر الكلي للتابع g على $[a,b]$.

7. أثبت أنه إذا كان f يتمتع بتكامل لِستيلجس نسبة إلى كل تابع متزايد g على $[a,b]$ فإنه مستمر على هذا المجال.

8. أثبت أنه إذا كان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وكان f تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فإن $0 \leq \int_a^b f\,dg$.

9. أثبت أنه إذا كان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وكان f وَ h تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$ وكان $f \leq h$ فإن $\int_a^b f\,dg \leq \int_a^b h\,dg$.

10. ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه إذا كان $a \le c \le d \le b$ كان $\int_c^d f\,dg \le \int_a^b f\,dg$.

11. ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f وَ h تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أن $|f|$ ، f^2 ، fh توابع كمولة نسبة إلى g علي $[a,b]$ وأن $|\int_a^b f\,dg| \le \int_a^b |f|\,dg$.

12. ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f وَ h تابعين يحققان $m \le f \le M$ وَ $0 \le h$ وستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أن:

1) $m\int_a^b h\,dg \le \int_a^b fh\,dg \le M\int_a^b h\,dg$ ؛

2) يوجد $\eta \in [m,M]$ بحيث $\int_a^b fh\,dg = \eta\int_a^b h\,dg$.

13. أثبت **مبرهنة القيم الوسطى الأولى:** ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f تابعا مستمرا وَ h تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه يوجد ξ من $[a,b]$ بحيث $\int_a^b fh\,dg = f(\xi)\int_a^b h\,dg$.

14. أثبت أنه إذا كان g متزايدا وَ f مستمرا على $[a,b]$ فيوجد $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi)[g(b) - g(a)].$$

15. أثبت **مبرهنة القيم الوسطى الثانية:** ليكن g وَ f تابعين مستمرين ومتزايدين على $[a,b]$ وَ h تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه يوجد ξ من $[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b fh\,dg = f(a)\int_a^\xi h\,dg + f(b)\int_\xi^b h\,dg.$$

16. أثبت أنه إذا كان f وَ g متزايدين ومستمرين على $[a,b]$ فيوجد $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f\,dg = f(a)[g(\xi) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(\xi)].$$

17. بين أنه يمكن لتابع f أن يكون كمولا نسبة إلى تابع g محدود التغيّر دون أن يكون كمولا نسبة إلى g_1 وَ g_2 حيث g_1 وَ g_2 تابعين متزايدين بحيث $g = g_1 - g_2$.

[إرشاد: اعتبر التوابع $f(x) = 0$ على المجال $[-1, 0]$ وَ $f(x) = 1$ على $]0, 1]$ ؛ $g(x) = 1$ على المجال $[-1, 1]$ ؛ $g_1(x) = -1$ على المجال $[-1, 0]$ وَ $g_1(x) = 1$ على $]0, 1]$ ؛ $g_2 = g_1 - g$.]

18. أثبت أنه إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع محدود التغيّر على $[a, b]$ فإن f ستيلجس كمول نسبة لكل من تابع التغيّره الكلي T_g وَ التابع الراسب R_g من g على $[a, b]$. ثمّ إن $\displaystyle\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dT_g - \int_a^b f\,dR_g$.

19. ليكن $\varphi(x) = \int_a^x f\,dg$ حيث f محدود وَ g محدود التغيّر على $[a, b]$. أثبت أن:

1) φ محدود التغيّر على $[a, b]$ ؛
2) φ مسمر عند كل نقطة إستمرار للتابع g ؛
3) $\varphi'(x)$ موجود عند كل نقطة حيث f مستمر وَ $g'x)$ موجود؛ ثمّ إن

$$\varphi'(x) = f(x)g'(x).$$

20. لنفرض أن $\int_a^b h\,dg$ موجود حيث g محدود ومتزايد وَ h محدود على $[a, b]$. وليكن φ التابع المعرف بـِ $\varphi(x) = \int_a^x h\,dg$ من أجل $x \in [a, b]$. أثبت أنه إذا كان f مستمرا على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f\,d\varphi = \int_a^b fh\,dg$.

21. ليكن $I = [0, 1]$ وَ f تابعا حقيقيا محدود التغيّر على I. لنعتبر h التابع المعرف على I بأن $h(0) = 0$ وَ $h(x) = f(x + 0) - f(0)$ من أجل $0 < x < 1$ وَ $h(1) = f(1) - f(0)$. بين أن h محدود التغيّر على I ومن أجل كل تابع g مستمر على I يكون لدينا $\displaystyle\int_0^1 g\,dh = \int_0^1 g\,df$.

22. أثبت **متباينة شوارتز** : إذا كان f وَ h مستمرين وَ g متزايدا على $[a, b]$ فان

$$\Big|\int_a^b fh\,dg\Big|^2 \leq \Big(\int_a^b f^2\,dg\Big)\int_a^b h^2\,dg.$$

9.1 جبر المجموعات

1.9.1 الجبور والعشائر•

1.1.9.1 **تعريف •** لتكن X مجموعة وَ $\mathcal{A}$ فئة غير خالية من أجزاء X. نقول عن $\mathcal{A}$ إنها **جبر مجموعات** (**algèbre d'ensembles**) أو **جبر بوولي** إذا حققت ما يلي:

1) مهما كان A وَ B من $\mathcal{A}$ لدينا $A \cup B \in \mathcal{A}$ ،
2) مهما كان A من $\mathcal{A}$ لدينا ${}^cA \in \mathcal{A}$.

يشير الرمز ${}^cA$ إلى متممة A نسبة إلى X. يمكن في التعريف السابق إستبدال الشرط (1) بالشرط:

1') وَ B من $\mathcal{A}$ لدينا $A \cap B \in \mathcal{A}$.

2.1.9.1 **قضية •** لتكن $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء مجموعة X. يوجد جبر أصغري $\mathcal{A}$ يحتوي على $\mathcal{C}$ (بمعنى أنه إذا كان $\mathcal{B}$ جبرا يحتوي $\mathcal{C}$ فأن $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$). يدعى الجبر الأصغري الذي يحتوي $\mathcal{C}$ **بالجبر المولد من** $\mathcal{C}$.

3.1.9.1 **قضية •** **ليكن $\mathcal{A}$ جبر مجموعات وَ $\{A_n\}$ متتالية عناصر من $\mathcal{A}$. توجد متتالية $\{B_n\}$ من عناصر $\mathcal{A}$ غير متقاطعة مثنى مثنى وبحيث**

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{مع} \quad B_n \subset A_n \quad \text{مهما كان} \quad n \geq 1.$$

(لاحظ أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ لا ينتمي بالضرورة إلى $\mathcal{A}$.)

2.9.1 السيغما (σ) جبور أو العشائر•

1.2.9.1 **تعريف •** نسمي سيغما (σ) **جبرا** أو **عشيرة** (**tribu**) كل جبر مجموعات $\mathcal{A}$ يتمتع بخاصية **الجمعية العدودة** التي تعني أن إتحاد كل جماعة عدودة من عناصر $\mathcal{A}$ عنصر من $\mathcal{A}$. ينتج من التعريف السابق أنه إذا كانت $\mathcal{A}$ عشرة فمن أجل كل متتالية $\{A_n\}$ من عناصرها يكون التقاطع $\bigcap_1^{\infty} A_i$ منتميا إلى $\mathcal{A}$.

3.9.1 العشيرة البوريلية (tribu borélienne) $\mathcal{B}(X)$•

1.3.9.1 **تعريف •** ليكن X فضاء توبولوجيا. نسمي **عشيرة بوريلية** على X ونرمز لها بِـ $\mathcal{B}(X)$ العشيرة المولدة من الفئة τ لأجزاء X المفتوحة. ونسمي عناصر هذه العشيرة **بالمجموعات البوريلية.**

2.3.9.1 **قضية •** إن العشرة $\mathcal{B}(X)$ تنطبق مع العشيرة المولدة من $\mathcal{F}$ فئة أجزاء X المغلقة.

3.3.9.1 **المجموعات G_δ وَ F_σ •** ليكن X فضاء توبولوجيا. نقول عن جزء E من X إنه من نوع G_δ إذا كان $E=\bigcap_1^\infty V_n$ مع V_n أجزاء مفتوحة من X. ونقول عنه إنه من نوع F_σ إذا كان $E=\bigcup_1^\infty F_n$ مع F_n أجزاء مغلقة من X.

لاحظ أن المجموعات من نوعي G_δ وَ F_σ مجموعات بوريلية. وأن متممة جزء من نوع F_σ هو جزء من نوع G_δ والعكس بالعكسي.

4.9.1 الفئات الرتيبة •

1.4.9.1 **تعريف •** لتكن $\{A_n\}$ متتالية **متزايدة** من أجزاء X. نسمي **نهاية** هذه المتتالية **إتحاد** الأجزاء A_n. إننا نضع:

$$A_\infty=\lim_\uparrow A_n=\bigcup_n A_n \quad \text{حيث} \quad A_{n+1}\supset A_n.$$

وكذلك، إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية **متناقصة** من أجزاء X فنسمي **نهاية** هذه التتالية **تقاطع** الأجزاء B_n ، أي $B_\infty=\lim_\downarrow A_n=\bigcap_n B_n$ حيث $B_{n+1}\subset B_n$. نقول عن متتالية مجموعات إنها **رتيبة** إذا كانت إما **متناقصة أو متزايدة.**

2.4.9.1 **تعريف •** نسمي **فئة رتيبة** كل فئة $\mathcal{M}$ ، من أجزاء X ، تشمل على نهايات كل متتالياتها الرتيبة. أي أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية رتيبة عناصرها من $\mathcal{M}$ فنهاياتها تنتمي إلى $\mathcal{M}$.

3.4.9.1 **قضية • كل عشيرة فئة رتيبة.**

4.4.9.1 **قضية • هي فئة رتيبة كل تقاطع فئات رتيبة.**

5.4.9.1 **مبرهنة • ليكن $\mathcal{J}$ جبرا من أجزاء X ولنشير بـ $\mathcal{M}$ إلى الفئة الرتيبة المولدة من $\mathcal{J}$. عندئذ، إذا كان $\mathcal{B}$ يشير إلى العشرة الولدة من $\mathcal{J}$ ، يكون $\mathcal{B} = \mathcal{M}$.**

6.4.9.1 **توطئة • ليكن $\mathcal{A}$ جبرا لبوول. إذا كان مغلقا نسبة إلى النهايات المتزايدة (بمعنى أنه من أجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ عناصرها من $\mathcal{A}$ تكون النهاية $\lim_{\uparrow} A_n$ منتمية إلى $\mathcal{A}$) فإنه عشرة.**

7.4.9.1 **عشائر الجداء •** لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين مزودتين بعشيرتين $\mathcal{A}_1$ وَ $\mathcal{A}_2$. نرمز بـ X إلى الجداء الديكارتي.

8.4.9.1 **تعريف •** نسمي **مستطيلا** كل جزء R من X من الشكل $R = A_1 \times A_2$ مع $A_i \ni \mathcal{A}_i$ ، $i = 1$ ، 2. نشير بـ $\mathcal{A}$ إلى مجموعة كل المستطيلات.

9.4.9.1 **تعريف •** نسمي **عشيرة جداء** العشيرة التي يشار إليها بـ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ والمولدة من $\mathcal{R}$.

10.4.9.1 **تعريف •** نسمي **مجموعة أساسية** كل إتحاد منته من المستطيلات **غير المتقاطعة**. يرمز بـ $\mathcal{E}$ إلى فئة المجموعات الأساسية.

11.4.9.1 **قضية • تشكل فئة المجموعات الأساسية جبرا بووليا (جبر مجموعات).**

12.4.9.1 **لازمة • إن العشيرة $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ هي الفئة الرتيبة المولدة من المجموعات الأساسية.**

5.9.1 الفضاءات القيوسة •

1.5.9.1 **الصورة العكسية لعشيرة •** لتكن X وَ X' مجموعتين كيفيتين غير خاليتين وَ f تطبيقا من X في X'. ولتكن $\mathcal{F}'$ فئة من أجزاء X' ؛ إننا نضع:

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = f^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{F}'\}.$$

2.5.9.1 **قضية • لتكن $\mathcal{A}'$ عشيرة على X'. عندئذ تكون $f^{-1}(\mathcal{A}')$ عشيرة على X ، تدعى عشيرة الصورة العكسية لِ $\mathcal{A}'$ وفق f ؛ يشار إليها بِـ** $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{A}')$.

3.5.9.1 **قضية • تحافظ الصورة العكسية على الإحتواءات بين العشائر. أي أنه:**

$$\textbf{إذا كان} \quad \mathcal{A}'_1 \supset \mathcal{A}'_2 \quad \textbf{كان} \quad f^{-1}(\mathcal{A}'_1) \supset f^{-1}(\mathcal{A}'_2).$$

4.5.9.1 **تعدي الصور العكسية •** لتكن X ، X' ، X'' ثلاث مجموعات كيفية وَ $X \xleftarrow{f} X' \xleftarrow{h} X''$ تطبيقين وَ $\mathcal{F}''$ فئة من أجزاء X''. عندئذ:

$$f^{-1}(h^{-1}(\mathcal{F}'')) = (h \circ f)^{-1}(\mathcal{F}'').$$

5.5.9.1 **إستقرار العشيرة المولدة نسبة إلى الصورة العكسية •**

6.5.9.1 **مبرهنة • لتكن X وَ X' مجموعتين وَ f تطبيقا من X في X' وَ $\mathcal{F}'$ فئة من أجزاء X'. إذا كانت $\mathcal{A}'$ هي العشيرة المولدة من $\mathcal{F}'$ فإن $f^{-1}(\mathcal{A}')$ هي العشيرة المولدة من** $f^{-1}(\mathcal{F}')$.

7.5.9.1 **تعريف •** نسمي **فضاء قيوسا** (**espace mesurable**) كل ثنائية $(X, \mathcal{A})$ مكونة من مجموعة X ومن عشيرة $\mathcal{A}$ من أجزاء X. ونقول عن عناصر $\mathcal{A}$ بأنها **مجموعات قيوسة.**

8.5.9.1 **تعريف •** ليكن $(X, \mathcal{A})$ وَ $(X_1, \mathcal{A}_1)$ فضائين قيوسين. نقول عن **تطبيق** f من X في X_1 إنه **قيوس** إذا كان $f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}$.

إذا كانت E مجموعة قيوسة من $(X, \mathcal{A})$ فنقول عن تابع f من E في X_1 إنه **قيوس على** E إذا كان $f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap E \subset \mathcal{A}$.

نشير بِـ $\mathcal{M}((X, \mathcal{A}); (X_1, \mathcal{A}_1))$ إلى مجموعة التطبيقات القيوسة من $(X, \mathcal{A})$ إلى $(X_1, \mathcal{A}_1)$.

9.5.9.1 **قضية • هو قيوس تركيب كل تطبيقين قيوسين.**

10.5.9.1 **قضية • (معيار القابلية للقياس) ليكن** $(X,\mathcal{A})$ **وَ** $(X_1,\mathcal{A}_1)$ **فضائين قيوسين وليكن** $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{A}_1$ **جزآ مولدا لِـ** $\mathcal{A}_1$**. عندئذ:**

1. $f \in \mathcal{M}((X,\mathcal{A});(X_1,\mathcal{A}_1))$ **إذا وفقط إذا كان**
2. $f^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{A}$.

11.5.9.1 **التوابع القيوسة على مجموعة الجداء •** لتكن $(X,\mathcal{A})$ ، $(Y_1,\mathcal{B}_1)$ ، $(Y_2,\mathcal{B}_2)$ ثلاثة فضاءات قيوسة. لنزود $Y_1 \times Y_2$ بعشيرة الجداء $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ المعرف في 9.4.9.1. ليكن π_i ، ($i = 1$ ، 2) الإسقاط القنوني لِـ $Y_1 \times Y_2$ على Y_i.

12.5.9.1 **توطئة • لدينا** $\pi \in \mathcal{M}((Y_1 \times Y_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2);(Y_1,\mathcal{B}_1))$.

13.5.9.1 **قضية • [معيار القابلية للقياس لتطبيق في فضاء] ليكن** f **تطبيقا لِ** X **في** $Y_1 \times Y_2$**. عندئذ يكون** f **قيوسا اذا وفقط إذا كانتا مركباتاه** $f_i = \pi_i \circ f$ **قيوستين.**

14.5.9.1 **قابليتا الفصل والقياس •**

14.5.9.1 .١ قابلية الفضاءات التبولوجية للفصل• ليكن Y فضاءا توبولجيا مفصول. نقول إنه يحقق:

بديهية الفصل الأولى ـ إذا وجد جزء D من Y قابلا للعد وكثيف (dense) حيثما كان (partout) ، أي أن ملاصقة D تساوي X.

بديهية الفصل الثانية ـ إذا وجدت جماعة عدودة من أجزاء Y المفتوحا H_i بحيث يكتب كل جزء مفتوح من Y كاتحاد الأجزاء H_i التي يحتويها. ونقول عندها إن الجماعة H_i تشكل أساسا لمفتوحات Y .

15.5.9.1 **قضية • إن كل فضاء متري** Y **يحقق بديهية الفصل الأولى يحقق بديهية الفصل الثانية.**

16.5.9.1 **قضية • [معيار القابلية للقياس] ليكن $(X,\mathcal{A})$ فداءا قيوسا وَ Y فضاءا توبولوجيا يحقق بديهية القابلية للفصل الثانية وليكن H_i أساسا للمفتوحات Y. يكون عندئذ التطبيق f من X في Y قيوسا إذا وفقط إذا كان**

$$f^{-1}(H_i) \in \mathcal{A}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

17.5.9.1 **جداء العشائر البوريلية •**

18.5.9.1 **قضية • ليكن X_1 وَ X_2 فضاءين متريين قابلين للفصل وليكن $Y = X_1 \times X_2$ جداءهما. لنزود Y بتوبولوجيا الجداء ولنرمز بِـ $\mathcal{B}(X_1)$ وَ $\mathcal{B}(X_2)$ وَ $\mathcal{B}(Y)$ ألى العشائر البوريلية المرفقة. عندئذ $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$.**

19.5.9.1 **القابلية للقياس والإستمرار •** ليكن X وَ X' فضائين توبولوجيين. نحصل بتزويدهما بعشيرتيهما لبوريل $\mathcal{B}(X)$ وَ $\mathcal{B}(X')$ على فضائين قيوسين $(X, \mathcal{B}(X))$ وَ $(X', \mathcal{B}(X))$.

20.5.9.1 **قضية • كل تطبيق مستمر f من X في X' تطبيق قيوس من $(X, \mathcal{B}(X))$ في $(X', \mathcal{B}(X'))$.**

21.5.9.1 **العمليات الجبرية على التوابع القيوسة •** يزود حقل الأعداد الحقيقية بالعشيرته البوريلية. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءا قيوسا. نشير بِـ $\mathcal{L}^0(X,\mathcal{A})$ إلى **مجموعة التطبيقات القيوسة من** $(X,\mathcal{A})$ **في** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. إننا نطلق تسمية **تابع قيوس** على كل عنصر من تسمية $\mathcal{L}^0(X,\mathcal{A})$.

22.5.9.1 **قضية •**
1. **القيمة المطلقة لتابع قيوس تابع قيوس.**
2. **مجموع تابعين قيوسين تابع قيوس.**
3. **جداء تابعين قيوسين تابع قيوس.**
4. **مقلوب تابع قيوس لا ينعدم أبدا تابع قيوس.**

6.9.1 **التقارب البسيط للتوابع القيوسة•** يشير في هذا المقطع $(X,\mathcal{A})$ إلى فضاء قيوس وَ (Y,d) إلى فضاء متري وَ $\mathcal{B}_d(Y)$ إلى عشيرته لبوريل.
تذكير: نقول عن متتالية تطبيقات $f_n : X \longrightarrow Y$ إنّها **متقاربة ببساطة نحو** تطبيق f إذا كان $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ ، بمعنى أن:

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0 \text{ مهما كان } x \in X .$$

1.6.9.1 **مبرهنة • لتكن** $\{f_n\}$ **متتالية تطبيقات قيوسة من** $(X,\mathcal{A})$ **في** $(Y,\mathcal{B}_d(Y))$ **متقاربة ببساطة نحو تابع** f **. عندئذ يكون التابع** f **قيوسا.**

يتبين مما سبق أنه لدينا النتيجة المهمة التالية:

2.6.9.1 **توطئة • [التوطئة الأساسية] لتكن** $\{f_n\}$ **متتالية تطبيقات من** X **في فضاء متري** Y **متقاربة لبّساطة نحو تابع** f **. عندئذ من أجل كل مفتوح** $\mathcal{U}$ **من** Y **لدينا**

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{r,m}\Big[\bigcap_{q\geq m} f_q^{-1}(\mathcal{U}_r)\Big] \quad \text{حيث} \quad \mathcal{U}_r = \left\{y\in\mathcal{U} \mid \ \mathrm{d}\,(y,\, {}^c\mathcal{U}) > \frac{1}{r}\right\}.$$

7.9.1 **الحد الأعلى لمتتالية توابع قيوسة•**

1.7.9.1 **قضية • لتكن** $\{f_n\}$ **متتالية عناصرها من** $\mathcal{M}((X,\mathcal{A});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ **. عندئذ ينتمي التابع** $\varphi \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **إلى** $\mathcal{M}((X,\mathcal{A});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ **.**

2.7.9.1 **لازمة • لتكن** $\{f_n\}$ **متتالية عناصرها من** $\mathcal{M}((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ **. عندئذ ينتمي التابع** $\limsup_{n\to\infty} f_n$ **إلى** $\mathcal{M}((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ **.**

3.7.9.1 **لازمة • لتكن** $(X,\mathcal{A})$ **فضاء قيوسا وَ** f **تابعا حقيقيا بسيطا معرفا على المجموعة** X **، أي أن** $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{E_k}(x)$ **حيث** c_k $k=1$ **، ... ،** n **ثوابت حقيقية وَ** E_k **أجزاء تشكل تجزئة قيوسة لِـ** X **. عندئذ** f **قيوس.**

4.7.9.1 **مبرهنة • ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تابعا حقيقيا مكتملا معرفا على X . توجد عندئذ متتالية من التوابع الحقيقية البسيطة معرفة على X ، إي**

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{k_n} c_{ni}\chi_{E_{ni}}(x)$$ **،** c_{ni} **حقيقي،** E_{ni} **غير متقاطعة مثنى مثنى،**

بحيث $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ ، $x \in X$.

ثمّ إنه إذا كان:

١. f **قيوسا كانت التوابع** f_n **قيوسة كذلك.**

٢. f **موجبا كانت المتتالية** $\{f_n\}$ **متزايدة ولدينا:**

$$0 \le f_n(x) \le f(x)$$ **مهما كان** $x \in X$ ، $n=1$ ، 2 ، $\ldots$

٣. f **محدودا، إي، يوجد عدد حقيقي** $M>0$ **بحيث** $|f(x)| \le M$ **مهما كان** $x \in X$ ، **فإن المتتالية** $\{f_n\}$ **تتقارب بانتظام نحو** f .

10.1 تمارين حول الجبور والعشائر والتوابع القيوسة

1. لتكن $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء مجموعة X. أثبت وجود عشيرة (سيغما جبر) أصغرية $\mathcal{A}$ تحتوي على $\mathcal{C}$. تدعى هذه العشية **بالعشيرة المولدة من** $\mathcal{C}$.

2. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مزودة بالتوبولوجيا المألوفة.

١. أثبت أن كل مفتوح من $\mathbb{R}$ هو إتحاد عدود لمجالات مفتوحة.

٢. لتكن جماعات المجموعات التالية:

$\mathcal{I}$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ ؛

$\mathcal{I}_{co}$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ المفتوحة من اليمين ومغلقة من اليسار؛

$\mathcal{I}_o$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ المفتوحة؛

$\mathcal{I}_\infty$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ التي من الشكل $]-\infty,x[$ مع $x \in \mathbb{R}$ ؛

$\mathcal{I}_q$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ ذات طرفين ناطقين؛

$\mathcal{C}$ مجموعة أجزاء $\mathbb{R}$ المتراصة.

أثبت أن كل جماعة من هذه الجماعات تولّد عشيرة بوريل في $\mathbb{R}$.

3. ١. لتكن $(X,\mathcal{F})$ مجموعة قيوسة وَ $A \subset X$ ولنعتبر الجماعة

$\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$.

بين أن $\mathcal{F}_A$ عشيرة على A. تسمى **عشيرة أثر** $\mathcal{F}$ **على** A.

عين $\mathcal{F}_A$ عندما يكون $A \in \mathcal{F}$.

٢. ليكن E جزءا من X وَ $\mathcal{A}$ مجموعة من أجزاء X.

لنضع $\mathcal{A} \cap E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$ (وهي أثر $\mathcal{A}$ على E).

أثبت أن $\sigma(\mathcal{A} \cap E) = \sigma(\mathcal{A}) \cap E$ ، حيث يشير $\sigma(\mathcal{A})$ إلى العشيرة المولدة من $\mathcal{A}$.

4. لتكن X مجموعة غير خالية وَ $\mathcal{S}$ مجموعة من أجزاء X. نقول عن $\mathcal{S}$ إنها **نصف جبر بوولي على** X إذا كان:

نج 1) $\emptyset$ وَ $X \in \mathcal{S}$ ؛

نج 2) $A \cap B \in \mathcal{S}$ من أجل كل A وَ B من $\mathcal{S}$ ؛

نج 3) كل $A \in \mathcal{S}$ هو بحيث $^cA = \bigcup_{i=1}^n S_i$ مع $S_i \in \mathcal{S}$ ، $i = 1$ ، … ، n أجزاء من X غير متقاطعة مثنى مثنى.

١. بين أن الجبر المولد من $\mathcal{S}$ هو الجبر $\mathcal{A}$ الذي يحقق

$$\mathcal{A} = \{A \mid A = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \ A_i \in \mathcal{S},\ \ i = 1, \ldots, n\}$$

حيث $\sum$ يشير إلى إتحاد عناصره غير متقاطعة مثنى مثنى.

٢. ليكن $(X_1, \mathcal{F}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{F}_2)$ فضائين قيوسين. نضع

$\mathcal{S} = \{A \subset X_1 \times X_2 \mid A = A_1 \times A_2,\ \ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ \ A_2 \in \mathcal{F}_2\}$.

بين أن $\mathcal{S}$ نصف جبر بوولي على $X_1 \times X_2$.

٣. بين أن مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ هي نصف جبر بوولي على $\mathbb{R}$.

٤. ليكن $\mathcal{S}_1$ وَ $\mathcal{S}_2$ نصف جبرين من أجزاء مجموعة X. لنعتبر الجماعة:

$\mathcal{S} = \{S_1 \cap S_2 \mid S_1 \in \mathcal{S}_1,\ \ S_2 \in \mathcal{S}_2\}$.

أثبت أن الجبر المولد من $\mathcal{S}$ ينطبق مع الجبر المولد من $\mathcal{S}_1$ وَ $\mathcal{S}_2$.

5. لتكن X مجموعة غير متهية. ولتكن الجماعتين $\mathcal{D}$ وَ $\mathcal{F}$ المعرفتين بأن:

$\mathcal{D}$ هي مجموعة أجزاء X العدودة أو ذات متممة ^cA عدودة؛

$\mathcal{F}$ هي مجموعة أجزاء X المتهية أو ذات متممة ^cA متهية.

١. أثبت أن $\mathcal{D}$ عشيرة. إنها العشيرة المولدة من النقط، أي $\mathcal{D} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

٢. أثبت أن $\mathcal{F}$ جبر وأن $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.
أعط مثالا يبن أن $\mathcal{F}$ ليست عشيرة.

٣. نعرف على $\mathcal{F}$ تابع للمجموعات μ بأن
$\mu(E) = 1$ إذا كان ^cE متهيا وَ $\mu(E) = 0$ إذا كان E متهيا.
أثبت أن μ جمعي على $\mathcal{F}$.
أثبت أن μ سيغما جمعي على $\mathcal{F}$ إذا وفقط إذا كان X غير عدود.

6. لتكن X مجموعة وَ Σ جماعة من أجزاء X. نقول عن Σ إنها سيغما جمعية إذا كان

ا) $\emptyset$ وَ $X \in \Sigma$ ؛

ب) وإذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من Σ كان $\bigcup\limits_n A_n \in \Sigma$ ؛

ج) ومن أجل كل A وَ B من Σ ينتج:
من $A \subset B$ أن $B - A \in \Sigma$ ومن $A \cap B = \emptyset$ أن $A \cup B \in \Sigma$.

١. بين أن كل عشيرة جماعة سيغما جمعية.

٢. ليكن μ وَ λ قياسين موجبين على فضاء $(X, \mathcal{F})$ بحيث
$\mu(X) = \lambda(X) < +\infty$. بين أن الجماعة $\Sigma = \{F \in \mathcal{F} \mid \mu(F) = \lambda(F)\}$ سيغما جمعية.

٣. لتكن $\mathcal{C}$ جماعة من أجزاء X. بين أنها توجد جماعة أصغرية من أجزاء X سيغما جمعية وتحتوي $\mathcal{C}$ (نسميها الجماعة السيغما جمعية المولدة من $\mathcal{C}$).

٤. إذا كانت $\mathcal{C}$ جماعة مغلقة نسبة إلى التقاطعات المتهية فبين أن العشيرة المولدة من $\mathcal{C}$ تنطبق مع الجاعة السيغما جمعية المولدة من $\mathcal{C}$.

7. بين أن كل تطبيق ثابت، من فضاء قيوس في آخر قيوس، قيوس.

8. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوس وَ f تطبيق من X في مجموعة كيفية Y. بين أن المجموعة $\mathcal{J} = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ عشيرة على Y.

9. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ (Y, τ) فضاء توبولوجيا وَ $\mathcal{B}_\tau(Y)$ العشيرة البوريلية على Y وَ f تطبيقا من X في Y بحيث $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ مهما كان $V \in \tau$.

بين أن التطبيق f قيوس.

10. لتكن $\{E_n\}$ متتالية مجموعات قيوسة من فضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ ولنضع $E = \bigcup\limits_{1}^{\infty} E_n$. بين أنه حتى يكون تابعا حقيقيا $f : X \to \mathbb{R}$ قيوسا على E يلزم ويكفي أن يكون إقتصاره $f_{|E_n}$ على E_n قيوسا مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

11. لتكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تطبيقا من X في $\overline{\mathbb{R}}$.

1. أثبت أن القضايا التاليا متكافئة:
   ١. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٢. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٣. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٤. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
2. إذا تحققت إحدى القضايا السابقة فأثبت أن f قيوس.
3. إذا كان f قيوسا فبين أن المجموعة $\{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\overline{\mathbb{R}}$.

12. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وليكن f تطبيقا من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت أنه لدينا $\{x \ni X \mid f(x) \geq r\} \ni \mathcal{A}$ من أجل كل $r \ni \mathbb{Q}$ إذا وفقط إذا كان لدينا $\{x \ni X \mid f(x) \geq \alpha\} \ni \mathcal{A}$ من أجل كل $\alpha \ni \mathbb{R}$.

13. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا. أثبت أنه حتى يكون التابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قيوسا يلزم ويكفي أن تتحقق إحدى القضايا الأربعة المتكافئة الواردة في التمرين السابق.

14. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f وَ g تطبيقين قيوسين من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت قابلية المجموعات التالية للقياس:
$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ وَ $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$ وَ $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

15. لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت أن التوابع:
$$\psi = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \text{ وَ } \varphi = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \text{ وَ } f = \liminf_{n \to \infty} f_n \text{ وَ } g = \limsup_{n \to \infty} f_n$$

قيوسة.

16. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا بحيث تحتوي العشيرة $\mathcal{A}$ العسيرة البوريلية على X. أثبت أنـ(ـه)

1. كل تابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ بوريلي لوبيغ قيوس.
2. إذا كان التابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ قيوسا وكان B جزءا بوريليا كان $f^{-1}(B)$ قيوسا.
3. إذا كان التابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ بوريل قيوسا وكان B جزءا بوريل قيوسا كان $f^{-1}(B)$ بوريل قيوسا.

17. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاءا قيوسا وَ E جزء من X. بين أن $E \in \mathcal{A}$ إذا فقط إذا كانت دالته المميزة χ_E قيوسة.

18. ليكن f تابعا قيوسا من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت وجود متتالية $\{f_n\}$ من التوابع الدرجية بحيث $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \ldots \leq |f|$ وَ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

11.1 القياسات الموجبة والخارجية

1.11.1 القياسات الموجبة (mesures positives)•

1.1.11.1 **تعريف •** ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا. نقول عن تطبيق μ لِـ $\mathcal{A}$ في $[0,+\infty]$ إنّه **قياس موجب** إذا كان ينعدم عند الجزء الخالي ويتمتع **بخاصية الجمعية العدودة (أو الـ σ جمعية)** أي إذا كان:

$$\left.\begin{array}{l} \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{وَ} \quad \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \\ \text{من أجل كل متتالية } \{E_n\} \text{ عناصرها من } \mathcal{A} \text{ وغير متقاطعة مثنى مثنى.} \end{array}\right\}$$

عندئذ نقول عن الثلاثية $(X,\mathcal{A},\mu)$ إنه **فضاء مقيس (espace mesuré)** .

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن A وَ B عنصرين من $\mathcal{A}$. لدينا:

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B). \tag{4.1}$$

ينتج من (4.1) أن القياسات الوجبة **متزايدة.** بمعنى أنه:

إذا كان $A \supset B$ كان $\mu(A) \geq \mu(B)$.

2.1.11.1 **تعريف •** نقول عن قياس μ إنه منته إذا كان $\mu(X) < \infty$. عندئذ إذا كان E جزءا قيوسا من X كان $\mu(X) \geq \mu(E)$، أي أن μ لا يئخذ إلا قيما متهية. عندما يكون μ متهيا فيمكننا " طيه " بمعنى يمكننا إعتبار، بدله، القياس $\mu_1(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}$ مع $E \in \mathcal{A}$ ولذا يمكننا فرض $\mu(X) = 1$ ونقول عن هذه القياسات إنها **قياسات إحتمالاتية.**

نقول عن فضاء مقيس إنه **سيغما منته** إذا أمكن كتابته كإتحاد عدود لأجزاء قيوسة كل منها متهي القياس.

2.11.1 خواص القياسات الموجبة •

1.2.11.1 **مبرهنة • ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مقيسا. عندئذ لدينا:**

1. **(الرتابة) إذا كان** E **وَ** F **جزئين قيوسين وكان** $E \subset F$ **كان** $\mu(F) \geq \mu(E)$. **ثم، إذا كان** $\mu(E)$ **متهيا فإن:**

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E). \tag{5.1}$$

2. **(السيغما تحتجمعية) إذا كانت** $\{E_n\}$ **متتالية من أجزاء قيوسة كان:**

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{6.1}$$

3. **(الاستمرار من الأسفل) إذا كانت** $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ **متتالية متزايدة من أجزاء قيوسة كان:**

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{7.1}$$

4. **(الاستمرار من الأعلى) إذا كانت** $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ **متتالية متناقصة من أجزاء قيوسة وإذا وجد دليل** k **بحيث** $\mu(E_k) < \infty$ **كان:**

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{8.1}$$

2.2.11.1 **ملاحظة •** لا يمكن الإستغناء عن فرض μ متهيا عند أحد الأجزاء المعتبرة. وعلى سبيل المثال إذا أخذ على $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ القياس μ المعطى بأن $\mu(E) =$ عدد عناصر E في حالة E متهيا والا $\mu(E) = \infty$ فمن أجل $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ يكون لدينا $\mu(A_n) = \infty$ مهما كان n لكن $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu(\emptyset) = 0$.

3.2.11.1 **مبرهنة •** [توطئة بوريل وكانتلي] **ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مُقاسا وَ** $\{E_n\}_{n\geq 1}$ **متتالية من الأجزاء القيوسة. إذا كان** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ **كان**

$$\mu\Big(\limsup_{n\to\infty} E_n\Big) = 0. \tag{9.1}$$

4.2.11.1 **مبرهنة • ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مقيسا ولتكن الفئتين**

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}$$

وَ

$$\mathcal{A}_1 = \{A \cup F \mid A \in \mathcal{A},\ \ F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})\}.$$

عندئذ يوجد تمديد وحيد μ_1 **للقياس** μ **إلى** $(X, \mathcal{A}_1)$ **بحيث يكون الفضاء المقاس** $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **تاما.**

3.11.1 القياسات الخارجية (mesures extérieures) •

1.3.11.1 **تعريف •** ليكن X مجموعة غير خالية. نقول عن تطبيق $\mu^\star$ لِـ $\mathcal{P}(X)$ في $[0, +\infty]$ إنّه **قياس خارجي** إذا كان:

1. **رتيبا**، أي أنه ينتج من كون $E \subset F \subset X$ أن $\mu^\star(E) \leq \mu^\star(F)$.
2. **وسيغما تحتجمعيا**، أي أن

$$\left.\begin{array}{r} \mu^\star\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n) \\ \text{من أجل كل متتالية } \{E_n\} \text{ عناصرها من } \mathcal{P}(X). \end{array}\right\}$$

3. وَ $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

12.1 تمارين حول القياسات الموجبة والخارجية

كل القياسات المعتبرة فيما يلي قياسات موجبة.

1. لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية مزودة بعشيرة أجزائها $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. نعرف التابع $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ بأن:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{وَ} \quad \mu(E) = +\infty \quad \text{إذا كان} \quad \operatorname{card} E = +\infty \\ \text{وَ} \quad \mu(E) = \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n^2} \quad \text{إذا كان} \quad \operatorname{card} E \quad \text{متهيا.} \end{array} \right.$$

بين أن μ ليس بقياس على $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2. لتكن X مجموعة غير متهية مزودة بعشيرة أجزائها $\mathcal{P}(X)$ ولتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}$ متتالية عناصرها مختلفة من X وَ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة. نضع

$\lambda_n(E) = 1$ إذا كان $x_n \in E$ وَ $\lambda_n(E) = 0$ إذا كان $x_n \in {}^cE$.

ونعرف التابع $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ بأن $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n(E)$. بين أن μ قياس موجب على $(X, \mathcal{P}(X))$.

(لاحظ أنك تحصل على التعداد المألوف كحالة خاصة بأخذ $X = \mathbb{N}$ ، $a_n = 1$ ، $x_n = n$ ، من أجل $n = 1$ ، 2 ، ...)

3. ليكن $(X, \mathcal{F}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن $E \in \mathcal{F}$ بحيث $\mu(E) < \infty +$. نفرض أن $\mathcal{F}$ تحتوي على جماعة من الأجزاء غير المتقاطعة مثنى مثنى نرمز إليها بِـ $\mathcal{D}$.

١. أثبت أن $\mu(E \cap D) \neq 0$ من أجل عدد عدود على أكثر من الأجزاء $D \in \mathcal{D}$.

٢. ليكن E جزءا من $\mathcal{F}$ بحيث $E = \sum\limits_{n\geq 1} E_n$ (إتحاد غير متقاطع) حيث $E_n \in \mathcal{F}$ وَ $\mu(E_n) < +\infty$ ، $n \geq 1$ (نقول إن E ذو قياس سيغما منته).

بين أن إدعاء السؤال (١) صادق من أجل مثل هذه الأجزاء.

إرشاد: يمكن إعتبار الجماعة $\mathcal{D}_n = \{D \in \mathcal{D} \mid \mu(E \cap D) \geq \frac{1}{n}\}$.

4. ليكن f تابعا من مجموعة X في $[0, +\infty]$ وليكن μ القياس المعرف على

$(X,\mathcal{P}(X))$ بأن $f(x)$ $\mu(E)=\sum_{x\in E}$. أوجد الشروط الكافية واللّازمة، بدلالة f ، التي تجعل μ منتهيا أو σ ـ منتهيا.

5. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا ولتكن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$.

أثبت أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\infty$ وكان $\mu(E_n)\geq\eta>0$ من أجل عدد غير منته من قيم الدليل n كان $0<\mu(\limsup_n E_n)$.

أعط مثالا يبين أنه لا يمكن الإستغناء عن الشرط $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\infty$.

6. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا ولتكن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$.

١. أثبت أن $\mu(\liminf_n E_n)\leq\liminf_n\mu(E_n)$.

٢. أثبت أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\infty$ فإن $\limsup\limits_n\mu(E_n)\leq\mu(\limsup\limits_n E_n)$.

أعط أمثلة تبين أنه يمكن للمتباينات السابقة أن تكون تامة.

7. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا إحتمالاتيا. ولتكن $\{A_n\}$ وَ $\{B_n\}$ متتاليتين عناصرهما من $\mathcal{A}$. أثبت أنه إذا كان $\mu(\limsup_n A_n)=1$ وَ $\mu(\liminf_n B_n)=1$ كان $\mu(\limsup_n(A_n\cap B_n))=1$.

ماذا يحدث إذا إفترضنا، عوض الشرط الثاني، أن $\mu(\limsup_n B_n)=1$ ؟

8. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن T تطبيقا غامرا للمجموعة X على مجموعة Y ولنضع $\mathcal{B}=\{B\subset Y\mid T^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$. ولنعتبر التابع المجموعاتي ν العرف على $\mathcal{B}$ بأن $\nu(B)=\mu(T^{-1}(B))$. أثبت أن $\mathcal{B}$ عشيرة على Y وأن $(Y,\mathcal{B},\nu)$ فضاء مقيس.

13.1 قياس لوبيغ (Mesure de Lebesgue)

1.13.1 قياس لوبيغ الخارجي في $\mathbb{R}^N$•

1.1.13.1 **تعريف•** نسمي **بلاطة مغلقة (pavé fermé)** في $\mathbb{R}^N$ كل جزء محدود R من $\mathbb{R}^N$ من الشكل:

$$R = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ 1 \leq k \leq N\}$$

حيث $b_k \geq a_k$ مع $k = 1$ ، ... ، N أعداد حقيقية منتهية. إذا كان $a_j = b_j$ من أجل دليل ما j من $\{1, \dots, N\}$ فإن R هي «سطح» في $\mathbb{R}^N$. إذا عوضت المتباينات الواسعة الواردة في تعريف R بمتباينات تامة فنحصل على **بلاطة مفتوحة** :

$$\overset{o}{R} = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid a_k < x_k < b_k,\ 1 \leq k \leq N\}$$

إذا كان $a_j = b_j$ من أجل دليل ما j من $\{1, \dots, N\}$ فإن $\overset{o}{R}$ هي المجموعة الخالية.

العدد $\prod_{k=1}^{N}(b_k - a_k)$ هو تعريفا **حجم** البلاطة المغلقة R وكذا المفتوحة $\overset{o}{R}$.

يشار إلى حجم البلاطة R ، $\overset{o}{R}$ على التوالي) بـ $v(R)$ ، $v(\overset{o}{R})$ على التوالي) أو بـ $|R|$ ، $|\overset{o}{R}|$ على التوالي).

2.1.13.1 **ملاحظة•** لتكن $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ بلاطة مغلقة. إذا قسمنا أحد أضلاعها، وليكن $[a_k, b_k]$ ، إلى n_k قطعة مغلقة، داخلياتها غير متقاطعة فإن هذا يقسم R إلى n_k بلاطة مغلقة $\left\{R_{ki_k}\right\}_{i_k=1}^{n_k}$ ويمكنك أن تتأكد من أن:

$$|R| = \sum_{i_k=1}^{n_k} |R_{ki_k}|.$$

إننا ندرك عندها أن تقسيم الضلع $[a_1, b_1]$ إلى n_1 قطعة مغلقة والضلع $[a_2, b_2]$ إلى n_2 قطعة مغلقة وَ ... والضلع $[a_N, b_N]$ إلى n_N قطعة مغلقة داخليات كلها غير متقاطعة يقسم R إلى $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_N$ بلاطة مغلقة داخلاتها غير متقاطعة ويكون حجم البلاطة R مساويا إلى مجموع كل البلاطات المغلقة المكونة لهذا التقسيم.

إصطلاح:

إننا نصطلح على أن نقول عن بلاطين مغلقتين R_1 وَ R_2 إنهما **مترادفتان** إذا كان تقاطعهما غير خال وتقاطع داخليتيها خال، أي أن $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ وَ $\overset{o}{R}_1 \cap \overset{o}{R}_2 = \emptyset$.

ترميز:

ليكن E جزءا من $\mathbb{R}^N$. نرمز بـ $\mathcal{R}_{\text{ع}}(E)$ إلى مجموعة كل الجماعات $\{R_n\}_n$ المنتهية أو العدودة التي عناصرها بلاطات مغلقة من $\mathbb{R}^N$ والتي يغطي إتحادها المجموعة E ، أي أن $E \subset \bigcup_n R_n$. حيث (إصطلاحا) يشير الرمز $\bigcup_n R_n$ إلى الإتحاد $\bigcup_{n=1}^{k} R_n$

إذا كانت الجماعة $\{R_n\}$ مكونة من k بلاطة مغلقة وإلى $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ إذا كانت عدودة.

3.1.13.1 **تعريف•** نسمي قياس لوبيغ الخارجي للجزء E من $\mathbb{R}^N$ العدد الموجب المكتمل (أي من $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\mu^\star(E) \doteq \inf_{\{R_n\}\in\mathcal{R}_{ع}(E)} \sum_n |R_n|$$

حيث يشير $|R_n|$ إلى حجم البلاطة الغلقة R_n والرمز $\sum_n$ إلى مجموع منته أو عدود حسب كون الجماعة $\{R_n\}$ متهية أو عدودة.

لاحظ أن $\mu^\star$ معرف على كل أجزاء $\mathbb{R}^N$ ولا يأخذ إلا قيما موجبة. يتمتع قياس لوبيغ الخارجي بالخواص التالية:

4.1.13.1 **مبرهنة•**

1. $\mu^\star(\emptyset) = 0$.
2. $\mu^\star(\{a\}) = 0$ **(حيث a نقطة من $\mathbb{R}^N$).**
3. **(الرتابة) إذا كان** $E \subset F \subset \mathbb{R}^N$ **كان** $\mu^\star(F) \geq \mu^\star(E)$.
4. **(التحتجمعية العدودة) إذا كانت** $\{E_n\}_{n\geq 1}$ **متتالية من أجزاء** $\mathbb{R}^N$ **كان:**

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n)\,. \tag{10.1}$$

5. **(** $\mu^\star$ **يمدد الحجم)** ١. **إذا كانت** R **بلاطة مغلقة كان**

$$\mu^\star(R) = |R| = v(R).$$

٢. **وكذلك، إذا كانت** $\overset{o}{R}$ **بلاطة مفتوحة كان**

$$\mu^\star(\overset{o}{R}) = |\overset{o}{R}| = v(\overset{o}{R}).$$

6. **(خاصية اللّاتغيُّر نسبة إلى الإنسحابات) إذا كان** $E \subset \mathbb{R}^N$ **كان** $\mu^\star(E+v) = \mu^\star(E)$ **أي كان** $v \in \mathbb{R}^N$ **، حيث** $E + v = \{y \in \mathbb{R}^N \mid y = x + v,\, x \in E\}$.

5.1.13.1 **ملاحظة•** يجب أن نذكر هنا أنه، وبخلاف ما يحدث في حالة القياسات، من الممكن أن تكون المتباينة (10.1) تامة حتى في حالة الأجزاء $\{E_n\}$ غير متقاطعة. لكن ليس من السهل إعطاء مثال مضاد. إلا أنه لدينا ما يلي:

6.1.13.1 **مبرهنة• ليكن A وَ B جزئين من $\mathbb{R}^N$. إذا كان:**

$$d(A,B) = \inf\{|x-y| \mid x \in A,\ y \in B\} > 0$$

كان:

$$\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B).$$

وبصفة خاصة، هذا وارد إذا كان A وَ B جزئين متراصين وغير متقاطعين.

2.13.1 أجزاء $\mathbb{R}^N$ القيوسة حسب لوبيغ•

1.2.13.1 **تعريف•** نقول عن جزء E من $\mathbb{R}^N$ إنه **قيوس حسب لوبيغ** أو **(لوبيغ قيوس)** إذا تحقق ما يلي:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE),\ \forall A \subset \mathbb{R}^N.$$

ترميز: نشير بِـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ إلى مجموعة كل أجزاء $\mathbb{R}^N$ القابلة للقياس حسب لوبيغ.

2.2.13.1 **مبرهنة• $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ عشية على $\mathbb{R}^N$ تحتوي العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.**

3.2.13.1 **مبرهنة• كل جزء مغلق من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوس.**

لقد رأينا في إثبات المبرهنة 2.2.13.1 أن إقتصار القياس الخارجي للوبيغ على $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ يشكل قياسا موجبا. ومنه التعريف التالي:

4.2.13.1 **تعريف•** نسمي **قياس لوبيغ** على $\mathbb{R}^N$ إقتصار قياس لوبيغ الخارجي على $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ، أي القياس μ المعرب بأن:

$$\mu(E) = \mu^\star(E),\ \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

5.2.13.1 **أمثلة•** 1. ينتج من خواص قياس لوبيغ الخارجي أن قياس لوبيغ للجزء الخالي أو لنقطة من $\mathbb{R}$ أو من $\mathbb{R}^N$ معدوم وكذلك الحال بالنسبة إلى عدد منته أو عدود من نقاط $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}^N$.

2. قياس لوبيغ لكل مجال محدود من $\mathbb{R}$ هو طوله، أي

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu(]a,b]) = \mu([a,b[) = b-a.$$

قياس لوبيغ لكل بلاطة محدودة (مهما كانت طبيعتها التوبولوجية) هو حجمها.

3. قياس لوبيغ لمجموعة كانتور معدوم إذ إننا نعرف أنها مهملة.

14.1 تمارين حول قياس لوبيغ والتقاربات

نزود فيما يلي $\mathbb{R}$ بعشيرتها البوريلية ومن أجل كل فضاء $(X, \mathcal{A})$ قيوس، عندما نقول تابع قيوس من X في $\mathbb{R}$ فإننا نقصد القابلية للقياس نسبة إلى العشرة $\mathcal{A}$ في الإنطلاق والعشيرة البوريلية في الوصول.

1.14.1 حول قيساس لوبيغ•

1. ا) إذا كان E جزء من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا مع $\mu(E) < \infty$ فمن أجل كل $E \subset F$ يكون:

$$\mu^\star(F \setminus E) = \mu^\star(F) - \mu(E)\,.$$

ب) إذا كان القياس الخارجي لجزء E متهيا واذا وجد جزء لوبيغ قيوسا $\underline{E} \subset E$ مع $\mu^\star(E) = \mu(\underline{E})$ فإن E قيوس (يدعى أحيانا $\underline{E}$ بنواة E المتساوية القياس).

جـ) ليكن E جزء كيفيا من $\mathbb{R}^N$. بين أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد مفتوح $\mathcal{G}$ صفته أن:

$$\mathcal{G} \supset E \quad \text{وَ} \quad \mu(\mathcal{G}) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon\,.$$

بين كذلك وجود جزء $\widetilde{E}$ (وهو في حقيقة الأمر من نوع G_δ) بحيث:

$$\widetilde{E} \supset E \quad \text{وَ} \quad \mu(\widetilde{E}) = \mu^\star(E)\,.$$

د) ليكن M جزء لوبيغ قيوسا مع $\mu(M) < \infty$. بين أنه حتى يكون جزء ما $E \subset M$ قيوسا يلزم ويكفي أن يكون $\mu(M) = \mu^\star(E) + \mu^\star(M - E)$.

2. لنعرف على $[0, \infty]$ التابع h بأن: $h(t) = 1 - e^{-t}$ إذا كان $0 \leq t < \infty$ وَ $h(\infty) = \infty$. لتكن $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ عشيرة أجزاء $\mathbb{R}$ القابلة للقياس حسب لوبيغ. لنضع

$$d\,(A, B) = h(\mu(A \Delta B))\,،$$

حيث μ يشير إلى قياس لوبيغ وَ $A\Delta B$ إلى الفرق التناظري، أي $A\Delta B = (A \setminus B) \cup B \setminus A$ ، ونصطلح على أن نطابق بين جزئين A وَ B إذا كان $\mu(A\Delta B) = 0$.

ا) أثبت أن $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), d)$ فضاء متري تام.

ب) بين إستمرار التطبيقات لِـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ التالية:

- $(A, B) \longmapsto A \cup B$
- $(A, B) \longmapsto A\Delta B$
- $(A, B) \longmapsto A \cap B$.

وكذا استمرار التطبيق لِـ $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ التالي:

- $A \longmapsto \mathbb{R} \setminus A$.

3. أثبت، من أجل كل جزء E من $\mathbb{R}$ ، تكافؤ القضايا التالية:

ت) E لوبيغ قيوس؛

ت 2) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد جزء مفتوح $\mathcal{G}$ من $\mathbb{R}$ بحيث

$E \subset \mathcal{G}$ مع $\mu^\star(\mathcal{G} \setminus E) \leq \varepsilon$ ؛

ت 3) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد جزء مغلق $\mathcal{F}$ من $\mathbb{R}$ بحيث

$\mathcal{F} \subset E$ مع $\mu^\star(E \setminus \mathcal{F}) \leq \varepsilon$ ؛

ت 4) يوجد جزء $\mathcal{W}$ من نوع G_δ من $\mathbb{R}$ بحيث

$E \subset \mathcal{W}$ مع $\mu^\star(\mathcal{G} \setminus E) = 0$ ؛

ت 5) يوجد جزء $\mathcal{K}$ من نوع F_δ من $\mathbb{R}$ بحيث

$\mathcal{K} \subset E$ مع $\mu^\star(E \setminus \mathcal{K}) = 0$.

ثم، إذا كان $\mu^\star(E)$ منتهيا، فالقضايا السابقة تكافيء القضية التالية:

ت 6) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد إتحاد منته $\mathcal{I}$ من المجالات المفتوحة من $\mathbb{R}$ بحيث $\mu^\star(\mathcal{I} \setminus E) \leq \varepsilon$ حيث $\mathcal{I}\Delta E = (\mathcal{I} \setminus E) \cup E \setminus \mathcal{I}$.

2.14.1 حول التقاربات• لنذكر بمفاهيم التقاربات التالية:

1.2.14.1 التقاربان البسيط والمنتظم (convergences simple et uniforme)•

نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة X إنها:

- **متقاربة ببساطة** **نحو** تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $x \in X$ ومهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

- **متقاربة بانتظام** **نحو** تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

2.2.14.1 **التقاربان البسيط والمنتظم الشبه الكليين•** نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة جزئية E من فضاء مقاس $(X, \mathcal{A}, \mu)$ إنها:

- **متقاربة ببساطة شبه كليا** **نحو** تابع حقيقي f معرف على E إذا وجد جزء N من E بحيث $\mu(N) = 0$ وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ ببساطة **نحو** f على $E \setminus N$.
- **متقاربة بانتظام شبه كليا** **نحو** تابع حقيقي f معرف على E إذا وجد جزء N من E بحيث $\mu(N) = 0$ وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ بانتظام **نحو** f على $E \setminus N$.

3.2.14.1 **التقارب الشبه المنتظم•** نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة جزئية E من فضاء مقيس $(X, \mathcal{A}, \mu)$ إنها **متقاربة شبه انتظاميا** **نحو** تابع حقيقي f معرف على E إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد جزء A من E بحيث $\mu(A) \leq \varepsilon$
وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ بانتظام **نحو** f على $E \setminus A$.

4.2.14.1 **التقارب بالقياس•** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا. نقول عن متتالية توابع حقيقية قيوسة $\{f_n\}$ إنها **متقاربة بالقياس** **نحو** تابع حقيقي قيوس f على X إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\Big) = 0.$$

4. لتكن المتتاليات التابعية الحقيقية المعرفة على أجزاء $\mathbb{R}$ المذكورة:

١. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ ، $0 \leq x$ ؛ ٢. $g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ، $0 \leq x$ ؛
٣. $h_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}$ ، $0 \leq x$ ؛ ٤. $l_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ؛

٥. $p_n(x) = nxe^{-nx}$ ، $1 \geq x \geq 0$ ؛ ٦. $q_n(x) = nx(1-x)$ ، $1 \geq x \geq 0$ ؛
٧. $r_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2}$ ، $1 \geq x \geq 0$ ؛ ٨. $s_n(x) = xe^{-nx}$ ، $0 \leq x$ ؛
٩. $u_n(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}$ ، $\mathbb{R} \ni x$ ؛ ١٠. $v_n(x) = x^n$ ، $[0,1] \ni x$ ؛
١١. $w_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2 \sin^2 x}$ ، $[0,\pi] \ni x$ ؛
١٢. $z_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ إذا كان $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} \ni x$ وَ $z_n(x) = (-1)^n$ إذا كان $\mathbb{N} \ni x$.
افحص تقارباتها البسيطة والمنتظمة.

في التمارين الموالية، نزومد $\mathbb{R}$ بقياس لوبيغ.

5. إفحص التقاربين البسيط والمنتظم الشبه الكليين لكل من متتاليات التمرين السابق.

6. إفحص التقارب الشبه المنتظم لكل من متتاليات التمرين السابق.

7. إفحص التقارب بالقياس لكل من متتاليات التمرين السابق.

8. ليكن $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ تعدادا للأعداد الناطقة الموجودة في $I = [0,1]$ ولنكتب العدد r_n ذي المرتبة n على شكل كسر غير قابل للإختزال $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ ولتكن المتتالية التابعية:

$$f_n(x) = \exp\{-(p_n - xq_n)^2\}.$$

أثبت أن $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو التابع الصفري على $[0,1]$ لكنّها لا تتقارب ببساطة عند كل نقطة من المجال نفسه.

9. إستخرج من متتالية التمرين السابق متتالية جزئية متقاريبة ببساطة نحو التابع الصفري شبه كليا (شك) على $[0,1]$.

10. أثبت أن التقارب الشبه المنتظم يستلزم التقارب بالقياس.

11. ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$. ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة متقاربة ببسيطة شبه كليا على X نحو تابع f. أثبت أن هذه المتتالية تتقارب بالقياس نحو f على X.

.12 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة متقاربة بالقياس نحو f على X. أثبت أنه يمكن إستخراج منها متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ متقاربة ببسيطة شبه كليا نحو f على X.

.13 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا. أثبت أنه إذا كانت المتتالية التابعية الحقيقية $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو f على X وكان g تابعا حقيقيا بحيث $f=g$ ، μ ـ شك، كانت هذه المتتالية متقاربة بالقياس نحو g على X.

.14 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا. أثبت أنه إذا كانت المتتالية التابعية الحقيقية $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو f على X وكانت كذلك متقاربة بالقياس نحو تابع g كان $f=g$ ، μ ـ شك.

[إرشاد: يمكنك، في حل التمارين النظرية السابقة، الإستعانة من تمارين موجودة في هذه المطبوعة ومن المرجعين [٢] وَ [11] .]

15.1 تكامل لوبيغ (Intégrale de Lebesgue)

1.15.1 تكامل التوابع الموجبة•

1.1.15.1 **تعريف•** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن φ **تابعا بسيطا (fonction simple) موجبا** معرفا على X وعلى وجه التحديد $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$ حيث $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ تجزئة للمجموعة X عناصرها من $\mathcal{A}$ (غير متقاطعة) وَ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ متتالية حقيقية متهية حدودها موجبة. يشار إلى تكامل التابع φ على X نسبة إلى القياس الموجب μ بـِ $\int_X \varphi\, d\mu$ وهو تعريفا العدد الحقيقي المكتمل:

$$\int_X \varphi\, d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i). \qquad (11.1)$$

حيث نعمل بالإصطلاح $0.\infty=0$ ، هذا يقتضي أن $\int_X\varphi\, d\mu=0$ من أجل $\varphi=0$ ، μ ـ شبه كليا (شك) على X. لنذكر أن $\varphi=0$ ، μ ـ شك على X يعني أن المجموعة $A=\{x\in X \mid \varphi(x)\neq 0\}$ قيوسة ولدينا $\mu(A)=0$.

2.1.15.1 **مبرهنة• إن التكامل المعطي بالعبارة** (11.1) **عدد موجب أو** $+\infty$ **وهو يتمتع بالخواص التالية:**

ا) **التكامل معرف جيدا، أي أنه إذا كان** $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ **كان:**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

ب) **إنه موجب التجانس ، بمعنى أنه، إذا كان** φ **وَ** ψ **تابعين بسيطين موجبين وكان** $\lambda > 0$ **كان:**

$$\int_X (\varphi + \lambda\psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \lambda \int_X \psi\, d\mu. \tag{12.1}$$

جـ) **إذا كان** φ **وَ** ψ **تابعين بسيطين موجبين وكان** $\psi = \varphi$ **،** μ **ـ شك كان:**

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu. \tag{13.1}$$

د) **إنه رتيب ، أي أنه إذا كان** $0 \le \varphi \le \psi$ **تابعين بسيطين كان:**

$$\int_X \varphi\, d\mu \le \int_X \psi\, d\mu.$$

هـ) **من أجل كل تابع بسيط موجب** φ **، يشكل التابع المجموعاتي** ν **المعرف بأن:**

$$\nu(E) = \int_E \varphi\, d\mu \doteq \int_X \varphi \chi_E\, d\mu, \;\; E \in \mathcal{A},$$

حيث يشير الرمز χ_E **إلى الدالة المميزة للجزء** E **، قياسا موجبا على** $(X, \mathcal{A})$.

3.1.15.1 **تعريف•** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وَ f تابعا موجبا وقيوسا معرفا على X ولنشير بِـ

$\mathcal{F}_f$ إلى مجموعة التوابع البسيطة φ بحيث $0 \le \varphi \le f$.

يشار إلى تكامل f على X نسبة إلى μ بِـ $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ أو، إختصارا، $\int_X f\, d\mu$ وهو العدد المكتمل المعرف بِـ

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi\, d\mu \mid \varphi \in \mathcal{F}_f \right\}. \tag{14.1}$$

إن المبرهنة 4.7.9.1 تضمن أن $\mathcal{F} \neq \emptyset$ وبالتالي يكون التكامل $\int_X f\, d\mu$ معرفا جيدا وهو عدد حقيقي أو $+\infty$.

4.1.15.1 **مبرهنة• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا وَ** f **وَ** g **تابعين موجبين قيوسين معرفين على** X **. عندئذ**

ا) **إذا كان** $f=g$ **،** μ **ـ شك كان** $\int_X f\,d\mu=\int_X g\,d\mu$.

ب) **لدينا:**

$$\int_X (f+g)\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \tag{15.1}$$

جـ) **إذا كان** $f\leq g$ **كان** $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

د) **إذا كان** A **وَ** B **قيوسين مع** $A\subset B$ **كان:**

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu. \tag{16.1}$$

5.1.15.1 **مبرهنة (بيبو لفي** Beppo-Levi **)• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية متزايدة من التوابع الموجبة والقيوسة المعرفة على** X **والمنتهية** μ **ـ شك.**
عندئذ، تكون النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ **موجودة حيثما كان في** X **ويكون** f **موجبا وقيوسا ولدينا:**

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\Big(=\sup_n \int_X f_n\,d\mu\Big)\cdot \tag{17.1}$$

تعرف كذلك نتيجة بيبو لفي السابقة بإسم **مبرهنة التقارب الرتيب.** تتمتع هذه المبرهنة بتطبيقات شتى، وقبل التطرق إلى بعضها نقدم تعميما بسيطا لها، يتمتع هو الآخر بتطبيقات عديدة.

6.1.15.1 **لازمة• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية** μ **ـ شك متزايدة من التوابع الموجبة والقيوسة المعرفة على** X **والمنتهية** μ **ـ شك.**
عندئذ، تكون النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ **موجودة** μ **ـ شك في** X **ويكون** f **موجبا وقيوسا ولدينا:** $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

7.1.15.1 **قضية• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا وليكن** f **وَ** g **تابعين حقيقين مكتملين موجبين وقيوسين معرفين على** X **. عندئذ:**

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{18.1}$$

1.15.1.8 **مبرهنة• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة الموجبة والقيوسة المعرفة على** X **وليكن** $f=\sum_n f_n$.

عندئذ، يكون التابع الحقيقي المكتمل f **موجبا وقيوسا ولدينا:**

$$\int_X f\,d\mu=\sum_n\int_X f_n\,d\mu. \tag{1.19}$$

1.15.1.9 **قضية• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا وليكن** f **تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا، معرفا على** X **. عندئذ، يشكل التابع المجموعاتي** ν **قياسا على** $(X,\mathcal{A})$ **، حيث:** $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ ، $E\in\mathcal{A}$.

1.15.1.10 **مبرهنة (توطئة فاتو** Lemme de Fatou **)• ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مقاسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة الموجبة والقيوسة المعرفة على** X **. عندئذ:**

$$\int_X \liminf_n f_n\,d\mu\le\liminf_n\int_X f_n\,d\mu. \tag{1.20}$$

1.15.1.11 **ملاحظة•** يمكن للمتباينة الواردة في توطئة فاتو أن تكون تامة. وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ والمتتالية $f_n=n\chi_{]0,1/n[}$ ، $n\in\mathbb{N}^\star$ ، فنرى أن $\liminf_n f_n(x)=0$ مهما كان $x\in\mathbb{R}$ ولذا يكون الطرف الأيسر من (1.20) معدوما في حين أن $\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu=1$ مهما كان n وبالتالي الطرف الأيمن من نفس المتباينة يساوي 1 .

1.15.2 **تكامل التوابع من إشارة كيفية•** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على X ومن إشارة كيفية. وليكن التابعان الحقيقيان المكتملان f^+ وَ f^- المعرفين على X بأن:

$f^+(x)=\max\{f(x),0\}$ وَ $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ ، $x\in X$.

يمكننا أن نكتب f كفرق تابعين موجبين قيوسين: $f=f^+-f^-$. إن التكاملين $\int_X f^+\,d\mu$ وَ $\int_X f^-\,d\mu$ موجدان إذن وإذا كان أحداهما متهيا فإننا نعرف **التكامل** $\int_X f\,d\mu$ **للتابع** f **على** X بأنه:

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu. \tag{21.1}$$

لاحظ أنه إذا كان f وَ g قيوسين وَ وإذا كان $f=g$ ، μ ـ شك كان $f^+=g^+$ وَ $f^-=g^-$ ، μ ـ شك وبالتالي، ينتج من المبرهنة 4.1.15.1 (ا) أن تكامل f على X موجدا إذا وفقط إذا كان تكامل g موجودا ثمّ إن التكاملين متساويان.

يمكن الحصول مباشرة من التعريف السابق على البعض من خواص تكامل التوابع ذات إشارة كيفية. وعلى سبيل المثال لدينا:

$$-\infty \le \int_X f\,d\mu \le \infty, \tag{22.1}$$

وَ

$$\int_X \lambda f\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu,\;\; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{23.1}$$

وفي الحقيقة تنتج (22.1) مباشرة من (21.1) . أمّا (23.1) فمن الملاحظة أنه إذا كان $\lambda > 0$ كان $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ وَ $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ وإذا كان $\lambda < 0$ كان $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ وَ $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$.

1.2.15.1 **التوابع الكمولة والفئة** $L^1(X,\mu)$• يمكن تشييد نظرية هامة جدا تعتني بالتوابع القيوسة التي يكونا من أجلها تكاملا الطرف الثاني من (21.1) متهيين. يشار إلى فئة هذة التوابع بِـ $L^1(X,\mu)$. إنها تدعى **فئة لوبيغ** L^1 . نقول عن عناصر $L^1(X,\mu)$ إنها **كمولة** . لاحظ أنه بما أن

$$f^+,\; f^- \le |f| = f^+ + f^- \tag{24.1}$$

وبما أنه، من أجل كل f من $L^1(X,\mu)$ ، يكون المقدار

$$\int_X (f^+ + f^-)\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$$

متهيا فإننا نفترض في تعريف $L^1(X,\mu)$ أن $f \in L^1(X,\mu)$ إذا وفقط إذا f قيوسا وكان التكامل $\int_X |f|\,d\mu$ متهيا.

توجد أمثلة بسيطة تبين أنه يمكن لِـ $|f|$ أن يكون كمولا دون أن يكون f قيوسا. لذا فشرط القابلية للقياس ضروري في تعريف $L^1(X,\mu)$.

2.2.15.1 قضية• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على X وبحيث يكون تكامله على X نسبة إلى μ معرفا. عندئذ لدينا:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{25.1}$$

3.2.15.1 مبرهنة (متباينة تشيبتشيف)• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على X . عندئذ، من أجل $\lambda > 0$ ، لدينا:

$$\lambda\mu(\{|f| > \lambda\}) \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{26.1}$$

4.2.15.1 لازمة• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن $f \in L^1(X,\mu)$. عندئذ يكون f منتهيا μ ـ شك. ثمّ، إذا كان f موجبا وكان $\int_X f\,d\mu = 0$ كان $f = 0$ ، μ ـ شك على X .

5.2.15.1 قضية• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن λ عددا حقيقيا كيفيا وَ f وَ g تابعين من $L^1(X,\mu)$. عندئذ يكون التابع $f+\lambda g$ كمولا ولدينا:

$$\int_X (f+\lambda g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \lambda\int_X g\,d\mu. \tag{27.1}$$

6.2.15.1 قضية• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين مكتملين وقيوسين معرفين على X . لنفرض أن تكامل f على X نسبة إلى μ معرفا وأن g كمول. عندئذ يكون تكامل التابع $f+g$ على X نسبة ألى μ معرفا ولدينا:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{28.1}$$

7.2.15.1 مبرهنة (توطئة فاتو)• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على X . لنفرض وجود تابع كمول g بحيث:

$$g \leq f_n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{29.1}$$

عندئذ تكون تكاملات $\liminf f_n$ وَ f_n ، $n = 1$ ، 2 ، ... على X نسبة إلى μ موجودة ولدينا:

$$\int_X \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu. \tag{30.1}$$

8.2.15.1 **لازمة• ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مقاسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على** X **. لنفرض وجود تابع كمول** g **بحيث:**

$$f_n \leq g, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{31.1}$$

عندئذ تكون تكاملات $\limsup_n f_n$ **وَ** f_n **،** $n = 1$ **،** 2 **،** $\dots$ **على** X **نسبة إلى** μ **موجودة ولدينا:**

$$\limsup_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n \, d\mu. \tag{32.1}$$

9.2.15.1 **مبرهنة (متهل)• ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مقيسا ولتكن** $\{f_n\}$ **متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على** X **. لنفرض أن:**

ا) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ **موجودة** μ **- شك.**

ب) يوجد تابع كمول g **صفته أن:**

$|f_n| \leq g$ **،** μ **- شك مهما كان** n **طبيعي.**

عندئذ يكون f **كمولا ولدينا:**

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu. \tag{33.1}$$

متهل = مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ.

(Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue.)

3.15.1 **تكاملا ريمان ولوبيغ• لنرمز بـ** $\int_I f \, dx$ **إلى تكامل لوبيغ على المجال** I **للتابع القيوس** f **ونرمز بـ** $\int_a^b f(x) \, dx$ **إلى تكامل ريمان للتابع** f **في حالة وجوده.**

1.3.15.1 **مبرهنة• ليكن** f **تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال** $I = [a, b]$ **. إذا كان** g **ريمان كمولا على** I **كان** f **لوبيغ كمولا على** I **ولدينا:**

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_I f \, dx. \tag{34.1}$$

2.3.15.1 **ملاحظة•** من المعروف أن مفهوم تكامل ريمان يشمل مكاملة التوابع غير المحدودة وذلك بإعتبار ما يسمى «تكامل ريمان المعمم». وعلى سبيل المثال، إذا كان f تابعا غير محدود على $I=[a,b]$ وكان يتمتع بالخواص التالية:

ا) من أجل كل $0<\varepsilon<b-a$ يكون التابع f ريمان كمولا على المجال $[a+\varepsilon,b]$ ؛

ب) النهاية $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx=\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ موجودة؛

فإن العدد $\int_{a+}^{b} f(x)\,d\mu$ هو، تعريفا، تكامل ريمان المعمم للتابع f على $[a,b]$.

إن التوابع التي تتمتع بتكامل لريمان المعمم قابلة للمكاملة حسب لوبيغ كما تقرّه النتيجة الموالية.

3.3.15.1 **مبرهنة•** **ليكن f تابعا حقيقيا معرفا وموجبا على المجال $I=]a,b]$. إذا كان تكامل ريمان المعمم $\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ موجودا فإن f لوبيغ كمولا على $]a,b[$ ولدينا:**

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx=\int_I f\,dx. \tag{35.1}$$

4.3.15.1 **مبرهنة•** **ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $I=[a,b]$. عندئذ يكون f ريمان كمولا على I إذا فقط إذا كان مستمرا شبه كليا على I .**

4.15.1 **الإشتقاق تحت إشارة التكامل•** قبل الحديث عن الإشتقاق تحت إشارة التكامل، نقدم التعميم التالي لمبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة:

1.4.15.1 **مبرهنة•** **ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ $\{f_\lambda\}$ ، حيث λ وسيط من المجال $]\alpha,\beta[$ ، جماعة توابع كمولة على X . لنفرض أن $\{f_\lambda\}$ تتقارب μ ـ شك على X نحو تابع f عندما يؤول λ نحو β وأنه يوجد تابع g كمول على X بحيث $|f_\lambda(x)|\le g(x)$ على X عدا إحتمالا على مجموعة قياسها معدوم قد تتعلق بـ λ .**

عندئذ يكون f كمولا على X ولدينا:

$$\lim_{\lambda\to\beta}\int_X f_\lambda\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

لدينا نتائج مماثلة من أجل $\lambda\in]\alpha,\beta]$ وَ $\lambda\to\alpha$.

2.4.15.1 **مبرهنة• ليكن** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء مقاسا وَ** $F(.,.)$ **تابعا حقيقيا معرفا على** $X\times]\alpha,\beta[$ **. لنفرض أن** $F(.,t)$ **تابع كمول مهما كان** $t \in]\alpha,\beta[$ **ولنضع:**

$$I(t) = \int_X F(x,t)\, d\mu(x).$$

ليكن $t_0 \in]\alpha,\beta[$ **ولنفرض أن المشتق الجزئي للتابع** F **نسبة إلى** t **عند النقطة** t_0 **،** $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)$ **، موجود شبه كليا على** X **. لنفرض كذلك وجود تابع** g **كمول على** X **بحيث، من أجل** t **في جوار لِـ** t_0 **، يكون:**

$$\left|\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}\right| \leq g(x)$$

، μ **ـ شك على** X **.**

عندئذ يكون $\dfrac{\partial F(x,t_0)}{\partial t}$ **كمولا على** X **ولدينا:**

$$\left\{\frac{dI(t)}{dt}\right\}_{t=t_0} = \int_X \frac{\partial F(x,t_0)}{\partial t}\, d\mu(x).$$

16.1 تمارين حول تكامل لوبيغ

.1 باعتبار أمثلة مناسبة، بين أن المتباينة التامة ممكنة في توطئة فاتو وأن مبرهنة التقارب الرتيب غير واردة من أجل المتتاليات المتناقصة.

[يمكنك إعتبار، على $\mathbb{R}$ ، المتتاليتين $f_n(x) = nx^{n-1}\chi_{]0,1[}(x)$ وَ $g_n = \chi_{]n,\infty[}$]

.2 لنضع، من أجل $0 < x$ ،

$$f(x) = \tfrac{d}{dx}\left(x^2 \sin\tfrac{\pi}{x^2}\right) = 2x\sin\tfrac{\pi}{x^2} - \tfrac{2\pi}{x}\cos\tfrac{\pi}{x^2}\,\cdot$$

بما أن تكامل ريمان للتابع f على $]\varepsilon,1[$ هو $-\varepsilon^2\sin\frac{\pi}{\varepsilon^2}$ فإن تكامل كوشي ـ ريمان للتابع f على $]0,1[$ معدوم. بين أن f غير قابل للمكاملة حسب لوبيغ على $]0,1[$ وهذا بأن تبين أن:

$$\int_0^1 \tfrac{1}{x}\left|\cos\tfrac{\pi}{x^2}\right|\, dx = \infty\,.$$

[ليكن $a_n = (n+1/3)^{-1/2}$ وَ $b_n = (n-1/3)^{-1/2}$. ينتج عندئذ من كون $b_n \geq x \geq a_n$ أن $n\pi - \frac{1}{3}\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq n\pi + \frac{1}{3}\pi$ ولذا فإن $|\cos\frac{\pi}{x^2}| \geq \frac{1}{2}$.]

3. ليكن f تابعا موجبا معرفا وكمولا على $\mathbb{R}$ وليكن التابع $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. إستخدم مبرهنة التقارب الرتيب لتبين أن F مستمر.

الهدف من التمارين الأربعة التالية هو وصف كيف نظر عدد من الرياضياتين إلى مفهوم المكاملة. وبهدف الإختصار نفرض أن μ هو قياس لوبيغ المعرف على $(X, \mathcal{L}(X))$ حيث X بلاطة متراصة من $\mathbb{R}^N$ وَ $\mathcal{L}(X)$ عشيرة أجزاء X القيوسة حسب لوبيغ وأن f تابع قيوس وموجب معرف على X .

4. لقد عرف لوبيغ تكامل تابع قيوس محدود f علي النحو التالي: إذا كان $0 \le f \le M$ شك على X فتكامل f هو تعريفا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{mM} \frac{k}{m} \left| \left\{ \frac{k}{m} \le f < \frac{k+1}{m} \right\} \right| .$$

بين أن هذا التعريف ينطبق مع التعريف الوارد في الدرس.

5. ووسع «دلا فالي بوسين» (de la Vallée-Poussin) (1866 – 1962) تعريف لوبيغ ليشمل التوابع القيوسة غير المحدودة علي النحو التالي: ليكن T_m (m عدد طبيعي) التابع الحقيقي الذي تعريفه

$$T_m(t) = \tfrac{1}{2}\{|t+m| - |t-m|\},\ t \in \mathbb{R}.$$ (أرسم بيان T_m)

إذا كان $f_m = T_m \circ f$ هو تابع بتر f عند الأفق m كانت $\{f_m\}$ متتالية عناصرها توابع محدودة وتكامل f هو تعريفا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m\,dx .$$

بين أن هذا التعريف يكافىء التعريف الوارد في الدرس.

6. أمّا «ساكس» (Saks) (1897 – 1942) فإنه يعرف التكامن بطريقة تذكر بتعريف تكامل ريمان - ستيلجس. وبعبارة ادق إذا كانت $\mathcal{P} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ تجزئة قيوسة لِـ X وكان $m_k = \inf_{E_k} f$ فإن التكامل يعطى بِـ

$$\int_X f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(E_k) .$$

بين أن هذا التعريف يكافىء كذلك التعريف الوارد في الدرس.

.7 وأخيرا يوجد مفهوم للتكامل بأنه «المساحة تحت البيان». إن كاراثيودوري (Carathéodory) $(1873-1950)$ يعرّف تكامل تابع محدود وقيوس على النحو التالي: ليكن الجزء

$$A(f) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

إن $A(f)$ جزء من $\mathbb{R}^{N+1}$ قيوس (تأكد من هذا) والتكامل هو تعريفا

$$\int_X f(x)\,dx = |A(f)| \tag{36.1}$$

حيث يشير $|A(f)|$ إلى قياس لوبيغ في $\mathbb{R}^{N+1}$ للجزء المعتبر.

بين أن (36.1) يكافىء كذلك التعريف الوارد في الدرس.

إنه كذلك من المفيد تأويل بعض النتائج ـ مثل مبرهنة التقارب المهيمن ـ على ضوء العلاقة (36.1) . ومدلولها واضح عندئذ.

.8 ما قولك في الاستنتاج «إذا كان f تابعا حقيقيا موجبا وكان $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,dx < \infty$ كان $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ » ؟

.9 ليكن f تابعا كمولا على $\mathbb{R}^N$ ومن أجل $v \in \mathbb{R}^N$ شعاعا مثبتا، ليكن $g(x) = f(x+v)$ إنسحابا لِـ f . بين أن g كمول كذلك وأن:

$$\int_{-\mathbb{R}^N} g\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\,dx\,. \tag{37.1}$$

ما العلاقة (37.1) إلا تعبير آخر لخاصية لاتغيُّر قياس لوبيغ نسبة إلى الإنسحابات.

.10 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة بحيث $\sum\limits_n \int_X |f_n|\,d\mu < \infty$. أثبت أن $\sum\limits_n f_n$ متقاربة مطلقا μ ـ شك وَ:

$$\int_X \left(\sum_n f_n\right) d\mu = \sum_n \int_X f_n\,d\mu\,.$$

بين، على الخصوص أن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ ، μ ـ شك.

.11 ليكن $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ تعدادا للأعداد الناطقة الموجودة في $I = [0,1]$ وليكن التابع $f(x) = \sum_{\{n | x > r_n\}} 2^{-n}$. أحسب $\int_I f(x)\, dx$.

.12 أثبت أن المجموع $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x\, dx$ متقارب نحو نهاية متهية، عينها.

.13 ليكن f تابعا موجبا وقيوسا معرفا على $\mathbb{R}$. أثبت أنه إذا كان $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ كمولا كان $f = 0$ شك. ثمّ إذا كان f كمولا كان $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^n x + 1)$ متهيا شك وهو كمولا ولدينا:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\,.$$

.14 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وليكن $f \in L^1(X, \mu)$. أثبت أن $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ مجموعة σ ـ متهية، أي أنها إتحاد على الأكثر عدود لمجموعات قياساتها متهية.

.15 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا وليكن القياس العرف على $(X, \mathcal{A})$ بأن:

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,\ \ E \in \mathcal{A}\,.$$

1. متى يكون ν ا) متهيا ؟ ب) σ ـ متهيا ؟
2. وليكن كذلك g تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا معرفا على X . بين أن:

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g f\, d\mu\,.$$

.16 أثبت أن توطئة فاتو صادقة من أجل التوابع التي تتعلق بوسيط مستمر. وبعبارة أدق، تحت شروط ملائمة، ينبغي إعطاؤها، يكول لدينا:

$$\int_X \liminf_{i \in I} f_i\, d\mu \leq \liminf_{i \in I} \int_X f_i\, d\mu.$$

هنا I هي مجموعة كيفية للأدلة.

17. أثبت الصيغة التالية لتوطئة فاتو: لتكون $\{f_n\}$ متتالية توابع موجبة وقيوسة معرفة على مجموعة X. إذا كانت $\{f_n\}$ متقاربة نحو f ، μ ـ شك وكان $\int_X f_n\, d\mu \leq M < \infty$ فإن f كمول ولدينا $\int_X f\, d\mu \leq M$.

18. ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا وَ $\{\varphi_n\}$ وَ $\{\psi_n\}$ وَ $\{f_n\}$ متتاليات من التوابع الكمولة المعرفة على X وتتقارب ببساطة نحو φ وَ ψ وَ f على التوالي. لنفرض أن

$$\varphi_n(x) \leq f_n(x) \leq \psi_n(x) \text{ مهما كان } x \in X \text{ وَ } n \in \mathbb{N}^\star$$

وأن

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu \in \mathbb{R} \quad \text{وَ} \quad \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu < \infty$$

أثبت أن المتتالية $\{f_n\}$ كمولة عنصر بعنصر، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

19. ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا وَ $\{f_n\}$ متتالية متناقصة من التوابع القيوسة والموجبة المعرفة على X وتتقارب ببساطة نحو f . أثبت أنه إذا كان $f_1 \in L^1(X, \mu)$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

أعط مثالا يبين أن النتيجة قد لا تصدق إذا إستغنينا عن فرض f_1 كمولا.

20. ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا وَ f تابعا قيوسا وموجبا تماما μ ـ شك على X . أثبت أنه إذا كانت $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ متتالية بحيث $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = 0$ فإن $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

21. ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$ ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع كمولة متقاريبة بإنتظام على X نحو تابع f . أثبت أن f كمول وأن

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

هل لدينا نتيجة مماثلة في حالة $\mu(X)=\infty$ ؟

22. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع f . إذا كان f كمولا فأثبت أنه:

ينتج من كون $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|\,d\mu=\int_X |f|\,d\mu$ أن $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\,d\mu=0$.

وأن النتيجة قد تكون متعذرة إذا كان f غير كمول.

23. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسا وموجبة متقاربية μ ـ شك على X نحو تابع f . لنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu<\infty.$$

هل لدينا:

$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu=\int_E f\,d\mu$ مهما كان $E\in\mathcal{A}$؟

24. ليكن $I=[0,1]$ وَ $(I,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا قيوسا معرفا على I . لنرمز بـ A إلى مجموعة العناصر $x\in I$ بحيث $f(x)\in\mathbb{Z}$. أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\Big[\cos(\pi f(x))\Big]^{2n}\,d\mu=\mu(A).$$

25. ليكن $(I,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا حيث $I=[0,1]$ وليكن $f\in L^1(I,\mu)$. أثبت أن $x^nf(x)\in L^1(I,\mu)$ مهما كان $n\in\mathbb{N}^\star$ ثمّ أحسب:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I x^nf(x)\,d\mu(x).$$

26. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X)<\infty$ وليكن f تابعا حقيقيا موجبا معرفا على X . أثبت أن الشرط الازم والكافي لكي تكون النهاية $\lim_{n\to\infty}\int_X f^n\,d\mu$ موجودة ومتهية هو أن يكون $\mu(\{f>1\})=0$.

27. ليكن $I=[0,1]$ وَ $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية لوبيغ قيوسة معرفة على I وبحيث تكون النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ موجودة شك على I . أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\exp(f_n(x))\,dx=\int_I f(x)\exp(f(x))\,dx$$

وأن

$$\int_I\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x)]^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I[f_n(x)]^2\,dx.$$

ثمّ إذا إفترضنا أن التوابع f_n وَ f لا تنعدم إلا على جزء صفري من I فبين أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\frac{\sin\{f_n(x)\}}{f_n(x)}\,dx=\int_I\frac{\sin\{f(x)\}}{f(x)}\,dx.$$

28. ا) قدّر النهاية $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\Big(1-e^{-x^2/n}\Big)x^{-1/2}\,dx$.

ب) نفس السؤال بالنسبة إلى:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{x/2}\,dx \quad \text{وَ} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\,dx\ .$$

29. ليكن $-1<p$ وَ $0\le r$. بين أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}x^p(\ln x)^r\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\,dx=\int_0^{\infty}x^p(\ln x)^r e^{-x}\,dx<\infty.$$

إستنتج أن:

$$\int_0^{\infty}x^p(\ln x)^r e^{-x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\Big[\ln n-\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)\Big]=-C,$$

حيث $C=0,577215...$ هو ثابت «أويلر».

30. ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$ الفضاء المقاسا المكون من المجموعة $\mathbb{R}$ وعشيرة وقياس لوبيغ عليها وليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ تابعا كمولا. أثبت أنه، من أجل كل $0<\varepsilon$ ، يوجد تابع $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ محدود ومعدوم خارج مجال متراص $[a,b]$ بحيث $\int_{\mathbb{R}}|f-g|\,d\mu\le\varepsilon$.

31. استخدم تعريف الاشتقاق لكي تبرهن على أن $f(t) = \int_{[0,1]} e^{tx} x^{-1/3}\, dx$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة $t \in \mathbb{R}$.

32. ليكن المجال $I = [0,1]$ مزود بقياس لوبيغ وَ $f \in L^1(I)$. أثبت أن التابع $g(t) = \int_I \cos(tf(x))\, dx$ معرف جيدا وقابل للاشتقاق عند كل نقطة $t \in \mathbb{R}$.
ما هي الشروط التي ينبغي أن يحققها f لكي يتمتع g بمشتقين؟ ثلاثة مشتقات؟

33. لتكن $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{k! 2^k} x^k$ حيث $-1 < x < 1$ ، متتالية المجاميع الجزئية لسلسلة ماكلوران (Maclaurin) للتابع $f(x) = (1-x)^{-1/2}$. بين أن $\lim_{n\to\infty} \int_{]-1,1[} |S_n(x) - f(x)|\, dx = 0$.

17.1 قياسات الجداء ومبرهنة فوبيني

تنبيه ـ إننا نهتم فقط فيما يلي بالقياسات الـ σ ـ متهية: نقول عن قياس λ معرف على فضاء قيوس $(F, \mathcal{Q})$ إنه σ ـ **منته** إذا وجدت متتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ عناصرها قيوسة (أي من $\mathcal{Q}$) وبحيث

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = F, \qquad \lambda(M_n) < +\infty,\ \forall n \geq 1.$$

ونقول عندها عن المتتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنها **إفناء** للمجموعة F . يمكننا هنا أن نضف أننا نستطيع دائما فرض المتتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة (وهذا ما سنفعله دائما فيما يلي). ذلك أنه يمكن تعويض هذه المتتالية بالمتتالية $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $M'_n = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ ، ذات عناصر قيوسة ومتزايدة واتحادها هو F .

1.17.1 **مبدأ الإفناء•** لتكن (P) خاصية صادقة بالنسبة إلى كل القياسات المتهية (قياس الفضاء منته). ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا σ ـ متهيا وليكن $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ إفناء لهذا الفضاء. نزود X_n بالعشيرة $\mathcal{A}_n$ ، أثر العشيرة $\mathcal{A}$ على X_n ، وليكن μ_n اقتصار القياس μ على $\mathcal{A}_n$. عندها يكون القياس μ_n متهيا؛ ولذلك يحقق هذا القياس μ_n الخاصية (P) . وعندئذ حتى نحصل على أن μ يحقق الخاصية (P) فيكفي البرهان على أن

«نهايات قيم μ_n التي تظهر في (P) متهية» .

ليكن $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ فضائين مقيسين. وليكن الجداء $X = X_1 \times X_2$ وَ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ عشيرة الجداء عليه. يمكن طبعا تعريف على $(X, \mathcal{A})$ عدة قياسات، لكن يهمنا دراسة تلك التي يمكن إنشاؤها اعتمادا على μ_1 وَ μ_2 ؛ وإذا أمكن تلك التي تسمح بتعميم الخواص الأساسية «للتكاملات المضاعفة» في مقدمتها تبديل ترتيب المكاملة.

2.17.1 **تعريف•** نسمي قياس جداء كل قياس μ معرف على الفضاء القيوس $(X, \mathcal{A}) \doteq (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ ويحقق:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \qquad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1,\ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2, \\ \mu_1(A_1) < \infty,\ \mu_2(A_2) < \infty. \quad (38.1)$$

3.17.1 **قضية (الوحدانية)• ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين** σ **ـ متهيين. عندئذ يوجد قياس جداء واحد على الأكثر على** $(X, \mathcal{A})$ **، يُشار إليه بِـ** $\mu_1 \otimes \mu_2$ **، يتمتع بالخاصية** (38.1) **.**

4.17.1 **مفهوم المقاطع•** ليكن x_1 عنصرا مثبتا في X_1 وليكن j_{x_1} حقن X_2 في $X = X_1 \times X_2$ وهو التابع المعرف بأن $x_2 \mapsto (x_1, x_2)$. من أجل كل جزء Z من X ، أي $Z \in \mathcal{P}(X)$ ، نضع

$$Z_{x_1} \doteq j_{x_1}^{-1}(Z) = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in Z\}.$$

يدعى Z_{x_1} **بمقطع** Z **فوق** x_1 . وإذا كان x_2 عنصرا من X_2 وكان j_{x_2} حقن X_1 في $X = X_1 \times X_2$ وهو التابع المعرف بأن $x_1 \mapsto (x_1, x_2)$ فإن $Z^{x_2} \doteq j_{x_2}^{-1}(Z) = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in Z\}.$ يدعى Z^{x_2} **بمقطع** Z **على مستوى** x_2 . وإذا أشرنا بِـ π_i إلى مسقط X على X_i ، حيث $i = 1$ ، 2 ، فإن $\pi_2^{-1}(\{x_2\}) = X_1 \times \{x_2\}$ وَ $\pi_1^{-1}(\{x_1\}) = \{x_1\} \times X_2$ وعليه

$$Z^{x_2} = \pi_1(\pi_2^{-1}(\{x_2\}) \cap Z) \quad \text{وَ} \quad Z_{x_1} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\{x_1\}) \cap Z).$$

5.17.1 **تعريف•** لتكن $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ عشيرة جداء على الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$. نقول عن فئة $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ إنها تتمتع **بخاصية المقاطع** إذا كان $A_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ ، مهما كان $A \in \mathcal{F}$ ومهما كان $x_1 \in X_1$ ، وكذلك $A^{x_2} \in \mathcal{A}_1$ ، مهما كان $A \in \mathcal{F}$ ومهما كان $x_2 \in X_2$ ، حيث $A^{x_2} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$.

6.17.1 **التوطئة الرئيسية• ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين ولتكن عشيرة الجداء** $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **. عندئذ:**

١- من أجل كل x_1 **من** X_1 **وكل** A **من** $\mathcal{A}$ **فالمقطع** A_{x_1} **ينتمي إلى** $\mathcal{A}_2$ **.**

٢- وإذا كان $\mu_2(X_2) < +\infty$ **كان التابع** $X_1 \ni x_1 \mapsto \kappa_A(x_1) \doteq \mu_2(A_{x_1}) \in \mathbb{R}_+$ **قيوسا مهما كان** A **من** $\mathcal{A}$ **. (نقول** $\mathcal{A}_1$ **- قيوس.)**

7.17.1 **إنشاء جداء قياسين•**

1.7.17.1 **مبرهنة (حالة قياسين منتهيين)• ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين مع** $\mu_1(X_1) < \infty$ **وَ** $\mu_2(X_2) < \infty$ **. ولنضع:**

$$\varrho(A) = \int_{X_1} \kappa_A(x_1)\, d\mu_1(x_1), \ \ \forall A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \tag{39.1}$$

حيث $\kappa_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ **. (ينتج من التوطئة** 6.17.1 **أن** $\varrho(A)$ **معرف جيدا.) عندئذ يشكل** ϱ **قياسا على** $\mathcal{A}$ **كتلته الكلية تساوي** $\mu_1(X_1)\mu_2(X_2) < +\infty$ **. ثمّ إن:**

$$\varrho(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \ \ \forall A_i \in \mathcal{A}_i. \tag{40.1}$$

8.17.1 **مبرهنات تبديل ترتيب المكاملة•** لنبدأ بحالة خاصة.

1.8.17.1 **مبرهنة• ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين ولنفرض أن** $\mu_1(X_1) < +\infty$ **وَ** $\mu_2(X_2) < +\infty$ **. عندئذ، من أجل** $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **، لدينا:**

$$\int_{X_1} \Big[\int_{X_2} \chi_A(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\Big]\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \Big[\int_{X_1} \chi_A(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\Big]\, d\mu_2(x_2). \tag{41.1}$$

لنذكّر بأن χ_A هي الدالة المميزة للجزء A .

2.8.17.1 **إنشاء جداء قياسين σ ـ متهيين•** ليكن μ_1 وَ μ_2 قياسين σ ـ متهيين على الفضائين القيوسين $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$. وليكن $\{X_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ وَ $\{X_2^n\}_{n=1}^{\infty}$ إفنائين لِـ X_1 وَ X_2 على التوالي. ولنضع $\mu_1^n \doteq \chi_{X_1^n}\mu_1$ وَ $\mu_2^n \doteq \chi_{X_2^n}\mu_2$. عندها $\mu_1^n(X_1) < +\infty$ وَ $\mu_2^n(X_2) < +\infty$ ونستطيع تعريف $\mu_1^n \otimes \mu_2^n$ وبعدها نضع:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \doteq \lim_{n\to\infty}(\mu_1^n \otimes \mu_2^n)(A), \quad A \in \mathcal{A} \doteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

يمكنك مستخدما مبرهنة بيبو لفي أن تتأكد من أن الدستور (41.1) يبقى صحيحا.

9.17.1 **مبرهنة (تونيلي Tonelli)• ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين σ ـ متهيين. وليكن** $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **تابعا موجبا وقيوسا نسبة إلى** $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **. عندئذ لدينا ما يلي:**

١- **من أجل كل** $a_1 \in X_1$ **وكل** $a_2 \in X_2$ **مثبتين، يكون التابعان** $x_1 \longmapsto f(x_1, a_2)$ **وَ** $x_2 \longmapsto f(a_1, x_2)$ **قيوسين على** X_1 **وَ** X_2 **على التوالي.**

٢- **ويكون التابعان**

$$x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \quad \text{وَ} \quad x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

معرفين جيدا وموجبين وقيوسين على X_1 **وَ** X_2 **على التوالي.**

٣- **ولدينا**

$$\begin{aligned}\int_{X_1}\Big[\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\Big]\, d\mu_1(x_1) &= \int_{X_2}\Big[\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\Big]\, d\mu_2(x_2) \\ &= \int_{X_1\times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2).\end{aligned}$$

لننهي الآن هذا المقطع، الخاص بالنتائج الرئيسية للتكاملات المضاعفة، بالصيغة التالية لمبرهنة فوبيني. إن هذه المبرهنة تُمكِّن من تبيان القابلية للمكاملة لتابع لمتغيرين ومن حساب هذا الكامل برده إلى حساب تكاملين بسيطين متعاقبين.

10.17.1 مبرهنة (فوبيني Fubini)• ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ **وَ** $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ **فضائين مقيسين** σ **ـ متهيين. وليكن** $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **تابعا قيوسا نسبة إلى** $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **ويحقق أحد الشروط التالية:**

١ـ f موجب.

٢ـ $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

٣ـ $\int_{X_1} [\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\, d\mu_2(x_2)]\, d\mu(x_1) < +\infty$.

٤ـ $\int_{X_2} [\int_{X_1} |f(x_1,x_2)|\, d\mu_1(x_1)]\, d\mu_2(x_2) < +\infty$.

عندئذ لدينا

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\, d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) &= \int_{X_2}\Big[\int_Y f(x_1,x_2)\, d\mu(x_2)\Big]\, d\mu_1(x_1)\\ &= \int_{X_2}\Big[\int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu(x_1)\Big]\, d\mu_2(x_2).\end{aligned}$$

بمعنى أن كل التكاملات موجودة ومتساوية.

18.1 تمارين عامة

.1 لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين ولتكن A_1 وَ B_1 جزئين من X_1 وَ A_2 وَ B_2 جزئين من X_2 . أثبت أن:

.1 $A_1 \times (A_2 \cup B_2) = (A_1 \times A_2) \cup (A_1 \times B_2)$.

.2 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$.

.3
$$\begin{aligned}{}^c(B_1 \times B_2) &= ({}^cB_1 \times X_2) \cup (X_1 \times {}^cB_2)\\ &= ({}^cB_1 \times B_2) \cup ({}^cB_1 \times {}^cB_2) \cup (B_1 \times {}^cB_2).\end{aligned}$$

.4
$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) &= [(A_1 \setminus B_1) \times A_2] \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]\\ &= [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)] \cup [(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)]\\ &\quad \cup [(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)].\end{aligned}$$

2. 1. ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ $J \subset X$ ولتكن الفئة $\mathcal{A}_J = \{A \cap J \mid A \in \mathcal{A}\}$. بين أن $\mathcal{A}_J$ عشيرة على J تسمى **عشيرة أثر** $\mathcal{A}$ **على** J .
2. لنفرض الآن أن J ينتمي إلى $\mathcal{A}$ وليكن μ قياسا موجبا معرفا على $(X,\mathcal{A})$. ليكن التابع المجموعاتي μ_J المعرف على $\mathcal{A}_J$ بأن $\mu_J(B) = \mu(B)$ ، مهما كان $B \in \mathcal{A}_J$. بين أن μ_J قياس موجب على $(J, \mathcal{A}_J)$ يدعى **اقتصار** القياس μ على J .

3. ليكن $\mathcal{A}$ جبر مجموعات على مجموعة X . برهن على أنه إذا كان مغلقا نسبة إلى نهايات متتالياته المتزايدة (بمعنى أنه من أجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ عناصرها من $\mathcal{A}$ ، تكون النهاية $\lim\limits_{\uparrow} A_n$ منتمية إلى $\mathcal{A}$) فإنه عشيرة.

4. لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين وليكن جداءهما الديكارتي $X = X_1 \times X_2$. من أجل $A \subset X$ وَ $x_1 \in X_1$ وَ $x_2 \in X_2$ ، نشير بِـ A_{x_1} إلى مقطع A فوق x_1 وَبِـ A^{x_2} إلى مقطع A في مستوى x_2 ، أي أن $A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1,x_2) \in A\}$ وَ $A^{x_2} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1,x_2) \in A\}$. ولتكن الآن $\{A^i\}_{i\in I}$ جماعة من أجزاء X وَ E وَ F جزئين منه وليكن x_1 عنصرا من X_1 وَ x_2 عنصرا من X_2 . أثبت أن:

$$\begin{array}{ll}
\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A^i\Big)_{x_1} = \bigcup\limits_{i\in I} A^i_{x_1}, & \Big(\bigcup\limits_{i\in I} A^i\Big)^{x_2} = \bigcup\limits_{i\in I} (A^i)^{x_2};\\
\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A^i\Big)_{x_1} = \bigcap\limits_{i\in I} A^i_{x_1}, & \Big(\bigcap\limits_{i\in I} A^i\Big)^{x_2} = \bigcap\limits_{i\in I} (A^i)^{x_2};\\
E \subset F \implies E_{x_1} \subset F_{x_1}; & E \subset F \implies E^{x_2} \subset F^{x_2};\\
(E \setminus F)_{x_1} = E_{x_1} \setminus F_{x_1}, & (E \setminus F)^{x_2} = E^{x_2} \setminus F^{x_2}.
\end{array}$$

أكتب السطر الأخير من أجل $E = X$.

5. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا حقيقيا قيوسا. أثبت أنه حتى يكون f منتميا إلى الفضاء $L^1_\mu(X,\mathcal{A})$ يلزم ويكفي أن يوجد ثابت $C > 0$ بحيث

$$|T_n(f)|_{L^1_\mu} \doteq \int_X |T_n(f)|\, d\mu \le C, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

حيث T_n هو تابع البتر بين الأفقين $-n$ وَ n وهو معرف بأن

$$T_n(t) \doteq \frac{1}{2}\{|t+n| - |t-n|\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

19.1 تمارين حول عشائر وقياسات الجداء ومبرهنة فوبيني

1. ليكن $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$ فضائين قيوسين وليكن فضاء الجداء $(X, \mathcal{A}) \doteq (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. أثبت أن العشيرة $\mathcal{A}$ تتمتع بخاصية المقطع، بمعنى أنه، من أجل كل $A \in \mathcal{A}$ ، يكون لدينا $\mathcal{A}_2 \ni A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\}$ ، مهما كان x_1 من X_1 . ولدينا نفس النتيجة باستبدال الدليلين 1 وَ 2 .

2. ليكن الفضاء المقيس $(I^2, \mathcal{B}^2, \lambda^{(2)})$ ، حيث I مجال من $\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{B}^2$ العشرة البوريلية على الجداء I^2 وَ $\lambda^{(2)}$ قياسه للوبيغ. أدرس القابلية للمكاملة للتابع $f : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ثمّ أحسب التكاملين

$$\int_I \Big\{ \int_I f(x,y)\, d\lambda(y) \Big\}\, d\lambda(x) \quad \text{وَ} \quad \int_I \Big\{ \int_I f(x,y)\, d\lambda(x) \Big\}\, d\lambda(y)$$

في الحالات التالية.

١- $I = [0,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$f(0,0) = 0$ وَ $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2$ من أجل $(x,y) \neq (0,0)$.

٢- $I = [-1,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$f(0,0) = 0$ وَ $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)^2$ من أجل $(x,y) \neq (0,0)$.

٣- $I = [0,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{من أجل } (x,y) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\times [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \\ -2^{2n+1} & \text{من أجل } (x,y) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[\times [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \\ 0 & \text{عدا ذلك.} \end{cases}$$

.3 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ فضائين قيوسين. أثبت أن $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ هي أصغر (بمعنى الاحتوى) عشيرة $\mathcal{S}$ على $X_1\times X_2$ التي تجعل المسقطين π_i قيوسين عندما يزود الجداء بالعشيرة $\mathcal{S}$ والوصول X_i بالعشيرة $\mathcal{A}_i$ ، $i=1$ ، 2 .

.4 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1)$ فضاء قيوسا ولتكن $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$. وليكن α وَ β عددين حقيقين وَ E عنصرا من عشيرة الجداء $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. أثبت أن الجزء $J\doteq\{(x,t)\in X_1\times\mathbb{R}\mid(x,\alpha t+\beta)\in E\}$ عنصر من $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

.5 ليكن E عنصرا $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ، العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$. أثبت أن الجزئين

$$A\doteq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y\in E\}\quad \text{وَ} \quad B\doteq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x-y\in E\}$$

عنصرين من $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

.6 لتكن X وَ Y مجموعتين غير خاليتين ولتكن $\mathcal{C}$ وَ $\mathcal{D}$ فئتين من أجزاء X وَ Y على التوالي. ولنضع $\mathcal{C}\times\mathcal{D}\doteq\{C\times D\mid C\in\mathcal{C},\ D\in\mathcal{D}\}$.

.١ أثبت أن $\sigma(\mathcal{C}\times\mathcal{D})\subset\sigma(\mathcal{C})\otimes\sigma(\mathcal{D})$. يُشير الحرف σ إلى العشيرة المولدة.

.٢ بفرض أن يمكن إيجاد متتاليتين متزايدتين $\{C_n\}_{n\geq1}$ وَ $\{D_n\}_{n\geq1}$ من $\mathcal{C}$ وَ $\mathcal{D}$ على التوالي بحيث $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ وَ $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$ ، فأثبت أن

$$\sigma(\mathcal{C}\times\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{C})\otimes\sigma(\mathcal{D}).$$

.7 .١ لتكن X وَ Y مجموعتين غير خاليتين ولتكن $\mathcal{C}$ وَ $\mathcal{D}$ فئتين من أجزاء X وَ Y على التوالي. هل لدينا $\sigma(\mathcal{C}\times\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{C})\otimes\sigma(\mathcal{D})$ بصيغة عامة؟ أنظر ماذا يحدث في حالة $\mathcal{C}=\{\emptyset\}$ وَ $\mathcal{D}$ عشيرة من أجزاء Y تحتوى على الأقل على أربع عناصر. يُشير الحرف σ إلى العشيرة المولدة.

.٢ لتكن $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ عشيرة أجزاء $\mathbb{R}^2$ البوريلية، وهي للتذكير العشيرة المولدة من أجزاء $\mathbb{R}^2$ المولدة. أثبت أن $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

.8 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ فضائين مقيسين مع $\mu_1(X_1)$ وَ $\mu_2(X_2)$ متهيين وغير معدومين.

١- عين صورتي قياس الجداء $\mu_1 \otimes \mu_2$ بواسطة المسقطين π_i للجداء $X_1 \times X_2$ على X_i ، $i = 1$ ، 2 . ماذا يمكنك قوله إذا كانا μ_1 وَ μ_2 قياسين احتماليين؟

٢- ليكن γ قياسا متهيا على الفضاء المقاس جداء الفضاءين $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$. أثبت أنه إذا كان γ هو جداء القياسين على $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$ فإن

$$\gamma = \frac{\gamma_{\pi_1} \otimes \gamma_{\pi_2}}{\gamma(X_1 \times X_2)}.$$

٣- لنأخذ $X_1 = X_2 \doteq \{0,1\}$ وَ $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \doteq \mathcal{P}(\{0,1\})$. ليكن $a \in [0, \frac{1}{2}]$ عددا حقيقيا وليكن γ القياس المعرف على فضاء الجداء بأن

$$\gamma(\{0,0\}) = \gamma(\{1,1\}) \doteq a \text{ وَ } \gamma(\{0,1\}) = \gamma(\{1,0\}) \doteq \tfrac{1}{2} - a$$

[أ] عين العشيرة $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

[ب] عين قياسات الصورة γ_{π_i} ، $i = 1$ ، 2 .

[جـ] هل القياس γ هو جداء القياسين على $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$ ؟

[د] أوجد شرطا لازما وكافيا لكي يوجد قياسان ν_1 وَ ν_2 على $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$ ، على التوالي، بحيث يكون μ_i هو صورة $\nu_1 \otimes \nu_2$ بواسطة المسقطين π_i ، $i = 1$ ، 2 . أكتب ν_i بدلالة μ_i .

9. ليكن الفضاء القيوس $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \times \tau)$ حيث λ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ وَ τ هو القياس المعرف على $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ كالآتي: من أجل كل $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ، $\tau(A) \doteq \operatorname{card}(A)$ إذا كان هذا العدد الأصلي متهيا وَ $\tau(A) \doteq +\infty$ ماعدا ذلك. ليكن $\Delta \doteq \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$.

١- بين أن $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

٢- أثبت أن فرض القياسين σ متهيين ضروري في مبرهنة تبديل ترتيب التكاملين (مبرهنة فوبيني).

.10 ليكن $X_1 = X_2 = [0,1]$ وَ $\mu_1 = \mu_2$ قياس لوبيغ على المجال الحقيقي $[0,1]$. ولتكن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة تماما عناصرها من $]0,1[$ ومتقاربة نحو 1 . وكذلك، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، ليكن g_n تابع حقيقي مستمر ودعامته محتواة في $]\alpha_n, \alpha_{n+1}[$ مع $\int_0^1 g_n(t)\,dt = 1$. لنضع

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[g_n(x) - g_{n+1}(x)]g_n(y),\ \ (x,y) \in [0,1]^2.$$

بين أن

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

وأن

$$\int_0^1 dx \int_0^1 |f(x,y)|\,dy = +\infty.$$

ماذا تستنتج نسبة إلى فرضيات فوبيني؟

.11 ليكن $N \in \mathbb{N}^\star$ ولنشر بِـ ω_N إلى **حجم كرة الوحدة الأقليدية** لِـ $\mathbb{R}^N$ ، أي أن $\omega_N \doteq \lambda_N(B_N)$ ، حيث λ_N هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$ وَ

$$B_N \doteq \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1\}.$$

١. أرسم B_1 وَ B_2 وَ B_3 ثمّ أحسب ω_1 وَ ω_2 .

٢. من أجل $N \geq 3$ أوجد علاقة تدريجية بين ω_N وَ ω_{N-2} وهذا بملاحظتك أن

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ وَ } x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2$$

٣. استنتج عبارة ω_N من أجل كل $N \geq 2$.

.12 ليكن f وَ g تابعين حقيقيين لوبيغ جموعين على $\mathbb{R}^N$ وليكن التابع h المعرف من $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $h(x,y) \doteq f(x-y)g(y)$.

١ ـ أثبت أن h لوبيغ كمول على $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. استنتج أن التطبيق

$$\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\, d\lambda_N(y) \in \mathbb{R},$$

حيث λ_N هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$ ، معرف شبه كليا على $\mathbb{R}^N$.

٢- لنشير بـ $f \star g$ إلى التابع من $\mathbb{R}^N$ في $\overline{\mathbb{R}}$ المعرف بأن:

$$(f \star g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\, d\lambda_N(y), \;\; x \in \mathbb{R}^N$$

عندما يكون التكامل معرفا، وبـ $(f \star g)(x) \doteq 0$ ما عدا ذلك. أثبت أن التابع $f \star g$ لوبيغ كمول على $\mathbb{R}^N$ وأن:

$$|f \star g|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq |f|_{L^1(\mathbb{R}^N)} |g|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

حيث $|f|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ ، مثلا تشير إلى $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, d\lambda_N(x)$. يدعى $f \star g$ **بجداء تزويج** أو **لف** f وَ g .

تعريف ـ ليكن $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا. نسمي **دعامة** أو **سند** f ملاصقة مجموعة نقط $\mathbb{R}^N$ حيث f غير معدوم، ونشير إلى دعامة f بـ $\operatorname{supp} f$ ، أي أن $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}}$.

.13 ليكن التابع $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بأن

$g(t) = 0$ مهما كان $t \leq 0$ وَ $g(t) = e^{-1/t}$ من أجل $0 < t$.

١- أثبت أن g قابل للاشتقاق ما لا نهاية من المرات على $\mathbb{R}$ ، أي أن g من صنف C^∞ على $\mathbb{R}$.

٢- ليكن c وَ d عددين حقيقين متهيين مع $c < d$. تأكد من أن التابع $g_{c,d}$ المعرف بأن $g_{c,d}(t) = g((t-c)(d-t))$ من صنف C^∞ على $\mathbb{R}$. عين سنده.

٣- نعتمد رموز السؤال السابق ونضع $\theta_{c,d}(t) = \kappa \int_{-\infty}^{t} g_{c,d}(\sigma)\, d\sigma$ ، حيث $\kappa = 1/\int_c^d g_{c,d}(s)\, ds$. تأكد من أن

$$\theta_{c,d} \in C^\infty(\mathbb{R}), \;\; 0 \leq \theta_{c,d} \leq 1, \;\; \theta_{c,d}(t) = 0, \forall t \leq c, \;\; \theta_{c,d}(t) = 1, \;\; \forall t \geq d.$$

استنتج وجود تابع $\xi_{c,d}$ بالصفات التالية:

$$\xi_{c,d} \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ 0 \le \xi_{c,d} \le 1,\ \theta_{c,d}(t) = 1, \forall t \le c,\ \theta_{c,d}(t) = 0,\ \forall t \ge d.$$

٤- ليكن a وَ b عددين حقيقين متهيين مع $a < b$ وليكن $\varepsilon > 0$ بحيث $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. بين وجود تابع π_ε بالمواصفات التالية:

$$\pi_\varepsilon \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ 0 \le \pi_\varepsilon \le 1,\ \pi_\varepsilon(t) = 1, \forall t \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon],\ \operatorname{supp} \pi_\varepsilon \subset]a, b[.$$

٥- أثبت أن التابع ϱ من $\mathbb{R}^N$ في $\mathbb{R}$ المعرف بأن $\varrho(x) = g(1 - |x|^2)$ ، $x \in \mathbb{R}^N$ حيث $|x|$ هو النظيم الأقليدي للشعاع x ، أي أن

$$|x|^2 = |(x_1, \dots, x_N)|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2,$$

من صنف C^{∞} على $\mathbb{R}^N$. عين دعامته.

٦- ليكن r وَ R عددين حقيقين متهيين مع $0 < r < R$ ويتكن $a \in \mathbb{R}^N$. بين وجود تابع φ بالمواصفات التالية:

$$\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \varphi(x) = 1, \forall x \in \overline{B}(a, r),\ \operatorname{supp} \varphi \subset B(a, R),$$

حيث $B(a, R)$ ، مثلا، هي الكرة الأقليدية ذات المركز a ونصف قطر R .

ترميز ـ ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^N$. نشير بِـ $\mathcal{D}(\Omega)$ أو بِـ $C_c^{\infty}(\Omega)$ إلى **مجموعة** التوابع الحقيقية المعرفة على Ω ، من صنف C^{∞} ، وذات دعامات **متراصة محتواة** في Ω .

14. أثبت توطئة **أوريشون** (Urysohn) : ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^N$ وليكن $K \subset \Omega$ جزء متراصا. عندئذ يوجد تابع $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **بحيث** $\varphi(x) = 1$ مهما كان $x \in K$.

[إرشد: يمكن اعتبار $\delta = d(K, \partial\Omega) > 0$ ، المسافة بين K وحافة Ω ثمّ تغطية المتراص K بعدد منته من الكرات المفتوحة ذات مراكز من K ، $\{B(a_i, \delta/4)\}_{i=1}^{k}$ ؛ ثمّ استخدام السؤال الأخير في التمرين السابق لإنشاء توابع $\{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ ، من صنف C^{∞} ، $\varphi_i \equiv 1$ على $\overline{B}(a_i, \delta/4)$ وَ $\operatorname{supp} \varphi_i \subset B(a_i, \delta/2)$ وأخيرا وضع $\varphi = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_k)$.]

20.1 فضاءات لوبيغ $\mathcal{L}^p$ وَ L^p $(1 \le p < \infty)$

1.20.1 **انصاف النظيمات المعممة N_p •** ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا ولنشر بِـ $\mathcal{M}_+$ الى مجموعة التوابع القيوسة من $(X,\mathcal{A})$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$.

من أجل μ قياس موجب على $\mathcal{A}$ وَ $1 \le p < \infty$ عدد حقيقي، نضع

$$N_p(f) = \Big(\int_X f^p \, d\mu\Big)^{1/p}.$$

2.20.1 **مبرهنة • تتمتع التطبيقات $f \mapsto N_p(f)$ لِـ $\mathcal{M}_+$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ $(1 \le p < \infty)$ بالخواص التالية:**

١- $N_p(0) = 0$ ، $N_p(cf) = cN_p(f)$ ، **مهما كان** $c \in \mathbb{R}_+$ **ومهما كان** $f \in \mathcal{M}_+$.
ثمّ إنه إذا كان f وَ g **عنصرين من** $\mathcal{M}_+$ **مع** $f \le g$ **كان** $N_p(f) \le N_p(g)$.

٢- **إذا كان** $p > 1$ وَ $p' > 1$ **عددين حقيقيين مترافقين، أي بحيث** $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ، **كانت لدينا متباينة هولدر** (Hölder) :

$$N_1(fg) \le N_p(f)\, N_{p'}(g), \ \ \forall f,g \in \mathcal{M}_+.$$

٣- **ولدينا متباينة مينكوفسكي** (Minkowski) :

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g), \ \ \forall f,g \in \mathcal{M}_+.$$

3.20.1 **ملاحظة •** لا تشكل التوابع N_p نظيمات لأنها قد تأخذ القيمة $+\infty$.

4.20.1 **مبرهنة (التحدب العدود)•**

١) **إذا كانت** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية متزايدة عناصرها من** $\mathcal{M}_+$ **فإن:**

$$N_p\Big(\sup_{n\ge1} f_n\Big) = \sup_{n\ge1} N_p(f_n).$$

٢) **وإذا كانت** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية كيفية عناصرها من** $\mathcal{M}_+$ **فإن:**

$$N_p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

5.20.1 بعض الأمثلة الهامة •

١ ـ أشهر وأهم الأمثلة هو الذي نحصل عليه بأخذ $X=\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{A}=\mathcal{L}$ ، عشيرة أجزاء $\mathbb{R}$ القيوسة حسب لوبيغ وَ $\mu=\lambda$ ، قياس لوبيغ.

٢ ـ $X=\mathbb{N}^\star$ وَ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N}^\star)$ ، عشيرة كل أجزاء $\mathbb{N}^\star$ وَ $\mu=\mu_d$ ، قياس التعداد. هنا

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n\geq 0$$

ولذا $N_p(f)=\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p}$ وتصبح متباينتا هولدر ومينكوفسكي متباينتين حول السلاسل العددية الموجبة:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p},\ \ a_n,b_n\geq 0\\ \Big[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^p\Big] &\leq \Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big]^{1/p}+\Big[\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\Big]^{1/p},\ \ a_n,b_n\geq 0.\end{aligned}$$

6.20.1 ملاحظتان •

١ ـ لدينا كذلك المتباينة الهامة عمليا:

$$0\leq f\leq g\Rightarrow (N_p(f))^p+(N_p(g-f))^p\leq (N_p(g))^p.$$

وهي ناتجة من تطبيق المتباينة البسيطة:

$$a^p+b^p\leq (a+b)^p,\ \ a>0,\ \ b>0,\ \ \forall p\geq 1$$

على f وَ $g-f$ مع $f\geq 0$ وَ $g-f\geq 0$.

٢ ـ حالة $0<p<1$. عندئذ تنقلب متباينة هولدر لتصبح:

$$\int_X fg\,d\mu\geq\Big(\int_X f^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X g^{p'}\,d\mu\Big)^{1/p'},\ \ \forall f,g\in\mathcal{M}_+$$

حيث $p'=p/(p-1)$ وهو سالب في هذه الحالة. كما تنقلب متباينة مينكوفسكي لتصبح:

$$\Big(\int_X f^p\,d\mu\Big)^{1/p}+\Big(\int_X g^p\,d\mu\Big)^{1/p}\geq\Big(\int_X (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p},\ \ \forall f,g\in\mathcal{M}_+$$

التي تكتب $N_p(f)+N_p(g)\geq N_p(f+g)$ من أجل التوابع الموجبة. وهي لا تعطي المتباينة «العكسية» لمتباينة مينكوفسكي في حالة التوابع ذات إشارة كيفية.

٣- متباينة أشباه النظيمات: من أجل f وَ g كيفيين، يمكن البرهان على المتباية

$$N_p(f+g)\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\{N_p(f)+N_p(g)\}$$

التي تُمكن من النظر إلى $\mathcal{L}^p$ $(1>p>0)$ كفضاءات شبه نظيمية.

7.20.1 **الفضاءات** $\mathcal{L}^p$ $(\infty>p\geq 1)$• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن $\mathcal{M}(=\mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}))$ فضاء التوابع القيوسة من $(X,\mathcal{A})$ في $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. لنذكّر القارىء بأنه إذا كان $f\in\mathcal{M}$ كان $|f|\in\mathcal{M}_+$.

1.7.20.1 **تعريف**• ليكن $\infty>p\geq 1$. نسمي فضاء $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ الفضاء الجزئي من الفضاء $\mathcal{M}$ المعرف بأن:

$$f\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)\Longleftrightarrow f\in\mathcal{M} \text{ وَ } |f|^p \text{، } \mu \text{ - كمول}$$

إذن توابع $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ هي توابع قيوسة وبحيث $\int_X|f|^p\,d\mu<\infty$. أمّا كون $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء شعاعي جزئي فينتج من المبرهنة 2.20.1 .

عند الممارسة وبهدف الاختصار نكتب فقط $\mathcal{L}^p$. ونسمي مجازا عناصر هذا الفضاء بالتوابع ذات القوة p كمولة (أو جموعة) ومن أجل f من $\mathcal{L}^p$ نكتب كذلك $N_p(f)=(\int_X|f|^p\,d\mu)^{1/p}$.

في حالة $X=\mathbb{N}$ وَ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ وَ μ قياس التعداد، نستخدم الترميز ℓ^p وهو فضاء المتتاليات $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع $a_n\in\mathbb{R}$ وَ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty$. التوابع الـ μ - كمولة توافق حالة $p=1$.

8.20.1 **بعض نتائج المقطع** 1.20.1• ينتج من دراسة المقطع 1.20.1 أن $\mathcal{L}^p$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ وأن التطبيق $\mathcal{L}^p\ni f\mapsto N_p(f)\in\mathbb{R}_+$ نصف نظيم على $\mathcal{L}^p$.

الفضاء التوبولوجي الذي سيُعتبر فيما يلي هو دائما $\mathcal{L}^p$ مزود بنصف النظيم N_p ونستمر في الإشارة إليه بِـ $\mathcal{L}^p$. إن هذا الفضاء غير مفصول. هل لك أن تقول لماذا؟

إننا ندعو التقارب في هذا الفضاء **بالتقارب بالمتوسط من الترتبة** p .

9.20.1 **ملاحظات•**

- لقد اقتصرنا هنا على الحالة حيث $1 \leq p < \infty$ وسوف نتطرق إلى الحالة $p = \infty$. يوجد تباين كبير بين الفضاءات L^p وَ L^∞ ، التي ستشيد اعتمادا على أنصاف النظيمات N_p وَ N_∞ ؛ ويلاحظ هذا التباين مثلا فيما يتعلق بمسألة **الثنوية** .
- في حالة $0 < p < 1$ نحصل على فضاءات L^p شبه نظيمية. هذه فضاءات شعاعية توبولوجية. والجدير بالذكر أن ثنوي الفضاء L^p في هذه الحالة لا يحتوي إلا على العنصر المعدوم 0 ، الأمر الذي يحد من فوائد استخدام هذه الفاءات في التحليل التابعي.

10.20.1 **بعض الخواص المباشرة•** ليكن f وَ g تابعين من $\mathcal{M}$. لدينا ما يلي:

١ ـ إذا كان f عنصرا من $\mathcal{L}^p$ وكان $f(x) = g(x)$ ، μ ـ شك فإن $g \in \mathcal{L}^p$ وَ $N_p(g) = N_p(f)$.

٢ ـ إذا كان $f \in \mathcal{L}^p$ كان $|f| \in \mathcal{L}^p$ وَ $N_p(f) = N_p(|f|)$.

٣ ـ إذا كان $f \in \mathcal{L}^p$ كان f^- وَ $f^+ \in \mathcal{L}^p$.

٤ ـ إذا كان f وَ $g \in \mathcal{L}^p$ كان $\inf\{f,g\}$ وَ $\sup\{f,g\} \in \mathcal{L}^p$.

يمكنك التأكد من الخواص الأوليين أن تستخدام التعريف نفسه. ولتأكد من الخاصيتين الثالثة والرابعة لاحظ أن $f^+ = \frac{1}{2}\{f + |f|\}$ وَ $f^- = \frac{1}{2}\{|f| - f\}$ وأن $\sup\{f,g\} = f + (g-f)^+$ وَ $\inf\{f,g\} = -\sup\{-f,-g\}$.

ينتج من هذا أن $\mathcal{L}^p$ فضاء **شبكي** .

11.20.1 **مبرهنة ريس وفيشر• $\mathcal{L}^p$ فضاء توبولوجي تام.**

تنتج مبرهنة ريس (F. Riesz) وفيشر (E.S. Fischer) هذه من المبرهنة التالية.

1.11.20.1 **مبرهنة• لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية لِكوشي في $\mathcal{L}^p$. عندئذ توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}$ بحيث تكون:**

١ ـ السلسلة ذات الحد العام $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ متقاربة.

٢ـ السلسلة ذات الحد العام $f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ **متقاربة مطلقا** μ **ـ شك في** X .

٣ـ لنضع μ **ـ شك في** X ، $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. **عندئذ** $f \in \mathcal{L}^p$ **وتكون المتتالية** $\{f_n\}$ **متقاربة نحو** f **في** $\mathcal{L}^p$.

2.11.20.1 **لازمة• لتكن** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية لِكوشي في** $\mathcal{L}^p$ **وبحيث تكون المتتامية** $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **متقاربة** μ **ـ شك في** X **نحو** $f(x)$. **عندئذ ينتمي** f **الى** $\mathcal{L}^p$ **وتكون المتتالية** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متقاربة نحو** f **في الفضاء** $\mathcal{L}^p$.

3.11.20.1 **ملاحظات•**

١ـ لا يمكن بصفة عامة انتظار نتيجة أحسن من التقارب μ شبه كليا لِمتتالية جزئية من $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، أنظر الملاحظة الثانية أدنه. وبعبارة أخرى لا يؤدي تقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{L}^p$ إلى تقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، μ ـ شك. الهدف من المثال التالي هو توضيح هذه النقطة: لتكن المجموعة $X = [0,1]$ مزودة بعشيرتها البوريلية $\mathcal{B}_{[0,1]}$ وبقياس لوبيغ. من أجل كل عدد طبيعي k ، نعتبر التوابع التالية $\varphi_j^{(k)}$ ، $j = 1$ ، ...، k المعطاة بأن $\varphi_j^{(k)} = \chi_{I_j^k}$ ، الدالة المميزة للمجال $I_j^k = [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$.
ثمّ نأخذ المتتالية العرفة بأن:

$$f_1 = \varphi_1^{(1)}, f_2 = \varphi_1^{(2)}, f_3 = \varphi_2^{(2)}, f_4 = \varphi_1^{(3)}, \dots, f_n = \varphi_j^{(k)},$$

مع $\varphi_j^{(k)}$ بحيث $n = \frac{k(k-1)}{2} + j$ ، $1 \leq j \leq k$ ، أي أن $f_n = \chi_{I_j^k}$. وليكن التابع $f = 0$ ، لدينا:

$$N_p(f_n - f) = \Big(\int_{[0,1]} f_n^p \, d\lambda\Big)^{1/p} \leq \Big(\frac{1}{k}\Big)^{1/p}, \ \forall n \geq k(k-1)/2$$

ولذا تتقارب المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{L}^p$ نحو التابع المعدوم. ويمكنك أن ترى أن هذه المتتالية لا تتقارب نحو الصفر λ ـ شك على $[0,1]$. وهذا لأنه، من أجل كل $x \in [0,1]$ ، توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $f_{n_k}(x) = 1$ وتوجد متتالية جزئية $\{f_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ بحيث $f_{n_l}(x) = 0$.
لكننا نستطيع استخراج متتالية جزئية تتقارب نحو 0 .

٢- وفيما يتعلق بمتتاليات فوريي، نعرف النتيجة التالية، المبرهن عليها بأدوات أولية في حالة التوابع الحقيقية ذات دورة قدرها 2π ومستمرة على $\mathbb{R}$ ، التي تشكل فضاء جزئي من الفضاء $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2([0,2\pi], \mathcal{B}_{[0,2\pi]}, \lambda)$ ، وهي أن سلسلة فوريي المرفقة بتابع f من $\mathcal{L}^2$ تتقارب نحو هذا التابع f في $\mathcal{L}^2$. وحسب المبرهنة السابقة، نستطيع أن نستخرج متتالية جزئية من متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، تتقارب λ - شك على $[0,2\pi]$. إلا أن هذه النتيجة تبقى غير كافية لأن كارلسون Carleson برهن سنة 1966 تخمين لوسين Lusin القائل بأن **سلسلة فوريي لتابع من $\mathcal{L}^2$ تتقارب λ - شك نحو** f .

12.20.1 مبرهنات التقارب•

1.12.20.1 مبرهنة بيبو لفي (للتّقارب الرتيب)• لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع موجبة ومتزايدة عناصرها من الفضاء $\mathcal{L}^p$ وبحيث $\sup\limits_{n\geq 1} N_p(f_n) < \infty$. عندئذ:

١- $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(x) < \infty$ ، μ **- شك على** X .

٢- ليكن $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ، μ **- شك على** X . **ينتمي التابع f إلى الفضاء $\mathcal{L}^p$ وَ** $N_p(f) = \lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n)$ **وتتقارب المتتالية** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **نحو f في الفضاء $\mathcal{L}^p$.**

2.12.20.1 لازمة• لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متناقصة من التوابع الموجبة والمنتمية إلى الفضاء $\mathcal{L}^p$. عندئذ تتقارب هذه المتتالية نحو تابع f في الفضاء $\mathcal{L}^p$ ولدينا

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \inf_{n\geq 1} N_p(f_n).$$

3.12.20.1 ملاحظة• يجب أن ينتبه القارىء إلى أن نتيجة هذه اللّازمة غير واردة من أجل متتالية كيفية. أنظر المثال الوارد ضمن الملاحظات 6.12.20.1 أدناه.

4.12.20.1 مبرهنة لوبيغ (للتقارب بالهيمنة)• لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الفضاء $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ وليكن $f \in \mathcal{M}$. لنفرض أن:

١- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ، μ **- شك.**

٢ـ يوجد تابع $g \in \mathcal{L}^p$ **بحيث** $|f_n(x)| \le g(x)$ ، μ **ـ شك، مهما كان** $n \in \mathbb{N}^\star$.

عندئذ ينتمي f **إلى** $\mathcal{L}^p$ **وتكون المتتالية** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متقاربة في الفضاء** $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ **نحو** f .

5.12.20.1 **لازمة• لتكن** $\mathcal{I}$ **مجموعة مرَشَّحة بواسطة مرَشِّحة** $\mathcal{F}$ **تتمتع بأساس عدود ولتكن** $\{f_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ **جماعة توابع تنتمي إلى** $\mathcal{L}^p$ **وبحيث:**

١ـ $\lim\limits_{J,\mathcal{F}} f_j(x) = f(x)$ ، μ **ـ شك.**

٢ـ يوجد تابع $g \in \mathcal{L}^p$ **بحيث** $|f_j(x)| \le g(x)$ ، μ **ـ شك، مهما كان** j **من** $\mathcal{F}$.

عندئذ ينتمي f **إلى** $\mathcal{L}^p$ **وَ لدينا** $\lim\limits_{J,\mathcal{F}} f_j = f$ **في** $\mathcal{L}^p$.

6.12.20.1 **ملاحظات•**

○ إن الفرضية (٢) $|f_n(x)| \le g(x)$ الواردة في مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة تقوي الفرضية الواردة في مبرهنة بيبو لفي 1.12.20.1 . وقد لا تستقيم النتيجة من أجل متتالية كيفية تحقق فقط الشرط $\sup_{n\ge1} N_p(f_n) < +\infty$ أو $\sup_{n\ge1} f_n(x) < +\infty$.

مثال ليكن $X = \mathbb{N}$ مزود بعشيرة أجزائه $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ وبقياس التعداد μ_d وليكن الفضاء ℓ^p الفضاء الموافق. من أجل المتتالية $\{f_n\}$ حيث $f_n = \chi_{\{n\}}$ لدينا $\int_{\mathbb{N}} f_n^p \, d\mu_d = 1$ ولذا $N_p(f_n) = 1$ وعليه

$$\sup_{n\ge0} N_p(f_n) = 1 < +\infty \quad \text{وَ} \quad \sup_n f_n = 1 .$$

ولدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{\{n\}}(k) = 0$ مهما كان $k \in \mathbb{N}$. لكن ليس لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ في ℓ^p ، وإلا كان لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n) = 0$ ، وهذا تناقض.

نلاحظ أنه ليس لدينا هنا لا المساواة $\sup N_p(f_n) = N_p(\sup f_n)$ ولا المساواة $\inf N_p(f_n) = N_p(\inf f_n)$.

○ إن فرضية اللّازمة «مرشّحة تتمتع بأساس عدود» هذا ما يتبين من المثال التالي. ليكن المجال $I = [0,1]$ مزود بعشيرتها البوريلية وقياس لوبيغ. ولتكن المجموعة Λ لأجزاء I المتهية. وليكن التابع $A \in \Lambda \mapsto f_A = \chi_A$. يمكن النظر إلى A كدليل متعدد. لتكن $\mathcal{F}$ مرشحة مقاطع Λ من أجل علاقة الاحتواء. إن المجموعات $\{A \mid A \in \Lambda, B \supset A\}$ حيث B يتجول في Λ ، تشكل أساسا غير عدود للمُرشّحة $\mathcal{F}$ لأنها مجموعة مقاطع Λ . لدينا:

$\lim\limits_{A,\mathcal{F}} f_A(x) = \lim\limits_{A,\mathcal{F}} \chi_A(x) = 1$ مهما كان $x \ni [0,1]$.

ثمّ إن $1 \ni \mathcal{L}^1(I,\mathcal{B},\lambda)$ يستلزم $f_A \ni \mathcal{L}^1$ وَ $|f_A| \leq 1$ مهما كان $A \ni \Lambda$. لكن $\int_I f_A \, d\lambda = 0$ لأن $f_A(x) = 0$ ، λ ـ شك (تذكر أن قياس لوبيغ لوحيدات العنصر معدوم) ولدينا $\int_I 1 \, d\lambda = 1$ ، ولذا لا يمكن أن يكون لدينا $\lim\limits_{A,\mathcal{F}} f_A = 1$ في $\mathcal{L}^1$.

13.20.1 فضاءات لوبيغ L^p $(\infty > p \geq 1)$•

1.13.20.1 **تذكير وتعريف•** ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. نقول عن تطبيق $q : E \to \mathbb{R}$ إنه نصف نظيم على E إذا كان

(ا) $q(x) \geq 0$ مهما كان $x \ni E$ ؛

(ب) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ مهما كان x ، $y \ni E$ ؛

(جـ) $q(\alpha x) = |\alpha| q(x)$ مهما كان $x \ni E$ مهما كان $\alpha \ni \mathbb{R}$.

من المعروف أنه إذا كان لدينا فضاء شعاعي نصف نظيمي فيمكن انشاء فضاء نظيمي باعتبار حاصل قسمته على علاقة التكافؤ $\mathcal{R} : \quad f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow ||f-g|| = 0$ حيث $||\cdot||$ يشير إلى نصف النظيم.

في فضاءات لوبيغ $\mathcal{L}^p$ مزودة بأنصاف النظيمات N_p ، تُترجم إذن العلاقة $\mathcal{R}$ بأن $N_p(f-g) = 0$. وهي تكافىء أيضا $f(x) = g(x)$ ، μ ـ شبه كليا.

ليكن $\mathcal{N}_\mu$ الفضاء الجزئي من الفضاء $\mathcal{M}$ المكون من التوابع المهملة. عندها

$f(x) = g(x)$ ، μ ـ **شك** $\Leftrightarrow f - g \ni \mathcal{N}_\mu \Leftrightarrow N_p(f-g) = 0$.

$L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ **هو تعريفا الفضاء الحاصل** $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/\mathcal{N}_\mu$.

وهو فضاء نظيمي إذ إننا بوضع $||\tilde{f}||_p = N_p(f)$ مع $f \in \tilde{f}$ نحصل على نظيم في $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. وبهدف الاختصار، نشير إلى $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ فقط بـ L^p . يتكون هذا الفضاء من صفوف للتكافؤ التي نشير إليها بـ $\tilde{f}$ (وفي غالب الأحيان بـ f ، دون ~ ، إلا إذا كان هناك مجال للبس). إذن L^p هو الفضاء الجزئي من $\mathcal{M}/\mathcal{N}_\mu$ المعرف بأن:

$$||\tilde{f}||_p < +\infty, \quad (||\tilde{f}||_p = N_p(f),\ f \in \tilde{f}).$$

ويمكن بطبيعة الحال الاقتصار على استخدام التوابع المعرفة μ ـ شك فقط ثمّ اعتبار صفوف تكافوئها.

2.13.20.1 **ملاحظة•** يجب ألّا يغيب عن أذهاننا أن كل عنصر من L^p قيد يتكون من مجموعة غير قابلة للعد عناصرها توابع قيوسة تنطبق μ ـ شك. وعلى سبيل المثال في حالة الفضاء $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ ، λ هو قياس لوبيغ، يحتوي «التابع» المعدوم، صف تكافؤ صفر، على التوابع التالية: 0 ، $c\chi_{\{0\}}$ ، $c\chi_\mathbb{N}$ ، $c\chi_\mathbb{Z}$ ، $c\chi_\mathbb{Q}$ ، $c\chi_{\{r\}}$ ، ... ، c ثابت حقيقي، وَ r أية نقطة حقيقية. يتضح مما سبق أنه إذا كان f عنصرا من L^p فلا معنى على العموم للحديث عن قيمته $f(x)$ عند نقطة ما x من X لأنه يمكن تغير هذه القيمة دون أن يتغير (صف) f .

14.20.1 **بعض الخواص الأساسية•**

1.14.20.1 L^p **فضاء بناخي•** إن L^p فضاء شعاعي نظيمي بالانشاء. وهو تام حسب مبرهنة ريس وفيشر.

2.14.20.1 L^p **فضاء لريس•** أي أنه فضاء شعاعي مرتب وشبكي:

إنه فضاء شعاعي مرتب: $\tilde{f} \leq \tilde{g} \iff f(x) \leq g(x)$ ، μ ـ شك كليا ويمكننا أن نتأكد من أن هذه العلاقة منسجمة مع بنية الفضاء الشعاعي.

إنه فضاء شعاري شبكي: $\tilde{f}$ وَ $\tilde{g}$ ينتميان إلى L^p يستلزم أن $\sup\{\tilde{f}, \tilde{g}\} \in L^p$ وَ $\inf\{\tilde{f}, \tilde{g}\} \in L^p$.

هذا ناتج من كون $\sup\{f, g\} \in \mathcal{L}^p$ وَ $\inf\{f, g\} \in \mathcal{L}^p$ ومن

$$\inf\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \widetilde{\inf\{f, g\}} \quad \text{وَ} \quad \sup\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \widetilde{\sup\{f, g\}} .$$

وهما المساوتان اللّاتان يمكن البرهان عليهما بالكيفية المألوفة بالرجوع إلى التعريف.
وينتج مما سبق أن:

$$|\tilde{f}| = \widetilde{|f|}, \quad (\tilde{f})^+ = (\widetilde{f^+}), \quad (\tilde{f})^- = (\widetilde{f^-}).$$

3.14.20.1 **مبرهنة• L^p فضاء شبكي تام.**
يعتمد إثبات هذه المبرهنة على الخواص الأربع التالية.

3.14.20.1 .١ الخاصية الأولى• التوبولوجيا المعرفة على L^p بواسطة النظيم $||\cdot||$ منسجمة مع بنية الفضاء الشعاعي المرتب لـ L^p .

3.14.20.1 .٢ الخاصية الثانية• في فضاء ريس L^p ، التطبيق $u \mapsto |u|$ مستمر بانتظام.

3.14.20.1 .٣ الخاصية الثالثة• ليكن E فضاء جزئيا من L^p مكونا من عناصر موجبة والمرشح بالعلاقة $\leq$ ، إذا كانت مرشحة مقاطع E تقبل نهاية في L^p فإن هذه النهاية هي الحد الأعلى لـ E .

3.14.20.1 .٤ الخاصية الرابعة• ليكن E فضاء جزئيا في L^p مكونا من عناصر موجبة ومرشح بالعلاقة $\leq$. حتى يكون لـ E حد أعلى في L^p يلزم ويكفي أن يكون $\sup\limits_{u\in E} ||u||_p < +\infty$.

15.20.1 علاقتا التقارب بالمتوسط بالتقارب المنتظم والتقارب μ ـ شك•

0.15.20.1 .٥ μ غير محدود• بمعنى أن $\mu(X) = +\infty$. إذا كانت المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة في $\mathcal{L}^p$ (أي بالمتوسط) فيمكن استخراج منها متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ متقاربة μ شك على X ولا يمكن على العموم انتظار نتيجة أفضل كأن تكون مثلا كل المتتالية متقاربة μ ـ شك. أمّا التقارب μ ـ شك فلا يؤدي إلى التقارب إلى التقارب بالمتوسط إلّا إذا توفرت مثلا شروط التقارب بالهيمنة أو التقارب الرتيب. ولا يؤدي التقارب المنتظم إلى التقاب بالمتوسط. وعلى سبيل المثال في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$

تتقارب المتتالية $\{f_n\}$ ، حيث

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[-n,n]}(x), \;\; x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}^\star$$

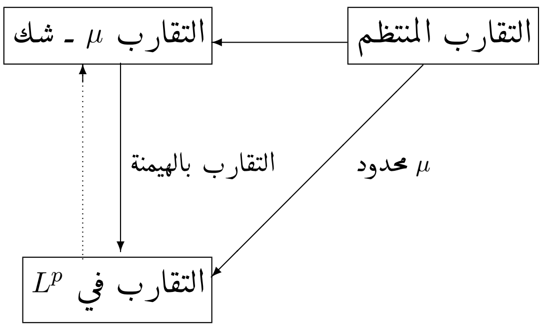
بانتظام على $\mathbb{R}$ نحو الصفر (التابع المعدوم) لكنها لا تتقارب في $\mathcal{L}^1$ نحو أي تابع من هذا الفضاء إذ إن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = +\infty$.

0.15.20.1 .٦ μ محدود• بمعنى أن $\mu(X) < +\infty$. إذا كان μ محدودا فإن التقارب المنتظم يستلز التقارب في L^p . وذلك لأنه من أجل كل f من L^p يكون لدينا المتباينة

$$|f|_{L^p} \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\sup_{x\in X}|f(x)|\right)\{\mu(X)\}^{1/p}$$

التي إذا ما طبقت على $f_n - f$ تستلزل النتيجة.

0.15.20.1 .٧ يمكن تلخيص• المقارنة السابقة في الشكل التالي، حيث يعني السهم $\cdots\to$ أن الخاصية واردة من أجل متتالية جزئية فقط:



لا يستلزم إذن التقارب في L^p القارب المنتظم، إذ ليس لدينا حتى التقارب μ شبه الكلي. هذا يثير التساؤل: هي توجد شروط تضمن صحة العكس؟

ويجب أن نقول هنا أن التقارب المنتظم غير ملائم في مسائل المكاملة إذ إننا في هذا الميدان لا نعمل على العموم إلا على المجموعات المعرفة بتقريب قياسه معدوم أي أننا لا نفرق بين مجمعتين قياس الفرق (المجموعاتي) بينهما معدوم.

التقارب الـ μ شبه منتظم ملائم أكثر نسبة إلى المكاملة.

16.20.1 **حالة الفضاء** L^2•

1.16.20.1 **مبرهنة•** $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ **مزود بالجداء السلمي**

$$(u, v) \mapsto (u \mid v) = \int_X uv\, d\mu$$

فضاء لهيلبرت على $\mathbb{R}$.

يستحسن أن نذكر هنا أن $\int_X uv\, d\mu$ معرف بأن $\int_X fg\, d\mu$ حيث f ممثل للصنف u وَ g ممثل للصنف v ؛ وقيمة التكامل $\int_X uv\, d\mu$ لا يتعلق بالمثلين المأخودين. يمكن التأكد بأنه فعلا جداء سلمي وأن النظيم الموافق له ينطبق مع النظيم $|\cdot|_{L^2}$ ، إذ إن $|f|_{L^2} = (\int_X f \cdot f\, d\mu)^{1/2}$. ثمّ إن L^2 فضاء تام.

2.16.20.1 **بعض النماذج الملموسة لفضاءات هيلبرت•** المبرهنة الموالية تُترجم نتيجة عكسية للمبرهنة السابقة وهي تقدم نوع من التمثيل «الملموس» هيلبرتي **مجرد** بواسط الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$. ولتقديم المقصود نحتاج إلى مفهوم **البعد الهيلبرتي**.

2.16.20.1 .١ تعريف ـ• نسمي **بالبعد الهيلبرتي** لفضاء هيلبرتي H العدد الأصلي لكل الأساسات الهيلبرتية لِـ H أي العدة المشتركة لكل الأسات التوبولوجية لِـ H . يشار للبعد الهيلبرتي بِـ $\dim_h H$.

21.1 الفضاءان $\mathcal{L}^\infty$ وَ L^∞

1.21.1 نصف النظيم N_∞•

1.1.21.1 **تعريف•** ليكن $f \in \mathcal{M}_+$ ولنضع

$$N_\infty(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(f^{-1}(]\alpha, +\infty])) = 0\}\cdot$$

يدعى $N_\infty(f)$ بالحد الأعلى بالقياس للتابع f أو كذلك الحد الأعلى الأساسي للتابع f .

وبعبارة أخرى، $N_\infty(f)$ هو الحد الأدنى للأعداد $\alpha \geq 0$ بحيث $f(x) \leq \alpha$ ، μ ـ شك. ويمكنك أن تتأكد من أن $N_\infty(f)$ هو الحد الأعلى للأعداد $\alpha > 0$ بحيث يكون $\mu(\{f > \alpha\}) > 0$ ، حيث $\{f > \alpha\}$ تشير إلى المجموعة $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ ؛ هذا يبرر الاصطلاح $\inf \emptyset = +\infty$ في حالة $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(\{f > \alpha\}) = 0\} = \emptyset$.

2.21.1 **مبرهنة• التابع من $\mathcal{M}_+$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف بأن $f \mapsto N_\infty(f)$ يتمتع بالخواص التالية:**

١ـ $N_\infty(0) = 0$ ؛ $N_\infty(f) = 0 \iff f = 0$ ، μ ـ **شك؛** $N_\infty(cf) = cN_\infty(f)$ **مهما كان** $c \in \mathbb{R}$ ؛ $\forall f, g \in \mathcal{M}_+,\ f \leq g \Longrightarrow N_\infty(f) \leq N_\infty(g)$.

٢ـ **لدينا** $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+$.

٣ـ **لدينا** $N_\infty(fg) \leq N_\infty(f) N_\infty(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+$.

٤ـ **مهما كان** $p \in [1, +\infty]$ **لدينا (متباينة هولدر) حيث نضع** $\frac{1}{\infty} = 0$:

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_{p'}(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+.$$

3.21.1 **ملاحظة•** ليكن $f \in \mathcal{M}_+$. لدينا: $0 \leq f(x) \leq N_\infty(f)$ ، μ ـ شك على X .

4.21.1 **العلاقة بين $N_\infty(|f|)$ وَ $N_p(f)$ وَ $\sup_{x \in X} |f(x)|$•**

∘ لدينا بصفة عامة $N_\infty(|f|) \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$.

∘ في الحالة الخاصة حيث $X = \mathbb{R}$ وَ $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{B}}_\mathbb{R}$ ، عشيرة لوبيوغ لأجزاء $\mathbb{R}$ القيوسة، وَ λ قياس لوبيغ، وفي حالة f مستمر، فينطبق $N_\infty(|f|)$ مع النظيم العادي للتقارب المنتظم الذي نشير إليه هنا بِـ $|f|_{م}$.

∘ إذا كان μ قياسا محدودا فلدينا $N_\infty(|f|) = \lim_{p \to \infty} N_p(f)$.

5.21.1 **تعريف الفضاءان $\mathcal{L}^\infty$ وَ L^∞•** من أجل $f \in \mathcal{M}$ نعتبر $N_\infty(|f|)$ الذي نشير إليه أيضا بِـ $N_\infty(f)$.

$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ هو تعريفا الفضاء الجزئي من $\mathcal{M}$ المعرف بأن:

$$\mathcal{L}^\infty \overset{\text{تعر}}{\Longleftrightarrow} f \in \mathcal{M} \text{ وَ } N_\infty(f) < \infty$$

إن $\mathcal{L}^\infty$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}$ وَ N_∞ نصف نظيم عليه. نقول عن عناصر $\mathcal{L}^\infty$ بأنها توابع μ ـ محدودة أو محدودة بالقياس أو محدودة أساسا.

ونعتبر الفضاء الشعاعي الحاصل $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}_\mu$ ، حيث $\mathcal{N}_\mu = N_\infty^{-1}(0)$ ، الذي نشير إليه بِـ $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ أو اختصارا بِـ L^∞ . الفضاء L^∞ فضاء شعاعي نظيمي ونظيمه $|\cdot|_{L^\infty}$ ناتج من N_∞ .

1.5.21.1 **خواص L^∞•** إنها تماثل خواص L^p $(1 \leq p < \infty)$ وتبهن بكيفيات مماثلة بل هي أبسط. وبصفة خاصة، L^∞ فضاء بناخي. وسبب ذلك هو أنه إذا كانت $\{\widetilde{f_n}\}_{n=1}^\infty$ متتالية لكوشي في هذا الفضاء فشبه كليا نسبة إلى x من X ، تكون $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ (f_n ممثل ما لصف التكافؤ $\widetilde{f_n}$) متتالية كوشية في $\mathbb{R}$ وهي لذلك متقاربة. هذا يستلزم النتيجة.

ولدينا هنا الخاصية الاضافية التي ليس لها مثيل في الفضاءات L^p مع $1 \leq p$ منته.

$\mathcal{L}^\infty$ جبر جزئي من $\mathcal{M}$. إذ إنه إذا كان f وَ g من $\mathcal{M}^\infty$ كان $fg \in \mathcal{L}^\infty$. وهو جبر جزئي نظيمي لكون نصف النظيم N_∞ منسجما مع البنية الجبرية. إذن L^∞ **هو جبر نظيمي تام** ، أي جبر لبناخ.

6.21.1 **التقريب في L^p . مبرهنات الكثافة. القابلية للفصل•**

1.6.21.1 **مبرهنة (كثافة التوابع البسيطة)• المجموعة $S \cap L^p$ المكونة من صفوف التوابع الحقيقية البسيطة التي تنتمي إى L^p كثيفة في هذا الفضاء من أجل $1 \leq p < \infty$.**

2.6.21.1 **ملاحظة•** إذا كان $\mu(X) < \infty$ فإن كل التوابع البسيطة تنتمي إلى $\mathcal{L}^p$ ، وفي هذه الحالة يكون S كثيف في $\mathcal{L}^p$. لكن إذا كان $\mu(X) = \infty$ فليس التوابع البسيطة تنتمي كلها إلى $\mathcal{L}^p$. ولذا لا تعتبر النتيجة السابقة مبرهنة لكثافة S في L^p في حالة $\mu(X) = \infty$. إلا أن **التوابع الدرجة** تنتمي كلها إلى $\mathcal{L}^p$. والتوابع الدرجية هي التوابع البسيطة المعدومة خارج جزء قياسه منته، أي أنها التوابع التي تكتب على الشكل $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ ، حيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ، $i = 1$ ، ... ، n وَ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ أجزاء قيوسة من X غير متقاطعة مع $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) < \infty$.

3.6.21.1 **مبرهنة (كثافة التوابع الدرجية)• الفضاء الجزئي للتوابقع الدرجية (القيوسة وذات قيم حقيقية متهية ومعدومة خارج جزء قياسه معدوم) كثيفة في $\mathcal{L}^p$ مع** $1 \leq p < \infty$.

4.6.21.1 **ملاحظة•** ليكن $f \in \mathcal{L}^p$. ينتمي التبع $f_n = f\chi_{A_n}$ إلى $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ مهما كان $p \in]1, +\infty[$. وفي الحقيقة، يكفي دراسة حالة $f \geq 0$ وإثبات أن $f \in \mathcal{L}^q$ مهما كان $q \geq 1$ متهيا. وهذا وارد لكون $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ وهو لذا في $\mathcal{L}^q$ إذ إن $\mu(A_n) < \infty$. لدينا $f_n^q = f^q \chi_{A_n}$ ولذا $N_q(f_n) \leq n[\mu(A_n)]^{1/q} < \infty$. يمكننا إذن نص الخاصية التالية:

خاصية ــ **الفضاء** $\mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p$ **كثيف في** $\mathcal{L}^p$ **، مهما كان** $1 \leq q < \infty$.

وبصفة خاصة، $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ كثيف في $\mathcal{L}^2$. سوف نستخدم هذه النتيجة عند دراسة تحويل فوريـي، الذي سننظر إليه كتمديد لهذا التحويل (المعرف على $\mathcal{L}^1$) إلى $\mathcal{L}^2$.

5.6.21.1 **مبرهنة• الفضاء الجزئي للتوابع الدرجية (القيوسة وذات قيم حقيقية متهية) فضاء كثيف في** $\mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p$ **، المزود بالتوبولوجيا الناتجة من توبولوجية الجداء، أي الموافقة مثلا للنظيم** $|f|_{\mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p} = N_q(f) + N_p(f)$.

6.6.21.1 **توطئة ريمان ولوبيغ• ليكن** $f \in \mathcal{L}^1$ **. لدينا:**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos nx\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin nx\, d\lambda = 0.$$

7.21.1 **كثافة التوابع المستمرة•** إننا هنا نفرض ما يلي:

- X فضاء توبولوجي مفصول (أي أنه لِهوزدورف) متراص محليا.
- μ قياس نظامي بمعنى أنه:

من أجل كل $A \in \mathcal{A}$ وكل $\varepsilon > 0$ يوجد A_1 وَ A_2 من $\mathcal{A}$ مع A_1 شبه متراص بحيث $\overline{A}_1 \subset A \subset \mathring{A}_2$ مع $\mu(A_2 \setminus A_1) \leq \varepsilon$.

$\overline{A}_1$ هي ملاصقة الجزء A_1 أمّا $\mathring{A}_2$ فهي داخلية الجزء A_2 .

نذكر أن الفضاء التوبولوجي المفصول (ويدعى فضاء هوزدورف) هو فضاء حيث يمكن احاطة كل نقطتين مختلفتين منه بجوارين مفتوحين غير متقاطعين. أمّا القول إن A_1 شبه متراص فيعني أن الملاصقة $\overline{A}_1$ متراصة.

لاحظ أن الفرضيتين السابقتين محققتين في حالة الفضاء $(I, \mathcal{L}_I, \lambda)$ حيث I مجال من $\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{L}_I$ عشيرة أجزاء I القابلة للقياس حسب لوبيغ وَ λ هو قياس لوبيغ على I . ولدينا الشيء نفسه إذا عوضنا I ببلاطة في $\mathbb{R}^N$ وعشرة لوبيغ وقياسه عليها.

يمكن تهديب إلى حد ما الفرضيات والاحتفاظ بالنتيجى وهذا بأخذ X فضاء **معتدل** والقياس نِظامي بمعنى أضعف، فلا ضرورة لأخذ A_1 شبه متراص. هذا وارد مثلا في حالة $\mathbb{R}$ وَ $\mathbb{R}^N$.

1.7.21.1 **تذكير توبولوجي•**

1.7.21.1 .١ الفضاء المعتدل (normal)• هو فضاء لِهوزدورف يحقق شرط فصل المغلقات، أي مهما كان الجزءان المغلقان F_1 وَ F_2 في X وغير المتقاطعين فيوجد جزءان مفتوحين $\mathcal{O}_1$ وَ $\mathcal{O}_2$ غير متقاطعين و بحيث $F_1 \subset \mathcal{O}_1$ وَ $F_2 \subset \mathcal{O}_2$.

في فضاء معتدل، يمكن إثبات مبرهنة أو توطئة أوريشون (Urysohn) (التي تشكل شرطا لازما وكافيا لكي يكون فضاء ما معتدلا).

1.7.21.1 ٢. توطئة أوريشون• **ليكن X فضاء توبولوجيا مفصولا. حتى يكون X معتدلا يلزم ويكفي أن يتحقق ما يلي:**

> **مهما كان F وَ G جزئين مغلقين من X وغير متقاطعين يوجد تابع حقيقي معرف ومستمر على X وبحيث:**
> $f(F) = \{1\}$ وَ $f(G) = \{0\}$ وَ $0 \leq f(x) \leq 1$ **مهما كان** $x \in X$
> .

تنتج من توطئة أريشون **مبرهنة التمديد** لِتياتز (Tietze) وهي تشكل كذلك شرطا لازما وكافيا للاعتدال ونصها:

2.7.21.1 **مبرهنة التمديد لِتياتز• ليكن X فضاء توبولوجيا مفصولا (لِهوزدورف) وليكن (a,b) مجالا من $\overline{\mathbb{R}}$ مع $a < b$. حتى يكون X فضاء معتدلا يلزم ويكفي أن يكون بالامكان تمديد كل تابع مستمر على جزء كيفي F من X مغلق ويأخذ قيمه في (a,b) إلى تابع مستمر على X بأكمله ويأخذ قيمه في (a,b) .**

هنا يشير الرمز (a,b) إلى أحد المجالات $[a,b]$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ ، $]a,b[$.

2.7.21.1 ١. الفضاءات المتراصة محليا• وهي فضاءات هوزدورف حيث تتمتع كل نقطة بجوار متراص على الأقل.

إن كل فضاء متراص فضاء معتدل. لكننا لا نستطيع الزجم بأي شيء مسبق في حالات الفضاءات المتراصة محليا. إلا أنه لدينا الصغة التالية لتوطئة أريشون.

3.7.21.1 **قضية• ليكن X فضاء متراصا محليا وليكن K جزء متراصا وَ $\mathcal{O}$ جزء مفتوحا مع $K \subset \mathcal{O}$. يوجد عندئذ تابع f مستمر على X وبحيث**
$f(x) = 1$ **على** K **وَ** $f(x) = 0$ **على** $^c\mathcal{O}$ **مع** $0 \leq f(x) \leq 1$ **مهما كان** $x \in X$.

نستطيع الآن أعطاء النتيجة المهمة التالية.

4.7.21.1 **مبرهنة• ليكن X فضاء معتدلا وليكن μ قياسا نِظاميا معرفا على عشيرة $\mathcal{A}$ من أجزاء X . عندئذ المجموعة $C_c(X) \cap L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ، حيث $C_c(X) \doteq \mathcal{C}_c(X)/\mathcal{N}_\mu$ ، مع $\mathcal{C}_c(X)$ هي مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة وذات سندات متراصة محتواة في X ، كثيفة في $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.**

8.21.1 **لازمات•**

- **الفضاء $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ هو إتمام الفضاء $C_c(\mathbb{R})$** مزود بالتوبولوجيا الناتجة، وهذا لكون $\overline{\mathcal{C}}_c = \mathcal{L}^1$ ولكون $\mathcal{L}^1$ فضاء تام. هنا $\mathcal{L}^1 \supset \mathcal{C}_c$. ثمّ إنه من أجل f وَ g عنصران من $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ لدينا:
$$|f - g|_{\mathcal{L}^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)|\, dt$$
لأن في هذه الحالة ينطبق تكامل لوبيغ مع تكامل ريمان. وهكذا يظهر تكامل لوبيغ على $\mathcal{L}^1$ كتعميم طبيعي لتكامل ريمان على $\mathcal{C}_c$.

- **قابلية الفضاء $L^p([a,b], \mathcal{B}_{[a,b]}, \lambda)$ والفضاء $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ للفصل.**
بما أن الفضاء $\mathcal{C}_c([a,b])$ قابل للفصل وهذا وفقا لمبرهنة ستون وفياتشتراس (التقريب بواسطة كثيرات الحدود)، فإن $L^p([a,b])$ فصول. وكذلك، بما أن $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ فصول فإن $L^p(\mathbb{R})$ فصول.

- **نتيجة أخرى للكثافة.**
الفضاء $\mathcal{C}_c \cap (L^p \cap L^q)$ كثيف في $L^p \cap L^q$ المزود بالتوبولوجيا الناتجة من توبولوجيا الجداء.
في حالة $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}, \lambda_N)$ ، $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}$ هي عشيرة أجزاء $\mathbb{R}^N$ القابلة للقيوس حسب لوبيغ، لدينا $L^p(\mathbb{R}^N) \supset \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ ، ولذا ينستطيع أن نقول إن $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ كثيف في $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^q)$.

1.8.21.1 **مبرهنة (كثافة التوابع من صنف C^∞)• ليكن Ω جزء من $\mathbb{R}^N$ مزودا بعشيرة وقياس لوبيغ. عندئذ من أجل كل $p \in [1, +\infty[$ يكون الفضاء $\mathcal{D}(\Omega)$ للتوابع القابلة للإشتقاق بلا تناه وذات سندات متراصة وحتواة في Ω ، كثيف في $L^p(\Omega)$.**

يعتمد الإثبات على مفهوم جداء التزويج أن اللّف الذي يأتي تقديمه في مقطع لاحق. يمكن للقاريء المهتم ان يرجع إليه.

9.21.1 **حالة الفضاء L^{∞}•** إن المبرهة 5.6.21.1 لا تبقى صحيحة في حالة $p=\infty$. فالفضاء $L^{\infty}(X)\cap C_c(X)$ غير كثيف في الفضاء $L^{\infty}(X)$. وملاصقة هذا الفضاء الجزءي هي على العموم فضاء جزئي أصغر تمام من $L^{\infty}(X)$. ومن المفيد تمييز هذا الفضاء الجزئي.

1.9.21.1 **التوابع «المعدومة عند مالانهاية»•** نقول عن تابع f حقيقي معرف على فضاء لهوزدورف متراص محليا إنه معدوم عند مالانهاية إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon>0$ يوجد جزء متراص K من X بحيث $|f(x)|\leq\varepsilon$ مهما كان $x\in{}^cK$.

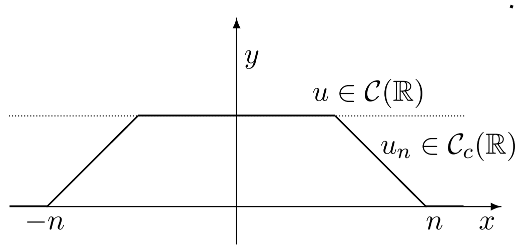
إن هذا التسمية نابعة من الحالة الخاصة الملومسة للمستقيم العددي $\mathbb{R}$.

يشار إلى التوابع المستمرة المعدومة عند مالانهاية بِـ $\mathcal{C}_0(X)$. من الواضح أن $\mathcal{C}_0(X)\subset\mathcal{C}_0(X)$ وأن هناك تطابق بين هذين الفضائين في حالة X متراص.

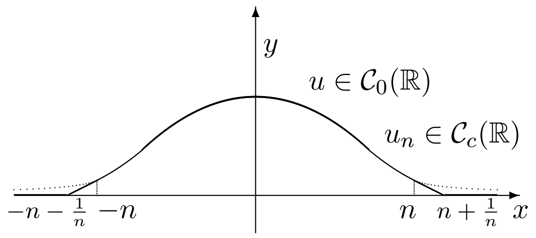
2.9.21.1 **مبرهنة• ليكن X فضاء لهوزدورف متراص محليا. عندئذ $\mathcal{C}_0(X)$ هو إتمام الفضاء $\mathcal{C}_c(X)$ نسبة للنظيم الناتج من نظيم L^{∞} ، أي نظيم الذروة**

$$|u|_{\infty}=\sup_{x\in X}|u(x)|,\quad \mathcal{C}_0(X)\ni u.$$

3.9.21.1 **ملاحظة•** يجب أن نفتق جيدا بين التقارب المنتظم على X والتقارب المنتظم على كل متراص، الذي تدعى بالتقارب المتراص. إن المثالين التاليـين يوضحان الفرق بين التقاربين في حالة $\mathbb{R}$.



التقارب المتراص في $\mathbb{R}$



التقارب المنتظم في $\mathbb{R}$

4.9.21.1 **الفضاء** $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ **غير فصول•** نبين هذا بواسطة مثال مضاد في الفضاء $L^\infty([0,1), \mathcal{L}_{[0,1]}, \lambda)$. ليكن المجال $I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ ولتكن A مجموعة التوابع u التي تأخذ القيمة 1 أو -1 من أجل $I_n \ni x$. إن المجموعة A غير قابلة للعد.

22.1 تمارين حول فضاءات لوبيغ

.1 ليكن $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية وقياس لوبيغ λ . بين أن التوابع التالية تنتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$ مهما كان $1 \leq p$ حقيقي:

١- $f(x) = x(1-x)\chi_I(x)$ ، $\mathbb{R} \ni x$ ، χ_I هي الدالة المميزة للمجال $I = [0,1]$.

٢- $g(x) = e^{-x^2}$ ، $\mathbb{R} \ni x$.

٣- $h(x) = x^n e^{-x^2}$ ، $\mathbb{R} \ni x$ وَ n عدد طبيعي غير معدوم.

.2 ليكن الفضاء المقيس $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ، λ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ وليكن $\alpha \in]1, +\infty[$ عددا حقيقيا. نعتبر على $\mathbb{R}$ التوابع التالية:

١- $f_\alpha(x) \doteq x^{-1/\alpha}\chi_{]0,1[}(x)$.

٢- $g_\alpha(x) \doteq x^{-1/\alpha}\chi_{[1,+\infty[}(x)$.

٣- $h_\alpha(x) \doteq (x(1+\ln^2 x))^{-1/\alpha}\chi_{]0,1[}(x)$.

٤- $l_\alpha(x) \doteq (x(1+\ln^2 x))^{-1/\alpha}\chi_{]1,+\infty[}(x)$.

المطوب من أجل كل من التوابع الأربعة السابقة تعيين، بدلالة α ، قيم p لكي ينتمي هذا التابع إلى $\mathcal{L}^p$. (في حالة h_α وبعد التحوُّل إلى تكامل ريمان، يمكن اللّجؤ إلى تبديل المتغير $y = \frac{1}{x}$).

.3 ليكن $1 < p$ عددا حقيقيا. أثبت متباينة يونغ:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \ \forall a, b \geq 0 \quad (p' = p/(p-1)).$$

[**إرشاد:** يمكنك دراسة تغيرات التابع $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \frac{t^p}{p} + \frac{1}{p'} - t \in \mathbb{R}$ ، ثمّ حساب قيمته عند النقطة $t = ab^{1-p'}$.]

.4

١ـ ليكن $1 \leq p$ عددا حقيقيا. برهن على أن $t^p + 1 \leq (t+1)^p$ مهما كان $0 \leq t$.

استنتج أن $a^p + b^p \leq (a+b)^p$ مهما كان $0 \leq a$ ، $0 \leq b$ $(1 \leq p)$.

برهن كذلك على أن $(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p+1)$ مهما كان $[0,1] \ni t$.

استنتج أن $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ مهما كان $0 \leq a$ ، $0 \leq b$.

٢ـ ليكن $0 < p < 1$. برهن على أن $t^p + 1 \geq (t+1)^p$ مهما كان $0 \leq t$.

استنتج أن $a^p + b^p \geq (a+b)^p$ مهما كان $0 \leq a$ ، $0 \leq b$ $(0 < p < 1)$.

.5 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين قيوسين من $(X, \mathcal{A})$ في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. وليكن $1 \leq p$ عددا حقيقيا. إذا كان $0 \leq f \leq g$ فبرهن على أن

$$(N_p(f))^p + (N_p(g-f))^p \leq (N_p(g))^p.$$

.6 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين قيوسين من $(X, \mathcal{A})$ في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. وليكن $0 < p < 1$ عددا حقيقيا. برهن على أن

$$N_p(f+g) \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\{N_p(f) + N_p(g)\}.$$

.7 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. وليكن $0<p$ وَ $0<q$ عددين حقيقيين ولنضع $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. أثبت أنه، من أجل كل $f\in\mathcal{L}^p$ وَ $g\in\mathcal{L}^q$ ، لدينا:

$$fg\in\mathcal{L}^r \quad \text{وَ} \quad N_r(fg)\le N_p(f)N_q(g).$$

.8 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. ولتكن $\{p_j\}_{j=1}^k$ متتالية أعداد حقيقية موجبة تماما وبحيث $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j}=1$ ولتكن $\{f_j\}_{j=1}^k$ متتالية توابع حقيقية قيوسة وبحيث $f_j\in L^{p_j}(X,\mathcal{A},\mu)$. أثبت أن:

$$f_1\cdots f_k\in L^1 \quad \text{وَ} \quad |f_1\cdots f_k|_{L^1}\le\prod_{j=1}^{k}|f_j|_{L^{p_j}}.$$

.9

١ـ x وَ y عددان حقيقيان. أثبت أن

$$|x+y|^p+|x-y|^p\le 2(|x|^p+|y|^p) \quad \text{إذا كان} \quad 1\le p\le 2 \tag{42.1}$$

وأن

$$|x+y|^p+|x-y|^p\ge 2(|x|^p+|y|^p) \quad \text{إذا كان} \quad 2\le p<+\infty \tag{43.1}$$

مع دراسة الحالة حيث تكونا هاتان المتباينتان تامتين.

٢ـ $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس. ليكن p عددا حقيقيا مع $1\le p<+\infty$ وَ $p\neq 2$ وليكن f وَ g تابعين من L^p . أثبت أنه حتى يكون لدينا

$$|f+g|_{L^p}^p+|f-g|_{L^p}^p=2(|f|_{L^p}^p+|g|_{L^p}^p) \tag{44.1}$$

يلزم ويكفي أن يكون $fg=0$ ، μ ـ شك على X .

.10 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا منتهيا أي مع $\mu(X)<+\infty$ وليكن $1\le p$. برهن التكافؤ، حيث $E_n=\{x\in X \mid n-1\le|f(x)|\le n\}$:

$$f\in L^p(X,\mathcal{A},\mu) \Longleftrightarrow f \text{ قيوس وَ } \sum_{n=1}^{\infty}n^p\mu(E_n).$$

11. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$ وليكن $p\geq 1$ عددا حقيقيا وَ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع f . بين أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو نفس التابع f في كل فضاء $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ مهما كان $1\leq q<p$.

12. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$ وَ $p\geq 1$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع f . لنفرض أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع g . هل توجد علاقة بين f وَ g ؟

13. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$. وليكن $p\in]1,\infty[$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة μ ـ شك نحو تابع f من L^p وتحتوي على متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تتقارب متتالية النظيمات $\{|f_{n_k}|_{L^p}\}_{n=1}^{\infty}$ نحو $|f|_{L^p}$. برهن على أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو f في L^p .

14. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$. وليكن $p\in]1,\infty[$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة نحو تابع f من L^p . وليكن $g\in L^{p'}(X,\mathcal{A},\mu)$ ، p' هو مرافق هولدر للعدد p ، أي $p'=p/(p-1)$. أثبت أن المتتالية $\{f_ng\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة نحو fg في الفضاء $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

15. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)=1$. ولتكن $f\in L^p$ وَ $1\leq q<p<\infty$. أثبت أن $|f|_{L^q}\leq|f|_{L^p}$.

16. أثبت أن $\ell^q(\mathbb{R})\subset\ell^p(\mathbb{R})$ مهما كان $1\leq q<p<\infty$ مع

$$|x|_{\ell^q}\leq|x|_{\ell^p},\ \forall x\in\ell^q.$$ (متباينة جنسن Jensen)

17. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وَ f تابعا حقيقيا قيوسا على X وَ $Q\in\mathcal{A}$. إذا كان $f\geq\alpha$ (α عدد حقيقي معطى) وكان Φ تابعا حقيقيا محدبا على المجال $[\alpha,+\infty[$ ، فبرهن على **متباينة جنسن** Jensen :

$$\Phi\Big(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f\,d\mu\Big)\leq\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q\Phi(f)\,d\mu.$$

يمكنك أن تستخدم المتباينات التالية الصحيحة من أجل Φ **محدب**:

$$\frac{\Phi(u)-\Phi(\beta)}{u-\beta} \geq \frac{\Phi(u)-\Phi(\alpha)}{u-\alpha} \geq \frac{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}{\beta-\alpha},\ u>\beta>\alpha.$$

.18 نقول عن فضاء بناخي E إنه **محدب بانتظام** إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon \in]0,2]$ **يوجد** $0<\delta=\delta(\varepsilon)$ **بحيث**

$$(\forall x, y \in E, ||x||=||y||=1, ||x-y|| \geq \varepsilon) \Longrightarrow \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leq 1-\delta.$$

أثبت أن الفضاءات L^p مع $1<p<+\infty$ ، **محدبة** بانتظام.

تذكّر متباينتي كلاركسون Clarkson

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f+g}{2}\right|_{L^p}^p+\left|\frac{f-g}{2}\right|_{L^p}^p &\leq \frac{1}{2}|f|_{L^p}^p+\frac{1}{2}|g|_{L^p}^p,\ \forall p \in [2,\infty[\\
\left|\frac{f+g}{2}\right|_{L^p}^{p'}+\left|\frac{f-g}{2}\right|_{L^p}^{p'} &\leq \left[\frac{1}{2}|f|_{L^p}^p+\frac{1}{2}|g|_{L^p}^p\right]^{\frac{1}{p-1}},\ \forall p \in]1,2[.
\end{aligned}$$

.19 ليكن $1<p<2$ ولتكن f_1 ، ... ، $f_k \in \mathcal{L}^p$. أثبت وجود متتالية أعداد $\varepsilon_j=\pm 1$ ، $j=1$ ، ... ، k ، **بحيث**:

$$|\varepsilon_1 f_1+\cdots+\varepsilon_k f_k|_{L^p}^p \leq \sum_{j=1}^k |f_j|_{L^p}^p.$$

يمكنك الاستدلال بالتدريج وباستخدام متباينة كلاركسون.

أثبت مباشرة أن هذه المتباينة تبقى **صحيحة** من أجل $p=2$ ؛ ثمّ إنها توجد أيضا متتالية $\varepsilon'_j=\pm 1$ ، $j=1$ ، ... ، k ، **بحيث**:

$$|\varepsilon'_1 f_1+\cdots+\varepsilon'_k f_k|_{L^2}^2 \geq \sum_{j=1}^k |f_j|_{L^2}^2.$$

.20 نقول عن متتالية توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الفضاء $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ مع $1<p<+\infty$ إنها **متقاربة بضعف** نحو تابع f في L^p إذا كان

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu = \int_X fg\,d\mu,\ \ \forall g\in L^{p'}(X,\mathcal{A},\mu).$$

وعندها نقول عن التقارب في L^p ، وفقا للنظيم $|\cdot|_{L^p}$ ، بأنه **التقارب القوي.**

١ ـ أثبت أن التقارب القوي يستلزم التقارب الضعيف.

وبهدف دراسة العكس، يمكنك فحص المثال المضاد:

$L^p = L^2([0,2\pi],\widehat{\mathcal{B}}_{[0,2\pi]})$ ، λ قياس لوبيغ

والمتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع $f_n(x)=\sin nx$ ، $x\in[0,2\pi]$.

٢ ـ في حالة $p=2$ ، بين أن الشرطين المواليين يستلزمان التقارب القوي:

- $f_n \rightharpoonup f$ بضعف عندما يؤول n نحو ∞ .
- $|f_n|_{L^2}\longrightarrow |f|_{L^2}$ عندما يؤول n نحو ∞ .

21. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تطبيقا لِـ X في $\mathbb{R}$ قيوسا وبحيث $0<|f|_{L^\infty}$. نعتبر التابع φ للمجال $[1,+\infty[$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف بأن $\varphi(p)\doteq\int_X |f|^p\,d\mu$. لنضع $E_p\doteq\{p\geq 1\mid \varphi(p)<+\infty\}$.

١ ـ أثبت أن E_p مجال من $\mathbb{R}$.

٢ ـ أثبت أن $\ln\varphi_p$ تابع محدب في $\mathring{E}_f$ داخلية E_f ، ولذا فالتابع φ مستمر على E_f .

٣ ـ أثبت أنه من أجل كل مجال I محتوى في $[1,+\infty[$ ، يوجد تطبيق f بحيث $I=E_f$.

٤ ـ أثبت أنه من أجل $+\infty>s>p>r\geq 1$ لدينا $|f|_{L^p}\leq\max\{|f|_{L^r},|f|_{L^s}\}$ وَ $\mathcal{L}^p(\mu)\supset\mathcal{L}^r(\mu)\cap\mathcal{L}^s(\mu)$.

22. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا متهيا. أثبت أنه إذا كان p وَ q عددين حقيقيين من $[1,+\infty[$ مع $p<q$ كان $L^\infty\subset L^q\subset L^p\subset L^1$ وأن

$$|f|_{L^p} \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|f|_{L^q}, \forall f \in L^q(X,\mu).$$

حيث نعمل بالاصطلاح $\frac{1}{\infty}=0$.

قارن التوبولوجيا في L^q مع تلك المحصل عليه بأخذ أثر توبولوجيا L^p على L^q .

.23 ليكن $p \in]1,+\infty[$ عددا حقيقيا وليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. ولنشير بِـ E^p إلى مجموعة كل الصفوف، وفق (μ) ، للتوابع $f \in \mathcal{L}^p$ بحيث تكون الصورة $f(X)$ جزء منته من $\mathbb{R}$ (أي أن f تابع درجي في $\mathcal{L}^p$). أثبت أن E^p كثيف في $\mathcal{L}^p$. (يمكنك أن تبدأ بتقريب الصفوف $\tilde{f}$ من L^p مع $f \geq 0$.)

.24 ليكن $p \in]1,+\infty[$ عددا حقيقيا وليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. ولنشير بِـ S^p إلى مجموعة كل الصفوف، وفق (μ) ، للتوابع البسيطة φ على $(X,\mathcal{A})$ وبحيث $\mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$ (فنقول أن φ ، μ - درجي على X). من أجل $f \in \mathcal{L}^p$ مع $f \geq 0$ وَ $n \in \mathbb{N}^\star$ ، نضع $A_n \doteq \{\frac{1}{n} \leq f \leq n\}$.

١- برهن على أن $\mu(A_n) < +\infty$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٢- بين أن $f_n \doteq f\chi_{A_n}$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^p$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ وأن $\lim_{n\to\infty} |\tilde{f}_n - \tilde{f}|_{L^p} = 0$.

٣- برهن على أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، توجد متتالية $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ من التوابع البسيطة، والموجبة والمعدومة خارج A_n ، تتقارب بانتظام على X نحو f_n .
استنتج أن $\lim_{n\to\infty} |\tilde{f}_n - \tilde{\varphi}_{n,k}|_{L^p} = 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٤- برهن على أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\varphi \in S^p$ بحيث $|\tilde{f} - \tilde{\varphi}|_{L^p} < \varepsilon$.

٥- برهن على أن S^p كثيف في L^p .

.25 فضاءات $\mathcal{L}^p$ مع $0 < p < 1$.

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن تابع حقيقي قيوس f إنه ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ $(0 < p < 1)$ إذا كان $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. برهن على أن التابع d المعرف بأن

$$d(f,g) = \int_X |f-g|^p \, d\mu, \;\; f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$$

يشكل مسافة على هذا الفضاء وأن الثنائية $(\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu),d)$ فضاء متري تام.

26. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا جموعا، أي $f \in L^1(X,\mu)$. ولتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من X في $\mathbb{R}$ ، قيوسة ومتقاربة μ ـ شبه كليا (شك) على X نحو تابع $u : X \to \mathbb{R}$. وليكن $\varrho > 0$ عددا حقيقيا. من أجل m ، n عددين طبيعيين، نضع

$$\begin{aligned} L_n^{\varrho} &= \{x \in X \mid |u_n(x) - u(x)| < \varrho\}; \\ Y_n^{\varrho} &= \{x \in X \mid |u_n(x) - u(x)| = \varrho\} \cdot \\ E_{nm}^{\varrho} &= \{x \in X \mid |u_n(x) - u_m(x)| \leq \varrho\} \cap L_n^{\varrho}. \end{aligned}$$

١ ـ أثبت أن $\lim_{m\to\infty} \int_X \chi_{E_{nm}^{\varrho}} f \, d\mu = \int_X \chi_{L_n^{\varrho}} f \, d\mu$.

٢ ـ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{L_n^{\varrho}} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

٣ ـ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{Y_n^{\varrho}} f \, d\mu = 0$.

المقارنة بين التقارب الشبه الكلي وبالقياس وبالمتوسط

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ، ونشير بـ I إلى المجال $[0,1]$ وبـ χ_E إلى الدالة المميزة للجزء E من مجموعة كيفية X .

تذكير: ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا ولتكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من X في $\mathbb{R}$ ، قيوسة. إننا نعرف عدة كيفيات لتقارب هذه المتتالية نحو تابع قيوس $\psi : X \to \mathbb{R}$.

○ التقارب الشبه الكلي (شك) :

$$\psi_n \xrightarrow{\text{شك}} \psi \iff \mu(\{x \in X \mid \psi_n(x) \not\to \psi(x)\}) = 0.$$

◦ التقارب بالقياس (قياس):

$$\psi_n \xrightarrow{\text{قياس}} \psi \Longleftrightarrow \Big\{\forall \varrho > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |\psi_n(x) - \psi(x)| > \varrho\}) = 0\Big\}.$$

◦ التقارب بالمتوسط أو في $L^1(X,\mu)$ (من أجل ψ_n وَ ψ في L^1):

$$\psi_n \xrightarrow{\|\,\|_1} \psi \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |\psi_n(x) - \psi(x)|\, d\mu = 0.$$

◦ التقارب المهيمن عليه (من أجل ψ_n وَ ψ في L^1):

$\psi_n \xrightarrow{\text{مهيمن}} \psi \Longleftrightarrow \psi_n \xrightarrow{\text{شك}} \psi$ ويوجد $\theta \in L^1(X,\mu)$ بحيث $|\psi_n| \leq |\theta|$ ، μ ـ شك في X .

إن العلاقات بين كيفيات التقارب هذه معروفة. ويتبين من التمرين الموالي أن البعض من الاستلزامات بينها غير واردة.

.27

١ ـ لنكتب كل عدد طبيعي n على الشكل $n = 2^k + m$ مع $0 \leq m < 2^k$ ونضع، من أجل x في I :

$$v_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } m/2^k \leq x \leq (m+1)/2^k, \\ 0 & \text{عدا ذلك.} \end{cases}$$

أثبت أن $v_n \xrightarrow{\|\,\|_1} 0$ وَ $v_n \xrightarrow{\text{قياس}} 0$ ، لكن من أجل كل $x \in I$ ، $v_n(x) \not\to 0$. ماذا تستنتج؟

٢ ـ نعتمد الترميز السابق، ونضع، من أجل x من I :

$$w_n(x) = \begin{cases} 2^k & \text{إذا كان } m/2^k \leq x \leq (m+1)/2^k, \\ 0 & \text{عدا ذلك.} \end{cases}$$

أثبت أن $w_n \xrightarrow{\text{قياس}} 0$ ، لكن $w_n \overset{\|\,\|_1}{\not\to} 0$. ماذا تستنتج؟

28. لنبدأ بتذكير القارىء بمبرهنة ريس: إذا كان $(H,(\cdot|\cdot))$ فضاء هيلبرتيا حقيقيا وكان H شكلا خطيا مستمرا على H ، فيوجد شعاع $y \in H$ بحيث $\varphi(x)=(x|y)$ مهما كان $x \in H$.

ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وليكن μ وَ ν قياسين موجبين متهيين على $(X,\mathcal{A})$ بحيث $\mu(A)=0$ يستلزم $\nu(A)=0$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$.

١ـ ليكن $\tau \doteq \mu+\nu$ ، أي أن $\tau(A) \doteq \mu(A)+\nu(A)$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$. بين أن τ قياس موجب ومنته على $(X,\mathcal{A})$ وأنه من أجل كل تابع $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$:

$$\int_X f\,d\tau=\int_X f\,d\mu+\int_X f\,d\nu.$$

٢ـ (ا) أثبت أن $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau)\subset\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\nu)$.

(ب) برر أنه يمكن تعريف شكلا خطيا φ على $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau)$ وهذا بوضع $\varphi(\tilde{f})\doteq\int_X f\,d\nu$ مهما كان $\tilde{f}\in L^2(X,\mathcal{A},\tau)$. استخدم متباينة هولدر لتثبت أن φ مستمر على $L^2(X,\mathcal{A},\tau)$. استنتج وجود تابع $g \in \mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau)$ بحيث:

$$\int_X f\,d\nu=\int_X fg\,d\tau,\ \ \forall f\in\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau).$$

(جـ) برهن على أنه من أجل كل $A \in \mathcal{A}$ ، لدينا $0\le\int_X \chi_A g\,d\mu\le\int_X\chi_A\,d\tau$ وأن $\nu(g=1)=\tau(g=1)=0$. استنتج أن $0\le g<1$ ، τ ـ شبه كليا.

٣ـ (ا) أثبت وجود $h \in \mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau)$ بحيث $0\le h(x)<1$ مهما كان $x\in X$ ومن أجل كل $f\in\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\tau)$ لدينا

$$\int_X f(1-h)\,d\nu=\int_X fh\,d\mu. \tag{45.1}$$

(ب) أثبت أن المساواة (45.1) صحيحة من أجل كل $\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$.

٤ـ استنتج من الأسئلة السابقة مبرهنة **رادون ونيكوديم** في حالة القياسات المتهية: إذا كان μ وَ ν قياسين موجبين متهيين على فضاء قيوس $(X,\mathcal{A})$ بحيث $\mu(A)=0$ يتلزم أن $\nu(A)=0$ مهما كان $A\in\mathcal{A}$ ، فيوجد تابع موجب $\varrho\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\nu)$ ، μ ـ وحيد بحيث $\nu(A)=\int_X\varrho\chi_A\,d\mu$ مهما كان $A\in\mathcal{A}$.

ونكتب عادة $\nu = \varrho \cdot \mu$ أو $d\nu(x) = \varrho\, d\mu(x)$ ونقول إن القياس μ يقبل التابع ϱ ككثافة نسبة إلى القياس μ .

29. ليكن $\mathbb{R}_+^\star \doteq]0, +\infty[$ مزود بعشيرة وقياس لوبيغ. وليكن $1 < p < \infty$ وَ $f \in L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ وليكن التابع F المعرف بأن $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ ، $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

١ـ أثبت متباينة هاردي Hardy $|F|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}|f|_{L^p}$ التي تعني أن التطبيق $f \mapsto F$ ينقل $L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ في نفسه.

٢ـ أثبت أن الماواة واردة فقط من أجل $f = 0$ شك.

٣ـ أثبت أن الثابت $\frac{p}{p-1}$ لا يمكن أن يعوض بثابت أصغر.

٤ـ إذا كان $f > 0$ مع $f \in L^1$ فبين أن $F \not\in L^1$.

ارشاد: ١. افرض أولا أن $f \geq 0$ وينتمي إلى $C_c(\mathbb{R}_+^\star)$. تؤدي المكاملة بالتجزئة إلى العلاقة $\int_0^\infty F^p(x)\,dx = -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)\,dx$. لاحظ أن $xF' = f - F$ وطبق متباينة هولدر على $\int F^{p-1}f$. عالج بعدئذ الحالة العامة. ٣. خذ $f(x) = x^{-1/p}$ على المجال $[1, a]$ مع a كبير بكفاية، وَ $f(x) = 0$ عدا ذلك.

30. لتكن $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية أعداد موجبة. أثبت أن

$$\sum_{m=1}^\infty \Big(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^m a_n\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sum_{n=1}^\infty a_n^p, \qquad 1 < p < \infty.$$

[**ارشاد:** إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ متناقصة فيمكن الحصول على هذه النتيجة اعتمادا على التمرين السابق. استنتج الحالة العامة من الحالة الخاصة هذه.]

إننا فيما يلي نعمل على $\mathbb{R}^N$ أو جزء منه مزود بعشيرة وقياس لوبيغ.

23.1 جداء لف (أو تزويج) التوابع وعملية الصقل

1.23.1 **لف التوابع •** ليكن f التابع المعرف بأن $f(x)=|x|^{-\frac{N}{2}}$ إذا $1 \geq |x| > 0$ وَ $f(x)=0$ من أجل $x=0$ أو $|x|>1$. لدينا $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ، لكن $f^2=f\cdot f$ لا تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$. إننا إذن نرى أنه إذا كان f وَ g تابعين من $L^1(\mathbb{R}^N)$ فلا ينتمي التابع fg بالضرورة إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$. وبعبارة أخرى، ليست العبارة $\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(y)\,dy$ منتهية بالضرورة. ولذا فقد يتعجب القاريء من كون عبارة «قربة جدا» وهي

$(f\star g)(x)$ **جداء لف** التابعين f وَ g عند النقطة x ، منتهية شبه كليا في $\mathbb{R}^N$.
وعلى وجه التحديد لدينا ما يلي: ليكن f وَ g تابعين من $L^1(\mathbb{R}^N)$. وليكن التكامل

$$(f\star g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy,\;\; x\in\mathbb{R}^N. \tag{46.1}$$

لنفرض أن f وَ g تابعان موجبان. عندها من أجل $x \in \mathbb{R}^N$ مثبت، يكون التابع تحت إشارة تكامل في (46.1) تابعا موجبا ولذا يكون $(f\star g)(x)$ عددا حقيقيا موجبا متهيا أو $+\infty$. هل يوجد $x \in \mathbb{R}^N$ يكون من أجله $(f\star g)(x) < +\infty$ ؟ وكأسلوب للاجابة عن هذا السؤال نبين أن اللّف $f\star g$ تابع كمول الأمر الذي يؤدي الى أنه منته شبه كليا. ولكي نرى القابلية للمكاملة، نلاحظ أن:

$$||f\star g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}=\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy\right]\,dx$$

ويمكن معالجة هذه العبارة باستخدام مبرهنة فوبيني وخاصية لاتغير تكامل لوبيغ نسبة الى الانسحابات، هذا يكتب:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy\right]\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dx\right]\,dy\\ &= ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

2.23.1 **مبرهنة •** **ليكن f وَ g تابعين $L^1(\mathbb{R}^N)$. عندئذ،**

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)||g(y)|\,dy<\infty, \quad \textbf{شك} \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{47.1}$$

من أجل العناصر $x \in \mathbb{R}^N$ التي تحقق (46.1) ، نعرف :

$$(f\star g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{48.1}$$

عندئذ ينتمي $f\star g$ **إلى** $L^1(\mathbb{R}^N)$ **ولدينا**

$$||f\star g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

1.2.23.1 **ملاحظة•** يمكنك أن تتأكد بسهولة من أنه إذا كان للعبارة $(f\star g)(x)$ معنى فإن للعبارة $(g\star f)(x)$ معنى كذلك ولدينا $(f\star g)(x)=(g\star f)(x)$.

2.2.23.1 **مبرهنة•** **ليكن** $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1<p\leq\infty$ **. عندئذ،**

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)||g(y)|\,dy<\infty, \quad \text{شك} \quad x\in\mathbb{R}^N \tag{49.1}$$

ويكون التابع، المعرف عند العناصر x **من** $\mathbb{R}^N$ **التي تحقق** (49.1) **بأن**

$$(f\star g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

منتميا إلى $L^p(\mathbb{R}^N)$ **ولدينا**

$$||f\star g||_{L^p(\mathbb{R}^N)}\leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}||g||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

3.2.23.1 **قضية•** **ليكن** $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g\in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1\leq p\leq\infty)$ **وَ** $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ **مع** $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ **. عندئذ**

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f\star g)h=\int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f}\star h).$$

حيث $\check{f}(x)=f(-x)$ **،** x **شك في** $\mathbb{R}^N$.

4.2.23.1 **سندات التوابع القيوسة•** إن مفهوم سند أو دعامة تابع مستمر f معروف جيدا، فهو متممة أكبر مفتوح حيث f معدوم (أو، وهذا مكافيء، إنه ملاصقة، المجموعة $\{x\mid f(x)\neq 0\}$). إنه ليس بالبسيط تعميم هذا المفهوم إلى التوابع القيوسة، لأن هذا التوابع معرفة شبه كليا فقط. التعريف السابق غير ملائم، ويمكن

للقاريء أن يقتنع بهذا باعتبار الدالة المميزة $\chi_{\mathbb{Q}}$ لمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. لدينا النتيجة:

5.2.23.1 **قضية• ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$ وليكن f تابعا حقيقيا معرفا على Ω . ليكن $\{\omega_i\}_{i\in I}$ جماعة كل المفتوحات $\omega_i \subset \Omega$ بحيث $f=0$ شك على ω_i من أجل كل $I \ni i$. ولضع $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$.**

عندئذ $f=0$ شك على ω .

6.2.23.1 **تعريف•** ليكن Ω وَ f وَ ω مثل في القضية 5.2.23.1 . إن سند f هو تعريفا المجموعة $\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \omega$.

7.2.23.1 **ملاحظة•**

١- إذا كان f_1 وَ f_2 تابعين بحيث $f_1=f_2$ شك على Ω . عندئذ $\operatorname{supp} f_1 = \operatorname{supp} f_2$. **نستطيع إذن الحديث عن سند تابع f من L^p** - وهذا دون ذكر الممثل الذي نختاره لتمثيل صف التكافوء.

٢- إذا كان f مستمرا فمن السهل التأكد من أن التريف السابق يكافيء التعريف المألوف للسند.

8.2.23.1 **قضية• ليكن $L^1(\mathbb{R}^N) \ni f$ وَ $L^p(\mathbb{R}^N) \ni g$. عندئذ**
$$\operatorname{supp}(f\star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

9.2.23.1 **ملاحظة•** من الواضح أنه إذا كان سندا f وَ g متراصين فإن سند $f\star g$ متراص. لكن وبصفة عامة إذا كان أحد السندين فقط متراصا فإن سند $f\star g$ قد يكون غير متراص على العموم. وعلى سبيل المثال إذا أخذنا على المستقيم العددي $f=\chi_{[0,1]}$ وَ $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ كان لدينا

$$(f\star g)(x) = \arctan x - \arctan(x-1), \ \ x\in\mathbb{R}.$$

وعليه لدينا هنا $\operatorname{supp}(f\star g)=\mathbb{R}$.

10.2.23.1 **قضية• ليكن** $C_c(\mathbb{R}^N) \ni f$ **وَ** $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \ni g$. **عندئذ لدينا** $C(\mathbb{R}^N) \ni f \star g$.

11.2.23.1 **ترميزات•** ليكن N عددا طبيعيا ـ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ متعددا، أي $\mathbb{N}^N \ni \alpha$. يسمى العدد الطبيعي $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ بطول العدد الطبيعي المتعدد α .

- نرمز بِـ D^α إلى مؤثر المشتق الجزئي المعرف بأن

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f \doteq \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_N^{\alpha_N} f.$$

- من أجل كل عدد طبيعي k ، يشير $C^k(\Omega)$ إلى فضاء التوابع القابلة للاشتقاق k مرة بالاستمرات في Ω ، أي فضاء التوابع f بحيث $D^\alpha f$ موجود ومستمر في Ω مهما كان العدد الطبيعي المتعدد α مع $|\alpha| \leq k$. ثمّ إننا نضع

$$\begin{aligned} C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega), \\ C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega), \qquad \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega). \end{aligned}$$

- إذا كان $x = (x_1, \ldots, x_N)$ وَ $y = (y_1, \ldots, y_N)$ شعاعين فإن $x \cdot y$ يشير إلى جدائهما السلمي، أي $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots x_N y_N$.

لنذكر أن $C_c(\Omega)$ يشير إلى فضاء التوابع المستمرة ذات سندات متراصة في Ω .

12.2.23.1 **قضية• ليكن** $C_c^k(\mathbb{R}^N) \ni f$ **، مع** $\mathbb{N}^\star \ni k$ **، وَ** $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \ni g$ **. عندئذ**

$$f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \ |\alpha| \leq k.$$

وبصفة خاصة، إذا كان $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ni f$ **وَ** $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \ni g$ **، كان عندئذ** $C^\infty(\mathbb{R}^N) \ni f \star g$.

3.23.1 صقل التوابع•

1.3.23.1 **تعريف•** نسمي **متتالية صاقلة** متتالية تابعية $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث

$$\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ \operatorname{supp}\rho_n \subset B\Big(0,\frac{1}{n}\Big),\ \int_{\mathbb{R}^N}\rho_n = 1,\ \rho_n(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^N.$$

إن مثل هذه المتتالية التابعية الصاقلة موجودة. ولتأكد من هذا نثبت تابعا ρ بحيث

$$\rho\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\qquad \operatorname{supp}\rho\subset B(0,1),\qquad \rho\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^N,\qquad \int_{\mathbb{R}^N}\rho>0$$

ثمّ نأخذ المتتالية $\{\rho_n\}$ العطاة بأن

$$\rho_n(x)=Cn^N\rho(nx)\quad \text{مع}\quad C=\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N}\rho\,dx}.$$

كتابع ρ يمكن اختيار التابع

$$\rho(x)=\begin{cases}\exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} & \text{من أجل}\quad |x|<1\\ 0 & \text{من أجل}\quad |x|\geq 1.\end{cases}$$

في كل ما يلي، نخصص الترميز $\{\rho_n\}$ إلى متتالية صاقلة.

2.3.23.1 **قضية• ليكن** $f \in C(\mathbb{R}^N)$. **عندئذ** $\rho_n\star f\to f$ **بانتظام على كل متراص من** $\mathbb{R}^N$.

3.3.23.1 **مبرهنة• ليكن** $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1\leq p\leq\infty$. **عندئذ**

$$\rho_n\star f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f.\quad \text{في}\quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

4.3.23.1 **لازمة• ليكن** Ω **جزء مفتوحا كيفيا من** $\mathbb{R}^N$. **عندئذ،** $\mathcal{D}(\Omega)$ **كثيف في** $L^p(\Omega)$ **من أجل** $1\leq p<\infty$.

24.1 معايير التراص في L^p

في الكثير من مسائل التحليل التابعي النظرية أو التطبيقية، إنه من المهم بمكان معرفة متى تكون جماعة من توابع الفضاء $L^p(\Omega)$ شبه متراصة في هذا الفضاء نسبة إلى التوبولوجيا القوية. إن القاريء يعرف بدون شك مبرهنة أسكولي Ascoli التي تشكل معيارا للتراص في $C(K)$ حيث K فضاء متري متراص. وبما أن هذه المبرهنة هي أساس لمعايير التراص المعروفة في L^p فنبدأ بذكيره:

5.0.24.1 **مبرهنة• ليكن** K **فضاء متراصا وَ** $\mathcal{K}$ **جزء محدودا من** $C(K)$ **. لنفرض أن** $\mathcal{K}$ **متساوي الاستمرار بانتظام، أي**

(50.1) **مهما كان** $\varepsilon > 0$ **يوجد** $\delta > 0$ **بحيث**
$$\mathrm{d}\,(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{K}.$$
عندئذ، $\mathcal{K}$ **شبه متراص في** $C(K)$.

6.0.24.1 **ترميزات•**

١- نضع $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ وهو انسحاب f وفق الشعاع h .

٢- ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$. نقول عن جزء مفتوح ω إنه **محتوى بقوة** في Ω ونكتب $\omega \subset\subset \Omega$ إذا كان $\overline{\omega} \subset \Omega$ وإذا كانت $\overline{\omega}$ متراص.

لنعط نتيجة تعود إلى فريشي (Fréchet) وكولموڤوروف (Kolmogorov)

7.0.24.1 **مبرهنة (فريشي وكولموڤوروف)• ليكن** Ω **جزء مفتوحا من** $\mathbb{R}^N$ **وَ** $\omega \subset\subset \Omega$ **. وليكن F جزء محدودا من** $L^p(\Omega)$ **مع** $1 \leq p < \infty$ **. لنفرض أن F كمولة بالتساوي، أي:**

(51.1) **مهما كان** $\varepsilon > 0$ **يوجد** $\delta > 0$ ، $\delta < \mathrm{d}\,(\omega, {}^c\Omega)$ **بحيث**
$$\forall h \in \mathbb{R}^N,\ \ |h| \leq \delta \Rightarrow ||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathbf{F}.$$

عندئذ، $\mathbf{F}_{|\omega}$ **شبه متراص في** $L^p(\omega)$.

8.0.24.1 **لازمة• ليكن** Ω **جزء مفتوح من** $\mathbb{R}^N$ **وَ F جزء محدود من** $L^p(\Omega)$ **مع** $1 \leq p < \infty$ **. لنفرض أن**

(52.1) $\forall \varepsilon > 0$ ، $\forall \omega \subset\subset \Omega$ ، **يوجد** $\delta > 0$ ، $\delta < \mathrm{d}\,(\omega, {}^c\Omega)$ **بحيث**
$$\forall h \in \mathbb{R}^N,\ \ |h| \leq \delta \Rightarrow ||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathbf{F},$$

وَ

(53.1) **مهما كان** $\varepsilon > 0$ **يوجد** $\omega \subset\subset \Omega$ **بحيث** $||f||_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$ **مهما كان** $f \in \mathbf{F}$.

عندئذ، F شبه متراص في $L^p(\Omega)$.

9.0.24.1 **ملاحظة•** إن عكس اللّازمة 8.0.24.1 السابقة صادق.

10.0.24.1 **ملاحظة•** ليكن $\mathbf{F}$ جزء محدودا من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p < \infty$ ويحقق $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ بحيث $\forall h \in \mathbb{R}^N$ مع $|h| \leq \delta, ||f||_{L^p(\Omega \backslash \omega)}, \ \forall f \in \mathbf{F}.$

لا نستطيع بصفة عامة أن نستنتج أن $\mathbf{F}$ شبه متراص في $L^p(\mathbb{R}^N)$. إلا أننا نستطيع أن نقول إن $\mathbf{F}_{|\omega}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$ ، من أجل كل مفتوح ومحدود من $\mathbb{R}^N$.

11.0.24.1 **لازمة• ليكن $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ تابعا مثبتا وَ $\mathbf{F} = G \star \mathbf{B}$ ، حيث $\mathbf{B}$ يشير إلى جزء محدود من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq p < \infty$. عندئذ، من أجل كل مفتوح محدود من $\mathbb{R}^N$ ، $\mathbf{F}_{|\omega}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$.**

12.0.24.1 **توطئة• ليكن $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leq q < \infty$. عندئذ**

$$\lim_{h \to 0} ||\tau_h G - G||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

الجزء ا

بعض المواضيع المختارة

الفصل ٢

نصوص المواضيع

1.2 الموضوع الأول

1.1.2 التمرين الأول •

1.1.1.2 • قل لماذا تكامل ستيلجس $\int_0^1 x\, d\left\{\frac{-1}{(x+1)^2}\right\}$ موجود؟

2.1.1.2 • بين أنه مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ لدينا التقدير:

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i-1)^2} \leq \frac{n}{n-1} - \frac{n}{2n-1}.$$

3.1.1.2 • أحسب التكامل السابق وذلك باستخدام تقسيمات من الشكل

$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ وَ $Q_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$.

4.1.1.2 • تأكد من النتيجة بردِّ هذا التكامل إلى تكامل ريمان وحساب هذا الأخير.

[إرشاد: لحساب الحدود التي تشمل مربعات في المقامات، يمكن الاستفادة من الفك:
$\frac{i}{(n+i)^2} = \frac{-n}{(n+i)^2} + \frac{1}{n+i}$ والفك المماثل له.]

2.1.2 **التمرين الثاني •** يقدم هذا التمرين تعريف تكامل ريمان وستيلجس. يفترض هنا أن التابع المكامِل **متزايد.** ليكن f تابعا محدودا على $[a,b]$ وَ ليكن $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ تقسيما لهذا المجال. نضع

$$m=\inf\{f(x)\mid a\le x\le b\} \quad \text{وَ} \quad M=\sup\{f(x)\mid a\le x\le b\}$$

وَ من أجل $i=1$ ، ... ، n نضع:

$$m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\} \quad \text{وَ} \quad M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}.$$

لنفرض أن g تابع متزايد على $[a,b]$ وليكن، كالعادة، $\delta g_i=g(x_i)-g(x_{i-1})$.

بعدئذ نعرف **مجموعي ريمان وستيلجس السفلي والعلوي** للتابع f نسبة إلى g الموافقين لِـ P بأنهما، على التوالي:

$$\underline{RS}(f,g,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\delta g_i \quad \text{وَ} \quad \overline{RS}(f,g,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\delta g_i.$$

بما أن δg_i موجب فإنه، مثلما في حالة ريمان، لدينا:

$$\underline{RS}(f,g,P)\le\overline{RS}(f,g,P),\ \ \forall P\in\mathcal{P}_{a,b}.$$

وكذلك، إذا كان $P^\star$ تقسيما أدق من P ، لدينا

$$\overline{RS}(f,g,P^\star)\le\overline{RS}(f,g,P) \quad \text{وَ} \quad \underline{RS}(f,g,P)\le\underline{RS}(f,g,P^\star)$$

ينتج من هذا أنه، من أجل كل تقسيمين P' وَ P'' للمجال $[a,b]$ ، لدينا:

$$\underline{RS}(f,g,P')\le\overline{RS}(f,g,P''). \qquad (\star)$$

وبالتالي كل مجاميع ريمان وستيلجس السفلية مكبورة (بأي مجموع علوي) وعليه فهي تتمتع بحد أعلى يرمز إليه بِـ $(R)\underline{\int}_a^b f\,dg$ ويسمى **تكامل ريمان وستيلجس السفلي للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$. وكذلك، مجموعة مجاميع ريمان وستيلجس العليا تتمتع بحد أدنى $(R)\overline{\int}_a^b f\,dg$ يدعى **تكامل ريمان وستيلجس العلوي للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$. واضح من $(\star)$ أن

$$(R)\underline{\int}_a^b f\,dg\le(R)\overline{\int}_a^b f\,dg.$$

تعريف ـ إذا كان f تابعا محدودا وكان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وإذا كان تكاملا ريمان وستيلجس السفلي والعلوي للتابع f نسبة إلى g متساويين فنشير إلى القيمة المشتركة لهذين التكاملين بـ $(R)\int_a^b f\,dg$ ونسمّه **تكامل ريمان وستيلجس للتابع** f **نسبة إلى** g **على** $[a,b]$.

1.2.1.2 • ليكن φ تابعا معرفا ومتزايدا وغير ثابت على المجال $[a,b]$ وَ Ψ الدالة المميزة للأعداد الصماء المحصورة بين العددين a وَ b $(b>a)$ ، أي أن $\Psi(x)=0$ إذا كان $x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}$ وَ $\Psi(x)=1$ إذا كان $x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}$. بين أن التابع Ψ غير ريمان وستيلجس كمول نسبة إلى φ على $[a,b]$.

2.2.1.2 • أثبت أنه حتى يكون تكامل ريمان وستيلجس $(R)\int_a^b f\,dg$ موجودا يلزم ويكفي أن نتمكن من مرافقة كل عدد $\varepsilon>0$ بتقسيم P للمجال $[a,b]$ بحيث

$$\overline{RS}(f,g,P)-\underline{RS}(f,g,P)\le\varepsilon.$$

3.2.1.2 • أثبت أنه إذا كان g متزايدا وكان f مستمرا على $[a,b]$ فإن f ريمان وستيلجس كمول نسبة إلى g على $[a,b]$.

4.2.1.2 • أثبت أنه إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى التابع المتزايد g على $[a,b]$ فإنه ريمان وستيلجس كمول نسبة إلى نفس التابع وعلى نفس المجال.

2.2 الموضوع الـ 2

1.2.2 **التمرين الأول•** ليكن التابع الحقيقي g المعرف على $[0,2]$ بأن $g(x)=x^3$ إذا كان $x\in[0,1]$ وَ $g(x)=(2-x)^3$ إذا كان $x\in[1,2]$.

1.1 أثبت أن g محدود التغيّر على $[0,2]$.

2.1 بين أن تكامل ستيلجس $\int_0^2 x\,dg$ موجود.

3.1 أحسب التكامل السابق وذلك بإستخدام تقسيمات من الشكل

$P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}\cup\{1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\dots,2\}$ وَ $Q_n=P_n\setminus\{0\}$.

[**إرشاد:** لحساب الحدود التي تشمل مكعبات، يمكن الإستفادة من العلاقة $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ التي ينبغي تبريرها.]

2.2.2 التمرين الثاني• وهو نفس التمرين الثاني الوارد في الموضوع الأول، عدا السؤال الأول منه الذي أصبح:

1.2 ليكن φ التابع الحقيقي المعرف على المجال $[0,1]$ بأن $\varphi(x) = x^2$ وليكن ψ التابع المعرف بأن $\psi(x) = x$ إذا كان $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ وَ $\psi(x) = 0$ إذا كان $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. بين أن التابع ψ غير ريمان ـ ستيلجس كمول نسبة إلى φ على $[0,1]$.

3.2 الموضوع الـ 3

1.3.2 التمرين الأول• لتكن $\{A_n\}$ متتالية متزايدة من أجزاء مجموعة غير خالية X ولنضع:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \cap {}^c A_{n-1}, \ n \geq 2.$$

بين أن: ا) $\{B_n\}_{n\geq 1}$ غير متقاطعة مثنى مثنى.

ب) $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. جـ) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

ترميز: لتكن f تطبيقا لِـ X ، مجوعة كيفية غير خالية، في $\mathbb{R}$. نضع:

$$f_+ = \max\{f, 0\} = \tfrac{1}{2}\{|f| + f\} \quad \text{وَ} \quad f_- = \max\{-f, 0\} = \tfrac{1}{2}\{|f| - f\}$$

يدعى f_- بجزء f السالب وَ f_+ بجزئه الموجب. هل يمكنك كتابة f بدلالة f_- وَ f_+ ؟

2.3.2 التمرين الثاني• ليكن التابع $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّف بأن $\varphi(x) = x + 1$.

٢.١ أرسم، على نفس المعلم، بياني φ_- وَ φ_+.

٢.٢ نزود $\mathbb{R}$ بعشيرته لبوريل. بين أن التوابع φ ، φ_- ، φ_+ قيوسة.

٢.٣ ليكن f تطبيقا لفضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ في $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته لبوريل $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. أثبت أنه حتى يكون f قيوسا يلزم ويكفي أن يكونا f_- وَ f_+ قيوسين.

3.3.2 **التمرين الثالث•** ليكن f تطبيقا قيوسا ومحدودا لفضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ في $\mathbb{R}_+$ مزود بعشيرته لبوريل $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. ولنضع، من أجل $\alpha \in \mathbb{R}_+$:

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} f(x) \quad \text{وَ} \quad \{f > \alpha\} = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

٣.١ إذا كان $a = \frac{1}{2}||f||_\infty$ وَ $g_1 = a\chi_{\{f>a\}}$ ، حيث $\chi_{\{f>a\}}$ يشير إلى الدالة المميزة للمجموعة $\{f > a\}$ ، فأثبت أن $||f - g_1||_\infty \leq a$ وَ $0 \leq g_1 \leq f$.

٣.٢ برهن على وجود متتالية توابع درجية (وقيوسة) $\{g_n\}_{n\geq 1}$ بحيث:

$$\left|\left|f - \sum_{i=1}^{n} g_i\right|\right|_\infty \leq \frac{1}{2^n}||f||_\infty \quad \text{وَ} \quad 0 \leq \sum_{i=1}^{n} g_i \leq f \quad \text{مهما كان } 1 \leq n$$

[**إرشاد:** يمكنك تكرار ما ورد في السؤال ٣.١ على التابع $f - g_1$ ثمّ $f - g_1 - g_2$ ، ...]

٣.٣ إستنتج وجود متتالية توابع $\{f_n\}$ درجية متزايدة (وقيوسة) ومتقاربة بانتظام نحو f .

4.3.2 **التمرين الرابع•** ليكن E جزءًا من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا، بمعنى:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

أثبت أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد جزء مفتوح $\mathcal{O}$ بحيث:

$$\mathcal{O} \supset E \quad \text{وَ} \quad \mu^\star(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

4.2 الموضوع الـ 4

1.4.2 **التمرين الأول•** لتكن المتتالية التابعية $\{v_n\}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ بأن $v_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ ، $0 \leq x$. هل المتتالية $\{v_n\}$ محدودة؟

ا) بين أن $\{v_n\}$ متقاربة ببساطة على $\mathbb{R}_+$ نحو تابع v يطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

ب) هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي على هذه المتتالية؟ مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ؟ توطئة فاتو؟ ماذا عن $\int_0^\infty v\,dx$ وَ $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty v_n(x)\,dx$ ؟

2.4.2 **التمرين الثاني•** ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$ الفضاء المقاس المكون من المجموعة $\mathbb{R}$ وعشيرة وقياس لوبيغ عليها وليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ تابعا كمولا. أثبت أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد تابع $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ محدود ومعدوم خارج مجال متراص $[a,b]$ بحيث $\int_{\mathbb{R}}|f-g|\,d\mu\leq\varepsilon$.

[**إرشاد:** يمكن إعتبار متتالية التوابع $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة بأن

$$f_n(x)=\left\{\begin{array}{lll} T_n\big(f(x)\big) & \text{من أجل} & n\geq|x| \\ 0 & \text{من أجل} & n<|x| \end{array}\right.$$

حيث T_n هو تابع البتر المعرف بأن $\{|t+n|-|t-n|\}$ $T_n(t)=\frac{1}{2}$ ، $t\in\mathbb{R}$.]

3.4.2 **التمرين الثالث•** ليكن التابع المعطى من أجل $t>0$ بأن:

$$I(t)=\int_0^\infty\frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,dx,\ \ t>0$$

تأكد من أن التابع I معرف جيدا وأنه قابل للإشتقاق بالإستمرار مرتين في $]0,\infty[=\mathbb{R}_+^\star$ وأن I يحقق المعادلة التفاضلية $I''(t)+I(t)=\dfrac{1}{t}$ ، $t>0$.

4.4.2 **التمرين الرابع•** ليكن a وَ b عددين حقيقين مع $b>a>0$.

٤.١ أحسب $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\ln\dfrac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}}$.

٤.٢ من أجل $n\in\mathbb{N}^\star$ ، عين $u_n^+=\max\{u_n,0\}$ حيث u_n التابع المعرف على $\mathbb{R}_+$ بالعبارة $u_n(x)=ae^{-nax}-be^{-nbx}$ ، $x\geq 0$. ثمّ بين أن $\sum\limits_{n=1}^\infty\int_0^\infty|u_n(x)|\,dx=+\infty$.

٤.٣ أحسب $S(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)$ ، $x\geq 0$.

٤.٤ بين أن تكامل ريمان الموسع $\int_0^\infty S(x)\,dx$ موجود وأعط قيمته.

٤.٥ أحسب $\sum\limits_{n=1}^\infty\int_0^\infty u_n(x)\,dx$. هل لدينا المساواة:

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty u_n(x)\,dx=\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\,dx\quad ?$$

هل تناقض هذه النتيجة المبرهنة المتعلقة بعكس رمزي التكامل $\int$ والمجموع $\sum$ ؟

5.2 الموضوع الـ 5

1.5.2 التمرين الأول• ليكن $I=[0,1]$ مزود بقياس لوبيغ والمتتالية التابعية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ حيث $u_n(x)=\dfrac{1}{1+nx(1-x)}$ ، $I\ni x$.

١٠١ بين أن $\{u_n\}$ متقاربة ببساطة على I نحو تابع u يطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

١٠٢ بين أنه من أجل كل $\eta>0$ يوجد جزء $J\subset I$ بحيث:

$|J|$(= قياسJ) $\leq\eta$ وَ $\{u_n\}$ متقاربة بانتظام نحو u على $I\setminus J$.

هدفنا هو تعميم ما سبق إلى فضاءات مقيسة كيفية. تدعى النتيجة المحصل عليها **مبرهنة «إيغوروف»** (Egorov) (بشكليها الضعيف والقوي).

2.5.2 التمرين الثاني• **مبرهنة إيغوروف (الشكل الضعيف)**

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مُقاسا مع** $\mu(X)<\infty$ **ولتكن** $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **متتالية توابع حقيقية قيوسة معرفة على** X. **لنفرض أن المتتالية** $\{f_n\}$ **تتقارب ببساطة نحو تابع** $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$. **عندئذ، من أجل كل** $\varepsilon>0$ **وكل** $\varrho>0$ **، يوجد جزء قيوس** $A\subset X$ **وعدد طبيعي** n_0 **بحيث:**

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall n\geq n_0,\ \forall x\in X\setminus A. \quad \text{وَ} \quad \mu(A)\leq\varrho \tag{1}$$

لإثبات هذه المبرهنة نقترح عليك تتبع ما يلي: ليكن $\varepsilon>0$ وَ $\varrho>0$ عددين مثبتين. من أجل $k\in\mathbb{N}^\star$ ، نضع $E_k=\{x\in X\mid |f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}$.

٢٠١ هل E_k قيوس؟ هل قياسه منته؟

٢٠٢ نضع $A_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$. هل A_n قيوس؟ هل المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ رتيبة؟

٢٠٣ أثبت أن $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$. ماذا عن $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$ ؟

٢٠٤ إستنتج أنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون $\mu(A_{n_0})\leq\varrho$. ثمّ، بوضع $A=A_{n_0}$ ، بيّن أن A يحقق (1).

3.5.2 **التمرين الثالث• مبرهنة إيغوروف (الشكل القوي) ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$ ولتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة معرفة على X . لنفرض أن المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب μ ـ حيثما كان تقريبا نحو تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.**
عندئذ، من أجل كل $\eta > 0$ ، يوجد جزء قيوس $A \subset X$ مع $\mu(A) \leq \eta$ وبحيث تتقارب $\{f_n\}$ بإنتظام نحو f على $X \setminus A$.

لإثبات هذه المبرهنة نقترح عليك تتبع ما يلي: ليكن $\mathcal{S} \subset X$ بحيث $\mu(\mathcal{S}) = 0$ وتتقارب $\{f_n\}$ حيثما كان على $X_0 \doteq X \setminus \mathcal{S}$ نحو f. ليكن $\eta > 0$ عددا حقيقيا مثبتا.

٣.١ أثبت أنه، من أجل كل $m \in \mathbb{N}^\star$ ، يوجد جزء قيوس A_m من X_0 وعدد طبيعي n_m بحيث:

$$\frac{\eta}{2^m} \geq \mu(A_m) \quad \text{وَ} \quad \sup_{X_0 \setminus A_m} |f_n - f| \leq \frac{1}{m}, \ \forall n \geq n_m.$$

٣.٢ نضع $A' = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$. بين أن $\mu(A') \leq \eta$ ثمّ إن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام نحو f على $X \setminus A$ حيث $A = A' \cup \mathcal{S}$.

٣.٣ ليكن $I = [0,1]$ مزود بقياس لوبيغ والمتتالية التابعية $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ حيث:

$$v_n(0) = 1, \quad v_n(x) = \frac{1}{1 + nx|\sin\frac{\pi}{x}|}, \ x \in I \setminus \{0\}.$$

أثبت أنها متقاربة ببساطة نحو تابع v يطلب تعيينه. ليكن $\eta > 0$ عددا حقيقيا أقل من 1 . عين جزءًا K من I بحيث $|K| \leq \eta$ وَ $\{v_n\}$ متقاربة بانتظام نحو v على $I \setminus K$.

4.5.2 **التمرين الرابع•** ليكن التابع المعطى من أجل $t > 0$ بأن:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \ t > 0\,.$$

٤.١ تأكد من أن التابع Γ معرف جيدا.

٤.٢ أثبت أن Γ قابل للإشتقاق بالاستمرار في $\mathbb{R}_+^\star =]0,\infty[$ وأحسب مشتقه.

٤.٣ أثبت، مكاملا بالتجزئة، أنه من أجل كل $t > 0$ لدينا:

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t).$$

٤.٤ أحسب $\Gamma(1)$ ، ثمّ، بالتدريج، إستنتج قيمة $\Gamma(n+1)$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

6.2 الموضوع الـ 6

1.6.2 التمرين الأول• ليكن التابعان الحقيقيان f وَ g المعرفين على بأن:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{إذا كان } x \in [0,1] \\ 2 & \text{إذا كان } x \in]1,2] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{إذا كان } x \in [0,1[\\ x^2-1 & \text{إذا كان } x \in [1,2] \end{cases}.$$

ا) بين أن f وَ g محدودي التغيُّر على $I \doteq [0,2]$.

ب) بين أن تكاملي ستيلجس $\int_0^1 f\,dg$ وَ $\int_1^2 f\,dg$ موجودين ثمّ أحسب قيمتيهما.

جـ) هل التابع f ستيلجس كمول نسبة إلى g على $[0,2]$ ؟

2.6.2 التمرين الثاني• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن متتالية توابع حقيقية قيوسة $\{f_n\}$ إنها **متقاربة بالقياس** نحو تابع حقيقي قيوس f على X إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\Big) = 0.$$

ليكن $X = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ مزود بقياس لوبيغ والمتتالية $\{g_n\}$ المعرفة بأن $g_n = n\chi_{I_n}$ حيث χ_{I_n} هي الدالة المميزة للمجال $I_n = [0,1/n]$. بين أن $\{g_n\}$ تتقارب بالقياس نحو التابع $g = 0$ على $\mathbb{R}_+$. ماذا عن $\int_{\mathbb{R}_+} g$ وَ $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n$ ؟ هل يتناقض هذا مع مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي؟

3.6.2 التمرين الثالث• هدفنا هو إثبات أن التقارب حيثما كان تقريبا يستلزم التقارب بالقياس. ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$ ولتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة معرفة على X وتتقارب μ ـ حيثما كان تقريبا نحو تابع حقيقي f . لنرمز بِـ A إلى جزء X المهمل (أي أن $\mu(A) = 0$) حيث لا تتقارب المتتالية $\{f_n\}$ نحو f . من أجل $\alpha > 0$ وَ k ، $n \in \mathbb{N}^\star$ نضع:

$$E_k(\alpha) = \Big\{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \alpha\Big\},$$
$$F_n(\alpha) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\alpha), \qquad F(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha).$$

٣.١ ماذا عن قابلية الأجزاء $E_k(\alpha)$ وَ $F_n(\alpha)$ وَ $F(\alpha)$ للقياس؟

٣.٢ هل المتتالية $\{F_n(\alpha)\}$ رتيبة؟ قارن بين $\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$ وَ $\mu(F)$.

٣.٣ أثبت أن $A \supset F(\alpha)$.

٣.٤ إستنتج أن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو f .

4.6.2 **التمرين الرابع•** ليكن $X =]0,1[$ مزود بقياس لوبيغ. من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم نعتبر التوابع: $f_1^{(k)}, \quad f_2^{(k)}, \quad ..., \quad f_k^{(k)}$ حيث $f_i^{(k)} = \chi_{I_i^{(k)}}$ مع $I_i^{(k)} =]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ ، $i = 1$ ، ... ، k . إننا بإعطاء k القيم 1 ، 2 ، ... نحصل على توابع نرقمها تباعا للحصول على متتالية توابع $\{\varphi_n\}$. أثبت أن $\{\varphi_n\}$ متقاربة بالقياس نحو التابع $\varphi = 0$ على $]0,1[$ لكنّها لا تتقارب عند كل نقطة من هذا المجال.

5.6.2 **التمرين الخامس•** أحسب ـ مبررا حساباتك ـ النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx.$$

7.2 الموضوع الـ 7

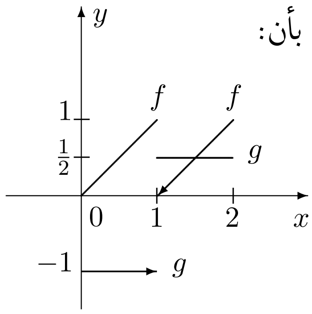
1.7.2 **التمرين الأول•** ليكن θ تابعًا ريمان كمولًا على مجال متراص $[a,b]$ وليكن Θ التابع المعرف على $[a,b]$ بأن $\Theta(x) = \int_a^x \theta$. بين أن Θ مستمر مطلقًا على $[a,b]$.

إليك المبرهنة التالية، وإثباتها غير مطلوب منك:

مبرهنة. ليكن ξ تابعا محدودا وَ η تابعا متزايدا على مجال متراص $[a,b]$. لنرمز بـ T إلى مجموعة نقط تقطعات ξ. ولنعتبر المجموعتين $B_x = \{y \in \mathbb{R} \mid \eta(x-) \leq y \leq \eta(x+)\}$ وَ $B_T = \bigcup_{x\in T} B_x$. عندئذ، حتى يكون التابع ξ ستيلجس كمولا نسبة إلى η على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن تكون المجموعة B_T صفرية (مهملة). $\eta(x-)$ وَ $\eta(x+)$ هما نهايتا η عند النقطة x من اليسار واليمين على التوالي.

2.7.2 **التمرين الثاني•** هل يمكنك أن تستنتج من المبرهنة السابقة أنه إذا كان التابع المحدود ξ ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع متزايد η كانت القيمة المطلقة $|\xi|$ ستيلجس كمولة نسبة إلى التابع ذاته وعلى المجال نفسه؟

في كل ما يلي، يشير f وَ g إلى التابعين المعرفين بأن:



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in]1,2], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1[\\ \frac{1}{2}, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

3.7.2 **التمرين الثالث •** أثبت أن f غير ستيلجس كمول نسبنة إلى g على $[0,2]$.

4.7.2 **التمرين الرابع•** يقدم هذا التمرين تعريف تكامل ستيلجس المعمم.

تعريف. ليكن φ وَ ψ تابعين معرفين على مجال $[a,b]$. نقول عن عدد، نرمز إليه بِـ $\oint_a^b \varphi\, d\psi$ ، إنه **تكامل ستيلجس المعمم للتابع** φ **نسبة إلى** ψ **على** $[a,b]$ ونقول إن φ **ستيلجس معمم كمول نسبة إلى** ψ **على** $[a,b]$ ، إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{a,b},\ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b},\ \forall Q \in \mathcal{W}(P)$$
$$\Big(P \supset P_\varepsilon \Rightarrow \Big|S(\varphi,\psi,P,Q) - \oint_a^b \varphi\, d\psi\Big| < \varepsilon\Big).$$

٤.١ تأكد من أن القابلية للمكاملة حسب ستيلجس تقتضي القابلية للمكاملة حسب ستيلجس المعمم.

٤.٢ أثبت أن f ستيلجس معمم كمول نسبة إلى g على $[0,2]$ وبتكامل $\oint_0^2 f\, dg = \frac{3}{2}$.

٤.٣ ليكن γ التابع الذي ينطبق مع التابع g عدا عند النقطة 1 حيث $\gamma(1) = -1$. أثبت أن f غير ستيلجس معمم كمول نسبة إلى γ على $[0,2]$.

تقدم المبرهنتان ١ وَ ٢ الواردتان في نهاية هذا الموضوع خواصا أخرى لتكامل ستيلجس المعمم.

5.7.2 **التمرين الخامس•** ليكن (X, τ) فضاء توبولوجيا منفصلا وَ $\mathcal{K}$ مجموعة أجزاء X المتراصة. نشير بِـ $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ إلى العشيرة المولدة من $\mathcal{K}$ وبِـ $\mathcal{B}_\tau(X)$ إلى العشيرة البوريلية (المولدة من τ).

٥٠١ بين أن $\mathcal{B}_\tau(X) \supset \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$.

٥٠٢ أثبت أن الفئة $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \cap K \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X),\ \forall K \in \mathcal{K}\}$ تحتوي على كل أجزاء X المغلقة وتشكل عشيرة على X .

٥٠٣ أثبت أن الفئة $\mathcal{C}$ المكونة من عناصر $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ الـ σ ـ محدودة تحتوي على $\mathcal{K}$ وتشكل **عُصبة** على X .

٥٠٤ إستنتج أن

$$A \in \mathcal{B}_\tau(X) \text{ و } A \text{ جزء } \sigma\text{ ـ محدود في } X \ \Rightarrow\ A \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$$

إننا نقول عن جزء A من X إنه σ ـ **محدود** إذا كان محتويا في إتحاد عدود من عناصر $\mathcal{K}$. ونقول عن فئة $\mathcal{F}$ من أجزاء X إنها عصبة إذا كانت المجموعة الخالية عنصرا منها وإذا كان $A \in \mathcal{F}$ وَ $B \in \mathcal{F}$ كان $A \setminus B \in \mathcal{F}$ ثمّ إن $\mathcal{F}$ مغلقة نسبة إلى الإتحادات العدودة.

أثبت المبرهنتين:

مبرهنة ١. ليكن f تابعا ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى g على كلا المجالين $[a,c]$ وَ $[c,b]$. عندئذ يكون f ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ ولدينا:

$$\oint_a^b f\,dg = \oint_a^c f\,dg + \oint_c^b f\,dg.$$

مبرهنة ٢. لنفرض أن التابع f ستيلجس معمم كمول نسبة إلى التابع g على $[a,b]$. عندئذ لا توجد نقطة من $[a,b]$ حيث يكون f وَ g متقطعين من اليمين معا أو من اليسار معا.

قارن هاتين المبرهنتين مع المبرهنتين الموافقتين في حالة تكامل ستيلجس.

8.2 الموضوع الـ 8

1.8.2 التمرين الأول• ليكن δ التابع المجموعاتي المعرف على $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ، مجموعة أجزاء $\mathbb{R}$ ، بأن $\delta(A)=1$ إذا كان $0 \in A$ وَ $\delta(A)=0$ إذا كان $0 \notin A$ ، $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. بين أن δ قياس موجب على $(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ، يدعى قياس ديراك المركز عند النقطة 0.

2.8.2 التمرين التاني• لتكن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$ وليكن μ قياسا موجبا على $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ صفته أن $\mu(I) < \infty$ من أجل كل مجال محدود I من $\mathbb{R}$ وليكن $a \in \mathbb{R}$. لنعتبر التابع φ_a المعرف بأن:

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \mu(]a,x]) & \text{إذا كان } a < x \\ 0 & \text{إذا كان } a = x \\ -\mu(]x,a]) & \text{إذا كان } a > x \end{cases}.$$

٢٠١ أثبت أن φ_a تابع متزايد.

٢٠٢ أثبت أن φ_a مستمر من اليمين عند كل نقطة من $\mathbb{R}$.

نقول عن φ_a إنه تابع توزيع ناتج من القياس μ.

في التمرينين ٣ وَ ٤ المواليين، يشير X إلى مجموعة غير خالية وإذا كان A وَ B جزئين منها فإننا نضع $A\Delta B \doteq (A \setminus B) \cup B \setminus A = (A \cap {}^cB) \cup ({}^cA \cap B)$. ونسمي هذه المجموعة بالفرق التناظري بين A وَ B .

3.8.2 التمرين الثالث• ٣٠١ بين أن:

$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$ مهما كانت الأجزاء A ، B ، C من X .

٣٠٢ ليكن هنا $(X,\mathcal{B},\mu)$ فضاء مقيسا. نعرف على $\mathcal{B}$ العلاقة $\mathcal{N}$ بأن

$A\mathcal{N}B$ إذا وفقط إذا كان $\mu(A\Delta B)=0$.

أثبت أن $\mathcal{N}$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{B}$.

نرمز إلى مجموعة صفوف تكافؤ $\mathcal{N}$ على $\mathcal{B}$ بـ $\mathcal{C}$ ، أي أن $\mathcal{C} \doteq \mathcal{B}/\mathcal{N}$.

٣.٣ لنضع من أجل صفين للتكافؤ $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$: $d(\overline{A},\overline{B})=\mu(A\Delta B)$. بين أن d معرفة جيدا، بمعنى أنه إذا كان A_1 ممثلا آخر للّصف $\overline{A}$ وكان B_1 ممثلا آخر للّصف $\overline{B}$ كان $\mu(A\Delta B)=\mu(A_1\Delta B_1)$ ، وأن d مسافة على $\mathcal{C}=\mathcal{B}/\mathcal{N}$.

4.8.2 **التمرين الرابع•** ١.٤ لتكن A_1 ، A_2 ، B_1 ، B_2 أجزاء من المجموعة X . أثبت أن: ا) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$ ؛

ب) $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$.

$\mathcal{C}$ هي مجموعة صفوف التكافؤ المعرفة في التمرين السابق. وليكن الجداء الديكارتي $\mathcal{C}^2=\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ المزود بالمسافة d_1 المعطاة بأن:

$$d_1((\overline{A}_1,\overline{A}_2),(\overline{B}_1,\overline{B}_2))=d(\overline{A}_1,\overline{B}_1)+d(\overline{A}_2,\overline{B}_2)$$

٢.٤ بين أن التابع $\overline{\bigcup}:\mathcal{C}^2\longrightarrow\mathcal{C}$ المعرف بأن: $\overline{\bigcup}(\overline{A},\overline{B})=\overline{A\cup B}$ معرف جيدا وأنه مستمر.

٣.٤ بين أن التابع $\overline{\bigcap}:\mathcal{C}^2\longrightarrow\mathcal{C}$ المعرف بأن: $\overline{\bigcap}(\overline{A},\overline{B})=\overline{A\cap B}$ معرف جيدا وأنه مستمر.

5.8.2 **التمرين الخامس•** أثبت أن الفضاء المتري $(\mathcal{C},d)$ ، المعرف في التمرين ٣، فضاء متريا تاما.

9.2 الموضوع الـ 9

1.9.2 **التمرين الأول•** ليكن المجال المفتوح $I=]0,1[$ مزود بقياس لوبيغ والمتتالية التابعية $\{f_n\}$ المعرفة على I بأن $f_n(x)=(1-x^q)x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}(x^{2q})^j$ ، $x\in I$ حيث p وَ q وسيطان حقيقيان موجبان تماما معطيان. ماذا عن رتابة هذه المتتالية؟

1.1.9.2 • بين أن $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q}$ ، $x\in I$.

2.1.9.2 • إستنتج، مطبقا مبرهنة تقارب ملائمة، أن:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{j=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{p+2jq} - \frac{1}{p+(2j+1)q}\Big].$$

2.9.2 **التمرين الثاني•** ليكن μ قياسا موجبا على مجموعة غير خالية X وَ $u : X \longrightarrow [0,+\infty]$ تابعا قيوسا مع $J = \int_X u\,d\mu$ منته وموجب تماما. وليكن α وسيطا حقيقيا. أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X n\ln\left[1+\left(\frac{u}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu$ في الحالات التالية:

١. $1 > \alpha > 0$. ٢. $1 = \alpha$. ٣. $1 < \alpha$.

3.9.2 **التمرين الثالث•** ليكن التابع المعطى من أجل $t \in \mathbb{R}$ بأن:

$$K(t) = \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 x^2}\cos tx\,dx,\ \ t \in \mathbb{R}$$

حيث β وسيط حقيقي غير معدوم معطى.

1.3.9.2 • تأكد من أن التابع K معرف جيدا وبين أنه قابل للإشتقاق في $\mathbb{R}$ واحسب مشتقه.

2.3.9.2 • بين ـ مكاملا بالتجزئة ـ أن K يحقق المعادلة التفاضلية:

$$K'(t) = -\frac{t}{2\beta^2}K(t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

3.3.9.2 • إستنتج، بحل المعادلة السابقة وتعيين الثابت الذي يظهر في حلها، قيمة $K(t)$ بدلالة t وَ β وَ π.

4.9.2 **التمرين الرابع•** أثبت **الاستمرار المطلق** لتكامل لوبيغ؛ بمعنى أنه إذا كان $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيدا وكان $v \in L^1(X,\mu)$ فإن ما يلي **محقق**:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\,\eta > 0)(\forall A \in \mathcal{A})\Big((\mu(A) \le \eta) \Rightarrow (\int_A |v|\,d\mu \le \varepsilon)\Big).$$

[إرشاد: يمكن استخدام تعريف تكامل لوبيغ للتابع الموجب $|v|$ بواسطة التوابع البسيطة.]

5.9.2 **التمرين الخامس•** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{v_n\}$ متتالية توابع قيوسة متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع v . ولنفرض أن v كمول وأن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |v_n|\,d\mu=\int_X |v|\,d\mu.$$

1.5.9.2 • أثبت (مستعملا توطئة فاتو) أن $\lim_{n\to\infty}\int_A |v_n|\,d\mu=\int_A |v|\,d\mu$. $\forall A\in\mathcal{A}$

2.5.9.2 • في حالى $\mu(X)<\infty$ ، إستنتج (مستخدما مبرهنة إيغوروف والاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ (التمرين الرابع)) أن $\lim_{n\to\infty}\int_X |v_n-v|\,d\mu=0$.

3.5.9.2 • أعط مثالا في $I=]0,1[$ ، مزود بقياس لوبيغ، يبين تعذر النتيجة إذا كان v غير كمول.

10.2 الموضوع الـ 10

1.10.2 **التمرين الأول•** ليكن x عددا حقيقيا أكبر تماما من 1 وليكن المجال $I=[1,x]$ مزود بقياس لوبيغ والمتتالية التابعية $\{f_n\}$ المعرفة على I بأن $f_n(s)=\dfrac{s^{1/n}}{s}$.

١.١ أحسب، من أجل $s\in I$ ، $\lim_{n\to\infty} f_n(s)=f(s)$ ، ثمّ استخدم مبرهنة تقارب ملائمة لتبين أن $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(s)\,ds=\int_I f(s)\,ds$.

١.٢ إستنتج أن $\lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}-1)=\ln x$. توحي النتيجة السابقة بطريقة لإنشاء التابع اللوغاريتمي إنطلاقا من المتتاليات وذلك بوضع:

$$\ln x=\lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}-1) \quad \text{من أجل كل } 0<x.$$

إننا رأينا آنفا أن المتتالية المستخدمة متقاربة من أجل $x>1$. هل يمكنك أن تثبت معتمدا على ما تعرفه عن نهايات المتتاليات الحقيقية وخواصها أن تبين، دون اللجيء

إلى التكامل، أن:

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{مهما كان } 1 < x \text{ وَ } 1 < y \text{ ؟}$$

2.10.2 **التمرين الثاني•** ليكن $0 < \sigma$ وسيطا حقيقيا مثبتا. أحسب ـ مبررا حساباتك ـ النهاية

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n x^{\sigma-1}\, dx.$$

3.10.2 **التمرين الثالث•** ليكن التابع J_1 المعطى من أجل $t \in \mathbb{R}^\star$ بأن:

$$J_1(t) = \int_0^\infty \frac{dx}{t^2 + x^2}.$$

٣.١ تأكد من أن التابع J_1 معرف جيدا ثمّ، بحساب التكامل، أكتب J_1 على الشكل:

$$J_1(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R}^\star \tag{1.2}$$

حيث φ تابع لا تحتوي عبارته على إشارة التكامل.

٣.٢ بين أن شروط مبرهنة الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة؛ ثمّ، بإشتقاق المتطابقة (1.2) ، استنتج أن:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(t^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2|t|^3}, \;\; t \in \mathbb{R}^\star.$$

٣.٣ إستنتج مما سبق وبإعتماد التدريج قيمة التكامل:

$$J_n(t) = \int_0^\infty \frac{dx}{(t^2 + x^2)^n}, \;\; n \in \mathbb{N}^\star$$

بدلالة n وَ π وقوى t.

تعريف ـ ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن متتالية $\{u_n\}$ من التوابع الكمولة، أي من $L^1(X,\mu)$ ، إنها **كمولة بالتساوي** أو **متساوية الكمولة** إذا تحقق ما يلي:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \eta > 0)(\forall A \in \mathcal{A})(\forall n \in \mathbb{N}^\star)\Big((\mu(A) \le \eta) \Rightarrow (\textstyle\int_A |u_n|\, d\mu \le \varepsilon)\Big).$$

4.10.2 **التمرين الرابع•** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وَ $\{v_n\}$ متتالية توابع كمولة على X.

٤.١ لنفرض وجود تابع g موجب من $L^1(X,\mu)$ بحيث:

$$|v_n(x)| \leq g(x) \quad \text{مهما كان} \quad 1 \leq n \text{ ، } \mu \text{ - شك على } X .$$

أثبت - مستعملا الإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ - أن المتتالية $\{v_n\}$ كمولة بالتساوي.

٤.٢ إذا كانت المتتالية $\{v_n\}$ متقاربة في $L^1(X,\mu)$ نحو تابع v ، أي:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |w - w_n| \, d\mu = 0 \quad \text{مع} \quad L^1(X,\mu) \ni v$$

فأثبت أنها كمولة بالتساوي.

٤.٣ ليكن المجال $K = [-1,1]$ ، مزود بقياس لوبيغ، ولتكن المتتالية $\{w_n\}$ المعرفة بأن:

$$w_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 3n(1-n^2x^2) & \text{إذا كان} & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{إذا كان} & \frac{1}{n} < |x| \leq 1 . \end{array} \right.$$

أثبت أنها ليست كمولة بالتساوي على K.

5.10.2 **التمرين الخامس•** ليكن $\Omega =]a,b[$ مجالا محدودا من $\mathbb{R}$ مزودا بقياس لوبيغ. ولتكن $\{\psi_n\}$ متتالية عناصرها توابع كمولة (أي من $L^1(\Omega)$). أثبت أنه إذا كانت هذه المتتالية كمولة بالتساوي على Ω وكانت متقاربة ببساطة شبه كليا على Ω نحو تابع ψ فإن هذا التابع كمول ولدينا $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |\psi_n - \psi| \, dx = 0$.

[إرشاد: لإثبات كمولية ψ يمكنك إستخدام كون المتتالية $\{\psi_n\}$ كمولة بالتساوي وتوطئة فاتو وتراص المجال $\overline{\Omega}$. ولإثبات التقارب يمكنك الإستفادة من مبرهنة إيغوروف وَ ...]

11.2 الموضوع الـ 11

1.11.2 **التمرين الأول•** لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أجزاء $\mathbb{R}^2$ المعطاة بأن $A_n = [n, 2n] \times [0, 1 + (-1)^n]$. أحسب $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ وَ $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. هل هذه المتتالية متقاربة؟

2.11.2 **التمرين الثاني•** ليكن f تابعا لوبيغ كمولا على $\mathbb{R}_+^\star =]0,+\infty[$ ولنضع:

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t+x}\, dx, \;\; t > 0.$$

هل g معرف جيدا؟

٢.١ بيّن مستخدما مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة أن g مستمر في $\mathbb{R}_+^\star$.

٢.٢ أثبت أن g قابل للإشتقاق في $\mathbb{R}_+^\star$ وأحسب مشتقه.

3.11.2 **التمرين الثالث•** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا وَ h تابعا كمولا، أي $h \in L^1(X,\mu)$. أثبت أن:

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\{|h|>r\}} |h|\, d\mu = 0 \quad (2.2)$$

حيث $\{|h| > r\} = \{x \in X \mid |h(x)| > r\}$.

تعريف ـ ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن متتالية $\{u_n\}$ من التوابع الكمولة، أي من $L^1(X,\mu)$، إنها **كمولة بانتظام على** X إذا كانت العلاقة (2.2) محققة بانتظام نسبة إلى n، أي:

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{n\geq 1} \int_{\{|u_n|>r\}} |u_n|\, d\mu = 0.$$

4.11.2 **التمرين الرابع•** $\{v_n\}$ هي متتالية التوابع الكمولة على $\mathbb{R}$ (مزود بقياس لوبيغ) والمعرفة بأن $v_n(x) = v(x-n)$، $x \in \mathbb{R}$، حيث

$$v(x) = (1-|x|)^+ = \max\{1-|x|, 0\}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

٤.١ بيّن أن $\{v_n\}$ تتقارب ببساطة نحو تابع v_∞ يطلب تعيينه.

٤.٢ أثبت أن $\{v_n\}$ كمولة بإنتظام على $\mathbb{R}$.

٤.٣ هل $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n\, dx = \int_{\mathbb{R}} v_\infty\, dx$ ؟

5.11.2 **التمرين الخامس•** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X) < \infty$ ولتكن $\{u_n\}$ متتالية توابع كمولة بإنتظام على المجموعة X.

٥.١ أثبت وجود عدد $0 < M$ بحيث: $\int_X |u_n|\, d\mu \leq M, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^\star$.

لنفرض أن المتتالية $\{u_n\}$ تؤول ببساطة μ ـ شك على X نحو تابع u.

٥.٢ أثبت أن $u \in L^1(X,\mu)$.

٥.٣ أثبت أن $\int_X u\, d\mu = \int_X u_n\, d\mu \lim_{n\to\infty}$.

[إرشاد: يمكنك أن تكتب $\int_X |u_n - u|\, d\mu = I_n + J_n$ حيث $I_n = \int_{\{|u_n|\le r\}} |u_n - u|\, d\mu$ وَ $J_n = \int_{\{|u_n|>r\}} |u_n - u|\, d\mu$ ومعالجة I_n بإستخدام مبرهنة التقارب بالهيمنة والإستفادة من الكمولية بإنتظام للمتتالية $\{u_n\}$ والإستمرار المطلق للتابع الكمول u لمعالجة J_n .]

12.2 الموضوع الـ 12

1.12.2 **التمرين الأول•** ليكن التابع الحقيقي ξ المعرف بأن $\xi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

1.1.12.2 • هل ξ مستمر على $\mathbb{R}$ ؟ قابل للإشتقاق عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ ؟

2.1.12.2 • لنضع، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، $\xi_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} \xi(t)\, dt$ مك $x \in \mathbb{R}$.
عين صراحة التابع ξ_n ثمّ أرسم بيانه. بين أن ξ_n قابل للإشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$.

3.1.12.2 • أثبت أن المتتالية التابعية $\{\xi_n\}$ متقاربة بانتظام نحو التابع ξ على $\mathbb{R}$.

2.12.2 **التمرين الثاني•** ليكن a وَ b عددين حقيقين مع $a < b$. نقول عن جزء $\mathcal{P}^0_{a,b}$ من المجموعة $\mathcal{P}_{a,b}$ ، المكونة من كل تقسيمات المجال $[a,b]$ ، إنه **متجهة نحو الصفر** إذا أمكن، من أجل كل $\rho > 0$ ، إيجاد تقسيم P من $\mathcal{P}^0_{a,b}$ وسيطه δP أقل من ρ.

1.2.12.2 • أعط مثالا لجزء من $\mathcal{P}_{a,b}$ متجه نحو الصفر.

2.2.12.2 • ليكن f وَ g تابعين حقيقين معرفين على $[a,b]$ ولفرض أن f ستيلجس كمول نسبة إلى g على $[a,b]$ وليكن $\mathcal{P}^0_{a,b}$ جزءا من $\mathcal{P}_{a,b}$ متجها نحو الصفر.
هل النهاية $\lim_{\substack{\delta P\to 0\\ P\in\mathcal{P}^0_{a,b}}} S(f,g,P,P^\star)$ ، حيث $P^\star$ هو التقسيم الوسط نسبة إلى P المعطى بأن $P^\star = P\setminus\{a\}$ ، موجودة؟ ما قيمتها في حالة وجودها؟

3.2.12.2 • نأخذ هنا $a = 0$ ونعتبر المجموعة

$$\mathcal{P}^0_{0,b} = \Big\{ P_n(\lambda) = \{0, \lambda^{n-1}b, \lambda^{n-2}b, \ldots, \lambda b, b\} \mid n \in \mathbb{N}^\star, \lambda \in]0,1[\Big\}.$$

تأكد من أن $P_n(\lambda)$ يشكل فعلا تقسيما للمجال $[0,b]$ وأحسب $\delta P_n(\lambda)$ ثمّ بين أن $\mathcal{P}^0_{0,b}$ جزء من $\mathcal{P}_{0,b}$ متجه نحو الصفر.

3.12.2 **التمرين الثالث** • ليكن m عددا طبيعيا أكبر تماما من الواحد وليكن $0 < b$ عددا حقيقيا.

1.3.12.2 • قل لماذا تكامل ستيلجس $\int_0^b x\, d(x^m)$ موجود.

2.3.12.2 • أحسب التكامل السابق وذلك باستخدام مجاميع ستيلجس الموافقة للتقسيمات $P_n(\lambda) = \{0, \lambda^{n-1}b, \lambda^{n-2}b, \ldots, \lambda b, b\}$ والقسيمات الوسطى نسبة إليها $P^\star_n(\lambda) = P_n(\lambda) \setminus \{0\}$ حيث n عدد طبيعي مآله $+\infty$ وَ $\lambda \in]0,1[$ عدد حقيقي مآله 1.

3.3.12.2 • أذكر لماذا يمكن تحويل تكامل ستيلجس إلى تكامل لريمان. أحسب، مستخدما دستور نيوتن وليبنيتز، تكامل ريمان الناتج وتأكد من القيمة المحصل عليها في السؤال السابق.

4.12.2 **التمرين الرابع** • ليكن h تابعا حقيقيا معرفا على $\mathbb{R}$ ولنشر بِـ C إلى مجموعة كل نقط استمرارها.

1.4.12.2 • أثبت أن C من نوع G_δ ، أي أنه يكتب على الشكل $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ مع V_n جزء مفتوح من $\mathbb{R}$.

2.4.12.2 • استنتج أنه لا يمكن لتابع حقيقي أن يكون مستمرا فقط على مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$.

5.12.2 **التمرين الخامس** • ليكن التابع ϕ المعرف على $[0,1]$ بأن $\phi(0)=0$ وَ $\phi(x)=\frac{1}{q}$ إذا كان $x=\frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما وَ $\phi(x)=0$ إذا كان $x\in\mathbb{Q}\setminus[0,1]$.

1.5.12.2 • أثبت أن تغيُّر ϕ على $[0,1]$ غير محدود.

2.5.12.2 • أثبت أن ϕ ريمان كمول على $[0,1]$ مع $\int_0^1\phi=0$. هل يمكن للتابع ϕ أن يتمتع بتابع أصلي؟

3.5.12.2 • بيّن أن ϕ مستمر عند كل نقطة من $[0,1]$ فاصلتها صماء ومتقطع عند كل نقطة من $[0,1]$ فاصلتها ناطقة (عدا عند 0) إلا أن $\lim\limits_{x\not\to r}\phi(x)=0$ عند كل نقطة $r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$. يعني الرمز $x\not\to r$ أن x يؤول نحو r بقيم مختلفة تماما عن r.

13.2 الموضوع الـ 13

1.13.2 **التمرين الأول** • لنزود المستقيم العددي $\mathbb{R}$ بالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ المولدة عن التوبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ وليكن $k>0$ عددا حقيقيا وَ T_k التابع الحقيقي المعرف بأن $T_k(t)=\frac{1}{2}\{|t+k|-|t-k|\}$ مهما كان $t\in\mathbb{R}$.

1.1.13.2 • أرسم بيان T_k. هل T_k تابع قيوس؟

2.1.13.2 • ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا، X مجموعة كيفية غير خالية، وليكن $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا قيوسا. بين أن التابع $T_k\circ f$ قيوس من X في $\mathbb{R}$.

2.13.2 **التمرين الثاني** • لتكن Y مجموعة كيفية وليكن $\lambda^\star$ قياسا خارجيا عليها وليكن A وَ B جزئين من Y.

1.2.13.2 • أثبت أنه إذا كان $\lambda^\star(B)=0$ كان

$$\lambda^\star(A\cup B)=\lambda^\star(A)=\lambda^\star(A\cap {}^cB).$$

2.2.13.2 • أثبت أنه إذا كان $\lambda^\star(A)$ وَ $\lambda^\star(B)$ منتهيين كان:

$$|\lambda^\star(A)-\lambda^\star(B)|\leq\lambda^\star(A\,\Delta\,B).$$

حيث $A\,\Delta\,B$ يشير إلى الفرق التناظري بين الجزئين A وَ B.

3.2.13.2 • ليكن $\ell^\star$ قياس لوبيغ الخارجي على $\mathbb{R}$. أحسب $\ell^\star(\mathbb{N})$ وهذا باستخدام تعريف $\ell^\star$.

3.13.2 **التمرين الثالث•** ليكن μ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$ وَ $\mu^\star$ قياسه الخارجي على الفضاء نفسه وليكن E وَ F جزئين من $\mathbb{R}^N$.

1.3.13.2 • برهن على أنه إذا كان $\mu^\star(E)=0$ كان E لوبيغ قيوسا.

2.3.13.2 • برهن على أنه إذا كان E وَ F لوبيغ قيوسين كان لدينا:

$$\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F)=\mu(E)+\mu(F).$$

تذكير: نقول عن تابع حقيقي g معرف على $\mathbb{R}$ إنه نصف مستمر سفليا عند نقطة a من $\mathbb{R}$ إذا كان $\liminf\limits_{x\to a} g(x)\geq g(a)$ حيث تعريفا:

$$\liminf_{x\to a} g(x)=\sup_{\rho>0} m(\rho),\qquad m(\rho)=\inf\{g(x)\mid x\in\mathbb{R},\,|x-a|<\rho\}.$$

4.13.2 **التمرين الرابع•**

1.4.13.2 • أثبت أن كل تابع حقيقي g مستمر عند نقطة a من $\mathbb{R}$ نصف مستمر سفليا عند هذه النقطة.

2.4.13.2 • ليكن التابع الحقيقي γ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\gamma(0)=0$ وَ $\gamma(x)=|x|^{-1}$ من أجل $x\in\mathbb{R}^\star$. اثبت أن γ نصف مستمر سفليا على $\mathbb{R}$.

3.4.13.2 • إذا كان التابع g نصف مستمرا سفليا عند نقطة a من $\mathbb{R}$ فأثبت أنه من أجل كل $g(a) > \alpha$ يوجد $0 < \rho$ بحيث $g(x) > \alpha$ مهما كان $x \in]a-\rho, a+\rho[$.

4.4.13.2 • استنتج أنه إذا كان التابع g نصف مستمرا سفليا على $\mathbb{R}$ فهو قيوس على هذه المجموعة.

5.13.2 **التمرين الخامس•** ليكن E جزءا من $\mathbb{R}$ يحقق ما يلي: مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد جزء مفتوح $\mathcal{O}_\varepsilon$ بحيث

$$\mu^\star(\mathcal{O}_\varepsilon \cap {}^cE) \leq \varepsilon \qquad \wedge \qquad \mathcal{O}_\varepsilon \supset E. \tag{3.2}$$

أثبت أن E لوبيغ قيوس.

[إرشاد: يمكنك اعتبار متتالية من المفتوحات $\{\mathcal{O}_n\}_n$ تحقق (3.2) ثمّ تأخذ جزءا كيفيا A من $\mathbb{R}^N$، تبين أن $\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A\cap E) + \mu^\star(A \cap {}^c\mathcal{O}_n)$ وَ...]

14.2 الموضوع الـ 14

1.14.2 **التمرين الأول •** ليكن التابع الحقيقي T المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $T(t) = \int_0^\infty e^{-x}\sin tx\,dx$ ، $t \in \mathbb{R}$.

1.1.14.2 • أذكر لماذا T معرف جيدا ثمّ استخدم مبرهنة التقارب بالهيمنة لتبين أن التابع T مستمر على $\mathbb{R}$.

2.1.14.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}$ ثمّ أحسب T'.

ليكن الآن التكامل $\int_0^b e^{-x}\sin tx\,dx$ حيث b وَ t عددان حقيقيان مع $0 < b$.

3.1.14.2 • بين أن $\int_0^b e^{-x}\sin tx\,dx = \frac{t}{1+t^2} - \frac{e^{-b}}{1+t^2}[\sin tb + t\cos tb]$.
استنتج أن $T(t) = \frac{t}{1+t^2}$ ، مهما كان $t \in \mathbb{R}$ وأن:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos tx\,dx = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

4.1.14.2 • أحسب، مبررا حساباتك، التكامل $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\sin tx\,dx,\ t\in\mathbb{R}$.

2.14.2 **التمرين الثاني** • ليكن $L = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n-\frac{1}{n2^n}, n+\frac{1}{n2^n}]$ والتابع الحقيقي f المعرف على $\mathbb{R}_+$ بأن:

$$f(x) = \begin{cases} n^2 2^n(x-n)+n & \text{من أجل } x\in[n-\frac{1}{n2^n},n] \text{ ، } (n\in\mathbb{N}^\star) \\ -n^2 2^n(x-n)+n & \text{من أجل } x\in[n,n+\frac{1}{n2^n}] \\ 0 & \text{من أجل } x\in\mathbb{R}_+\setminus L . \end{cases}$$

1.2.14.2 • أرسم بيان f على المجال $[0,4]$. ماذا عن استمرار التابع f على $\mathbb{R}_+$ ؟
هل التابع f محدود على $\mathbb{R}_+$ ؟

2.2.14.2 • أثبت أن f لوبيغ جموع على $\mathbb{R}_+$ وعين قيمة التكامل $\int_0^{+\infty} f\,dx$.

3.2.14.2 • أثبت أن التابع f غير مستمر بانتظام على $\mathbb{R}_+$.

3.14.2 **التمرين الثالث** • ليكن المجال المفتوح $I =]0,1[$ ، مزود بقياس لوبيغ ولتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على هذا المجال بأن

$$u_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n,\ x\in I$$

1.3.14.2 • أثبت، بالحساب الفعلي، أن $\int_I \Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big]dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_I u_n\,dx$.
هل تناقض هذه النتيجة المبرهنة المتعلقة بمكاملة سلسلة عنصر بعنصر؟

2.3.14.2 • أثبت أن $\int_I \Big[\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|\Big]\, dx = +\infty$.

4.14.2 **التمرين الرابع •** برهن على أنه إذا كان التابع g موجبا ولوبيغ جموعا على $\mathbb{R}_+$ وكان يحقق شرط لبشيتز على هذا المجال، أي أنه يوجد ثابت $\lambda > 0$ بحيث:

$$|g(x) - g(x')| \le \lambda |x - x'|,\ \ \forall x, x' \in \mathbb{R}_+,$$

فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

5.14.2 **التمرين الخامس •** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وَ h تابعا كمولا، أي $h \in L^1(X,\mu)$ ، ولتكن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عناصرها من $L^1(X,\mu)$. عندئذ إذا كانت:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |h_n - h|\, d\mu = 0 \tag{4.2}$$

فتوجد متتالية جزئية $\{h_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ تتقارب μ ـ شبه كليا على X نحو h ، أي بحيث:

$$h_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} h \text{ ، } \mu - \text{شك على } X. \tag{5.2}$$

لإثبات هذه النتيجة نقتح ما يلي:

1.5.14.2 • أثبت أنه يمكن، من $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، استخراج متتالية جزئية $\{h_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ بحيث:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_X |h_{n_j} - h|\, d\mu < \infty. \tag{6.2}$$

2.5.14.2 • بين أن المتباينة السابقة (5.2) تستلزم أن:

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} |h_{n_j} - h|\, d\mu < \infty. \tag{7.2}$$

3.5.14.2 • استنتج مما سبق أن التابع $\sum_{j=1}^{\infty}|h_{n_j}-h|$ منته μ ـ شبه كليا وأن:
$h_{n_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}h$ ، μ – شك على X.

15.2 الموضوع الـ 15*

1.15.2 **التمرين الأول •** ليكن التكامل المعمم $K=\int_0^{+\infty}\xi(x)\,dx$ ، حيث $\xi(x)=\frac{\sin x}{x}$.

1.1.15.2 • أثبت أن التكامل K متقارب (منته).

2.1.15.2 • أثبت أن التابع $|\xi|$ غير لوبيغ كمول على $\mathbb{R}_+^\star$ ، أي أن $L=\displaystyle\int_0^{+\infty}|\xi(x)|\,dx=+\infty$.

[**إرشادات:** ١. لإثبات تقارب K يمكنك أن تكامل على $J_1\doteq]0,1]$ وعلى $J_2\doteq[1,+\infty[$ وتبرر تقارب التكامل على J_2 بالمكاملة بالتجزئة وبالإكبار.

٢. ولإثبات تباعد L يمكنك أن تكتب $\mathbb{R}_+$ على شكل اتحاد مجالات من الشكل $](n-1)\pi,n\pi]$ وأن تلاحظ أن $\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\xi(x)|\,dx\geq\frac{2}{n\pi}$.

تذكَّر أن تكامل ريمان المعمم لتابع h على مجال من الشكل $]a,+\infty[$ هو تعريفا النهاية $\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta h\,dx$ ـ في حالة وجودها.]

2.15.2 **التمرين الثاني •** لنزود $\mathbb{R}_+$ بقياس لوبيغ وليكن f تابعا حقيقيا معرفا وموجبا على $\mathbb{R}_+$ ولنفرض أن f ريمان كمول على كل مجال متراص من $\mathbb{R}_+$ وأن التكامل المعمم $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ متقارب (منته). أثبت ـ مستخدما مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي ـ أن f لوبيغ كمول على $\mathbb{R}_+$.

[**إرشاد:** تذكَّر أن ـ تعريفا $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\substack{\alpha\downarrow 0\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ، وأننا برهنا في الدرس على أن القابلية للمكاملة حسب ريمان على مجال متراص تستلزم القابلية للمكاملة حسب لوبيغ وبنفس التكامل.]

3.15.2 **التمرين الثالث •** ليكن g تابعا حقيقيا معرفا ومستمرا على $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ وبحيث يكون التكامل ريمان المعمم $\int_\alpha^{+\infty} \frac{g(x)}{x}\, dx$ متقاربا مهما كان $0 < \alpha$.

1.3.15.2 • برهن على أن تكامل ريمان المعمم $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{g(ax) - g(bx)}{x}\, dx$ متقارب وأن:

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(ax) - g(bx)}{x}\, dx = g(0) \ln \frac{b}{a},$$

حيث a وَ b عددان حقيقيان مع $0 < a < b$.

[**إرشاد:** يمكنك بكتابة ملائمة وبتديلين للمتغير أن تلاحظ أنه، من أجل $0 < \varepsilon$ ، لدينا:

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(ax)}{x}\, dx - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{g(bx)}{x}\, dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{g(y) - g(0)}{y}\, dy + g(0) \ln \frac{b}{a}$$

ثمّ تجعل ε يؤول نحو الصفر.]

2.3.15.2 • بعد أن تتأكد من أن شروط تطبيق الدستور السابق محققة، استنتج قيمة تكامل ريمان المعمم :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, dx \;\; (0 < a < b).$$

4.15.2 **التمرين الرابع •** ليكن $0 < b$ عددا حقيقيا وليكن التابع $F(\cdot,\cdot)$ المعرف في $\mathbb{R}_+^\star \times]0, b]$ بأن $F(x,t) = \dfrac{e^{-tx} - e^{-bx}}{x}$.

1.4.15.2 • بين أن تكامل ريمان المعمم $\displaystyle\int_\alpha^{\infty} F(x,t)\, dx$ متقارب مهما كان $0 < \alpha$.
استنتج تقارب تكامل ريمان المعمم $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\, dx$ وقابلية التابع $x \longmapsto F(x,t)$ للمكاملة حسب لوبيغ على $\mathbb{R}_+^\star$ ، وهذا مهما كان $t \in]0, b]$.
يمكننا إذن اعتبار التابع T المعرف بواسطة تكامل لوبيغ بأن:

$$T(t) = \int_0^{\infty} F(x,t)\, dx, \;\; t \in]0, b].$$

2.4.15.2 • أثبت أن T قابل للاشتقاق عند كل نقطة t_0 من $]0,b[$. أحسب T'. وبعد حساب التكامل الوارد في عبارة T' ومكاملة المعادلة التفاضلية الخطية المحصل عليها ثمّ حساب T عند نقطة ملائمة، عين قيمة $T(t)$ بدلالة $t \in [0,b]$.

3.4.15.2 • أحسب $T(t)$ ، $t \in [0,b]$ ، باستخدام الدستور الوارد في السؤال ٣.١ لتتأكد من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق.

5.15.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن u تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا على X وليكن φ تابعا حقيقيا مستمرا ومتزايدا تماما على $[0,+\infty[$ مع $0 \leq \varphi(0)$.

1.5.15.2 • أثبت المتباينة التالية، التي تعمم متباينة تشبتشيف:

$$\mu(\{x \in X \mid |u(x)| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_X \varphi(|u|)\, d\mu, \;\; \forall \lambda > 0.$$

2.5.15.2 • هل يمكنك أن تستنتج من المتباينة السابقة أن كل تابع v لوبيغ كمول، أي $v \in L^1(X,\mu)$ ، منته μ ـ شبه كليا على X ؟

16.2 الموضوع الـ 16

1.16.2 **التمرين الأول** • لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من أجزاء مجموعة غير خالية X وَ $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة من أجزاء X.

1.1.16.2 • بين أن المتتاليتين متقاربتان نحو جزئين من X نشير إليهما، على الترتيب، بِـ A وَ B .

2.1.16.2 • لتكن المتتالية $\{C_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة بأن $C_{2n-1} = A_n$ وَ $C_{2n} = B_n$ مهما كان $n \geq 1$. بين أن $\liminf\limits_{n\to\infty} C_n = A \cap B$.

3.1.16.2 • أثبت أنه حتى تكون $\{C_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة يلزم ويكفي أن يكون $A = B$.

2.16.2 **التمرين الثاني** • ليكن $(X, \mathcal{R})$ فضاء قيوسا وَ μ تطبيقا لِـ $\mathcal{R}$ في $[0, +\infty]$. لنفرض أن $\mu(\emptyset) = 0$ وأن μ يتمتع بخاصيتي الجمعية المتهية، بمعنى أن $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{k} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(E_n)$ من أجل كل متتالية متهية $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ عناصرها من $\mathcal{R}$ وغير متقاطعة مثنى مثنى، والـ $\sigma-$ تحتجمعية، بمعنى أن:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \ \forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}.$$

بين أن μ قياس موجب على $\mathcal{R}$.

3.16.2 **التمرين الثالث** • ليكن φ تابعا حقيقيا معرفا ومستمرا على $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ويتمتع بنهاية $\varphi(\infty)$ عندما يؤول x نحو $+\infty$: $\varphi(\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

1.3.16.2 • برهن على أنه إذا كان a وَ b عددين حقيقيين مع $b > a > 0$ فإن:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\, dx = [\varphi(0) - \varphi(\infty)] \ln \frac{b}{a}\cdot$$

2.3.16.2 • بعد أن تتأكد من أن شروط تطبيق الدستور السابق محققة، استنتج قيمة التكامل:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\, dx \ (0 < a < b).$$

[**إرشاد:** يمكنك أخذ عددين α وَ β مع $0 < \alpha < 1 < \beta$ واعتبار $I(\alpha, \beta) \doteq \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\, dx$، تكتبه على الشكل $I(\alpha, \beta) = I(\alpha, 1) + I(1, \beta)$ ثمّ تكتب (مثلا) $I(\alpha, 1) = \int_\alpha^1 \frac{\varphi(ax)}{x}\, dx - \int_\alpha^1 \frac{\varphi(bx)}{x}\, dx$ وباجراء تبديلين للمتغير في التكاملين تبين أن $I(\alpha, 1) = I(\alpha) - \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$ حيث $I(\alpha) = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$ وبالأسلوب نفسه تعالج $I(1, \beta)$ لتحصل على العلاقة $I(\alpha, \beta) = I(\alpha) - I(\beta)$ حيث $I(\beta) = \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$ ثمّ تجعل α يؤول إلى الصفر وَ β إلى $+\infty$ مع إدخال $\varphi(0)$ وَ $\varphi(\infty)$ بكيفية مناسبة.]

4.16.2 **التمرين الرابع** • ليكن $(X, \mathcal{R}, \mu)$ فضاء مُقاسا وَ ψ وَ $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ توابع موجبة وكمولة على على X (أي من $L^1(X, \mu)$) مع $\psi_n \to \psi$ ، $\mu-$ شك على X.
هدفنا هو البرهان على أنه إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \psi_n \, d\mu = \int_X \psi \, d\mu$ كانت المتتالية $\{\psi_n\}$ كمولة بالتساوي على X.

1.4.16.2 • بين أن $\psi_n + \psi = \min\{\psi_n, \psi\} + \max\{\psi_n, \psi\}$ مهما كان n من $\mathbb{N}$ وَ $|\psi_n - \psi| = \max\{\psi_n, \psi\} - \min\{\psi_n, \psi\}$ مهما كان n من $\mathbb{N}$.

2.4.16.2 • أثبت ـ مستخدما مبرهنة ملائمة للتقارب ـ أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \min\{\psi_n, \psi\} \, d\mu = \int_X \psi \, d\mu$.

3.4.16.2 • استنتج مما سبق أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \max\{\psi_n, \psi\} \, d\mu = \int_X \psi \, d\mu$ وأن

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\psi_n - \psi| \, d\mu = 0. \tag{8.2}$$

4.4.16.2 • أثبت أن العلاقة السابقة (8.2) تستلزم أن المتتالية $\{\psi_n\}$ كمولة بالتساوي.

[**إرشاد:** يمكنك في إثبات السؤال الأخير أن تستفيد من الاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ.]

5.16.2 **التمرين الخامس** • نزود $\mathbb{R}_+$ بقياس لوبيغ ونأخذ f تابعا حقيقيا قيوسا على $\mathbb{R}_+$ ولوبيغ كمولا على كل مجال محدود محتوى في هذه المجموعة. لنفرض وجود ثوابت $\lambda > 0$ وَ $r \in \mathbb{N}$ وَ $A > 0$ بحيث يكون $|f(x)| \leq \lambda x^r$ مهما كان $x \geq A$.
وليكن، من أجل $t > 0$: $L_f(t) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-xt} \, dx$.

1.5.16.2 • أثبت أن L_f معرف جيدا من أجل كل t في $\mathbb{R}_+^\star$.

2.5.16.2 • أثبت أن $\lim\limits_{t\to\infty} L_f(t) = 0$.

3.5.16.2 • أثبت أن L_f قابل للاشتقاق عند كل نقطة من $\mathbb{R}_+^\star$. أحسب L'_f.

4.5.16.2 • أثبت بالتدريج أن L_f من صنف C^∞ في $\mathbb{R}_+^\star$.

5.5.16.2 • أثبت أن التابع u المعرف في $\mathbb{R}_+^\star$ بأن $u(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ يحقق على $\mathbb{R}_+$ الشروط الواردة في صدر هذا التمرين. أحسب L_u'' وبتعيين التكامل الوارد في عبارة هذا المشتق بين أن:

$$L_u''(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}, \ \forall t > 0. \tag{9.2}$$

6.5.16.2 • كامل المعادلة التفاضلية (9.2) السابقة. عيّن ثابتيها باستخدام الخاصيتين $\lim\limits_{t\to+\infty} L_u(t) = 0$ وَ $\lim\limits_{t\to+\infty} L_u'(t) = 0$ (إذ إن $L_u' = -L_{xu}$) واستنتج أن:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-xt}\, dx = t\, \ln \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

تذكير ١: نقول عن متتالية $\{\psi_n\}$ من $L^1(X,\mu)$ إنها كمولة بالتساوي على X إذا تحقق ما يلي:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \eta > 0)(\forall A \in \mathcal{R})(\forall n \in \mathbb{N}^\star)\Big((\mu(A) \le \eta) \Rightarrow (\textstyle\int_A |\psi_n|\, d\mu \le \varepsilon)\Big).$$

تذكير ٢: الاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ يعني أن كل تابع v من $L^1(X,\mu)$ يحقق ما يلي:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \eta > 0)(\forall A \in \mathcal{R})\Big((\mu(A) \le \eta) \Rightarrow (\textstyle\int_A |v|\, d\mu \le \varepsilon)\Big).$$

17.2 الموضوع الـ 17

1.17.2 التمرين الأول •

1.1.17.2 • بين أن التابع $x \mapsto g_0(x) = e^x$ محدود التغيُّر على كل مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ وأعط تغيُّره الكلي $V_a^b(g_0)$ على $[a,b]$.

2.1.17.2 • قل لماذا تكامل ستيلجس $\int_0^b x\,dg$ ، حيث $g = g_{0|_{[0,b]}}$ مع $0 < b$ ، موجود.

3.1.17.2 • ليكن الآن التابع الحقيقي $\tilde{g}$ المعرف على $[0,b]$ بأن $\tilde{g}(x) = e^x$ من أجل $x \in [0,b[$ وَ $\tilde{g}(b) = 1$. هل التكامل $\int_0^1 x\,d\tilde{g}$ موجود؟

2.17.2 **التمرين الثاني •** هل التابع φ المعرف على $I \doteq [0,1]$ بأن $\varphi(x) = \sqrt{x}$ من أجل $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ وَ $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2$ من أجل $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ريمان كمول على المجال I ؟

3.17.2 **التمرين الثالث •**

1.3.17.2 • برهن بالتدريج على أنه، من أجل كل $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ، يكون لدينا:

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{1 - q^n - nq^n(1-q)}{(1-q)^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star. \qquad (10.2)$$

2.3.17.2 • g هو التابع المعرف في التمرين 1.17.2 . استعن بالعلاقة (10.2) لتحسب تكامل ستيلجس $\int_0^b x\,dg$ وذلك باستخدام تقسيمات من الشكل

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \ldots, b\right\} \quad \text{وَ} \quad Q_n = P_n \setminus \{0\}.$$

3.3.17.2 • أحسب تكامل ستيلجس $\int_0^b x\,d\tilde{g}$ ، حيث $\tilde{g}$ هو التابع المعرف في التمرين 1.17.2 .

4.17.2 **التمرين الرابع •** ليكن f تابعا حقيقيا معرفا وموجبا ومحدودا على المجال المتراص $[a,b]$ من $\mathbb{R}$. برهن على أنه إذا كان f ريمان كمولا على $[a,b]$ فيكون f^2 ريمان كمولا على المجال نفسه.

5.17.2 **التمرين الخامس •**

1.5.17.2 • ليكن $[a,b]$ مجالا متراصا من $\mathbb{R}$ وَ $t \in [a,b]$. هل التابع θ المعرف بأن $\theta(t) = 1$ وَ $\theta(x) = 0$ من أجل $x \in [a,b] \setminus \{t\}$ ريمان كمول على $[a,b]$ ؟ نفس السؤال في حالة التابع θ معدوم على $[a,b]$ عدا عند عدد منته t_1 ، t_2 ، ...، t_m من نقط هذا المجال.

2.5.17.2 • ليكن، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، T_n المجموعة الجزئية من $[0,1]$ المعطاة بأن

$$T_n = \{\tfrac{p}{q} \mid (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star, 0 \leq p < q \leq n\}.$$

أعط T_1 وَ T_2 وَ T_3 وَ T_4 .

لتكن المتتالية التابعية $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على $[0,1]$ بأن $\psi_n(x) = 1$ من أجل $x \in T_n$ وَ $\psi_n(x) = 0$ من أجل $x \in [0,1] \setminus T_n$. قل لماذا كل تابع ψ_n ريمان كمول. بين أن $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة ببساطة نحو تابع ψ يطلب تعيينه. أثبت أن ψ غير ريمان كمول.

3.5.17.2 • لتكن المتتالية التابعية $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بأن $\zeta_n(x) = n \cos nx$ من أجل $x \in [0, \frac{\pi}{2n}]$ وَ $\zeta_n(x) = 0$ من أجل $x \in]\frac{\pi}{2n}, 1]$. قل لماذا كل تابع ζ_n ريمان كمول. بين أن $\{\zeta_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة ببساطة نحو تابع ζ يطلب تعيينه وهو ريمان كمول. لكن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \zeta_n \neq \int_0^1 \zeta$.

يتضح من المثالين السابقين أن المرور إلى النهاية تحت إشارة تكامل ريمان قد يؤدي إلى عبارة عديمة المعنى وقد يؤدي إلى نتيجة تختلف عن نهاية التكاملات. إلا أنه لدينا:

4.5.17.2 • لتكن $\{h_n\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع ريمان كمولة على مجال متراص $[a,b]$. برهن على أنه إذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام على $[a,b]$ نحو تابع h فإن h ريمان كمول على المجال نفسه ولديا $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b h_n = \int \lim_{n\to\infty} \int_a^b h$.

18.2 الموضوع الـ 18–

1.18.2 **التمرين الأول •** لتكن A وَ E وَ F ثلاثة أجزاء من مجموعة X غير خالية. ولنشر بِـ ${}^cE$ إلى متممة E نسبة إلى X . بين أن:

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE)\,. \tag{11.2}$$

في كل ما يلي يُزود $\mathbb{R}$ ـ وكذا $\overline{\mathbb{R}}$ ـ بعشيرته البوريلية.

2.18.2 **التمرين الثاني •** ليكن التابع الحقيقي المعرف بأن $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ، $\mathbb{R} \ni x$. ولتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_n^k}(x) + n\chi_{A_n}(x),\ \ x \in \mathbb{R} \tag{12.2}$$

حيث يُشير χ إلى الدالة المميزة للمجموعة الواردة كدليل ثمّ إن $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq n\}$ وَ

$$A_n^k = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\},\ \ k = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

1.2.18.2 • عين المجموعات A_1^1 وَ A_1^2 وَ A_1 وأرسم، على نفس المعلم، بياني f وَ f_1 . عين كذلك المجموعات A_2^1 ، A_2^2 ، ... ، A_2^8 ، A_2 وأرسم، على معلم مخالف للسابق، بياني f وَ f_2 .

2.2.18.2 • قل لماذا f قيوس ثمّ بين أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ذات عناصر قيوسة.

3.2.18.2 • أثبت أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام نحو التابع f على $\mathbb{R}$.

3.18.2 **التمرين الثالث •** ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا ولتكن $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع قيوسة من X في $\overline{\mathbb{R}}$. وليكن التابعان ψ وَ φ المعرفين من X في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $\psi = \inf_{n\geq 1} g_n$ وَ $\varphi = \sup_{n\geq 1} g_n$. لنذكر ـ مثلا ـ أنه لدينا تعريفا $\psi(x) = \inf_{n\geq 1} g_n(x)$ من أجل كل $x \in X$.

1.3.18.2 • أثبت أنه من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$\{\psi < \lambda\} \doteq \{\inf\limits_{n\geq 1} g_n < \lambda\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{g_n < \lambda\}$ مع $\{\psi < \lambda\} \doteq \{x \in X \mid \psi(x) < \lambda\}$
وَ $\{g_n < \lambda\} \doteq \{x \in X \mid g_n(x) < \lambda\}$ وكذلك:

$\{\varphi > \lambda\} \doteq \{\sup\limits_{n\geq 1} g_n > \lambda\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{g_n > \lambda\}$ مع $\{\varphi > \lambda\} \doteq \{x \in X \mid \varphi(x) > \lambda\}$

أستنتج أن ψ وَ φ تابعان قيوسان.

2.3.18.2 • أثبت أن التابعين u وَ v المعرفان من X في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $u = \liminf\limits_{n\to\infty} g_n$ وَ $v = \limsup\limits_{n\to\infty} g_n$ قيوسان. استنتج مما سبق أنه إذا كانت متتالية التوابع الحقيقية المكتملة $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة على X نحو تابع g فإن هذا التابع g قيوس.

4.18.2 **التمرين الرابع** • ليكن h تابعا حقيقيا معرفا وقابلا للإشتقاق على $\mathbb{R}$. أثبت أن تابعه المشتق h' قيوس على $\mathbb{R}$.

5.18.2 **التمرين الخامس** • ليكن $\mu^\star$ قياس لوبيغ الخارجي على $\mathbb{R}^N$ ولتكن a نقطة من $\mathbb{R}^N$. ماذا عن $\mu^\star(\emptyset)$ ؟ عن $\mu^\star(\{a\})$ ؟

1.5.18.2 • أحسب $\mu^\star(\mathbb{N}^N)$ وَ $\mu^\star(\mathbb{Z}^N)$ وَ $\mu^\star(\mathbb{Q}^N)$.

تذكير. نقول عن جزء E من $\mathbb{R}^N$ إنه **لوبيغ قيوس** إذا تحقق ما يلي:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE), \ \forall A \subset \mathbb{R}^N .$$

2.5.18.2 • أثبت أن $\emptyset$ وَ $\{a\}$ وَ $\mathbb{N}^N$ وَ $\mathbb{Z}^N$ وَ $\mathbb{Q}^N$ لوبيغ قيوسة.

3.5.18.2 • بين أنه إذا كان الجزء E من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا كان ${}^cE$ لوبيغ قيوسا كذلك.

4.5.18.2 • أثبت ـ مستفيدا من العلاقة (11.2) ومن رتابة القياس الخارجي $\mu^\star$ ـ أنه إذا كان E وَ F جزئين من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسين كان $E \cup F$ لوبيغ قيوسا كذلك.

5.5.18.2 • أثبت ـ بالتدريج ـ أنه من أجل كل جماعة منتهية $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ من أجزاء $\mathbb{R}^N$ اللّوبيغ قيوسة وغير المتقاطعة مثنى مثنى ومن أجل كل جزء $A \subset \mathbb{R}^N$ ، لدينا:

$$\mu^\star\Big(A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(A \cap E_i)\,.$$

استنتج مما سبق أنه إذا كانت $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ جماعة منتهية من أجزاء $\mathbb{R}^N$ اللّوبيغ قيوسة وغير المتقاطعة كان $\mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(E_i)$.

19.2 الموضوع الـ $19^\star$

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بقياس لوبيغ.

1.19.2 **التمرين الأول** • لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بأن $f_n(x) = e^{-x^n}$ ، $x \in \mathbb{R}_+$.

1.1.19.2 • بين أنها متقاربة ببساطة نحو تابع f يُطلب تعيينه.

2.1.19.2 • هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي على هذه المتتالية على المجال $I \doteq [0,1]$ ؟ أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx$. ماذا عن تطبيق هذه المبرهنة على $\mathbb{R}_+$ ؟

3.1.19.2 • هل تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ممكنا على $\mathbb{R}_+$ ؟ أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n\,dx$.

2.19.2 **التمرين الثاني** • ليكن التابع الحقيقي S المعرف بأن $S(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos(tx)\,dx$ ، $t \in \mathbb{R}$.

1.2.19.2 • أذكر لماذا S معرف جيدا ثمّ استخدم مبرهنة التقارب بالهيمنة لتبين أن التابع S مستمر على $\mathbb{R}$.

2.2.19.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}$ ثمّ أحسب S'.

3.2.19.2 • ليكن الآن التكامل $\int_0^b e^{-x}\cos tx\,dx$ حيث b وَ t عددان حقيقيان مع $0 < b$. بين أن $\int_0^b e^{-x}\cos tx\,dx = \frac{1}{1+t^2} + \frac{e^{-b}}{1+t^2}[t\sin tb - \cos tb]$. استنتج أن $S(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ ، مهما كان $t \in \mathbb{R}$ وأن:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin tx\,dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2},\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

4.2.19.2 • أحسب، مبررا حساباتك، التكامل: $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\cos tx\,dx$ ، حيث $t \in \mathbb{R}$.

3.19.2 **التمرين الثالث** • في هذا التمرين p وَ q عددان مثبتان من $\mathbb{R}_+^\star$ وَ x نقطة جارية من المجال $J \doteq]0,1[$.

1.3.19.2 • أعط مجموع السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^q)^n$ ، حيث $x \in J$. استنتج أن:

$$x^{p-1}(1+x^q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x^q)x^{p-1+2nq},\quad x \in J.$$

2.3.19.2 • أثبت، مستخدما مبرهنة للتقارب ملائمة، أن
$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq}$.

استنتج أن $\ln 2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}$ وَ $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n}$.

4.19.2 **التمرين الرابع** • أثبت أنه إذا كان التابع الحقيقي g موجبا ولوبيغ جموعا على $\mathbb{R}_+$ وكان مستمرا ومتناقصا على هذه المجموعة كان $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = 0$.

5.19.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وليكن h تابعا حقيقيا كمولا نسبة إلى القياس (الموجب) μ على X (أي أن $h \in L^1(X,\mu)$). من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع $h_n = \min\{|h|,n\}$.

1.5.19.2 • أثبت أن $\lim_{n\to\infty}\int_X ||h|-h_n|\,d\mu = 0$.

2.5.19.2 • استنتج مما سبق أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\rho > 0$ بحيث

$$\int_A |h|\,d\mu \leq \varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \rho.$$

تدعى هذه الخاصية بالاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ.

20.2 الموضوع الـ $20^\star$

1.20.2 **التمرين الأول •** ليكن المجال $I \doteq [0,1]$ مزود بقياس لوبيغ والتابع الحقيقي f المعرف بأن $f(x) = x$ من أجل $x \in I \cap \mathbb{Q}$ وَ $f(x) = 1 + x$ من أجل $x \in I \setminus \mathbb{Q}$.

1.1.20.2 • هل f ريمان كمول على I ؟

2.1.20.2 • بين أن f لوبيغ كمول. أحسب تكامله للوبيغ $\int_I f\,dx$.

2.20.2 **التمرين الثاني• تعريف ـ** ليكن E جزءا كيفيا من $\mathbb{R}^N$ ولتكن $\mathcal{F}(E)$ مجموعة كل الأجزاء المغلقة F من $\mathbb{R}^N$ المحتواة في E $(E \supset F)$ وليكن $\mu^\star$ قياس لوبيغ الخارجي على $\mathbb{R}^N$. يدعى العدد الحقيقي الموجب المكتمل $\mu_\star(E) = \sup\{\mu^\star(F) \mid F \in \mathcal{F}(E)\}$ **بقياس لوبيغ الداخلي** للجزء E .

1.2.20.2 • ليكن a وَ b عددين حقيقيين مع $a < b$ وليكن $\ell_\star$ قياس لوبيغ الداخلي على $\mathbb{R}$. أحسب $\ell_\star(]a,b[)$ وَ $\ell_\star([a,b])$.

2.2.20.2 • لتكن R بلاطة مغلقة من $\mathbb{R}^N$ وَ $\mathring{R}$ داخليتها. أحسب $\mu_\star(R)$ وَ $\mu_\star(\mathring{R})$.

3.2.20.2 • بين أن $\mu_\star(E) \leq \mu^\star(E)$ مهما كان الجزء E من $\mathbb{R}^N$.

4.2.20.2 • برهن على أنه إذا كان الجزء E من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا كان $\mu_\star(E) = \mu^\star(E)$. وإذا كان $+\infty > \mu_\star(E)$ فأثبت العكس: إذا كان $\mu^\star(E) = \mu_\star(E)$ كان E لوبيغ قيوسا.

3.20.2 **التمرين الثالث •** نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بقياس لوبيغ ونعتبر متتالية التوابع الحقيقية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $[0,1]$ بأن $g_n(x) = \dfrac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ ، $x \in [0,1]$.

1.3.20.2 • بين أنها متقاربة ببساطة نحو تابع g يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.3.20.2 • هل تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ممكنا على $[0,1]$ ؟ أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n \, dx$.

4.20.2 **التمرين الرابع •** ليكن التابع الحقيقي J المعرف على $\mathbb{R}_+^\star$ بأن $J(t) = \int_0^\infty F(x,t)\, dx$ حيث $F(x,t) = \dfrac{1-e^{-tx^2}}{x^2}$ وَ $t \in \mathbb{R}_+^\star$.

1.4.20.2 • أحسب $\lim\limits_{x\downarrow 0} F(x,t)$ ، حيث $0 < t$ ، وأثبت أن التابع J معرف جيدا.

2.4.20.2 • أثبت أن $\lim\limits_{t\downarrow 0} J(t) = 0$.

3.4.20.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}_+^\star$ ثمّ أحسب $J'(t)$ وَ $J(t)$ من أجل $0 < t$.
يمكنك الاستفادة من النتيجة التقليدية $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.

5.20.2 **التمرين الخامس •** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وليكن u تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا على X وليكن φ تابعا حقيقيا مستمرا ومتزايدا تماما على $[0,+\infty[$ مع $0 \le \varphi(0)$.

1.5.20.2 • أثبت المتباينة التالية، التي تعمم متباينة تشبتشيف:

$$\mu(\{x \in X \mid |u(x)| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_X \varphi(|u|)\, d\mu, \ \forall \lambda > 0.$$

2.5.20.2 • هل يمكنك أن تستنتج من المتباينة السابقة أن كل تابع v لوبيغ كمول، أي $v \in L^1(X,\mu)$ ، منته μ ـ شبه كليا على X ؟

21.2 الموضوع الـ 21*

1.21.2 **التمرين الأول** • ليكن $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ تابعا مستمرا ومتزايدا تماما مع $\varphi(0) = 0$ وَ $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$. إنه يتمتع بتابع عكسي نشير إليه بالحرف ψ . ليكن $b > 0$ عددا حقيقيا وَ $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تقسيما للمجال $[0,b]$. قل لماذا تشكل المجموعة $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$ ، حيث $y_i = \varphi(x_i)$ ، $i = 1$ ، ... ، n ، تقسيما للمجال $[0,\varphi(b)]$. ليكن $\underline{R}(\varphi,P)$ مجموع ريمان السفلي للتابع φ الموافق للتقسيم P للمجال $[0,b]$ وَ $\overline{R}(\psi,Q)$ مجموع ريمان العلوي للتابع ψ الموافق للتقسيم Q للمجال $[0,\varphi(b)]$.

1.1.21.2 • أثبت أن $\underline{R}(\varphi,P) + \overline{R}(\psi,Q) = b\varphi(b)$.

2.1.21.2 • أثبت، مبررا كل خطواتك، أن:

$$\int_0^b \varphi(x)\, dx + \int_0^{\varphi(b)} \psi(y)\, dy = b\varphi(b), \ \forall b > 0.$$

هل يمكنك تقديم تأويل هندسي للعلاقة السابقة؟

3.1.21.2 • استنتج **متباينة يونغ** :

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha \varphi(x)\, dx + \int_0^\beta \psi(y)\, dy, \ \forall \alpha, \beta > 0.$$

[**إرشاد:** يمكنك، في حالة $\beta < \varphi(\alpha)$ ، أخذ $b \in]0,\alpha[$ بحيث $\beta = \varphi(b)$ وتستفيد من تزايد φ على $[b,\alpha]$ وهذا بعد أن تكتب $\int_0^\alpha \varphi + \int_0^\beta \psi = \int_0^b \varphi + \int_b^\alpha \varphi + \int_0^{\varphi(b)} \psi$.]

4.1.21.2 **تطبيق.•** ليكن $1 < p$ عددا حقيقيا وليكن التابع الحقيقي φ_p المعرف على $\mathbb{R}_+$ بأن $\varphi_p(x) = x^{p-1}$. تأكد من أن هذا التابع يحقق خواص التابع φ المذكورة في صدر هذا التمرين وعين تابعه العكسي ثمّ بين أن متباينة يونغ تكتب في هذه الحالة على الشكل:

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \ \forall \alpha, \beta > 0$$

حيث $q = p/(p-1)$ ويدعى **بالأس المرافق للأس** p .

5.1.21.2 • ليكن τ وَ θ عددين حقيقيين مع $\theta > \tau > 0$. أثبت أن $x^\tau \le 1 + x^\theta$ مهما كان $x \in \mathbb{R}_+$.

6.1.21.2 • نفرض هنا أن $1 < \tau < 2 \le \theta$ ونعتبر متتالية التوابع الحقيقية المعرفة على المجال $I \doteq [0,1]$ بأن $f_n(x) = \dfrac{n^\tau x}{1 + n^\theta x^\theta}$. أثبت أنها متقاربة نحو تابع يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

7.1.21.2 • نزود المجال I بقياس لوبيغ. بين أنه يمكن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ والمجال I واستنتج $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n \, dx$.

2.21.2 التمرين الثالث •

1.2.21.2 • ليكن $0 < t$. بين أن $e^{-tx^4} \ge 1 - tx^4$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$. ليكن التابع الحقيقي J المعرف على $\mathbb{R}_+^\star$ بأن $J(t) = \int_0^\infty F(x,t)\, dx$ حيث $F(x,t) = \dfrac{1 - e^{-tx^4}}{x^3}$ وَ $t \in \mathbb{R}_+^\star$.

2.2.21.2 • أحسب $\lim\limits_{x\downarrow 0} F(x,t)$ ، حيث $0 < t$ ، وأثبت أن التابع J معرف جيدا.

3.2.21.2 • أثبت أن $\lim\limits_{t\downarrow 0} J(t) = 0$.

4.2.21.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}_+^\star$ ثمّ أحسب $J'(t)$ وَ $J(t)$ من أجل $0 < t$.
[يمكنك الاستفادة من النتيجة التقليدية $\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.]

3.21.2 **التمرين الرابع** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا مع $+\infty > \mu(X)$ وليكن u تابعا حقيقيا مكتملا موجبا وقيوسا على X . برهن على أنه حتى يكون u كمولا يلزم ويكفي أن تكون السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(E_n)$ متقاربة، حيث $E_n = \{x \in X \mid u(x) \geq 2^n\}$.

22.2 الموضوع الـ 22

1.22.2 **التمرين الأول** • ليكن ξ التابع الحقيقي المعرف بأن $\xi(0) = 0$ وَ $\xi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ من أجل $x \in]0, 1]$. أثبت أن ξ مستمر مطلقا على $[0, 1]$.

2.22.2 **التمرين الثاني** • ليكن f تابعا لوبيغ كمولا على $\mathbb{R}$ ولنضع $g(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{t^2 + x^2}\, dx$ ، $t \in \mathbb{R}^\star$. هل g معرف جيدا؟

1.2.22.2 • بيّن مستخدما مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة أن g مستمر في $\mathbb{R}^\star$.

2.2.22.2 • أثبت أن g قابل للإشتقاق في $\mathbb{R}^\star$ وأحسب مشتقه.

3.22.2 **التمرين الثالث** • إذا كان $I \doteq [a, b]$ مجالا متراصا من $\mathbb{R}$ وكان φ تابعا حقيقيا معرفا على I فإننا نستخدم الرموز $\int_a^b \varphi$ وَ $\int_a^b \varphi\, dx$ وَ $\int_I \varphi$ للإشارة، على التوالي، إلى تكاملات ريمان وريمان المعمم ولوبيغ للتابع φ على I .

1.3.22.2 • أثبت ـ بالخلف ـ أنه إذا كان φ تابعا حقيقيا موجبا ومستمرا على المجال الحقيقي $[0, 1]$ وكان تكامله لريمان $\int_0^1 \varphi = 0$ فإن $\varphi = 0$ على $[0, 1]$.

ليكن $E \doteq C[0, 1]$ الفضاء الشعاعي الحقيقي للتوابع الحقيقية المستمرة على $[0, 1]$ ولنضع

$$d(\varphi,\psi)=\int_0^1|\varphi-\psi|,\qquad \varphi,\psi\in E.$$

2.3.22.2 • أثبت أن d مسافة على E .

3.3.22.2 • أثبت أن كل متتالية تابعية $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$ نحو تابع v متقاربة كذلك في الفضاء المتري (E,d) و نحو نفس التابع.

4.3.22.2 • لتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بأن

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} n\sqrt{n}x, & x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 1/\sqrt{x}, & x\in[\frac{1}{n},1]. \end{cases}$$

5.3.22.2 • بين أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع φ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

6.3.22.2 • أثبت بالحساب الفعلي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\varphi-\varphi_n|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}|\varphi-\varphi_n|=0.$$

7.3.22.2 • تأكد من النتيجة باستخدام مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ.

8.3.22.2 • أثبت أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ كوشية في الفضاء المتري (E,d) . هل هي متقاربة في هذا الفضاء؟

4.22.2 **التمرين الرابع** • ليكن $[a,b]$ **مجالا** من $\mathbb{R}$ وليكن $c\in[a,b]$. لنرمز بـ χ_c إلى التابع الحقيقي الذي يساوي 1 عند النقطة c وينعدم عند كل نقطة أخرى من $[a,b]$. أحسب تكامل ستيلجس $\int_a^b f\,d\chi_c$ حيث f تابع حقيقي مستمر على $[a,b]$.

تتعلق النتيجة بوضع النقطة c في $[a,b]$ ؛ عليك باعتبار كل الحالات الممكنة.

5.22.2 **التمرين الخامس** • ليكن u تابعا لوبيغ جموعا على المجال $]a,b[\subset\mathbb{R}$ ، أي $u \in L^1(a,b)$ ، ولتكن المتتالية التابعية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $u_n = \min\{|u|, n\}$.

1.5.22.2 • أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b |u|$.

2.5.22.2 • استخدم ما سبق لتبرهن على أن التابع الحقيقي U المعرف بواسطة تكامل لوبيغ بأن $U(x) = \int_a^x u$ ، $x \in [a,b]$ ، مستمر مطلقا على المجال المتراص $\overline{I} \doteq [a,b]$.

23.2 الموضوع الـ 23

1.23.2 **التمرين الأول** • لتكن X مجموعة كيفية وَ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من أجزائها بحيث تكون نهايتها العليا $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ غير خالية.

1.1.23.2 • تأكد من أن $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ هي المجموعة المكونة من عناصر X التي تنتمي إلى ما لانهاية من الأجزاء A_n .

2.1.23.2 • ليكن التابع u المعرف على المجموعة X ويأخذ قيمه في $\overline{\mathbb{R}}_+ \doteq [0,+\infty]$ بأن $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)$ ، حيث χ_{A_n} تشير إلى الدالة المميزة للجزء A_n . بين أن $\{u=\infty\} \doteq \{x \in X \mid u(x)=\infty\} = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n.$.

2.23.2 **التمرين الثاني** • ليكن $(X,\mathcal{A})$ وَ $(Y,\mathcal{B})$ فضائين قيوسين.

1.2.23.2 • أثبت أنه قيوس كل تطبيق h لِـ X في Y صورته (أي المجموعة $h(X)$) عدودة وبحيث تكون الصورة العكسية لكل وحيدة العنصر $\{y\}$ في Y قيوسة في X .

2.2.23.2 • ليكن $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. وليكن التابع $\hat{\psi}$ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\hat{\psi}(0) = 1$ وَ $\hat{\psi}(x) = \frac{1}{q}$ إذا كان $x = \frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين أوليين فيما بينهما، p طبيعي وَ q صحيح، وَ $\hat{\psi}(x) = 0$ إذا كان $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. أثبت أن $\hat{\psi}$ بوريل قيوس.

3.23.2 التمرين الثالث •

1.3.23.2 • بين أن كل تابع v محدود التغيُّر على المجال المتراص $[a,b]$ ريمان كمول على هذا المجال.

[إرشاد: يمكنك الاستفادة من النتيجة القائلة بأنه حتى يكون v ريمان كمول على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن نتمكن، من أجل كل $\varepsilon > 0$ معطى، إيجاد تقسيم P للمجال المعتبر بحيث $\overline{R}(v,P) - \underline{R}(v,P) \leq \varepsilon$. تشير «الفتحة» إلى مجموع ريمان العلوي، فيما تشير «الكسرة» إلى المجموع السفلي.]

2.3.23.2 • هل عكس النتيجة السابقة صحيح؟ إفحص من أجل ذلك التابع الحقيقي w المعرف على $[0,2]$ بأن $w(0) = 0$ وَ $w(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ من أجل $x \in]0,2]$.

[إرشاد: يمكنك الاستفادة من التقسيم $P_n = \{0, \frac{2}{2n-1}, \frac{2}{2n-3}, \ldots, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2\}$.]

4.23.2 التمرين الرابع •

1.4.23.2 • ليكن التابع ψ المعرف على $[0,1]$ بأن $\psi(0) = 1$ وَ $\psi(x) = \frac{1}{q}$ إذا كان $x = \frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما $(q \geq p > 0)$ وَ $\psi(x) = 0$ إذا كان $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. بين أن ψ ريمان كمول على $[0,1]$ مع $\int_0^1 \psi = 0$.

2.4.23.2 • بيّن أن التابع ξ المعرف على $[0,1]$ بأن $\xi(0) = 0$ وَ $\xi(x) = 1$ من أجل $x \in]0,1]$ ريمان كمول.

3.4.23.2 • بيّن أن التابع $\xi \circ \psi$ غير ريمان كمول على $[0,1]$.

5.23.2 التمرين الخامس •

1.5.23.2 • φ تابع حقيقي معرف ومحدود على جزء A من $\mathbb{R}$. بين أن تذبذب التابع φ على A ، وهو تعريفا العدد $\Omega_A\varphi \doteq \sup\limits_A \varphi - \inf\limits_A \varphi$ ، يحقق العلاقة

$$\Omega_A\varphi = \sup_{x,y\in A} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

2.5.23.2 • ليكن f تابعا حقيقيا ريمان كمولا على المجال المتراص $I \doteq [a,b]$ ويأخذ قيمه في المجال $J \doteq [\alpha,\beta]$ وليكن g تابعا حقيقيا معرفا وليبشيتزيا على J بثابت للبشيتز يساوي λ (>0) . أثبت أن التابع $g\circ f$ ريمان كمول على I .

24.2 الموضوع الـ 24^-

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ ونضع $I \doteq [0,1]$.

1.24.2 **التمرين الأول** • لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على I بأن $\varphi_n(x) = n^2x^n(1-x)$ ، $I \ni x$.

1.1.24.2 • بين أنها متقاربة ببساطة نحو تابع φ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.1.24.2 • هل يمكن تطبيق توطئة فاتو على هذه المتتالية؟ أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I \varphi_n\,dx$ وقارنها مع $\int_I \varphi\,dx$. هل كان من الممكن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ؟

2.24.2 **التمرين الثاني** • ليكن f تابعا حقيقيا لوبيغ جموعا على I ، أي أن $L^1(I) \ni f$. ولنضع من أجل $\mathbb{R} \ni t$ ، $K(t) = \displaystyle\int_I \sqrt{|f(x)|^2 + t^2}\,dx$.

1.2.24.2 • بين أن العلاقة السابقة تعرف جيدا تابعا K من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}_+$ ثمّ استخدم مبرهنة التقارب بالهيمنة لتبين أن التابع K مستمر على $\mathbb{R}$.

2.2.24.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}^\star$ ثمّ أحسب $K'(t_0)$.

3.24.2 **التمرين الثالث •**

1.3.24.2 • ليكن التابع الحقيقي r المعرف في المجال نصف المفتوح $I^\star \doteq I \setminus \{0\}$ بأن $r(x) = 1/\sqrt{x}$. هل r لوبيغ جموع على I ؟ لنضع، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ وَ $x \in I^\star$ ، $r_n(x) = r(x^n)$. بيّن أن هذه المتتالية متقاربة ببساطة نحو تابع حقيقي مكتمل R ينبغي تعيينه. هل r_n لوبيغ جموع على I ؟ هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي على المتتالية $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ؟

2.3.24.2 • ليكن ψ تابعا حقيقيا معرفا وموجبا على المجال I . ولنفرض أن ψ متناقص على المجال المغلق I ومستمر عند النقطة 0 . أحسب، مع التبرير، $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \psi(x^n)\, dx$.

4.24.2 **التمرين الرابع •** K هو التابع المعرف في التمرين الثاني أعلاه. أحسب $\lim\limits_{t\to\pm\infty} K(t)$.

1.4.24.2 • تأكد مباشرة من استمرار K المنتظم على $\mathbb{R}$ بأن تبرهن على أن:

$$|K(s) - K(t)| \leq |s - t|, \;\; \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

إننا نفرض فيما تبقى من هذا التمرين أن $\frac{1}{f}$ ، مقلوب f ، ينتمي كذلك إلى $L^1(I)$.

2.4.24.2 • بين عندها أن K قابل للإشتقاق عند النقطة 0 وأحسب $K'(0)$.

3.4.24.2 • أثبت أن $|K'(t)| \leq 1$ مهما كان $t \in \mathbb{R}$.

4.4.24.2 • أثبت أن K قابل للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$. أعط مشتقه الثاني $K''(t)$ عند كل نقطة $t \in \mathbb{R}$. استنتج أن K محدب على $\mathbb{R}$.

5.24.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن h تابعا حقيقيا ينتمي إلى $L^1(X, \mu)$.

1.5.24.2 • لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية قيوسة من أجزاء X ($A_n \in \mathcal{A}$ مهما كان $n \geq 1$ مع $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$) . أثبت أن المتتالية التابعية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $h_n = |h|\chi_{A_n}$ حيث χ_{A_n} هي الدالة المميزة للجزء A_n ، متقاربة ببساطة، μ ـ شك على X ، نحو التابع المعدوم.

[**إرشاد:** يمكنك أن تكتب $X = S \cup {}^cS$ ، حيث $S = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right]$ وتستخدم توطئة بوريل ـ كانتلي.]

2.5.24.2 • استنتج مما سبق أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\rho > 0$ بحيث

$$\int_A |h|\, d\mu \leq \varepsilon, \ \forall A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) \leq \rho.$$

تدعى هذه الخاصية بالاستمرار المطلق لتكامل لوبيغ أو استمرار تكامل لوبيغ نسبة إلى القياس μ .

[**إرشاد:** يمكنك أن تعتمد طريقة الخلف وتستخدم السؤال السابق...]

25.2 الموضوع الـ 25^-

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ ونشير بـ I إلى المجال الحقيقي $I \doteq [-1, 1]$ وبـ χ_I إلى دالته المميزة.

1.25.2 **التمرين الأول** • ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بالعبارة $\varphi(x) = \frac{15}{16}(1-x^2)^2\chi_I(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

1.1.25.2 • بين أن φ قابل للإشتقاق بالإستمرار على $\mathbb{R}$. أحسب مشتقه الثاني في $I^o \doteq]-1, 1[$ لتعرفَ إتجاه تحدُّبه في هذا المجال المفتوح ثمّ أرسم بيانه. أحسب $\int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx$.

2.1.25.2 • لتكن الآن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ ، $x \in \mathbb{R}$. أرسم بيان φ_2 على نفس المعلم الذي رسمت عليه بيان φ . عيّن المجال المفتوح I_n^o حيث φ_n موجب تماما.

3.1.25.2 • بيّن أن المتتالية $\{\varphi_n\}_n$ متقاربة ببساطة نحو تابع Φ يطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟ من أجل $n \geq 2$ ، أحسب صراحة التكامل $\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx$. استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx$. هل كان من الممكن الحصول على نهاية التكاملات باستخدام مبرهنة التقارب الرتيب؟ مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ؟

2.25.2 **التمرين الثاني •** ليكن ξ وَ ψ تابعين حقيقين جموعين على $\mathbb{R}$ نسبة إلى قياس لوبيغ مع ψ مستمر ومحدود على $\mathbb{R}$. وليكن التابع الحقيقي، الذي نشير إليه بِـ $\xi \star \psi$ ، المعطى بأن $(\xi \star \psi)(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \xi(x)\psi(t-x)\,dx$ ، $t \in \mathbb{R}$. هل هو معرف جيدا؟

1.2.25.2 • أحسب $\xi_0 \star \psi_0$ من أجل $\xi_0 = \chi_I$ وَ $\psi_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ، $x \in \mathbb{R}$. هل $\xi_0 \star \psi_0$ مستمر على $\mathbb{R}$ في هذه الحالة الخاصة؟

2.2.25.2 • أثبت، مستخدما استمرار التابع ψ على $\mathbb{R}$ ومبرهنة التقارب بالهيمنة، أن التابع $\xi \star \psi$ مستمر على $\mathbb{R}$.

3.2.25.2 • بفرض التابع ψ قابل للإشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ ، مع ψ' محدود على هذه المجموعة، فأثبت أن التابع $\xi \star \psi$ قابل للإشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$.

3.25.2 **التمرين الثالث •** ليكن u تابعا حقيقيا لوبيغ جموعا على $\mathbb{R}_+$ ، أي أن $u \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$. أحسب، مبررا حساباتك، النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-n\sin^2 x} u(x)\,dx$.

4.25.2 **التمرين الرابع •** ξ تابع من $L^1(\mathbb{R})$ وَ $\{\varphi_n\}_n$ المتتالية الواردة في السؤال 2.1.25.2 أعلاه. ماذا عن قيمة التكامل $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t-x)\,dx$ من أجل $t \in \mathbb{R}$ ؟

1.4.25.2 • لنفرض أن التابع ξ مستمر عند نقطة t_0 من $\mathbb{R}$. أثبت أن $\lim_{n\to\infty}(\xi\star\varphi_n)(t_0)=\xi(t_0)$.

[**إرشاد:** أكتب $\xi(t_0)=\int_{\mathbb{R}}\xi(t_0)\varphi_n(t_0-x)\,dx$.]

2.4.25.2 • إذا كان التابع ξ مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}$ فبرهن على أن المتتالية التابعية $\{\xi\star\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام نحو التابع ξ على $\mathbb{R}$.

3.4.25.2 • برهن على أن استمرار ψ على $\mathbb{R}$ يقتضي التقارب المنتظم للمتتالية $\{\xi\star\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو ξ على كل مجال متراص L من $\mathbb{R}$.

5.25.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية القيوسة المعرفة على X . لنفرض أن:

١- $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ موجودة μ ـ شك على X .

٢- ويوجد تابع جموع g ومتتالية $\{g_n\}_n$ من التوابع الجموعة بحيث:

$$|f_n|\le g_n \quad \mu \text{ ـ شك على } X \text{ ، مهما كان } n\in\mathbb{N}^\star \text{ ،} \tag{13.2}$$

$$g_n\longrightarrow g \quad \mu \text{ ـ شك على } X \text{ ، مهما كان } n\in\mathbb{N}^\star \text{ وَ} \tag{14.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |g_n-g|\,d\mu \quad =0. \tag{15.2}$$

1.5.25.2 • بين أن f_n ، $1\le n$ وَ f توابع جموعة على X نسبة إلى القياس μ .

2.5.25.2 • برهن على أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\,d\mu=0. \tag{16.2}$$

[**إرشاد:** يمكنك أن تتأكد من أن المتتالية التابعية $\{F_n\}_n$ حيث $F_n=g_n+g-|f_n-f|$ ، $1\le n$ ، ذات عناصر جموعة وموجبة ثمّ تطبق عليها توطئة فاتو.]

26.2 الموضوع الـ 26*

نزود في التمرينين الأول والثاني مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (أو أي جزء منها) بالعشيرة البوريلية وبقياس لوبيغ λ .

1.26.2 **التمرين الأول •** ليكن المجال الحقيقي $I \doteq [-1,1]$ ولنشير بـ E إلى التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $E(x) = \frac{2}{3}([x]+1)$ ، حيث يُشير $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

1.1.26.2 • أحسب قيمة التكامل $\int_I [\cos(\pi E(x))]^{2n}\, d\lambda$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^\star$. أحسب كذلك النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I [\cos(\pi E(x))]^{2n}\, d\lambda$.

2.1.26.2 • ليكن f تابعا حقيقيا معرفا وقيوسا على I ولتكن المجموعة $A = \{x \in I \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$. أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_I [\cos(\pi f(x))]^{2n}\, d\lambda = \lambda(A)$.

2.26.2 **التمرين الثاني •** لتكن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية حقيقية ذات عناصر موجبة ولتكن $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية التوابع الموجبة المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $g_n = \alpha_n \chi_n$ حيث χ_n هي الدالة المميزة للمجال الحقيقي $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. ولنعتبر الحالات:

1. $g_n^1 = n\chi_n$ ،
2. $g_n^2 = (\ln n)\chi_n$ ،
3. $g_n^3 = e^n \chi_n$.

1.2.26.2 • أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^i$ ، $i = 1$ ، 2 ، 3 ، ثمّ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n^i\, d\lambda$ وَ $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} g_n^i\, d\lambda$ وقارن بينهما من أجل $i = 1$ ، 2 ، 3 .

2.2.26.2 • لنفرض الآن أن $\sup\limits_{n\ge 1} \alpha_n < \infty$. بين مطبقا مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} g_n\, d\lambda$. هل فرض $\sup\limits_{n\ge 1} \alpha_n < \infty$ شرط لازم للحصول على النتيجة السابقة؟ ما تعليلك؟

3.26.2 **التمرين الثالث •** لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الناطقة وليكن $\mathcal{F}_0$ جبر المجموعات المكون من $\mathbb{Q}$ ومن الإتحادات المتهية وغير المتقاطعة للمجالات من الشكل

$$]a,b] = \{q \in \mathbb{Q} \mid a < q \leq b\} \quad \text{أو} \quad]a,\infty[= \{q \in \mathbb{Q} \mid a < q < \infty\}$$

مع a وَ b من $\mathbb{Q}$. ولتكن $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ (العشيرة على $\mathbb{Q}$ المولدة من $\mathcal{F}_0$).

1.3.26.2 • أثبت أن $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ (مجموعة أجزاء $\mathbb{Q}$).

[**إرشاد:** يمكن إثبات أن وحيدات العنصر الناطقة تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ ثمّ الإستفادة من كون $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.]

2.3.26.2 • ليكن التابع المجموعاتي الموجب ν المعرف على $\mathcal{F}$ بأن $\nu(F) = \text{card}\,(F)$ (أصلي F). ولنضع $\nu' = 2\nu$. بين أن $\nu = \nu'$ على $\mathcal{F}_0$ إلّا أن هذا متعذر على $\mathcal{F}$.

4.26.2 **التمرين الرابع •** ليكن $(X_1, \mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2, \mathcal{A}_2)$ فضائين قيوسين ولنضع:

$$\mathcal{S} = \{E \subset X_1 \times X_2 \mid E = A_1 \times A_2,\ \ A_1 \in \mathcal{A} \ \ \wedge \ \ A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

نسمي عشيرة جداء $\mathcal{A}_1$ وَ $\mathcal{A}_2$ العشيرة على $X_1 \times X_2$ المولدة من $\mathcal{S}$ والتي يُشار إليها بِـ $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$ ، أي أن $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{S})$. وليكن π_i ، $i = 1$ ، 2 الإسقاطين القانونيين لِـ $X_1 \times X_2$ على X_1 وَ X_2 ، أي أن:

$$\begin{array}{rccl} \pi_i: & (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) & \longrightarrow & (X_i, \mathcal{A}_i) \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_i \qquad\qquad i = 1, 2. \end{array}$$

1.4.26.2 • أثبت أن π_1 وَ π_2 قيوسين.

2.4.26.2 • أثبت أن $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ هي أصغر عشيرة على $X_1 \times X_2$ تجعل π_1 وَ π_2 قيوسين.

تذكير: لدينا العلاقة (وبرهانها غير مطلوب):

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),\ \forall A_1, B_1 \in \mathcal{P}(X_1),\ \forall A_2, B_2 \in \mathcal{P}(X_2).$$

5.26.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع حقيقية معرفة على X .

1.5.26.2 • لنفرض أن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو تابع h على X وليكن h' تابعا حقيقيا بحيث إن $h=h'$ ، μ ـ شك على X . أثبت أن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو h' على X .

2.5.26.2 • وإذا كانت المتتالية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو تابعين h وَ h' فأثبت أن $h=h'$ ، μ ـ شك على X .

[**إرشاد:** يمكنك أن تثبت أن

$$\mu(\{x\in X \mid h(x)\neq h'(x)\})=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{x\in X \mid |h(x)-h'(x)|\geq \frac{1}{n}\Big\}\Big)$$

وأن

$$\begin{aligned}\Big\{x\in X \mid |h(x)-h'(x)|\geq \tfrac{1}{n}\Big\} \quad &\subseteq \quad \Big\{x\in X \mid |h(x)-h_k(x)|> \tfrac{1}{2m}\Big\}\\ &\bigcup \Big\{x\in X \mid |h'(x)-h_k(x)|> \tfrac{1}{2m}\Big\}\end{aligned}$$

مهما كان $n<m$ ومن أجل كل k . ثمّ تثبت أنه من أجل كل $n<m$ يوجد k_m بحيث، من أجل كل $k_m<k$ ، يكون:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\Big\{x\in X \mid |h(x)-h_k(x)|\geq \frac{1}{2m}\Big\}\Big) \quad &\leq \quad \frac{1}{2m}\\ &\wedge \quad \mu\Big(\Big\{x\in X \mid |h(x)-h_k(x)|\geq \frac{1}{2m}\Big\}\Big)\leq \frac{1}{2m}\end{aligned}$$

لتحصل على $\mu\Big(\Big\{x\in X \mid |h(x)-h'(x)|\geq \frac{1}{n}\Big\}\Big)\leq \frac{1}{m}$ ...]

27.2 الموضوع الـ 27^{-}

1.27.2 **التمرين الأول** • ليكن التابع الحقيقي ξ المعرف بأن $\xi(x)=x^{-2}$ من أجل $x\in]-1,0[$ وَ $\xi(x)=(x-1)^{-2}$ من أجل $x\in]0,1[$. أعط رسما تقريبيا لبيان ξ . أحسب $\underline{\lim}_{0}\,\xi$ وَ $\overline{\lim}_{0}\,\xi$. هل ξ نصف مستمر سفليا عند النقطة 0 ؟ نصف مستمرا علويا عند 0 ؟

2.27.2 **التمرين الثاني •** لتكن I وَ J وَ K ثلاث مجالات من $\mathbb{R}$. ولتكن $\varphi : I \longrightarrow J$ وَ $\psi : J \longrightarrow K$ تابعين محدودين.

1.2.27.2 • لنفرض أن ψ تقابل متزايد بين المجالين J وَ K . أثبت أن

$$\inf_I\{\psi \circ \varphi\} = \psi(\inf_I \varphi) \quad \text{وأن} \quad \sup_I\{\psi \circ \varphi\} = \psi(\sup_I \varphi) \text{ .} \tag{17.2}$$

2.2.27.2 • هل تبقى النتيجتان صحيحتان في حالة ψ تقابل متناقص؟

3.2.27.2 • في حالة $I = [-2, 1]$ وَ $J = [-8, 1]$ وَ $K = [0, 8]$ والتابعين $x \in I \longmapsto \varphi(x) = x^3 \in J$ وَ $s \in J \longmapsto \psi(s) = |s| \in K$ ، أحسب $\sup_I\{\psi \circ \varphi\}$ وَ $\psi(\sup_I \varphi)$ وَ $\inf_I\{\psi \circ \varphi\}$ وَ $\psi(\inf_I \varphi)$. قارن النتائج لترى ما إذا كانتا العلاقتان (17.2) واردتين في حالة ψ كيفي.

3.27.2 **التمرين الثالث •** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. ولتكن الفئة

$$\mathcal{A}' = \{Z \in \mathcal{P}(X) \mid \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ A_1 \subset Z \subset A_2 \ \wedge\ \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}.$$

1.3.27.2 • أثبت أن $\mathcal{A}'$ عشيرة على X تحتوي العشيرة $\mathcal{A}$.

2.3.27.2 • لنعرّف الآن تطبيقا μ' على $\mathcal{A}'$ كما يلي: من أجل $Z \in \mathcal{A}'$ يوجد A_1 وَ A_2 من $\mathcal{A}$ يحققان ما ورد في تعريف $\mathcal{A}'$. تأكد من أن $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. وعندئذ نضع $\mu'(Z) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$. بين أن هذا يعرف جيدا التطبيق μ' أي أن قيمة $\mu'(Z)$ لا تتعلق بالجزئين A_1 وَ A_2 .

3.3.27.2 • أثبت أن μ' قياس موجب على X يمدد القياس μ .

4.3.27.2 • بين أن μ' قياس تام (بمعنى أن كل جزء Z_1 ، محتوٍ في جزء مهمل Z من $\mathcal{A}'$ ، قيوس).

4.27.2 **التمرين الرابع •**

1.4.27.2 • ليكن f تابعا حقيقيا موجبا وريمان كمولا على المجال الحقيقي المتراص $L \doteq [a,b]$. أثبت أن التابع $\sqrt{f}$ ريمان كمول على L .

5.27.2 **التمرين الخامس •** لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ تجزئة عدودة لِـ $\mathbb{R}$ ، حيث مجموعة الأدلة Λ جزء من $\mathbb{N}$ ، مع $A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ من أجل كل $\lambda \in \Lambda$ ، $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ هي العشيرة البوريلية. ولتكن $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ جماعة من التطبيقات المستمرة لِـ A_λ في $\mathbb{R}$. ليكن التابع g المعرف بأن

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_\lambda(x),\ x\in A_\lambda. \end{array}$$

الهدف من هذا التمرين هو البرهان على أن التابع g قيوس. ولهذا الغرض نقترح ما يلي: لنضع، من أجل كل $\lambda \in \Lambda$:

$$\tau(A_\lambda) = \{A_\lambda\} \cup \{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subset A_\lambda\}$$

حيث τ هي التوبولوجيا الإعتيادية المعرفة على $\mathbb{R}$.

1.5.27.2 • أثبت أن $(A_\lambda, \tau(A_\lambda))$ فضاء توبولوجي مهما كان λ من Λ .

[**تذكير:** الفضاء التوبولوجي هي ثنائية (E,σ) حيث E مجموعة غير خالية وَ σ فئة من أجزاء E تحتوي الجزء الخالي والمجموعة E نفسها ومغلقة نسبة إلى الإتحادات الكيفية والتقاطعات المنتهية.]

2.5.27.2 • إستنتج أن كل تابع g_λ قيوس من $(A_\lambda, [\tau(A_\lambda)])$ في $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ، حيث يشير $[\tau(A_\lambda)]$ إلى العشيرة المولدة من الفئة $\tau(A_\lambda)$.

3.5.27.2 • لنضع الآن $B(A_\lambda) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid B \subset A_\lambda\}$. تأكد من أن $B(A_\lambda)$ عشيرة على A_λ وأن $B(A_\lambda) \supset [\tau(A_\lambda)]$.

4.5.27.2 • أثبت أن التابع

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g}_\lambda:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_\lambda(x),\ x\in A_\lambda \\ x & \longmapsto & 0,\ x\in {}^cA_\lambda \end{array}$$

قيوس وأن $g = \sum_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{g}_\lambda$ ثمّ استنتج أن g قيوس.

[**إرشاد:** لإثبات أن $\widetilde{g}_\lambda$ قيوس يمكنك إعتبار أن الجماعة $\{]-\infty, \alpha[\,|\,\alpha \in \mathbb{R}\}$ تولد $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ولإستنتاج أن g قيوس يمكنك تمييز حالة Λ منته من حالة Λ غير منته.]

28.2 الموضوع الـ 28*

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ.

1.28.2 **التمرين الأول** • لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $I \doteq [-1,1]$ بأن $\varphi_n(x) = n^{5/3}|x|$ من أجل $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ وَ $\varphi_n(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ من أجل $|x| \in [\frac{1}{n}, 1]$.

1.1.28.2 • أعط هيئة بيانات التوابع φ_1 وَ φ_2 وَ φ_3 على المعلم نفسه.

2.1.28.2 • بين أن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع φ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

3.1.28.2 • هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لِبيبو لفي على هذه المتتالية؟
أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \, dx$ وقارنها مع $\int_I \varphi \, dx$.

4.1.28.2 • نفس السؤال نسبة إلى مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ ونفس المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.28.2 **التمرين الثاني** • ليكن المجال المفتوح $J \doteq]0,1[$ ومتتالية التوابع الحقيقية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على هذا المجال بأن $\psi_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$ ، $x \in J$.

1.2.28.2 • أثبت، بالحساب الفعلي، أن $\int_J \psi_n \, dx \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_J \psi_n \, dx$ $\int_J \Big[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n\Big] dx \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_J \psi_n \, dx$.
هل تناقض هذه النتيجة المبرهنة المتعلقة بمكاملة سلسلة عنصر بعنصر؟

2.2.28.2 • أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \int_J |\psi_n|\, dx = +\infty$.

3.28.2 **التمرين الثالث** • لتكن الآن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $K \doteq [0,1]$ بأن $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$ ، $x \in K$.

1.3.28.2 • بين أنها متقاربة ببساطة نحو تابع f يُطلب تعيينه. تأكد من أن هذا التقارب غير منتظم.

2.3.28.2 • هل يمكن تطبيق توطئة فاتو على هذه المتتالية؟ أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_K f_n\, dx$ وقارنها مع $\int_K f\, dx$.

3.3.28.2 • أثبت أنه لا يُمكن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وذلك بأن تثبت أن كل تابع g قيوس على K ويهيمن على المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، أي $|f_n| \le g$ شبه كليا على K مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ، يحقق $\int_K g\, dx = +\infty$ ، أي أنه غير لوبيغ كمول على K .

4.28.2 **التمرين الرابع** • ليكن التابع الحقيقي T المعرف على $\mathbb{R}_+^\star$ بأن $T(t) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ، $t \in \mathbb{R}_+^\star$.

1.4.28.2 • بين أن T معرف جيدا من $\mathbb{R}_+^\star$ في $\mathbb{R}$.

2.4.28.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}_+^\star$ ثمّ أحسب $T'(t_0)$.

ليكن الآن التكامل $\int_0^b e^{-xt} \sin x\, dx$ حيث b وَ t عددان حقيقيان موجبان تماما.

3.4.28.2 • بين أن $\int_0^b e^{-xt} \sin x\, dx = \frac{1}{1+t^2} - \frac{e^{-bt}}{1+t^2}[\cos b + t \sin b]$.

استنتج أن $T'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ ، مهما كان $t \in \mathbb{R}_+^\star$.

4.4.28.2 • أثبت مستخدما مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن $\lim_{t\to\infty} T(t) = 0$.

5.4.28.2 • بمكاملة التابع T' على مجال من الشكل $[t,b]$ ، حيث $0 < t < b$ ، ثمّ جعل b يؤول نحو $+\infty$ ، استنتج عبارة بسيطة للتابع T يتدخل فيها تابع متداول.

5.28.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا (μ قياس موجب) وليكن h تابعا لوبيغ كمولا على X نسبة إلى القياس μ ، أي أن $h \in L^1(X,\mu)$. برهن على أن h منته μ شبه كليا على X .

29.2 الموضوع الـ 29*

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ ونشير بـ I إلى المجال الحقيقي $I \doteq [-1,1]$.

1.29.2 **التمرين الأول** • لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على I بأن $\xi_n(x) = \sqrt[3]{n^2}$ من أجل $|x| \in [0, \frac{1}{n}]$ وَ $\xi_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ من أجل $|x| \in [\frac{1}{n}, 1]$.

1.1.29.2 • أعط هيئة بيانات التوابع ξ_1 وَ ξ_2 وَ ξ_3 على المعلم نفسه.

2.1.29.2 • بين أن $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع ξ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

3.1.29.2 • هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لِبيبو لفي على هذه المتتالية؟ أحسب $\lim_{n\to\infty} \int_I \xi_n \, dx$ وقارنها مع $\int_I \xi \, dx$.

4.1.29.2 • ماذا عن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على نفس المتتالية $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ؟

2.29.2 **التمرين الثاني** • ليكن التابع الحقيقي $T(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \, \frac{\sin x}{x} \, dx$ ، $t \in \mathbb{R}_+^{\star}$.

1.2.29.2 • بين أن T معرف جيدا من $\mathbb{R}_+^\star$ في $\mathbb{R}$.

2.2.29.2 • تأكد من أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t_0 من $\mathbb{R}_+^\star$ ثمّ أعط عبارة $T'(t_0)$.

ليكن الآن التكامل $\displaystyle\int_0^b e^{-xt^2}\sin x\,dx$ حيث b وَ t عددان حقيقيان موجبان تماما.

3.2.29.2 • بين أن $\displaystyle\int_0^b e^{-xt^2}\sin x\,dx = \frac{1}{1+t^4} - \frac{e^{-bt^2}}{1+t^4}[\cos b + t^2\sin b]$.

استنتج أن $T'(t) = -\dfrac{2t}{1+t^4}$ ، مهما كان $t \in \mathbb{R}_+^\star$.

4.2.29.2 • أثبت مستخدما مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = 0$.

5.2.29.2 • بمكاملة التابع T' على مجال من الشكل $[t,b]$ ، حيث $0 < t < b$ ، ثمّ جعل b يؤول نحو $+\infty$ ، استنتج عبارة بسيطة للتابع T يتدخل فيها تابع متداول.

3.29.2 **التمرين الثالث •** لنشير بِـ λ إلى قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^2$. مثل، على معلم متعامد ومتجانس، جزء $\mathbb{R}^2$ المغلق المعرف بأن $\perp = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ ، ثمّ عين $\lambda(\perp)$.

4.29.2 **التمرين الرابع •** لتكن الآن المتتالية التابعية $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بأن $\psi_n(x) = (1-x^2)^n$ ، $x \in I$. أحسب المشتقين ψ_n' وَ ψ_n'' لتعيّن تغيرات التابع ψ_n واتجاه تحدب بيانه على المجال I .

ولنضع الآن $A_n = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid 0 \le y \le \psi_n(x)\}$ ، $n \in \mathbb{N}^\star$. مثل على المعلم السابق الجزئين A_1 وَ A_2 . هل المتتالية المجموعاتية $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ رتيبة؟ عين $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ وَ $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n)$.

1.4.29.2 • ليكن $L_n = \int_I \psi_n(x)\,dx$. أثبت بالتدريج أن $L_n = \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1}$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

2.4.29.2 • أحسب $\ell \doteq \lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n \, dx$ مع إعطاء التبرير اللّازم. استنتج $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1}$. هل توجد علاقة بين ℓ وَ $\lambda(\perp)$ ؟

5.29.2 **التمرين الخامس** • ليكن a وَ b عددين حقيقيين مع $b > a$. أثبت أنه إذا كان f تابعا ريمان كمولا على المجال $[a, b]$ واذا وجد عددان m وَ M بحيث $M \geq f \geq m > 0$ على $[a, b]$ فإن التابع $\frac{1}{f}$ ريمان كمول على نفس المجال.

6.29.2 **التمرين السادس** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وليكن $h : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ تابعا قيوسا (موجبا ومكتملا). وليكن التابع المجموعاتي ν المعرف بأن

$$\nu(E) \doteq \int_E h \, d\mu = \int_X h\chi_E \, du, \quad E \in \mathcal{A},$$

حيث χ_E هي الدالة المميزة للجزء القيوس E . إننا برهنا في الدرس على أن ν قياس موجب على $(X, \mathcal{A})$. يدعى ν بالقياس الموجب الذي كثافته h نسبة إلى القياس الموجب μ ونكتب $d\nu = h \, d\mu$ أو $\nu = h \cdot \mu$.

1.6.29.2 • ليكن φ تابعا حقيقيا بسيطا معرفا على X . أثبت أن $\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi h \, d\mu$.

2.6.29.2 • برهن على أن $\int_X f \, d\nu = \int_X f \, h d\mu$ مهما كان التابع الموجب والقيوس f المعرف على X .

في السؤالين الموالين نأخذ الفضاء القيوس $(I, \mathcal{B}(I))$ ونزوده بقياس لوبيغ الذي نشير إليه هنا بِـ γ ، كما نشر بِـ δ إلى قياس ديراك المركز عند نقطة الأصل 0 .

3.6.29.2 • هل يمكن إيجاد تابع موجب وقيوس u (على التوالي v) بحيث $\gamma(A) = \int_A u \, d\delta$ (على التوالي $\delta(A) = \int_A v \, d\gamma$)، مهما كان $A \in \mathcal{B}(I)$ ؟

4.6.29.2 • هل التابع المعرف على $I^\star = I \setminus \{0\}$ بأن $f(x) = \frac{1}{x}$ ينتمي إلى $L^1(I, \gamma)$ ؟ هل ينتمي إلى الفضاء $L^1(I, \nu)$ ، حيث $\nu = h \cdot \gamma$ مع h التابع المعرف على I بأن $h(x) = x^2$ ؟

30.2 الموضوع الـ 30*

1.30.2 **التمرين الأول •** لتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $I=[0,1]$ بأن $f_n(x)=2n^3x$ من أجل $x\in[0,\frac{1}{2n}[$ وَ $f_n(x)=2n^3(\frac{1}{n}-x)$ من أجل $x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}[$ وَ $f_n(x)=0$ من أجل $x\in[\frac{1}{n},1]$. بين أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع يطلب تعيينه. هل التوابع f_n ستيلجس كمولة نسبة إلى التابع $x\mapsto x^2$ على المجال $[0,1]$ ؟ هل لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx^2=\int_0^1 f\,dx^2\ ?$$

2.30.2 **التمرين الثاني •** لتكن X مجموعة كيفية ولتكن $\mathcal{J}$ فئة من أجزاء X . متى نقول عن $\mathcal{J}$ إنها تشكل جبر مجموعات على X ؟ كون كل الجبور الممكنة على المجموعة ذات ثلاث عناصر $X_0=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

3.30.2 **التمرين الثالث •** لنزود المجموعة $\mathbb{R}$ بعشيرتها البوريلية وليكن φ تطبيقا لِـ $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. أثبت أنه حتى يكون φ قيوسا يلزم ويكفي أن يكون التابع $g=(\arctan)\circ\varphi$ قيوسا، $\arctan$ هو تابع «قوس الظل»

4.30.2 **التمرين الرابع •** .

1.4.30.2 • ليكن u تابعا حقيقيا ريمان كمولا على المجال المتراص $[a,b]$. بين أن التابع $\mathcal{U}$ المعرف على $[a,b]$ بأن $\mathcal{U}(x)=\int_a^x u$ ، $x\in[a,b]$ ، مستمر مطلقا على هذا المجال.

2.4.30.2 • ليكن v تابعا حقيقيا معرفا وغير محدود على المجال $]a,b]$. إذا كان v ريمان كمولا على كل مجال من الشكل $[a+\varepsilon,b]$ ، مهما كان $\varepsilon\in]0,b-a[$ ، وكانت النهاية $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b v$ موجودة فنشير إليها بِـ $\int_{a+0}^b v$ ونسميها بتكامل ريمان الموسع للتابع (غير المحدود) v على $]a,b]$.

إننا نقبل في ما يلي أن تكامل ريمان الموسع هذا يتمتع بخواص تكامل ريمان التقليدي.

3.4.30.2 • بين أن التابع w المعرف على $]0,1]$ بأن $w(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ ، $t \in]0,1]$ ، يتمتع بتكامل ريمان موسع على مجال تعريفه. تأكد من أن $W(x) \doteq \int_{0+}^{x} w(t)\,dt = \sqrt{x}$ مهما كان x من $I \doteq [0,1]$ ، مع الاصطلاح بأن $\int_{0+}^{0} w(t)\,dt = 0$.

إننا نريد أن نستفيد مما سبق لكي نثبت أن التابع $\sqrt{x}$ مستمر مطلقا على I . ولهذا الغرض نقترح اتباع ما يلي:

4.4.30.2 • ليكن k عددا طبيعيا أكبر من 1 . عيّن النقطة $t_k \in I$ بحيث $k = w(t_k)$.

5.4.30.2 • ليكن الآن التابع w_k المعرف بأن $w_k(t) = k$ من أجل $t \in [0, t_k]$ وَ $w_k(t) = w(t)$ من أجل $t \in]t_k, 1]$. أرسم على المعلم نفسه بياني w وَ w_k ولاحظ أيهما يقع تحت الآخر. أحسب $\int_{0+}^{1} |w - w_k|$.

6.4.30.2 • بكتابة w على الشكل $w = w_k + [w - w_k]$ استنتج مما سبق أن التابع W (الجذر التربيعي) مستمر مطلقا على $[0,1]$.

5.30.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا، μ قياسا موجبا. لنفرض أن $\mu(X) = 1$ ولتكن $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ جماعة متهية عناصرها من العشيرة $\mathcal{A}$. بين أنه

$$\text{ينتج من كون} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) > n-1 \quad \text{أن} \quad \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\Big) > 0 \ .$$

6.30.2 **التمرين السادس** • أثبت أنه إذا كان التابع الحقيقي ψ ريمان كمول على المجال المتراص $[a,b]$ فتكون قيمته المطلقة $|\psi|$ ريمان كمولة على المجال نفسه.

7.30.2 **التمرين السابع** • ليكن m عددا طبيعيا غير معدوم وليكن Θ تابعا حقيقيا مستمرا على المجال $[0,m]$.

1.7.30.2 • برّر مستخدما نتائج قدمت لك في الدرس أو الأعمال الموجهة، وجود تكامل ستيلجس $\int_0^m E\,d\Theta$ ، حيث E هو تابع «الجزء الصحيح» أي أن $E(x) = [x]$ هو الجزء الصحيح للعدد x .

2.7.30.2 • أحسب $\int_0^m E\,d\Theta$ بدلالة قيم للتابع Θ .

31.2 الموضوع الـ $31^\star$

في كل ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ أو أي مجال جزئي منه بالعشيرة البوريلية وقياس لوبيغ. ونضع $I = [-1,1]$ وبشير بـ χ_I إلى دالته المميزة.

1.31.2 التمرين الأول •

1.1.31.2 • بين أن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $f_n(x) = nf_1(nx)$ ، $x \in \mathbb{R}$ حيث f_1 هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $f_1(x) = (1-|x|)\chi_I(x)$ ، متقاربة ببساطة نحو تابع f يطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.1.31.2 • أحسب $\int_{\mathbb{R}} f\,dx$ وَ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,dx$ وقارن بينهما.

3.1.31.2 • بين أنه إذا وجد تابع g قيوس على $\mathbb{R}$ ويحقق

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{شك على } \mathbb{R} \text{ مهما كان } n \in \mathbb{N}^\star$$

فهو حتما غير لوبيغ كمول، أي أن $\int_{\mathbb{R}} g\,dx = +\infty$.

2.31.2 **التمرين الثاني •** ليكن φ تابعا حقيقيا قيوسا ومحدودا على $\mathbb{R}_+$ ولنفرض أن النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \ell$ موجودة ومنتهية. بين أن التابع Φ المعطى بأن $\Phi(t) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\varphi(x)\,dx$ ، $t \in \mathbb{R}_+^\star$ معرف جيدا ثمّ أحسب $\lim\limits_{t\downarrow 0}\Phi(t)$. أعط التبرير اللّازم.

3.31.2 **التمرين الثالث •** ليكن التابع الحقيقي $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan tx}{x(1+x^2)}\,dx$ ، $t \in \mathbb{R}$.

1.3.31.2 • بين أن التابع F معرف جيدا. عين إشارته. أحسب $F(0)$.

2.3.31.2 • أثبت أن التابع F مستمر على $\mathbb{R}$.

3.3.31.2 • أثبت كذلك أن التابع F قابل للإشتقاق على $\mathbb{R}$. وأحسب $F'(t)$ عند كل نقطة t من $\mathbb{R}$.

4.3.31.2 • بدلالة t ، أحسب التكامل الذي يعطي المشتق $F'(t)$ واستنتج عبارة للتابع F ليس فيها رمز التكامل.

[إرشاد: يمكنك أن تستعين بالفك: $\frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{t^2-1}[\frac{-1}{1+x^2} + \frac{t^2}{1+t^2x^2}]$ ، الوارد من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+$ ومن أجل أجل كل $t \in \mathbb{R}$ مع $|t| \neq 1$.]

تذكير: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن متتالية من التوابع الحقيقية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ القيوسة على X إنها متقاربة بالقياس نحو تابع قيوس ψ إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \alpha > 0, \ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |\psi_n(x) - \psi(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

ونقول عن المتتالية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنها لكوشي بالقياس إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^\star, \\ \{(m \geq n_0, \ n \geq n_0) \Longrightarrow \mu(\{x \in X \mid |\psi_m(x) - \psi_n(x)| \geq \alpha\}) \leq \varepsilon\}.$$

4.31.2 التمرين الرابع •

1.4.31.2 • أثبت أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة في السؤال الأول متقاربة بالقياس نحو $f \equiv 0$ (التابع المعدوم) على $\mathbb{R}$.

2.4.31.2 • أثبت أن المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $g_n = \chi_{[n,+\infty[}$ متقاربة ببساطة على $\mathbb{R}$ نحو تابع g_∞ يطلب تعيينه وهي لا تتقارب بالقياس نحو هذا التابع.

ليكن المجال $J = [0, 1[$. من أجل كل عدد طبيعي k ، نقسم هذا المجال إلى مجالات متساوية الطول J_k^i ، حيث $J_k^i = [i2^{-k}, (i+1)2^{-k}[$ ، $i = 0$ ، 1 ، $\ldots$ ، $2^k - 1$. ونضع $f_k^i = \chi_{J_k^i}$ ، الدالة المميزة للمجال J_k^i في J . ثمّ نعرِّف المتتالية $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ على

J كالتالي: من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ نأخذ أكبر عدد طبيعي k بحيث $2^k \leq n$ ، عندها يكتب n على الشكل $n = 2^k + i$ مع $i = 0$ ، 1 ، $\ldots$ ، $2^k - 1$ ، فنضع $\theta_n = f_k^i$.

3.4.31.2 • أعط المجالات الموافقة لِـ $k = 0$ وَ $k = 1$ وَ $k = 2$. أثبت أن المتتالية $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو التابع المعدوم θ على J . أثبت أنها لا تتقارب ببساطة نحو θ على J .

4.4.31.2 • نحن في هذا السؤال نأخذ فضاء مقيسا كيفيا $(X, \mathcal{A}, \mu)$. أثبت أن كل متتالية حقيقية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ قيوسة على X ، ومتقاربة بالقياس نحو تابع قيوس ψ ، هي لكوشي بقياس على X .

5.31.2 **التمرين الخامس** • $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيس وَ $[a, b]$ مجال متراص من $\mathbb{R}$ وَ $\varphi : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع يحقق ما يلي:

١- التابع $t \mapsto \varphi(x, t)$ مستمر على $[a, b]$ ، مهما كان $x \in X$. وكذلك التابع $x \mapsto \varphi(x, t)$ قيوس على X مهما كان $t \in [a, b]$.

٢- يوجد تابع حقيقي h كمول على X نسبة إلى القياس μ ، أي أن $h \in L^1(X, \mu)$ بحيث $|\varphi(x, t)| \leq h(x)$ مهما كان $x \in X$.

1.5.31.2 • أثبت أن التابع $t \mapsto \Phi(t) = \int_X \varphi(x, t)\, d\mu$ مستمر على المجال المتراص $[a, b]$ ؛ إنه إذن ريمان كمول على هذا المجال.

2.5.31.2 • أحسب المشتق $\frac{\partial \ell}{\partial t}(x, t)$ ، حيث ℓ هو التابع الحقيقي المعرف باستخدام تكامل ريمان بأن $X \times [a, b] \ni (x, t) \longmapsto \ell(x, t) = \int_a^t \varphi(x, s)\, ds \in \mathbb{R}$. ثمّ بين أنه من أجل كل $t \in [a, b]$ يكون التابع $X \ni x \mapsto \ell(x, t) \in \mathbb{R}$ كمولا على X نسبة إلى μ .

3.5.31.2 • نستطيع إذن اعتبار التابع $[a, b] \ni t \mapsto L(t) = \int_X \ell(x, t)\, d\mu \in \mathbb{R}$. أثبت أن $\frac{dL}{dt} = \Phi(t)$ مهما كان $t \in [a, b]$. استنتج دستور المبادلة بين تكامل ريمان وتكامل للبيغ:

$$\int_a^b \Phi(t)\,dt = \int_a^b \Big[\int_X \varphi(x,t)\,d\mu\Big]\,dt = \int_X \Big[\int_a^b \varphi(x,t)\,dt\Big]\,d\mu.$$

32.2 الموضوع الـ $32^\star$

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ ونشير بِـ I إلى المجال الحقيقي $I \doteq [-1,1]$. المطلوب في التمرينين 1.32.2 وَ 2.32.2 التقيد باستخدام، فقط، نظرية تكامل ريمان على مجال متراص.

1.32.2 التمرين الأول •

1.1.32.2 • عين نهاية المتتالية المجموعاتية $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع $\mathbb{R} \supset I_n = [-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$.

2.1.32.2 • لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على I بأن $\xi_n(x) = (1 - \frac{n+1}{n}|x|)\chi_{I_n}(x)$ ، حيث χ_{I_n} هي الدالة المميزة للمجال I_n . أعط هيئة بيانات التوابع ξ_1 وَ ξ_2 وَ ξ_3 على المعلم نفسه. ثمّ أثبت أن $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام على I نحو تابع ξ يطلب تعيينه.

3.1.32.2 • أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \xi_n\,dx = \int_I \xi\,dx$.

2.32.2 **التمرين الثاني •** ليكن المجال الحقيقي $J = [\alpha, \beta]$ مع $\alpha < \beta$ عددين متهيين. ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع حقيقية معرفة وريمان كمولة على J ولنفرض أنها متقاربة بانتظام نحو تابع f على $[\gamma, \beta]$ مهما كان γ من المجال $]\alpha, \beta[$ وأنه يوجد عدد حقيقي $0 < M$ بحيث $|f_n(x)| \leq M$ ، مهما كان $x \in [\alpha, \beta]$ ومهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ من .

1.2.32.2 • أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n = \int_\alpha^\beta f$.

2.2.32.2 • لتكن المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ العرفة على $J_0 = [0,1]$ بأن $u_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. بين أنها متقاربة ببساطة على J_0 نحو تابع u يطلب تعيينه وبانتظام على $[\gamma, 1]$ مهما كان $0 < \gamma$. هل لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 u_n = \int_0^1 u$ ؟ هل هذا يتناقض مع نتيجة السؤال السابق؟

3.32.2 **التمرين الثالث** • ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وليكن μ تطبيقا لِـ $\mathcal{A}$ في $\mathbb{R}_+$ بحيث يكون لدينا $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ من أجل كل A وَ B من $\mathcal{A}$ مع $A \cap B = \emptyset$. أثبت أنه حتى يكون μ قياسا على $(X, \mathcal{A})$ ، يلزم ويكفي أن يكون $\inf\limits_{n\geq 1} \mu(A_n) = 0$ من أجل كل متتالية متناقصة $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ عناصرها من $\mathcal{A}$ مع $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

4.32.2 **التمرين الرابع** • [فيما يخص مفهومي التقارب بالقياس ومتتالية كوشي بالقياس، يمكنك الرجوع إلى الموضوع السابق.]

1.4.32.2 • لتكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية لكوشي بالقياس. ولنفرض أنها تحتوي على متتالية جزئية $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو تابع قيوس ψ . أثبت عندها أن المتتالية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالقياس نحو التابع ψ .

2.4.32.2 • لتكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية لكوشي بالقياس. أثبت أنها تحتوي على متتالية جزئية $\{\psi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ متقاربة μ شبه كليا على X نحو تابع قيوس v .

3.4.32.2 • لتكن $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع كمولة على X نسبة إلى القياس μ ، وتتقارب بالقياس نحو تابع w ولنفرض وجود تابع g جموع، أي $g \in L^1(X, \mu)$ ، بحيث $|w_n(x)| \leq w(x)$ ، μ شك على X . أثبت أن المتتالية $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو التابع w في $L^1(X, \mu)$.

33.2 الموضوع الـ 33*

1.33.2 **التمرين الأول •** لتكن X مجموعة كيفية وَ a نقطة منها. وليكن التابع المجموعاتي μ المعرف بأن $\mathcal{P}(X) \ni A \longrightarrow \mu(A) = \chi_A(a) \in \mathbb{R}_+$ حيث $\mathcal{P}(X)$ هي مجموعة أجزاء X وَ χ_A هي الدالة المميزة للجزء A .

1.1.33.2 • تأكد من أن μ قياس موجب على العشيرة $(X, \mathcal{P}(X))$.

2.1.33.2 • عين كل أجزاء X المهملة (أي بقياس معدوم).

3.1.33.2 • ليكن الآن φ وَ ψ تابعين حقيقيين معرفين على X وبحيث $\varphi(a) = \psi(a)$ وَ $\varphi(x) \neq \psi(x)$ مهما كان x من X مع $x \neq a$. أية القضيتان التاليتين: (P) : $\varphi = \psi$ ، μ شك، (Q) : $\varphi \neq \psi$ ، μ شك، صحيحة؟ علل إجابتك.

2.33.2 **التمرين الثاني •** ليكن الفضاء المقيس $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ ، حيث $\nu \doteq \text{card}$ قياس التعداد، وليكن f تابعا موجبا وقيوسا على $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1.2.33.2 • تأكد من أن $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)\chi_{\{n\}}$ ثمّ بين أن $\int_{\mathbb{N}} f\, d\nu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$.

2.2.33.2 • لتكن المتتالية المزدوجة الموجبة $\{x_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. ومن أجل i مثبت، نضع $f_i(j) = x_{ij}$ مهما كان $j \in \mathbb{N}$ ، ثمّ $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$. استنتج مما سبق أن:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x_{ij}.$$

3.33.2 **التمرين الثالث •** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وَ $p \in [1, +\infty[$. إذا كان g تابعا موجبا وقيوسا معرفا على X فنرمز بِـ $N_p(g)$ إلى العدد الحقيقي الموجب المكتمل المعطى بأن $N_p(g) = (\int_X g^p\, d\mu)^{1/p}$.

1.3.33.2 • أثبت أنه من أجل كل g وَ h تابعين موجبين وقيوسين وَ c عدد حقيقي موجب فإن:

١- $N_p(g) = 0 \iff g = 0$ ، μ - شك.

٢- $N_p(cg) = cN_p(g)$.

٣- وإذا كان $g \leq h$ ، μ - شك، فإن $N_p(g) \leq N_p(g)$.

في بقية هذا التمرين، نقبل أنه من أجل كل عددين حقيقيين $\alpha > 0$ وَ $\beta > 0$ مع $\alpha + \beta = 1$ ومن أجل كل عددين حقيقيين $a \geq 0$ وَ $b \geq 0$ ، لدينا $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

2.3.33.2 • ليكن $p > 1$ وَ $q > 1$ عددين حقيقيين مع $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. وليكن g وَ h تابعين موجبين وقيوسين معرفين على X مع $\int_X g\,d\mu = \int_X h\,d\mu$. أثبت أن

$$\int_X g^{1/p} h^{1/q}\,d\mu \leq 1.$$

3.3.33.2 • استنتج مما سبق أنه من اجل g وَ h تابعين موجبين وقيوسين لدينا:

$$\int_X fg\,d\mu \leq \Big(\int_X g^p\,d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X h^q\,d\mu\Big)^{1/q}.$$

إننا نقبل في التمرين الموالي أن التابع ξ ، المعرف على $I \doteq [0,1]$ بأن $\xi(x) = x^p \sin \frac{1}{x^q}$ من أجل $x \in]0,1]$ وَ $\xi(0) = 0$ ، محدود التغيُّر على I مهما كان p وَ q عددين حقيقيين مع $0 < q < p$.

4.33.2 **التمرين الرابع** • لتكن $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ متتالية التوابع الحقيقية المعرفة على I بأن $\xi_n(x) = x^{1+1/n} \sin \frac{1}{x}$ من أجل $x \in]0,1]$ وَ $\xi_n(0) = 0$.

1.4.33.2 • بين أن المتتالية $\{\xi_n\}_n$ متقاربة ببساطة نحو تابع ξ يطلب تعيينه.

2.4.33.2 • بين أن ξ_n محدود التغيُّر على I مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ، إلا أن ξ ليس بمحدود التغيُّر.

[إرشاد: يمكنك اعتبار التقسيمات $P_n = \{0, \frac{1}{(2n-1)\pi}, \frac{1}{(2n-3)\pi}, \ldots, \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{3\pi}, 1\}$]

3.4.33.2 • لتكن الآن $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع محدودة التغير على مجال متراص $[a,b]$ من $\mathbb{R}$. أثبت أنه إذا وجد عدد حقيقي $0 < M$ بحيث $V_a^b(\theta_n) \leq M < \infty$ مهما كان $1 \leq n$ وكانت $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة على $[a,b]$ نحو تابع θ فإن هذا التابع محدود التغيُّر على المجلال نفسه ولدينا $V_a^b(\theta) \leq M$.

34.2 الموضوع الـ $34^\star$

1.34.2 **التمرين الأول** • A ، E ، F ثلاثة أجزاء من مجموعة X غير خالية، ^cE متممة E نسبة إلى X . بين أن $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE)$.

2.34.2 **التمرين الثاني** • ليكن التابع الحقيقي f المعرف على $I \doteq [0,2]$ بأن

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{إذا كان} & x \in [0,1[\\ x^2 - 1 & \text{إذا كان} & x \in [1,2] . \end{array} \right.$$

هل f مستمر عند النقطة 1 ؟ بين أن f محدود التغيُّر على I.

3.34.2 **التمرين الثالث** • ليكن المجال $J \doteq [0,1]$ والتابع الحقيقي g المعرف بأن $g(x) = x$ من أجل $x \in J \cap \mathbb{Q}$ وَ $g(x) = 2/(1+x^2)$ من أجل $x \in J \setminus \mathbb{Q}$.
أثبت أن التابع g غير ريمان كمول على J .

في كل ما يلي يُزود $\mathbb{R}$ ـ وكذا $\overline{\mathbb{R}}$ ـ بعشيرته البوريلية.

4.34.2 **التمرين الرابع** • ليكن التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ مع $x \in \mathbb{R}$. ولتكن المتتالية التابعية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_n^k}(x) + n\chi_{A_n}(x), \;\; x \in \mathbb{R}$$

حيث يُشير χ إلى الدالة المميزة للمجموعة الواردة كدليل ثمّ إن $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq n\}$ وَ

$$A_n^k = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{k-1}{2^n} \leq h(x) < \frac{k}{2^n}\}, \;\; k = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

1.4.34.2 • عين المجموعات A_1^1 وَ A_1^2 وَ A_1 وأرسم، على نفس المعلم، بياني h وَ h_1 . عين كذلك المجموعات A_2^1 ، A_2^2 ، ... ، A_2^8 ، A_2 وأرسم، على معلم مخالف للسابق، بياني h وَ h_2 .

2.4.34.2 • قل لماذا h قيوس ثمّ بين أن المتتالية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ذات عناصر قيوسة.

3.4.34.2 • أثبت أن المتتالية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بانتظام نحو التابع h على $\mathbb{R}$.

5.34.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا ولتكن $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع قيوسة من X في $\overline{\mathbb{R}}$. وليكن التابعان ψ وَ φ المعرفين من X في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $\psi = \inf\limits_{n\geq 1} g_n$ وَ $\varphi = \sup\limits_{n \geq 1} g_n$. لنذكر ـ مثلا ـ أنه لدينا تعريفا $\psi(x) = \inf\limits_{n\geq 1} g_n(x)$ من أجل كل $x \in X$.

1.5.34.2 • أثبت أنه من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$\{\psi < \lambda\} \doteq \{\inf_{n\geq 1} g_n < \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_n < \lambda\}$$ مع $$\{\psi < \lambda\} \doteq \{x \in X \mid \psi(x) < \lambda\}$$

وَ $\{g_n < \lambda\} \doteq \{x \in X \mid g_n(x) < \lambda\}$ وكذلك:

$$\{\varphi > \lambda\} \doteq \{\sup_{n\geq 1} g_n > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{g_n > \lambda\}$$ مع $$\{\varphi > \lambda\} \doteq \{x \in X \mid \varphi(x) > \lambda\}$$

أستنتج أن ψ وَ φ تابعان قيوسان.

2.5.34.2 • أثبت أن التابعين u وَ v المعرفان من X في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $u = \liminf\limits_{n\to\infty} g_n$ وَ $v = \limsup\limits_{n\to\infty} g_n$ قيوسان. استنتج مما سبق أنه إذا كانت متتالية التوابع الحقيقية المكتملة $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة على X نحو تابع g فإن هذا التابع g قيوس.

35.2 الموضوع الـ 35*

في كل ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ أو أي جزء منه بعشيرة بوريل وقياس لوبيغ.

1.35.2 **التمرين الأول •** لتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+ \doteq [0,+\infty[$ بأن $f_n(x) = \frac{n}{x+n}\chi_{I_n}(x)$ ، $0 \leq x$ ، حيث χ_{I_n} هي الدالة المميزة للمجال $I_n \doteq [0,+n]$.

1.1.35.2 • بين أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة وأنها تتقارب ببساطة نحو تابع f يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.1.35.2 • استخدم مبرهنة التقارب الرتيب لِبيبو لفي لحساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx$. تأكد من النتيجة بالحساب الفعلي للتكامل قيد المعالجة.

3.1.35.2 • عين مبررا حساباتك النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n}\frac{1}{1+x^2}\frac{n}{x+n}\,dx$.

2.35.2 **التمرين الثاني •** ليكن المجال المفتوح $I =]0,1[$ ، مزود بقياس لوبيغ، ومتتالية التوابع الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على هذا المجال بأن $u_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$ ، $I \ni x$.

1.2.35.2 • أثبت، بالحساب الفعلي، أن $\int_I [\sum_{n=1}^{\infty} u_n]\,dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_I u_n\,dx$.
هل تناقض هذه النتيجة المبرهنة المتعلقة بمكاملة سلسلة عنصر بعنصر؟

2.2.35.2 • أثبت أن $\int_I [\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|]\,dx = +\infty$.

3.35.2 **التمرين الثالث •** لتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بأن $v_n(x) = e^{-|1-x|^n}$ ، $\mathbb{R}_+ \ni x$.

1.3.35.2 • بين أنها متقاربة ببساطة نحو تابع v يُطلب تعيينه.

2.3.35.2 • هل يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي على هذه المتتالية على المجال $J \doteq [0,1]$ ؟ أحسب $\lim_{n\to\infty} \int_J v_n\, dx$. ماذا عن تطبيق هذه المبرهنة على $\mathbb{R}_+$ ؟

3.3.35.2 • هل تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ممكنا على $\mathbb{R}_+$ ؟ أحسب $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} v_n\, dx$.

تعريف: ليكن E جزء كيفيا من $\mathbb{R}^N$ ولتكن $\mathcal{F}(E)$ مجموعة كل الأجزاء المغلقة F من $\mathbb{R}^N$ المحتواة في E $(E \supset F)$ وليكن $\mu^\star$ قياس لوبيغ الخارجي على $\mathbb{R}^N$. يدعى العدد الحقيقي الموجب المكتمل $\mu_\star(E) = \sup\{\mu^\star(F) \mid F \in \mathcal{F}(E)\}$ **بقياس لوبيغ الداخلي** للجزء E.

4.35.2 **التمرين الرابع** •

١- ليكن a وَ b عددين حقيقيين مع $b > a$ وليكن $\ell_\star$ قياس لوبيغ الداخلي على $\mathbb{R}$. أحسب $\ell_\star(]a,b[)$ وَ $\ell_\star([a,b])$.

٢- لتكن R بلاطة مغلقة من $\mathbb{R}^N$ وَ $\mathring{R}$ داخليتها. أحسب $\mu_\star(R)$ وَ $\mu_\star(\mathring{R})$.

٣- بين أن $\mu_\star(E) \leq \mu^\star(E)$ مهما كان الجزء E من $\mathbb{R}^N$.

٤- برهن على أنه إذا كان الجزء E من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا كان $\mu_\star(E) = \mu^\star(E)$.

وإذا كان $\mu_\star(E) < +\infty$ فأثبت العكس: إذا كان $\mu^\star(E) = \mu_\star(E)$ كان E لوبيغ قيوسا.

٥- لتكن $\left\{E_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من أجزاء $\mathbb{R}^N$ غير متقاطعة مثنى مثنى. برهن على أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_\star(E_n) \leq \mu_\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).$$

36.2 **الموضوع الـ** $36^\star$

في كل ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ أو أي جزء منه بعشيرة بوريل وقياس لوبيغ.

1.36.2 التمرين الأول •

1.1.36.2 • ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وليكن A جزء قيوسا من X . بيّن أن χ_A ، الدالة المميزة للجزء A ، قيوسة.

2.1.36.2 • أثبت أن $\chi_{\mathbb{Q}}$ ، الدالة المميزة لمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ، قيوسة.

2.36.2 التمرين الثاني •

ليكن المجال $I \doteq [0,1]$ والتابع الحقيقي f المعرف بأن $f(x) = \sin \pi x$ من أجل $x \ni I \cap \mathbb{Q}$ وَ $f(x) = x - 1$ من أجل $x \ni I \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.36.2 • صف بيان f ، ماذا عن اشارة f ؟ أعط تابعا بسيطا يساوي f شبه كليا على المجال I .

2.2.36.2 • أثبت أن التابع f غير ريمان كمول على I .

3.2.36.2 • أثبت أنه لوبيغ كمول وأحسب تكامله للوبيغ $\int_I f(x)\, dx$.

3.36.2 التمرين الثالث •

لتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi_n(x) = \frac{n}{x^2+n}\chi_{I_n}(x)$ ، حيث χ_{I_n} هي الدالة المميزة للمجال $I_n \doteq [-n, +n]$.

1.3.36.2 • بين أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة وأنها تتقارب ببساطة نحو تابع φ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.3.36.2 • استخدم مبرهنة التقارب الرتيب لِيبيبو لفي لحساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, dx$. تأكد من النتيجة بالحساب الفعلي للتكامل قيد المعالجة.

3.3.36.2 • عين مبررا حساباتك النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} \frac{n}{x^2+n}\, dx$.

4.36.2 **التمرين الرابع** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا حقيقيا جموعا على X نسبة إلى μ ، أي أن f قيوس وَ $\int_X |f|\,d\mu < \infty$.

من أجل $A \in \mathcal{A}$ مع $0 < \mu(A) < \infty$ ، نضع $M_A(f) = \frac{1}{\mu(A)}\int_A f\,d\mu$.

يسمى $M_A(f)$ بمتوسط f على A . ماذا عن متوسط تابع ثابت على X ؟

1.4.36.2 • إذا كان $\alpha \le f(x) \le \beta$ ، شك x من X فبين أن $\alpha \le M_A(f) \le \beta$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ مع $0 < \mu(A) < \infty$.

2.4.36.2 • وكعكس للنتيجة السابقة لدينا ما يلي: إذا كان $\mu(X) < \infty$ وكان

$$M_A(f) \in Q \text{ مهما كان } A \in \mathcal{A} \text{ مع } 0 < \mu(A) < \infty ،$$

حيث Q جزء مغلق من $\mathbb{R}$ ، فأثبت أن $f(x) \in Q$ ، μ شك x من X .

[**إرشاد:** إذا كان المفتوح ^cQ غير خال فمن المعروف أنه يكتب على الشكل $^cQ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ ، حيث $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المجالات المفتوحة وغير المتقاطعة مثنى مثنى. ضع $A_n = f^{-1}(L_n)$ وقدّر $|M_{A_n}(f) - c_n|$ حيث c_n هو مركز المجال L_n لتصل إلى تناقض؛ استنتج أن $\mu(f^{-1}(^cQ)) = 0$.]

37.2 الموضوع الـ 37*

في كل ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ أو أي جزء منه بعشيرة بوريل وقياس لوبيغ.

1.37.2 **التمرين الأول** • لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أجزاء $\mathbb{R}^2$ المعطاة بأن $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le \frac{x^2}{n}\}$ ، $n \in \mathbb{N}^\star$. أحسب $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ وَ $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. هل هذه المتتالية متقاربة؟

2.37.2 **التمرين الثاني** • ليكن المجال $I \doteq [0,1]$ والتابع الحقيقي u المعرف بأن $u(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$ من أجل $x \in I \cap \mathbb{Q}$ وَ $u(x) = x - 1$ من أجل $x \in I \setminus \mathbb{Q}$.

1.2.37.2 • صف بيان u ، ماذا عن اشارة u ؟ أعط تابعا شكله بسيط يساوي u شبه كليا على المجال I .

2.2.37.2 • أثبت أن التابع u غير ريمان كمول على I .

3.2.37.2 • أثبت أنه لوبيغ كمول وأحسب تكامله للوبيغ $\int_I u(x)\,dx$.

3.37.2 **التمرين الثالث** • لتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi_n(x) = \frac{n^2}{x^2+n^2}\chi_{I_n}(x)$ ، حيث χ_{I_n} هي الدالة المميزة للمجال $I_n \doteq [-n, +n]$.

1.3.37.2 • بين أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة وأنها تتقارب ببساطة نحو تابع φ يُطلب تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟

2.3.37.2 • استخدم مبرهنة التقارب الرتيب لِبيبو لفي لحساب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx$. تأكد من النتيجة بالحساب الفعلي للتكامل قيد المعالجة.

3.3.37.2 • عين مبررا حساباتك النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2}\frac{n^2}{x^2+n^2}\,dx$.

4.37.2 **التمرين الرابع** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن $L^1(X,\mu)$ فضاء التوابع الجموعة على X نسبة إلى القياس الموجب μ ، أي فضاء التوابع f القيوسة مع $\int_X |f|\,d\mu < \infty$.

1.4.37.2 • بين بمثال أنه إذا كان f وَ g منتميين إلى $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ ، (λ هو قياس لوبيغ) فليس من الضروري أن يكون fg منتميا إلى هذا الفضاء. لكن لدينا بصفة عامة ما يلي: **إذا كان** $|f|^2$ **وَ** $|g|^2$ **منتميين إلى** $L^1(X,\mu)$ **فيكن** fg **منتميا إلى** $L^1(X,\mu)$. ولرؤية ذلك يمكنك تتبع الخطوات الموالية.

2.4.37.2 • بين أن

$$ab \leq \frac{\alpha^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\alpha^2}, \ \forall a, b \geq 0, \ \forall \alpha > 0.$$

استنتج أن

$$\int_X |fg|\,d\mu \leq \frac{\alpha^2}{2}\int_X |f|^2\,d\mu + \frac{1}{2\alpha^2}\int_X |g|^2\,d\mu, \ \forall \alpha > 0.$$

إذا كان $\int_X |f|^2\,d\mu > 0$ فبين أنك بأخذ $\alpha = \left(\int_X |g|^2\,d\mu \Big/ \int_X |f|^2\,d\mu\right)^{1/4}$ تحصل على **متباينة كوشي وشفارتز** :

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \Big(\int_X |f|^2\,d\mu\Big)^{1/2}\Big(\int_X |g|^2\,d\mu\Big)^{1/2},$$

الصحيحة من أجل كل f وَ g قيوسين مع $|f|^2$ وَ $|g|^2$ جموعين. تأكد من هذه المتباينة صحيحة حتى في حالة $\int_X |f|^2\,d\mu = 0$.

لمتباينة كوشي وشفارتز عدة تطبيقات منها ما يلي:

3.4.37.2 • ليكن f وَ g تابعين قيوسين مع $|f|^2$ وَ $|g|^2$ جموعين. بين أن $|f-g|^2$ جموع.

4.4.37.2 • ليكن f وَ g تابعين قيوسين مع $|f|^2$ وَ $|g|^2$ جموعين. إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وَ $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين بحيث تكون المتتاليتين $\{|f_n|^2\}_{n=1}^{\infty}$ وَ $\{|g_n|^2\}_{n=1}^{\infty}$ جموعتين مع

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^2\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n-g|^2\,d\mu = 0,$$

فأثبت أن $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g_n\,d\mu = \int_X fg\,d\mu$.

38.2 الموضوع الـ $38^{\star}$

1.38.2 **التمرين الأول** • ليكن $N \in \mathbb{N}^{\star}$. بين أن التابع T المعرف على $\mathbb{R}^N$ بأن $T(x) = e^{-|x_1|-\cdots-|x_N|}$ حيث $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$ ، ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N},\lambda_N)$ مهما كان $p \in [1,+\infty]$ ؛ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ هي العشيرة البوريلية وَ λ_N قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$.

2.38.2 **التمرين الثاني** • ليكن I المجال $]-1,1[$ مزود بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ. من أجل أية قيم موجبة للأس α ينتمي التابع الحقيقي $\xi(x) = |x|^{-\alpha}$ إلى فضاء لوبيغ $\mathcal{L}^1(I)$ ؟ إلى $\mathcal{L}^p(I)$ ؟ ($p \in]1,+\infty[$.) برر إجابتك باعتبار متتالية متزايدة من التوابع المستمرة واستخدام مبرهنة بيبو لفي.

3.38.2 **التمرين الثالث •** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن ϱ تطبيقا لـ X في $\mathbb{R}_+=[0,+\infty]$ قيوسا. من المعروف اننا بوضع $\nu(E)=\int_E \varrho\, d\mu$ ، $\mathcal{A}\ni E$ نعرف قياسا موجبا على $(X,\mathcal{A})$. نقول إن ν يقبل الكثافة ϱ نسبة إلى القياس μ .

1.3.38.2 • أثبت أنه إذا كان $\mathbb{R}_+ \leftarrow X : f$ تابعا قيوسا فلدينا $\int_X f\, d\nu=\int_X f \varrho\, d\mu$.

لنأخذ الآن الفضاء المقيس $(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\lambda)$ ، حيث $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ هي العشيرة البوريلية وَ λ قياس لوبيغ. وليكن ν_0 القياس الموجب الذي يقبل ككثافة نسبة إلى λ التابع ϱ_0 المعرف بأن $\varrho_0(x)=e^{-|x|}$ ، $\mathbb{R}\ni x$.

2.3.38.2 • أحسب $\nu_0(\mathbb{R})$.

3.3.38.2 • ليكن التابع الموجب u المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $u(x)=e^{|x|}$ من أجل $1\geq |x|$ وَ $e^{|x|}/x^2$ من أجل $1<|x|$. أثبت أن u ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\nu_0)$ لكنه لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\nu_0)$ مهما كان $]1,+\infty[\ni p$.

4.3.38.2 • أثبت أن التابع v المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $v(x)=|x|$ ، $\mathbb{R}\ni x$ لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\nu_0)$ لكنه ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R},\nu_0)$ مهما كان $[1,+\infty[\ni p$.

4.38.2 **التمرين الرابع •** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا متهيا (أي أن $\infty>\mu(X)$). سنكتب اختصارا $\mathcal{L}^p=\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$.

1.4.38.2 • أثبت أنه إذا كان p وَ q عددين حقيقيين من $[1,+\infty]$ مع $p<q$ كان $\mathcal{L}^\infty\subset\mathcal{L}^q\subset\mathcal{L}^p\subset\mathcal{L}^1$. أعط مثالا يبين أن الشرط $+\infty>\mu(X)$ ضروري.

2.4.38.2 • هل يوجد احتواء بين $\bigcap_{p\in[1,+\infty[}\mathcal{L}^p$ والفضاء $\mathcal{L}^\infty$ ؟ وبين $\bigcup_{p\in]1,+\infty[}\mathcal{L}^p$ وَ $\mathcal{L}^1$ ؟ بين بواسطة مثالين أنه لدينا على العموما $\bigcap_{p\in[1,+\infty[}\mathcal{L}^p\neq\mathcal{L}^\infty$ وأن $\bigcup_{p\in]1,+\infty[}\mathcal{L}^p\neq\mathcal{L}^1$.

3.4.38.2 • ليكن $w \in \bigcap_{1\le p<\infty} \mathcal{L}^p$. إذا وُجود ثابت C بحيث $|w|_{\mathcal{L}^p} \le C$ مهما كان $p \in [1,\infty[$ فأثبت أن $w \in \mathcal{L}^\infty$.

[**تذكير.** نقول عن متتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ إنها تتقارب بضعف في $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ نحو تابع φ من هذا الفضاء إذا كان $\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\psi = \int_\Omega \varphi\psi$ مهما كان $\psi \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$.]

5.38.2 **التمرين الخامس** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وَ $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية محدودة في $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ وتتقارب μ شبه كليا على X نحو تابع η . ولتكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية من $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ تتقارب بضعف في هذا الفضاء نحو تابع φ . أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \eta_n\varphi_n\psi = \int_X \eta\varphi\psi,\ \ \forall\psi \in L^2(X,\mathcal{A},\mu).$$

39.2 الموضوع الـ 39*

في كل ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ أو أي جزء منه بعشيرة بوريل وقياس لوبيغ.

1.39.2 **التمرين الأول** • لتكن المتتالية التابعية $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة في $I \doteq]0,1[$ بأن $v_n(x) = \sqrt{n}$ من أجل $x \in I_n \doteq [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}]$ وَ $v_n(x) = 0$ من أجل $x \in I \setminus I_n$.

1.1.39.2 • بين أن عناصر هذه المتتالية تنتمي إلى $L^2(I)$ وهي متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع v ينبغي تعيينه.

2.1.39.2 • تأكد من أن المتتالية $\{v_n/\sqrt{x}\}_{n=1}^\infty$ تنتمي إلى $L^2(I)$ وكذ التابع $v/\sqrt{x}$. هل تتقارب المتتالية $\{v_n/\sqrt{x}\}_{n=1}^\infty$ نحو $v/\sqrt{x}$ في $L^2(I)$ ؟

2.39.2 **التمرين الثاني** • ليكن المجال $\mathbb{R} \supset I \doteq [-1,1]$ والتابع f_0 المعرف بأن $f_0(x) = (1-x^2)\chi_I(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، حيث χ_I هي الدالة المميزة للمجال I ، ولتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بأن $f_n(x) = f_0(x-n)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

1.2.39.2 • على نفس المعلم، أرسم بيانات f_0 وَ f_1 وَ f_2 . ثمّ بين أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع f ينبغي تعيينه. هل هذا التقارب منتظم؟ هل لدينا $\int_{\mathbb{R}} f_n\,dx \lim_{n\to\infty} = \int_{\mathbb{R}} f\,dx$ ؟

2.2.39.2 • عين $\operatorname{supp} f_n$ ، سند f_n ($n \in \mathbb{N}$)، ثمّ بين أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1,\infty]$. بين أن هذه المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة في $L^p(\mathbb{R})$. هل تتقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو f في $L^p(\mathbb{R}$ ؟

3.2.39.2 • أثبت أنه من أجل $u \in C_c(\mathbb{R})$ ، لدينا $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n u\,dx = \int_{\mathbb{R}} f u\,dx$ ؛ $C_c(\mathbb{R})$ هو فضاء التوابع الحقيقية المستمرة وذات سندات متراصة في $\mathbb{R}$.

[إرشاد: إذا كان S هو سند u ، المتراص، فإنه يوجد $a > 0$ بحيث يكون $S \subset [-a,a]$ وعندئذ يكون $[-a,a] \cap \operatorname{supp} f_n = \emptyset$ من أجل n كبير بكفاية وعليه ...]

4.2.39.2 • أستنتج مستخدما كثافة $C_c(\mathbb{R})$ في $L^{p'}(\mathbb{R})$ أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف نحو f في الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ مع $1 < p < \infty$.

تذكير: نقول عن متتالية توابع $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ مع $1 < p < +\infty$ إنها **متقاربة بضعف** نحو تابع φ في $L^p(\mathbb{R})$ إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\psi\,dx,\ \forall \psi \in L^{p'}(\mathbb{R}), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

3.39.2 **التمرين الثالث** • أثبت توطئة ريمان ولوبيغ القائلة بأنه من أجل كل u من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)\sin nx\,dx = 0.$$

[إرشاد: يمكنك أن تأخذ أولا u من $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ وتكامل بالتجزئة على مجال يحتوي سند u ... ؛ $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ هو فضاء التوابع القابلة للاشتقاق مالانهاية من المرات وذات سندات متراصة.]

4.39.2 **التمرين الرابع** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X) < \infty$. ولتكن $\mathcal{F}$ فئة من توابع الفضاء $\mathcal{L}^1 \doteq \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ ولنفرض وجود تابع g من $L^1 \doteq L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ يهيمن على توابع $\mathcal{F}$ ، أي أن $|u| \le g,\ \forall u \in \mathcal{F}$ ، μ ـ شك على X .

1.4.39.2 • أثبت أن

$$\int_A |u|\,d\mu \leq \int_{\{g>n\}} g\,d\mu + n\mu(A),\ \ \forall u \in \mathcal{F},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

استنتج انه من أجل كل $0 < \varepsilon$ ، يوجد $0 < \alpha$ بحيث، من أجل كل $A \ni \mathcal{A}$ ، ينتج من كون $\alpha \geq \mu(A)$ أن $\sup\{\int_A |u|\,d\mu \mid u \in \mathcal{F}\} \leq \varepsilon$.

2.4.39.2 • لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $\mathcal{L}^1$ مُهيمن عليها في الفضاء L^1 وهي متقاربة بالقياس نحو تابع u .

١ـ أثبت أنه من أجل كل $0 < \varepsilon$ ، $0 < \alpha$ ، يوجد $\mathbb{N} \ni n_0$ بحيث، من أجل كل طبيعيين $n_0 \leq m$ وَ $n_0 \leq n$ يكون لدينا $\mu(\{|u_m - u_n| \geq \varepsilon\}) \leq \alpha$.

٢ـ أثبت أن $\{\widetilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ لكوشي في L^1 وأن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ مقاربة نحو u في L^1 .

تذكير: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن متتالية توابع حقيقية قيوسة $\{u_n\}$ إنها **متقاربة بالقياس** نحو تابع حقيقي قيوس u على X إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in X \mid |u_n(x) - u(x)| \geq \alpha\}\Big) = 0.$$

40.2 الموضوع الـ 40

1.40.2 **التمرين الأول•** ليكن المربع المفتوح $C =]0,1[\times]0,1[$ مزود بعشيرته البوريلية وقياس لوبيغ λ_2 وليكن التابع الحقيقي f المعرف على C بأن $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$. هل f قيوس؟ برر اجابتك.

1.1.40.2 • أحسب المشتق الجزئي $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-x}{(x+y)^2}\right)$ واستفد منه لحساب المقدار $T = \int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\,dx]\,dy$. أحسب كذلك المقدار $K = \int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\,dy]\,dx$. هل $T = K$ ؟

2.1.40.2 • أثبت بالحساب الفعلي أن التابع f لا ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^1(C, \mathcal{B}_C, \lambda_2)$.

2.40.2 **التمرين الثاني•** هدفنا هو استخدام التكامل الثنائي في $\mathbb{R}^2$ لحساب التكامل البسيط $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin^2 x}{x}\,dx$. لهذا الغرض نأخذ $\mathbb{R}^2$ ونزوده بالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ وبقياس لوبيغ λ_2 ونشير بـ χ_S إلى الدالة المميزة للشريط $S =]0, +\infty[\times]0, 1[$. هل S قيوس؟ هل χ_S قيوسة؟ تأكد من أن $\chi_S(x, y) = \chi_{]0,+\infty[}(x) \times \chi_{]0,1[}(y)$ مهما كان $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2.40.2 • من أجل $0 < b$ نضع $I_b(y) = \int_0^b e^{-x}\sin(2yx)\,dx$. بالمكاملة بالتجزئة مرتين يمكن استنباط العلاقة

$$I_b(y) = -\frac{e^{-b}}{1+4y^2}[\sin(2by) + 2y\cos(2by)] + \frac{2y}{1+4y^2},$$

التي نقبلها دون إثبات. عين قيمة $I(y) = \lim\limits_{b\to\infty} I_b(y)$.

2.2.40.2 • بين أن التابع g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ ، حيث $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto g(x, y) = \chi_S(x, y)e^{-x}\sin(2yx) \in \mathbb{R}$.

3.2.40.2 • قل لماذا تستطيع أن تكتب

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\,d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x, y)\,dy\Big]dx = \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x, y)\,dx\Big]dy.$$

بحساب التكاملين الداخليين، استنتج قيمة التكامل L .

3.40.2 **التمرين الثالث•** أثبت أن المتتالية التابعية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ (موزد بعشيرته البوريلية وقياس لوبيغ) بأن $h_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ متقاربة في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ نحو تابع h يطلب تعيينه.

4.40.2 **التمرين الرابع•** ليكن $2 < p$ عددا حقيقيا. بدراسة تابع ملائم، بين أن $x^p + 1 \le (x^2+1)^{p/2}$ مهما كان $0 \le x$. استنتج المتباينة

$$a^p + b^p \le (a^2+b^2)^{p/2},\ \ \forall a \ge 0,\ \ \forall b \ge 0.$$

ثمّ المتباينة (استخدم تحدب التابع $t \mapsto t^{p/2}$ من أجل $0 \leq t$ وَ $2 < p$ في الوقت المناسب)

$$|x-y|^p + |x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p), \ \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (p \geq 2).$$

41.2 الموضوع الـ 41

1.41.2 **التمرين الأول•** ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{I_n}(x)$ ، حيث $\mathbb{R} \supset I_n = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$. أرسم بيان φ على الاتحاد $]-\infty, 0] \cup [2^{-3}, \infty[$. هل $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ؟ أثبت أن $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1, \infty[$.

2.41.2 **التمرين الثاني•** ليكن f وَ g التابعين الحقيقين المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = e^{-a|x|}$ وَ $g(x) = e^{-b|x|}$ حيث a وَ b عددان موجبان تماما ومختلفان. عين جداء اللّف $f \star g$.

3.41.2 **التمرين الثالث•** ليكن التابع ψ_0 المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\psi_0(x) = (1 + \cos x)\chi_I(x)$ ، حيث χ_I هي الدالة المميزة للمجال $I = [-\pi, \pi]$.

1.3.41.2 • أرسم بيان ψ_0 وأحسب تكامله على $\mathbb{R}$. هل ψ_0 قابل للاشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ ؟

2.3.41.2 • لتكن المتتالية التابعية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $\psi_n(x) = \frac{n}{2\pi}\psi_0(nx)$. أحسب $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\, dx$ وعين النهاية البسيطة ψ_∞ لهذه المتتالية. هل تتقارب $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو ψ_∞ في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ؟

3.3.41.2 • ليكن u تابعا حقيقيا معرفا ومستمرا على $\mathbb{R}$ وسنده متراص، أي أن $u \in C_c(\mathbb{R})$. برهن على أن $\lim_{n\to\infty} (\psi_n \star u)(x) = u(x)$ مهما كان x من $\mathbb{R}$. هل تقارب المتتالية $\{\psi_n \star u\}_{n=1}^{\infty}$ نحو u منتظم؟ ماذا عن قابلية $\psi_n \star u$ للاشتقاق؟ أكتب عبارة المشتق إن وجد. هل هو مستمر؟

4.41.2 **التمرين الرابع•** في كل ما يلي نشير بـ a ، b ، c ، d ، ε إلى أعداد حقيقية مع $a<b$ وَ $c<d$ وَ $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(b-a)$. إنك تعرف أن التابع الحقيقي θ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\theta(t)=0$ من أجل $t\leq 0$ وَ $\theta(t)=e^{-1/t}$ من أجل $t>0$ قابل للاشتقاق ما لا نهاية من المرات على $\mathbb{R}$ ، أي أن $\theta\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. **المطلوب** منك استخدام التابع θ لإعطاء تابع:

١- θ_{cd} يحقق الخواص: $\theta_{cd}\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ ، $\operatorname{supp}\theta_{cd}=[c,d]$ ، $0\leq\theta_{cd}\leq 1$.

٢- η_{cd} يحقق الخواص:

$$\eta_{cd}\in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \eta_{cd}(x)=0,\ \ \forall x\leq c,\ \ 0\leq\eta_{cd}\leq 1,\ \eta_{cd}(x)=1,\ \forall x\geq d.$$

٣- $\varphi_{ab\varepsilon}$ يحقق الخواص:

$$\begin{aligned}\varphi_{ab\varepsilon}\in C^{\infty}(\mathbb{R}),\qquad &\operatorname{supp}\varphi_{ab\varepsilon}=[a+\frac{1}{2}\varepsilon,b-\frac{1}{2}\varepsilon],\\ &0\leq\varphi_{ab\varepsilon}\leq 1,\qquad \varphi_{ab\varepsilon}(x)=1,\ \ \forall x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon].\end{aligned}$$

٤- استفد مما سبق لتقديم تابع $\varrho:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ يحقق ما يلي:

$$\begin{aligned}\varrho\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2),\qquad &\operatorname{supp}\varrho=T(0.5,1.5),\\ &0\leq\varrho(x,y)\leq 1,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \varrho(x,y)=1,\\ &\forall(x,y)\in T(0.75,1.25).\end{aligned}$$

حيث $T(0.5,1.5)$ (مثلا) هو التّاج
$T(0.5,1.5)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid(0.5)^2\leq x^2+y^2\leq(1.5)^2\}$.

42.2 الموضوع الـ 42

في كل هذا الامتحان، يُشير p إلى عدد حقيقي يحقق $1\leq p<\infty$.

1.42.2 **التمرين الأول** • ا) أثبت تقارب التكاملين

$$\int_1^{\infty}[\int_0^1 (e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dy]\,dx \quad \text{وَ} \quad \int_0^1[\int_1^{\infty}(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dx]\,dy \, .$$

ب) وبدراسة الإشارة تأكد من أن

$$\int_0^1 \Big[\int_1^{\infty}(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dx\Big]\,dy \neq \int_1^{\infty}\Big[\int_0^1(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dy\Big]\,dx$$

جـ) هل التابع $f(x,y)=e^{-xy}-2e^{-2xy}$ كمول على الشريط $]1,+\infty[\times]0,1[$ ؟

2.42.2 **التمرين الثاني** • ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بوضع $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2[\chi_{I_n}-\chi_{J_n}](x)$ مع $I_n=[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}[$ وَ $\mathbb{R}\supset J_n=]-\frac{1}{2^{n-1}},-\frac{1}{2^n}]$.

(ا) أرسم بيان φ على الاتحاد $]-\infty,-2^{-2}]\cup[2^{-2},\infty[$.

(ب) هل $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})\ni\varphi$ ؟ (جـ) أثبت أن $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})\ni\varphi$ مهما كان $[1,\infty[\ni p$.

3.42.2 **التمرين الثالث** • من أجل كل $\mathbb{N}^{\star}\ni n$ ، نرمز بِـ ψ_n إلى التابع المعرف بأن $\psi_n(x)=0$ إذا كان $|x|>n+1$ ، وَ $\psi_n(x)=1$ إذا كان $|x|\le n$ ، وَ $\psi_n(x)=-|x|+n+1$ ، إذا كان $n\le|x|\le n+1$. (ا) أرسم بيان ψ_n ثمّ

(ب) برهن على أنه إذا كان u تابعا ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ فإن المتتالية $\{u\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ نحو u .

(جـ) وضّح بمثال أن هذا التقارب متعذر في $\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$.

4.42.2 **التمرين الرابع** • (ا) أثبت أنه إذا كان θ تابعا حقيقيا مستمرا على $\mathbb{R}$ وسنده متراص، أي $C_c(\mathbb{R})\ni\theta$ ، كان لدينا

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|\theta(x+t)-\theta(x)|^p\,dx=0.$$

(ب) باستخدام مبرهنة للكثافة ملائمة أثبت أن

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|v(x+t)-v(x)|^p\,dx=0, \qquad \forall\, v\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}).$$

43.2 الموضوع الـ 43

1.43.2 **التمرين الأول•** ليكن التابع $\varphi_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ ، $\mathbb{R} \ni x$ مع $\mathbb{N}^\star \ni n$

ا) أرسم بيان φ_n موضحا سلوكه قرب 0 وَ ∞ .

ب) برهن على أنه إذا كان $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \ni u$ ، $1 \leq p < \infty$ ، فإن المتتالية $\{u\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ نحو u .

جـ) وضّح بمثال أن هذا التقارب متعذر في $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

2.43.2 **التمرين الثاني•** هدفنا هو استخدام التكامل الثنائي في $\mathbb{R}^2$ لحساب التكامل البسيط $T = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. لهذا الغرض نأخذ $\mathbb{R}^2$ ونزوده بالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ وبقياس لوبيغ ومن أجل $0 < b$ نشير بـ χ_b إلى الدالة المميزة للشريط $S_b =]0, b[\times]0, +\infty[$. هل S_b قيوس؟ هل χ_b قيوسة؟ من أجل $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ أكتب، بدون تبرير، $\chi_b(x,y)$ بدلالة الدالتين المميزتين للمجالين المذكورين $\chi_{]0,b[}(x)$ وَ $\chi_{]0,+\infty[}(y)$.

ا) أثبت أن التابع $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto g_b(x,y) = \chi_b(x,y)e^{-xy}\, \sin x \in \mathbb{R}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

[**إرشاد:** يمكنك الاستفادة من مبرهنة تونيلي ومن وجود تكامل ريمان $\int_0^b \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ الذي ينبغي عليك تبريره.]

ب) أثبت أن $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g_b(x,y)\, dx\, dy = \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx$.

[**إرشاد:** لاحظ أن $\int_{\mathbb{R}^2} g_b(x,y)\, dx\, dy = \int_0^b (\int_0^\infty e^{-xy}\, dy) \sin x\, dx$.]

جـ) استخدم مبرهنة فوبيني ثمّ العلاقة

$$\int_0^b e^{-xy} \sin x\, dx = \frac{1}{1+y^2} - h_b(y) \quad \text{حيث} \quad h_b(y) \doteq \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,[y \sin b + \cos b] ،$$

التي يمكن استنباطها بالمكاملة بالتجزئة مرتين، لكننا نقبلها هنا بدون إثبات، لتحصل على

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty h_b(y)\, dy.$$

د) قدر $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^\infty h_b(y)\, dy$ واستنتج قيمة التكامل $T = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

3.43.2 **التمرين الثالث•** ليكن التابع f المعطى على $\mathbb{R}$ (مزود بعشيرته البوريلية وقياس لوبيغ) بأن $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}\chi_I(x)$ حيث I هو المجال $]0,1[$ وَ χ_I هي دالته المميزة. ا) بين أن f ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ثمّ أذكر لماذا يكون جداء اللّف $f \star f$ معرفا جيدا.
ب) أحسب $(f \star f)(0)$ ثمّ عين مجالات انعدام $f \star f$. جـ) برهن على أن

$$2 \leq \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)y}}, \quad \forall x \in]0,1[$$

ثمّ أدرس استمرار جداء اللّف $f \star f$ عند النقطة 0 .
[**إرشاد:** لإثبات المتباينة يمكنك تعيين ثمّ استخدام ذروة التابع المعرف على المجال $[0,x]$ ($0 < x$) بأن $\varphi(y) = (x-y)y$.]

الجزء ب

حلول المواضيع المختارة

الفصل ٣

حلول المواضيع المختارة

1.3 حل الموضوع الأول

1.1.3 التمرين الأول •

1.1.1.3 • تكامل ستيلجس $\int_0^1 x\, d\left\{\frac{-1}{(x+1)^2}\right\}$ موجود لأن التابع $x \mapsto x$ مستمر والتابع المكامِل $x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2}$ متزايد على $[0,1]$ ، وهذا وفقا للمبرهنة 1.2.7.1 .

2.1.1.3 • بما أن $\frac{n}{(n+i-2)(n+i-1)} \geq \frac{n}{(n+i-1)^2} \geq \frac{n}{(n+i)(n+i-1)}$ مع

$$\frac{n}{(n+i-1)(n+i-2)} = \frac{n}{n+i-2} - \frac{n}{n+i-1} \qquad \text{وَ} \qquad \frac{n}{(n+i)(n+i-1)} = \frac{n}{n+i-1} - \frac{n}{n+i}$$

فإن

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{n}{n+i-1} - \frac{n}{n+i}\right\} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i-1)^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{n}{n+i-2} - \frac{n}{n+i-1}\right\} \leq \frac{n}{n-1} - \frac{n}{2n-1}.$$

3.1.1.3 • لنضع $g(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$. بما أن:

$$\frac{i}{(n+i)^2} = \frac{-n}{(n+i)^2} + \frac{1}{n+i} \qquad \text{وَ} \qquad \frac{i}{(n+i-1)^2} = \frac{-n+1}{(n+i-1)^2} + \frac{1}{n+i-1}$$

يمكننا، مستخدمين التقسيم P_n للمجال $[0,1]$ والتقسيم Q_n الوسط نسبة إلى P_n ، المعطيين، أن نكتب:

$$\begin{aligned} S(x,g,P_n,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n}\tfrac{i}{n}[g(\tfrac{i}{n})-g(\tfrac{i-1}{n})] = \sum_{i=1}^{n}\tfrac{i}{n}[\tfrac{-n^2}{(n+i)^2}+\tfrac{n^2}{(n+i-1)^2}] \\ &= n\sum_{i=1}^{n}[\tfrac{-n+1}{(n+i-1)^2}+\tfrac{1}{n+i-1}+\tfrac{n}{(n+i)^2}-\tfrac{1}{n+i}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\tfrac{n^2}{(n+i)^2}-\tfrac{n^2}{(n+i-1)^2}]+\sum_{i=1}^{n}\tfrac{n}{(n+i-1)^2} \\ &\qquad\qquad +\sum_{i=1}^{n}[\tfrac{n}{n+i-1}-\tfrac{n}{n+i}] \\ &= -\tfrac{3}{4}+\sum_{i=1}^{n}\tfrac{n}{(n+i-1)^2}+\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه نجد، مستخدمين السؤال 2.1.1.2 :

$$\frac{1}{4} \le S(x,g,P_n,Q_n) \le -\frac{1}{4}+\frac{n}{n-1}-\frac{n}{2n-1}$$

ولذا

$$\int_0^1 x\,d\Big\{\frac{-1}{(x+1)^2}\Big\} = \lim_{n\to\infty} S(x,g,P_n,Q_n) = \frac{1}{4}.$$

4.1.1.3 • بما أن التابع المكامَل $x \mapsto x$ ريمان كمول (لأنه مستمر) والتابع المكامِل قابل للاشتقاق بالاستمرار على $[0,1]$ فإنه يمكن ردُّ تكامل ستيلجس إلى تكامل ريمان (أنظر المبرهنة 2.2.7.1) حيث يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\,d\Big\{\frac{-1}{(x+1)^2}\Big\} = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{(x+1)^3} &= \int_0^1 \frac{2\,dx}{(x+1)^2} - \int_0^1 \frac{2\,dx}{(x+1)^3} \\ &= -\frac{2}{x+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2.1.3 التمرين الثاني •

1.2.1.3 • بما أن φ متزايد وغير ثابت فإن $\varphi(b) > \varphi(a)$. ثمّ، بما أنه، من أجل كل تقسيم $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ للمجال $[a,b]$ ، لدينا: $\psi_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} \Psi = 0$ وَ $\Psi_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} \Psi = 1$ فإن:

$\overline{RS}(\Psi,\varphi,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\delta\varphi_i=\varphi(b)-\varphi(a)$ وَ $\underline{RS}(\Psi,\varphi,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\delta\varphi_i=0$.
وبالتالي $(R)\underline{\int}_a^b\Psi\,d\varphi=0$ وَ $(R)\overline{\int}_a^b\Psi\,d\varphi=\varphi(b)-\varphi(a)$. الأمر الذي يعني أن Ψ غير قابل للمكاملة حسب ريمان وستيلجس نسبة إلى φ على $[a,b]$.

2.2.1.3 • ليكن $\varepsilon>0$. يوجد، حسب الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى والأعلى، تقسيمان P_1 وَ P_2 للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\overline{RS}(f,g,P_2)<(R)\overline{\int}_a^b f\,dg+\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{وَ} \quad (R)\underline{\int}_a^b f\,dg-\tfrac{\varepsilon}{2}<\underline{RS}(f,g,P_1)$$

ليكن عندئذ التقسيم $P=P_1\cup P_2$ الأدق من P_1 وَ P_2. ينتج من خواص مجاميع ريمان وستيلجس السفلية والعلوية أن:

$$\overline{RS}(f,g,P)<(R)\overline{\int}_a^b f\,dg+\tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{وَ} \quad (R)\underline{\int}_a^b f\,dg-\tfrac{\varepsilon}{2}<\underline{RS}(f,g,P).$$

وبالتالي:

$$\overline{RS}(f,g,P)-\underline{RS}(f,g,P)\le(R)\overline{\int}_a^b f\,dg-(R)\underline{\int}_a^b f\,dg+\varepsilon.$$

عندئذ، إذا كان f ريمان وستيلجس كمولا نسبة إلى g ، يكون لدينا:

$$\overline{RS}(f,g,P)-\underline{RS}(f,g,P)\le\varepsilon. \tag{1.3}$$

إذا إفترضنا الآن أنه يمكن إرفاق كل $\varepsilon>0$ بتقسيم P للمجال $[a,b]$ يحقق (1.3) فإنه يكون لدينا:

$$(R)\overline{\int}_a^b f\,dg-(R)\underline{\int}_a^b f\,dg\le\overline{RS}(f,g,P)-\underline{RS}(f,g,P)\le\varepsilon$$

ومنه قابلية f للمكاملة حسب ريمان وستيلجس نسبة إلى g على $[a,b]$.

3.2.1.3 • ليكن $\varepsilon>0$. بما أن f مستمر على المجال المتراص $[a,b]$ فيوجد عدد $\rho>0$ بحيث يكون لدينا:

$$|f(s)-f(t)|\le\alpha\varepsilon,\ \forall s,t\in[a,b],\ |s-t|\le\rho, \tag{2.3}$$

حيث $\alpha>0$ عدد يتمّ اختياره لاحقا. ليكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ وسيطه $\delta P\le\rho$. من أجل كل $i\in\{1,\dots,n\}$ ، يوجد x_i' وَ x_i'' من $[x_{i-1},x_i]$ يحققان: $f(x_i')<m_i+\alpha\varepsilon$ وَ $M_i-\alpha\varepsilon<f(x_i'')$ ولذا، إعتمادا على (2.3) ، نرى أن:

$$M_i - m_i < f(x_i'') - f(x_i') + 2\alpha\varepsilon < |f(x_i'') - f(x_i')| + 2\alpha\varepsilon < 3\alpha\varepsilon$$

إذ إن $|x_i'' - x_i'| \leq \rho$ ، وبالتالي:

$$\overline{RS}(f,g,P) - \underline{RS}(f,g,P) \leq 3\alpha\varepsilon[g(b) - g(a)].$$

إذن، باختيار $\alpha = \frac{1}{3[g(b)-g(a)+1]}$ ، يكون الفرق السابق أقل من ε ولذا يكون، وفقا للسؤال 2.2.1.2 ، التابع f ريمان وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$.

4.2.1.3 • إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ كانت مجموعة مجاميع ستيلجس للتابع f نسبة إلى g لكوشي. إذن، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، يوجد عدد $\rho > 0$ بحيث:

$$\begin{aligned}|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P^\star,Q^\star)| \leq \alpha\varepsilon, \qquad & \forall P,P^\star \in \mathcal{P}_{a,b},\ \delta P, \delta P^\star \leq \rho,\\ & \forall Q \in \mathcal{W}(P),\ \forall Q^\star \in \mathcal{W}(P^\star),\end{aligned}$$

حيث يشير $\mathcal{P}_{a,b}$ إلى مجموعة كل تقسيمات $[a,b]$ وَ $\mathcal{W}(P)$ ـ مثلا ـ إلى مجموعة كل التقسيمات الوسطى نسبة إلى P ، ومثل أعلاه، $\alpha > 0$ عدد يتمّ اختياره لاحقا.

ليكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ وسيطه $\delta P \leq \rho$. من أجل كل $i \in \{1,\ldots,n\}$ ، يوجد ξ_i وَ $\xi_i^\star$ من $[x_{i-1},x_i]$ يحققان:

$$f(\xi_i) < m_i + \alpha\varepsilon \qquad \text{وَ} \qquad M_i - \alpha\varepsilon < f(\xi_i^\star).$$

عندئذ، بأخذ $P^\star = P$ وَ $Q = \{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ وَ $Q^\star = \{\xi_1^\star,\ldots,\xi_n^\star\}$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}\overline{RS}(f,g,P) - \underline{RS}(f,g,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\delta g_i\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i^\star) - f(\xi_i) + 2\alpha\varepsilon]\delta g_i\\ &= S(f,g,P,Q) - S(f,g,P,Q^\star)\\ &\qquad + 2\alpha\varepsilon[g(b) - g(a)]\\ &\leq \alpha\varepsilon + 2\alpha\varepsilon[g(b) - g(a)]\end{aligned}$$

إذ إن Q وَ $Q^\star$ تقسيمان وسطان نسبة إلى P ، وبالتالي، باختيار $\alpha = 1/(3[2(g(b) - g(a)) + 1])$ ، يكون الفرق بين مجموعي ريمان وستيلجس العلوي والسفلي السابقين أقل من ε ولذا يكون، وفقا للسؤال 2.2.1.2 ، التابع f ريمان وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$.

2.3 حل الموضوع الـ 2

1.2.3 التمرين الأول• 1.1 بما أن g متزايد على $[0,1]$ فهو محدود التغيّر على هذا المجال ولدينا: $V_0^1(g) = |g(1) - g(0)| = g(1) = 1$. وبما أن g متناقص على $[1,2]$ فهو محدود التغيّر على هذا المجال ولدينا:

$$V_1^2(g) = |g(2) - g(1)| = g(1) = 1.$$

وبالتالي g محدود التغيّر على المجال $[0,2]$ ولدينا:

$$V_0^2(g) = V_0^1(g) + V_1^2(g) = 2.$$

يمكن طبعا الوصول إلى النتيجة نفسها بإستخدام تعريف التغيّر الكلي للتابع g على المجال $[0,2]$.

2.1 تكامل ستيلجس $\int_0^2 x\,dg$ موجود لأن التابع $x \mapsto x$ مستمر والتابع المكامِل g محدود التغيّر على $[0,2]$ ، وهذا وفقا لنتيجة قدمت في الدرس.

3.1 لحساب التكامل $\int_0^2 x\,dg$ نستخدم، كما ورد في نص السؤال، التقسيمات: $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\} \cup \{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \ldots, 2\}$ وَ $Q_n = P_n \setminus \{0\}$.
لدينا:

$$\begin{aligned}
S(x,g,P_n,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{i}{n}[(\tfrac{i}{n})^3 - (\tfrac{i-1}{n})^3] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (1+\tfrac{i}{n})[(1-\tfrac{i}{n})^3 - (1-\tfrac{i-1}{n})^3] \\
&= \tfrac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (3i^3 - 3i^2 + i) \\
&\quad + \tfrac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (n+i)[(n-i)^3 - (n-i+1)^3].
\end{aligned}$$

وبما أن

$$\begin{aligned}
(n+i)[(n-i)^3 - (n-i+1)^3] &= -3i^3 + (3n+2)i^2 + (3n^2 - n - 1)i \\
&\quad -(3n^2 + 3n + 1)n
\end{aligned}$$

فإنه لدينا:

$$S(x,g,P_n,Q_n)=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}[(3n-1)i^2+(3n^2-n)i-(3n^2+3n+1)n]$$

ولذا

$$\begin{aligned}S(x,g,P_n,Q_n) &= \tfrac{1}{n^4}\Big[(3n-1)\tfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)+(3n^2-n)\tfrac{n}{2}(n+1)\\ &\qquad -(3n^2+3n+1)n^2]\cdot\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^2 x\,dg=\lim_{n\to\infty}S(x,g,P_n,Q_n)=\frac{3}{6}\times 2+\frac{3}{2}-3=-\frac{1}{2}\cdot$$

لاحظ أننا لسنا بحاجة إلى الإرشاد الوارد في النص إذ إن الحدود التي تحتوي i^3 تختصر. يمكن التأكد من النتيجة السابقة بكتابة:

$$\textstyle\int_0^2 x\,dg=\int_0^1 x\,dx^3+\int_1^2 x\,d(2-x)^3$$

ثمّ، بما أن التابع المكامَل $x\mapsto x$ ريمان كمول (لأنه مستمر) والتابع المكامِل قابل للإشتقاق بالإستمرار على $[0,1]$ و $[1,2]$ على التوالي) فإنه يمكن ردُّ تكامل ستيلجس على $[0,1]$ و $[1,2]$ على التوالي) إلى تكامل ريمان حيث يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^2 x\,dg &= \textstyle\int_0^1 x\,dx^3+\int_1^2 x\,d(2-x)^3\\ &= \textstyle 3\int_0^1 x^3\,dx-3\int_1^2 x(2-x)^2\,dx\\ &= \textstyle\frac{3}{4}-3\int_1^2(4x-4x^2+x^3)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\end{aligned}$$

2.2.3 **حل التمرين الثاني•** 1.2 ليكن $P_n=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[0,1]$. لدينا $m_i(\psi)=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}\psi=0$ وَ $M_i(\psi)=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}\psi=x_i$ وهذا سواء أكان x_i ناطقا أم أصم إذ إن $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$. وعندئذ $\underline{RS}(\psi,\varphi,P_n)=0$ ولذا $(R)\underline{\int}_0^1\psi\,d\varphi=0$. لكن

$$\overline{RS}(\psi,\varphi,P_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i[x_i^2-x_{i-1}^2]=\sum_{i=1}^{n}[x_i^3-x_ix_{i-1}^2]$$

وبما أن

$$\begin{aligned}x_ix_{i-1}^2=x_ix_{i-1}x_{i-1} &\le \tfrac{1}{2}(x_i^2+x_{i-1}^2)x_{i-1}\\ &\le \tfrac{1}{2}x_i^2x_{i-1}+\tfrac{1}{2}x_{i-1}^3\le\tfrac{1}{2}x_i^3+\tfrac{1}{2}x_{i-1}^3\end{aligned}$$

فإن $\frac{1}{2} = [x_i^3 - x_{i-1}^3] \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \geq \overline{RS}(\psi, \varphi, P_n)$. ومنه $\frac{1}{2} \geq (R)\overline{\int}_0^1 \psi\, d\varphi$. الأمر الذي يعني أن ψ غير قابل للمكاملة حسب ريمان وستيلجس نسبة إلى φ على $[0,1]$.

3.3 حل الموضوع الـ 3

1.3.3 التمرين الأول • ١ ا) ليكن m وَ n عددين طبيعيين مع $m > n$. إذن $m - 1 \geq n$ ، وبما أن المتتالية المعطاة متزايدة فإن $A_{m-1} \supset A_n$ وبالتالي $\emptyset = {}^cA_{m-1} \cap A_n$ ولذا

$$B_m \cap B_n = A_m \cap {}^cA_{m-1} \cap A_n = \emptyset$$

أي أن المتتالية $\{B_n\}$ غير متقاطعة مثنى مثنى.

١ . ب) بما أن $A_n \supset A_i \supset B_i$ مهما كان $1 \leq i \leq n$ فإن $A_n \supset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

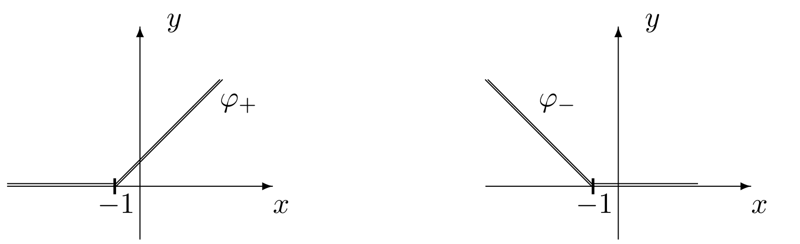
ليكن $A_n \ni x$ ولنرمز بِـ i_0 إلى أصغر عدد طبيعي بحيث $A_{i_0} \ni x$ وَ $1 \leq i_0 \leq n$. عندئذ $A_{i_0-1} \not\ni x$ ولذا $B_{i_0} = A_{i_0} \cap {}^cA_{i_0-1} \ni x$ وبالتالي $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \ni x$.

١ جـ) واضح، من تعريف المتتالية $\{B_n\}_{n \geq 1}$ ، أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$.

ليكن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \ni x$. يوجد n بحيث $A_n \ni x$ وبإعتبار j أصغر عدد طبيعي ≥ 1 بحيث $A_j \ni x$ نرى أن $B_j = A_j \cap {}^cA_{j-1} \ni x$ وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n \ni x$.

2.3.3 حل التمرين الثاني • من تعريف f_+ وَ f_- نرى أن $f = f_+ - f_-$.

٢.١ بيانا φ_+ وَ φ_- هما، في معلمين مختلفين:



٢٠٢ بما أن المجالات من الشكل $]\alpha,\infty[$ ($\mathbb{R} \ni \alpha$) تولّد عشيرة بوريل $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ فيكفي أن نثبت أن $\varphi^{-1}([\alpha,\infty[)$ ، $\varphi_+^{-1}([\alpha,\infty[)$ ، $\varphi_-^{-1}([\alpha,\infty[)$ أجزاء قيوسة (بوريلية) من $\mathbb{R}$.

ليكن إذن $\mathbb{R} \ni \alpha$. بما أن $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni [\alpha-1,+\infty[= \varphi^{-1}([\alpha,+\infty[)$ فإن φ قيوس.
إذا كان $\alpha \geq 0$ كان $\mathbb{R} = \varphi_+^{-1}([\alpha,+\infty[) = \varphi_-^{-1}([\alpha,+\infty[)$.
وإذا كان $0 < \alpha$ كان $\varphi_+^{-1}([\alpha,+\infty[) = [\alpha-1,+\infty[$ وَ $\varphi_-^{-1}([\alpha,+\infty[) =]-\infty,-1-\alpha[$ وكل هذه المجالات بوريلية ولذا فالتوابع φ ، φ_+ ، φ_- قيوسة.

٢٠٣ إذا كان f قيوسا كان $|f|$ قيوسا وكذلك $f \pm |f|$ وبالتالي يكون f_+ وَ f_- قيوسين.
بما أن $f = f_+ - f_-$ فينتج طبعا من كون f_+ وَ f_- قيوسين أن f قيوس.

3.3.3 حل التمرين الثالث •

٣٠١ واضح من التعريف أن $0 \leq g_1$. ثمّ، إذا كان $x \in \{f \leq a\}$ كان

$$0 = g_1(x) \leq f(x) \quad \text{وَ} \quad |f(x) - g_1(x)| = f(x) \leq a .$$

أمّا إذا كان $x \in \{f > a\}$ فيكون

$$a = g_1(x) < f(x) \quad \text{وَ} \quad |f(x) - g_1(x)| = f(x) - a \leq 2a - a = a .$$

وإذا لاحظنا أن $X = \{f > a\} \cup \{f \leq a\}$ فإنه لدينا على هذه المجموعة:

$$0 \leq g_1 \leq f \quad \text{وَ} \quad ||f - g_1||_\infty \leq a .$$

٣٠٢ d لنضع $h_1 = f - g_1$ وَ $a_1 = \frac{1}{2}||h_1||_\infty$ وَ $g_2 = a_1\chi_{\{h_1>a_1\}}$. ينتج مما سبق

أن: $0 \le g_2 \le h_1$ وَ $||h_1 - g_2||_\infty \le a_1 \le \frac{1}{2^2}||f||_\infty$. إذن $0 \le g_1 + g_2 \le f$ وَ $|f - g_1 - g_2|_\infty \le \frac{1}{2^2}||f||_\infty$.

لنفرض أننا حصلنا بالأسلوب السابق على التوابع g_1 ، g_2 ، ... ، g_n بحيث:

$0 \le g_1 + \cdots g_n \le f$ وَ $||f_1 - (g_1 + \cdots + g_n)||_\infty \le \frac{1}{2^n}||f||_\infty$ ،

فنحصل عندئذ على g_{n+1} بوضع:

$h_n = f - (g_1 + \cdots g_n)$ وَ $a_n = \frac{1}{2}|h_n|_\infty$ وَ $g_{n+1} = a_n \chi_{\{h_n > a_n\}}$.

واضح عندها أن $0 \le g_{n+1} \le h_n$ وَ $||h_n - g_{n+1}||_\infty \le a_n$. ومنه:

$$0 \le \sum_{i=1}^{n+1} g_i \le f \quad \text{وَ} \quad \left|\left|f - \sum_{i=1}^{n+1} g_i\right|\right|_\infty \le a_n \le \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|f|_\infty .$$

٣.٣ بوضع $f_n = \sum_{i=1}^{n+1} g_i$ يتبين لنا أن:

$0 \le f_n \le f$ وَ $||f - f_n||_\infty \le \frac{1}{2^{n+1}}|f|_\infty$ مهما كان $1 \le n$.

واضح أن المتتالية $\{f_n\}$ موجبة ومتزايدة وتتقارب بإنتظام نحو f.

ثمّ، بما أن f قيوس فرضا فإن الجزء $\{f > a\}$ قيوس ولذا فدالته المميزة $\chi_{\{f>a\}}$ قيوسة وكذلك التابع الدرجي $f_1 = g_1 = a\chi_{\{f>a\}}$ ويكون كذلك التابع $h_1 = f - g_1$ قيوسا ولذا يكون g_2 درجيا وقيوسا. إذن $g_1 + g_2$ تابع درجي وقيوس كمجموع تابعين درجيين وقيوسين. وبصفة عامة يكون g_n ، من أجل كل $1 \le n$ ، درجيا وقيوسا وبالتالي تكون $\{f_n\}$ متتالية توابع درجية وقيوسة.

4.3.3 **حل التمرين الرابع•** ليكن $\varepsilon > 0$. من تعريف قياس لوبيغ الخارجي لِـ E ، نرى أنها توجد تغطية عدودة $\{R_n\}$ لِـ E بواسطة بلاطات مفتوحة R_n بحيث $\sum_n |R_n| < \mu^\star(E) + \varepsilon$ ، حيث يشير $|R_n|$ إلى حجم البلاطة المعتبرة. لنضع $\mathcal{O} = \bigcup_n R_n$. واضح أن $\mathcal{O}$ مفتوح يحتوي على E مع:

$$\mu^\star(\mathcal{O}) \le \sum_n \mu^\star(R_n) = \sum_n |R_n|.$$

وبما أن E لوبيغ قيوس فإن

$$\mu^\star(\mathcal{O}) = \mu^\star(\mathcal{O} \cap E) + \mu^\star(\mathcal{O} \cap {}^cE) \le \sum_n |R_n| < \mu^\star(E) + \varepsilon.$$

ومنه $\mu^\star(\mathcal{O} \cap^c E) = \mu^\star(\mathcal{O} \setminus E) \le \varepsilon$.

4.3 حل الموضوع الـ 4

1.4.3 حل التمرين الأول•

١. واضح أن $\{v_n\}$ متتالية عناصرها موجبة ولدينا ، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n'(x) = 2n^2 e^{-n^2x^2}[1-2n^2x^2], \quad x \geq 0.$$

إذن يتمتع v_n بذروة عند النقطة $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ قيمتها $v_n(x_n) = \sqrt{2}ne^{-1/2}$. هذا يعني أن المتتالية $\{v_n\}$ غير محدودة.

ا) لدينا $v_n(0) = 0$ وبما أن $e^{n^2x^2} \geq \frac{1}{2}n^4x^4$ ، مهما كان $0 \leq x$ ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = 0$ على $\mathbb{R}_+$. هذا يعني أن $\{v_n\}$ متقاربة ببساطة نحو $v \equiv 0$ على $\mathbb{R}_+$ وهذا التقارب غير منتظم إذ إن:

$$\max_{x\geq 0} v_n(x) = \sqrt{2}ne^{-1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

ب) لا يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي إذ إن هذه المبرهنة تشترط أن تكون المتتاليات موجبة ومتزايدة وَ $\{v_n\}$ ليست متزايدة لأنه لدينا:

$$\frac{v_{n+1}(1)}{v_n(1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-(2n+1)} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{n+1}{2n^2} \leq 1, \ \forall n \geq 1$$

وَ

$$\begin{aligned} v_{n+1}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\right) = \sqrt{2}(n+1)e^{-1/2} \quad &> \quad \sqrt{2}ne^{-1/2} \\ &= \quad \max_{x\geq 0} v_n(x) \geq v_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)}\right), \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

أمّا مبرهنة التقارب بالهيمنة فيحتاج تطبيقها إلى تابع يهيمن على المتتالية. إن إثبات وجود تابع مهيمِن أمر صعب على العموم. بما أننا نجهل ما إذا كان مثل هذا التابع موجود فلا نستطيع تطبيق هذه المبرهنة.

أمّا توطئة فاتو فيمكن تطبيقها إذ إن شروطها «ضعيفة» وهي تطبق على كل المتتاليات الموجبة إلا أنها لا تمكِّن من حساب تكامل النهاية السفلى للمتتالية: تكامل هذه النهاية أقل أو يساوي النهاية السفلى للتكاملات. لدينا في الحالة الراهنة:

$$\int_0^\infty v_n(x)\,dx = 1 \quad \text{وَ} \quad \int_0^\infty v\,dx = 0$$

نلاحظ هنا أن:

$$0 = \int_0^\infty \liminf_n v_n \, dx < \liminf_n \int_0^\infty v_n(x)\, dx = 1.$$

2.4.3 **حل التمرين الثاني•** من الواضح أن T_n مستمر وأن $T_n(t) = t$ من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ مع $n \geq |t|$ وبما أن f_n يكتب على الشكل $f_n = \chi_{[-n,n]} T_n \circ f$ فإن f_n قيوس. ثمّ إنه لدينا:

$|f_n(x)| \leq |f(x)|$ وكذلك $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ، حكت على $\mathbb{R}$.

لكي نتأكد من أن $\{f_n\}$ تتقارب نحو f حيثما كان تقريبا في $\mathbb{R}$ نلاحظ أن كون $f \in L^1(\mathbb{R})$ يقتضي وجود جزء مهمل $\mathcal{N}$ من $\mathbb{R}$ بحيث يكون f معرفا ومتهيًا على $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$. واضح عندها أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث يكون $x \in [-n_0, n_0]$ وَ $n_0 > f(x)$ وبالتالي من أجل كل $n \geq n_0$ يكن لدينا $f_n(x) = f(x)$ ومنه $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ حكت في $\mathbb{R}$. ينتج عندئذ من مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن:

$f_n \to f$ في $L^1(\mathbb{R})$ عندما يؤول n نحو ∞ .

عندئذ من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث: $\int_{\mathbb{R}} |f - f_{n_0}|\, d\mu \leq \varepsilon$. وبما أن f_{n_0} معدوم خارج $[-n_0, n_0]$ فبأخذ $g = f_{n_0}$ وَ $[a,b] = [-n_0, n_0]$ نحصل على المطلوب.

3.4.3 **حل التمرين الثالث•** ليكن التابع $F(\cdot,\cdot)$ المعرف على $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ بأن $F(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+x^2}$. واضح أنه، من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+$ ، يكون التابع $F(\cdot,t)$ قيوسا نسبة إلى x على $\mathbb{R}_+$ وبما أن $0 \leq F(x,t) \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ، مهما كان $0 \leq x$ فإن $F(\cdot,t)$ كمول نسبة إلى x . إذن $t \mapsto I(t)$ معرف جيدا على $\mathbb{R}_+$.

ثمّ، من أجل $\tau > 0$ ، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| = \left|\tfrac{-xe^{-tx}}{1+x^2}\right| &\leq \tfrac{1}{2}\tfrac{1+x^2}{1+x^2} e^{-tx} \\ &\leq \tfrac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}x} = g(x) \in L^1(\mathbb{R}_+),\ \forall t \geq \tfrac{\tau}{2}. \end{aligned}$$

ولذا، باستخدام مبرهنة التزايدات المتهية نسبة إلى المتغير t نرى أن:

$$\left|\frac{F(x,t) - F(x,\tau)}{t-\tau}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial t}(x, \tau + \theta(t-\tau))\right| \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

يمكن عندئذ تطبيق المبرهنة المتعلقة بالإشتقاق تحت إشارة تكامل لوبيغ: I قابل للإشتقاق عند τ ولدينا:

$$I'(\tau) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)\, dx = \int_0^\infty \frac{-xe^{-\tau x}}{1+x^2}\, dx.$$

وبما أن:
$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t)\right| = \left|\frac{x^2e^{-tx}}{1+x^2}\right| \leq e^{-\frac{\tau}{2}x} = g(x) \in L^1(\mathbb{R}_+),\ \ \forall t \geq \frac{\tau}{2},$$
فإن نفس المبرهنة تضمن وجود المشتق الثاني للتابع I ولدينا:
$$I''(\tau) = \int_0^\infty \frac{x^2e^{-\tau x}}{1+x^2}\,dx.$$

إن التابع $t \mapsto I''(t)$ مستمر في $\mathbb{R}_+^\star$ لأنه من أجل كل $\tau > 0$ وكل متتالية $\{\tau_n\}$ متقاربة نحو τ فبوضع $h_n(x) = \frac{x^2}{1+x^2}e^{-\tau_n x}$ نرى أن:
$$h_n(x) \to h(x) = \tfrac{x^2}{1+x^2}e^{-\tau x},\ \ \forall x \geq 0$$
وبما أن $|h_n(x)| \leq e^{-\frac{\tau}{2}x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ من أجل n كبير فينتج من مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة أن:
$$I''(\tau_n) = \int_0^\infty h_n(x)\,dx \to \int_0^\infty h(x)\,dx = I''(\tau).$$

هذا يبين إستمرار I'' في $\mathbb{R}_+^\star$.

من أجل $t > 0$ يمكننا أن نكتب:
$$I''(t) + I(t) = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^2}e^{-tx}\,dx = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx = -\left.\frac{1}{t}e^{-tx}\right|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{t}.$$

4.4.3 حل التمرين الرابع•

٤٠١ إعتمادا على النشر المحدود من الرتبة واحد للتابع الأسي عند النقطة 0 لدينا:
$$\frac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}} = \frac{a\varepsilon + o(\varepsilon)(\varepsilon \to 0)}{b\varepsilon + o(\varepsilon)(\varepsilon \to 0)}$$

ومنه
$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln \frac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}} = \ln\, \frac{a}{b}.$$

٤٠٢ لتعيين u_n^+ ندرس التابع u_n بهدف معرفة إشارته. لدينا $u_n(0) = a-b < 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ وَ:

$\psi(x) \doteq \frac{b^2}{a^2}e^{-n(b-a)x} - 1$ حيث $u_n'(x) = na^2e^{-nax}\psi(x)$

بما أنه واضح أن ψ متناقص وينعدم عند النقطة $2x_n = \frac{2}{n(b-a)} \ln \frac{b}{a}$ فإن u_n متزايد على المجال $[0, 2x_n]$ ومتناقص بعد النقطة $2x_n$. بما أن u_n ينعدم عند x_n فإنه لدينا: $u_n^+(x) = 0$ من أجل $x \in [0, x_n]$ وَ $u_n^+(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ من أجل $x \geq x_n$. إذن:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u_n^+(x)\,dx &= \int_{x_n}^\infty [ae^{-nax} - be^{-nbx}]\,dx\\ &= \frac{1}{n}(e^{-nbx} - e^{-nax})\Big|_{x_n}^{+\infty} = C\frac{1}{n}\end{aligned}$$

حيث $0 < C \doteq [(\frac{a}{b})^{\frac{a}{b-a}} - (\frac{a}{b})^{\frac{b}{b-a}}]$. ينتج من هذا أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty |u_n(x)|\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty u_n^+(x)\,dx = C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

٤.٣ عند $x = 0$ واضح أن $S(0) = -\infty$. ومن أجل $x > 0$ ، نحسب، إعتمادا على الصيغة التي تعطي مجموع حدود متوالية هندسية، المجاميع الجزئية :

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}}(1-e^{-kax}) - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}}(1-e^{-kbx})$$

ومنه $S(x) = \dfrac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \dfrac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}}$.

٤.٤ ليكن $\varepsilon > 0$ عددا حقيقيا مآله الصفر وَ α عددا حقيقيا مآله $+\infty$. لدينا:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\alpha S(x)\,dx &= \Big[\ln(1-e^{-ax}) - \ln(1-e^{-bx})\Big]_{x=\varepsilon}^{x=\alpha}\\ &= \ln\frac{1-e^{-a\alpha}}{1-e^{-b\alpha}} - \ln\frac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}}.\end{aligned}$$

ومنه - وفقا للسؤال ٤.١ - بجعل ε يؤول إلى الصفر وَ α إلى $+\infty$:

$$\int_0^\infty S(x)\,dx = -\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a > 0.$$

٤.٥ لدينا:

$$\int_0^\infty u_n(x)\,dx = \frac{1}{n}(e^{-nbx} - e^{-nax})\Big|_0^{+\infty} = 0.$$

وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty u_n(x)\,dx = 0$ في حين أن $\int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \ln b - \ln a$. إذن

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}u_n(x)\,dx\neq\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx=\ln\,b-\ln\,a.$$

هذه النتيجة لا تناقض المبرهنة المتعلقة بعكس رمزي التكامل $\int$ والمجموع $\sum$ إذ إن هذه المبرهنة تطبق على السلاسل ذات حدود موجبة وعلى السلاسل التي تكون سلسلة تكاملات القيم المطلقة لحدودها متقاربة.

5.3 حل الموضوع الـ 5

1.5.3 **حل التمرين الأول•** ١٠١ لدينا $u_n(0)=u_n(1)=0$ ومن أجل كل $0<x<1$ ، $u_n=\frac{1}{1+nx(1-x)}$ وبالتالي تؤول المتتالية $\{u_n\}$ على $I=[0,1]$ نحو التابع u المعرف بأن $u(0)=u(1)=1$ وَ $u(x)=0$ من أجل $0<x<1$. إن هذا التقارب غير منتظم إذ إن:

$$\sup_I|u_n-u|=\sup_I u_n=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star.$$

١٠٢ إن بيان u_n متناظر نسبة إلى محور القطعة I إذ إنه، من أجل كل $x\in[0,\frac{1}{2}[$ ، لدينا $u_n(x)=u_n(1-x)$ وبما أن:

$$[1+nx(1-x)]^2u_n'(x)=-n(1-2x),\ \forall x\in I$$

فإن u_n متناقص على $[0,\frac{1}{2}]$ ومتزايد على $[\frac{1}{2},1]$. عندئذ، من أجل كل $\alpha\in]0,\frac{1}{2}[$ ، لدينا:

$$\max_{I_\alpha}|u_n-u|=u_n(\alpha)=u_n(1-\alpha)=\frac{1}{1+n\alpha(1-\alpha)},\quad I_\alpha=[\alpha,1-\alpha].$$

ينتج من هذا أن المتتالية $\{u_n\}$ متقاربة بإنتظام على I_α نحو الصفر وهو إقتصار u على I_α. عندئذ، من أجل $\eta>0$ ، يكون تقارب $\{u_n\}$ نحو u منتظما على $I\setminus J$ حيث $J=[0,\frac{1}{2}\eta]\cup[1-\frac{1}{2}\eta,1]$ مع $|J|=\eta$.

2.5.3 **حل التمرين الثاني•** ليكن $\varepsilon > 0$ وَ $\varrho > 0$ عددين مثبتين ولنضع، من أجل $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$E_k = \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} .$$

٢٠١ بما أن f نهاية بسيطة لمتتالية التوابع القيوسة $\{f_n\}$ فإن هذا التابع قيوس. وينتج من هذا أن التوابع $x \mapsto |f_k(x) - f(x)|$ قيوسة من $(X, \mathcal{A})$ في $\mathbb{R}$ ، مزود بعشيرته البوريلية ، ولذا يكون الجزء E_k قيوسا وبما أن $\mu(E_k) < \mu(X) < \infty$ فإن قياس E_k منته.

٢٠٢ من الواضح أن $A_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$ قيوس ، كإتحاد عدود لأجزاء قيوسة، وأن المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متناقصة.

٢٠٣ لو كان التقاطع $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ غير خال لوجد عنصر x منه بحيث $x \in A_n$ مهما كان $n \geq 1$ وبالتالي، مهما كان $k \in \mathbb{N}^\star$ ، يوجد $n \geq k$ بحيث $x \in E_n$. إذن:

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \exists n \geq k,\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

الأمر الذي يعني أن المتتالية العددية $\{f_n(x)\}$ لا تتقارب نحو $f(x)$ ، خلافا للفرض.
بما أن $\mu(A_1) < \mu(X) < \infty$ فينتج من تناقص $\{A_n\}$ ومن استمرار μ من الأعلى عند $\emptyset$ أن: $0 = \mu(\emptyset) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n).$

٢٠٤ بما أن $\mu(A_n)$ يؤول نحو الصفر عندما $n \to \infty$ فمن أجل $\varrho > 0$ ، المثبت آنفا ، يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $\mu(A_n) \leq \varrho$ مهما كان $n \geq n_0$. عندئذ، بوضع $A = A_{n_0}$ ، نرى أن $\mu(A) \leq \varrho$ وإذا كان $x \in X \setminus A$ كان $x \notin A$ ولذا $x \notin E_n$ مهما كان $n \geq n_0$. إذن $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0$ أي أن A يحقق (1).

3.5.3 **حل التمرين الثالث•** ٣٠١ ليكن $\eta > 0$ وَ $m \in \mathbb{N}^\star$. بما أن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة ببساطة على $X_0 = X \setminus \mathcal{S}$ نحو f فيمكننا تطبيق السؤال الثاني (مبرهنة إيغوروف الضعيفة) بأخذ $\varrho = \frac{\eta}{2^m}$ وَ $\varepsilon = \frac{1}{m}$ لنحصل على جزء قيوس $A_m \subset X_0$ وعدد طبيعي n_m بحيث:

$$\frac{\eta}{2^m} \ge \mu(A_m) \quad \text{وَ} \quad \sup_{X_0\setminus A_m} |f_n - f| \le \frac{1}{m},\ \forall n \ge n_m. \tag{2}$$

٣.٢ بأخذ، على التوالي، $m = 1$ ، 2 ، ... نحصل على متتالية أجزاء تحقق (2) ولذا، بوضع $A' = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ ، نرى أن:

$$\mu(A') \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) \le \eta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \eta.$$

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد $m \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $\frac{1}{m} < \varepsilon$. وليكن n_m العدد الذي أثبت وجوده في السؤال ٣.١ والذي يحقق (2). لدينا عندئذ:

$$\sup_{X\setminus A} |f_n - f| \le \sup_{X\setminus A_m} |f_n - f| < \frac{1}{m},\ \forall n \ge n_m.$$

إذن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $X \setminus A$.

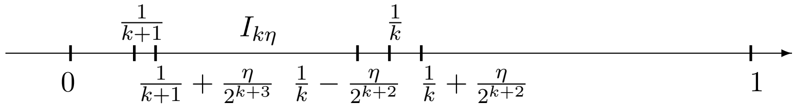
٣.٣ ليكن $Z = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^\star \right\}$ وهي ـ عدا 0 ـ نقط إنعدام $\sin\frac{\pi}{x}$. لدينا $v_n(x) = 1$ من أجل كل $x \in Z$ وبما أن $\sin\frac{\pi}{x} \neq 0$ من أجل كل $[0,1] \setminus Z$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = 0$ ، الأمر الذي يعني أن المتتالية $\{v_n\}$ تتقارب نحو التابع v المعرف بأن:

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \in Z \\ 0 & \text{إذا كان } x \in [0,1] \setminus Z . \end{cases}$$

ليكن $\eta \in]0,1[$. يمكنك أن تتأكد، بالتدريج، من أن: $3k(k+1) \le 2^{k+3}$ مهما كان $k \in \mathbb{N}$. ولذا يكون لدينا

$$\tfrac{1}{k+1} < \tfrac{1}{k+1} + \tfrac{\eta}{2^{k+3}} < \tfrac{1}{k} - \tfrac{\eta}{2^{k+2}} < \tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{k} + \tfrac{\eta}{2^{k+2}}\ ,\forall k \in \mathbb{N}^\star.$$

ولذا تكون المجالات $\left[\frac{1}{k} - \frac{\eta}{2^{k+2}}\,, \frac{1}{k} + \frac{\eta}{2^{k+2}}\right]$ ، مع $k \ge 1$ ، غير متقاطعة وكذا المجالات $I_{k\eta} = \left[\frac{1}{k+1} + \frac{\eta}{2^{k+3}}\,, \frac{1}{k} - \frac{\eta}{2^{k+2}}\right]$ ، مع $k \ge 1$.



ليكن $k \in \mathbb{N}^\star$ عددا مثبتا. إذا كان $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ كان $\pi k < \frac{\pi}{x} < \pi(k+1)$. وبما أن التابع $\sin$ لا ينعدم إلا عند مضاعفات π فإن التابع $\sin\frac{\pi}{x}$ لا ينعدم في المجال $]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[$ وبالتالي لا ينعدم على $I_{k\eta}$. لنضع $\phi(x) = x|\sin\frac{\pi}{x}|$ ولنقدر $\sup\limits_{I_{k\eta}} v_n$. لدينا:

$$\sup_{I_{k\eta}} v_n \leq \frac{1}{\inf_{I_{k\eta}}(1+n\phi)} = \frac{1}{1+n\inf_{I_{k\eta}}\phi} = \frac{1}{1+n\phi(x_{k\eta})}$$

حيث $x_{k\eta}$ نقطة من $I_{k\eta}$ لا تتعلق بـ n وتحقق $0 < \phi(x_{k\eta})$. هذا يستلزم التقارب المنتظم للمتتالية $\{v_n\}$ نحو التابع $v = 0$ على $I_{k\eta}$.

ليكن $k_0 = [\frac{2}{\eta}]$ ، الجزء الصحيح للعدد $\frac{2}{\eta}$. يكون عندئذ $\frac{1}{k_0+1} < \frac{\eta}{2} \leq \frac{1}{k_0}$ وبالتالي لا تتقاطع المجالات $I_{j\eta}$ ، $j = 1$ ، ... ، $k_0 - 1$ مع المجال $[0, \frac{\eta}{2}]$. بما أن $\{v_n\}$ تتقارب بإنتظام على المجالات السابقة وكذلك على $I_{k_0\eta}$ نحو التابع v فإنها تتقارب بإنتظام نحو التابع نفسه على $\bigcup\limits_{j=1}^{k_0} I_{j\eta}$. إن التقارب يكون غير منتظم على الأكثر على متتممة هذا الاتحاد نسبة إلى $[0,1]$ وهو محتوى في المجموعة

$$A = [0, \frac{\eta}{2}] \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{k_0+1}\Big[\frac{1}{k} - \frac{\eta}{2^{k+2}}, \frac{1}{k} + \frac{\eta}{2^{k+2}}\Big]\Big)$$

وقياس هذه المجموعة يقدر بـ:

$$|A| \leq \tfrac{\eta}{2} + \sum_{j=1}^{k_0+1} \tfrac{\eta}{2^{j+1}} \leq \tfrac{\eta}{2} + \tfrac{1}{4}\eta \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^j} = \eta.$$

يكفي إذن أخذ $K = [0,1] \cap {}^c\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{k_0} I_{j\eta}\Big)$ لنجد أن $|K| \leq \eta$ مع المتتالية $\{v_n\}$ متقاربة بإنتظام نحو v على $[0,1] \setminus K$.

4.5.3 **حل التمرين الرابع•** ٤.١ ليكن التابع $F(.,.)$ المعرف في $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ بأن $F(x,t) = e^{-x}x^{t-1}$. واضح أنه، من أجل كل $t \in \mathbb{R}_+^\star$ ، يكون التابع $F(.,t)$ قيوسا، نسبة إلى x ، في $\mathbb{R}_+^\star$ ، إذ إنه مستمر. لنميز حالة $x \in]0,1[$ من حالة $1 \leq x$.

لدينا طبعا $0 \leq F(x,t) \leq x^{t-1}$ من أجل $x \in]0,1[$. وبما أن:

$$\frac{x^m}{m!} \le e^x \quad \text{مهما كان} \quad 0 \le x \quad \text{وَ} \quad \mathbb{N} \ni m$$

فبأخذ $m = [t] + 2$ ، حيث يشير $[t]$ إلى الجزء الصحيح للعدد t ، نرى أن:

$$0 \le F(x,t) \le \frac{([t]+2)!}{x^2} \cdot x^{t-[t]-1} \le \frac{([t]+2)!}{x^2}, \ \forall x \ge 1$$

ولذا، بوضع:

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^{t-1} & \text{إذا كان} & x \in]0,1[\\ \frac{([t]+2)!}{x^2} & \text{إذا كان} & 1 \le x \end{array} \right.$$

نرى أن $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+^\star)$ وأن $0 \le F(x,t) \le \varphi(x)$ ، مهما كان $0 < x$. إذن $F(.,t)$ كمول نسبة إلى x وبالتالي التابع $t \mapsto \Gamma(t)$ معرف جيدا في $\mathbb{R}_+^\star$.

٤.٢ ليكن $0 < \tau$. لدينا:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \right| = e^{-x} x^{t-1} |\ln x|, \ \forall x > 0.$$

يمكنك التأكد من أن $x^{t-1}|\ln x| \in L^1(0,1)$ وَ $x^t e^{-x} \in L^1(1,\infty)$ ، مهما كان $0 < t$ ، ثمّ من أن:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \right| \le g_\tau(x), \ \forall x > 0, \ \forall t \in]\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}[.$$

حيث

$$g_\tau(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x^{\frac{\tau}{2}-1} \ln x & \text{إذا كان} & x \in]0,1[\\ e^{-x} x^{\frac{3\tau}{2}} & \text{إذا كان} & 1 \le x \end{array} \right.$$

مع $g_\tau \in L^1(0,\infty)$ ولذا، باستخدام مبرهنة التزايدات المتهية في المتغير t ، نرى أن:

$$\left| \frac{F(x,t) - F(x,\tau)}{t-\tau} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, \tau + \theta(t-\tau)) \right| \le g_\tau(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \ \forall t \in]\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}[.$$

يمكن عندئذ تطبيق المبرهنة المتعلقة بالإشتقاق تحت إشارة تكامل لوبيغ: Γ قابل للإشتقاق عند τ ولدينا:

$$\Gamma'(\tau) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(x,\tau)\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\tau-1} \ln x \, dx.$$

إن التابع $t \mapsto \Gamma'(t)$ مستمر في $\mathbb{R}_+^\star$ لأنه من أجل كل $0 < \tau$ وكل متتالية $\{\tau_n\}$ ، عناصرها من $]\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}[$ ، متقاربة نحو τ فبوضع $h_n(x) = e^{-x} x^{\tau_n - 1} \ln x$ نرى أن:

$$h_n(x) \to h(x) = e^{-x} x^{\tau-1} \ln x, \;\; \forall x > 0$$

وبما أن $|h_n(x)| \le g_\tau(x) \in L^1(\mathbb{R}_+^\star)$ من أجل كل n فينتج من مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة أن:

$$\Gamma'(\tau_n) = \int_0^\infty h_n(x)\, dx \to \int_0^\infty h(x)\, dx = \Gamma'(\tau).$$

هذا يبين استمرار Γ' في $\mathbb{R}_+^\star$.

٤.٣ ليكن $t > 0$. يمكننا أن نكتب، مكاملين بالتجزئة:

$$\begin{aligned} t\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} t x^{t-1}\, dx &= \int_0^\infty e^{-x}\, d(x^t) \\ &= e^{-x} x^t \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} x^t\, dx = \Gamma(t+1). \end{aligned}$$

٤.٤ لدينا: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$. ينتج من هذا أن $\Gamma(n+1) = n!$.

6.3 حل الموضوع الـ 6

1.6.3 حل التمرين الأول• ١. ١. ١) ليكن $P = \{x_0, ..., x_n\}$ تقسيما للمجال $I \equiv [a, b]$ وليكن $j \in \{1, ..., n\}$ الدليل الذي يحقق $x_{j-1} \le 1 < x_j$. واضح أن تغيُّر f الموافق للتقسيم P هو:

$$\begin{aligned} V_f(P) = \sum_{i=1}^{j-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &+ |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &+ \sum_{i=j+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |2-3| = 1. \end{aligned}$$

إذن f ذو تغيُّر محدود على I وتغيُّره الكلي هو $V_0^2(f) = 1$. أمّا تغيُّر g الموافق للتقسيم P فبسببِ تزايد g على $]0, 1[$ وعلى $[0, 2]$ فيحقق، إذا كان $x_{j-1} < 1$:

$$\begin{aligned} V_g(P) &= \sum_{i=1}^{j-1} |g(x_i)-g(x_{i-1})| + |g(1)-g(x_{j-1})| + |g(x_j)-g(1)| \\ &\qquad + \sum_{i=j+1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| \\ &= g(x_{j-1}) + g(x_{j-1}) + g(x_j) + g(x_n) - g(x_j) \leq 2+3=5 \end{aligned}$$

وإذا كان $x_{j-1}=1$ فيحقق :

$$\begin{aligned} V_g(P) &= \sum_{i=1}^{j-2} |g(x_i)-g(x_{i-1})| + |g(1)-g(x_{j-2})| + \sum_{i=j}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})| \\ &= 2g(x_{j-2}) + g(x_n) - g(1) \leq 2+3=5. \end{aligned}$$

إذن g محدود التغيُّر على I وتغيُّره الكلي $V_0^2(g)$ أقل من 5.

١. ب) بما أن f مستمر على $[0,1]$ وَ g محدود التغيُّر فإن تكامل ستيلجس $\int_0^1 f\,dg$ موجود.

وبما أن التابع g مستمر على $[1,2]$ فهو ستيلجس كمول نسبة إلى التابع f ذي التغيُّر المحدود على المجال نفسه (إذ إنه محدود التغيُّر على مجال أكبر) وبالتالي f ستيلجس كمول نسبة إلى g على $[1,2]$.

ولحساب التكاملين نستخدم أولا المكاملة بالتجزئة لنحصل على:

$$\int_0^1 f\,dg = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 g\,df = 0,$$

إذ إن $\int_0^1 g\,df = 0$ لكون f ثابت على $[0,1]$.

ثمّ، بما أن f ريمان كمول على $[1,2]$ وَ g قابل للإشتقاق بالإستمرار على هذا المجال فإن:

$$\int_1^2 f\,dg = \int_1^2 fg' = \int_1^2 2.2x = 2x^2\Big|_1^2 = 6.$$

١. جـ) لنثبت أن f غير ستيلجس كمول نسبة إلى g على المجال $[0,2]$. لهذا الغرض نبين أن مجاميع ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على I ليست لكوشي. وفعلا: ليكن $P=\{x_0,...,x_n\}$ تقسيما للمجال I لا يحتوي على العدد 1. يوجد إذن $j \in \{1,...,n\}$ بحيث $x_{j-1}<1<x_j$. ليكن التقسيم $Q=\{\xi_1,...,\xi_n\}$ الوسط نسبة

إلى P المعطى بأن $\xi_i = x_{i-1}$ ، $i = 1$ ، ... ، n. لنأخذ الآن التقسيم P' الذي يساوي P نفسه والتقسيم $Q' = \{\xi'_1, ..., \xi'_n\}$ الوسط نسبة إلى P' حيث $\xi'_i = x_{i-1}$ ، $i = 1$ ، ... ، $j-1$ وَ $\xi'_j = x_j$ وَ $\xi'_i = x_{i-1}$ ، $i = j+1$ ، ... ، n. لدينا:

$$\begin{aligned}|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P',Q')| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi'_i)\delta g_i\right| \\ &= |[f(\xi_i) - f(\xi'_i)][g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &= |(3-2)(x_j^2 - 1 - x_{j-1})| \\ &= |1 - (x_j^2 - x_{j-1})|.\end{aligned}$$

وعندها إذا كان δP ، وسيط التقسيم P ، أقل من $\frac{1}{4}$ يكون:

$$0 \leq x_j^2 - x_{j-1}^2 \leq 3(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{3}{4},$$

ولذا، من أجل $\delta P \leq \frac{1}{4}$ ، يكون $\frac{1}{4} \leq |S(f,g,P,Q) - S(f,g,P',Q')|$ ؛ الأمر الذي يعني أن مجاميع ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على المجال I ليست لكوشي وبالتالي f غير ستيلجس كمول نسبة إلى g على المجال I.

2.6.3 حل التمرين الثاني •

ليكن $\alpha > 0$. من أجل $n \geq \alpha$ يكون لدينا:

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |g_n(x) - g(x)| = g_n(x) = n\chi_{I_n}(x) \geq \alpha\} = I_n,$$

ولذا $|I_n| = \frac{1}{n}$ (قياس لوبيغ للمجال I_n) ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \alpha\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

لدينا $\int_0^\infty g = 0$ وَ $\int_0^\infty g_n = \int_0^{1/n} n = 1$. إذن $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n = 1 \neq 0 = \int_0^\infty g$.

بما أنه لدينا $g_n \leq g_{n+1}$ على المجال $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ وَ $g_n > g_{n+1}$ على المجال $[0, \frac{1}{n+1}[$ فإن المتتالية $\{g_n\}$ ليست رتيبة ولذا لا يوجد تناقض مع مبرهنة بيبو لفي التي تشترط أن تكون المتتالية متزايدة.

3.6.3 **حل التمرين الثالث•** في كل هذا التمرين نثبّت $\alpha > 0$.

٣.١ بما أن متتالية التوابع القيوسة $\{f_n\}$ تتقارب نحو f شبه كليا على X فإن f قيوس على X ولذا، من أجل كل $k \in \mathbb{N}^\star$ ، يكون التابع $f_k - f$ قيوسا وكذا التابع $|f_k - f|$ وبالتالي يكون الجزء $E_k(\alpha)$ قيوسا. وبما أن الأجزاء القيوسة تشكل العشيرة $\mathcal{A}$ ، فمهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ، يكون الجزء $F_n(\alpha)$ قيوسا كاتحاد عدود لأجزاء قيوسة ويكون $F(\alpha)$ قيوسا كتقاطع عدود لأجزاء قيوسة.

٣.٢ واضح أن المتتالية $\{F_n(\alpha)\}$ متناقصة؛ فهي إذن متقاربة نحو حدها الأدنى $F(\alpha) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ وبما أن $\mu(X) < \infty$ فإن $\mu(F_1(\alpha)) < \infty$ وينتج عندها من إستمرار القياس الموجب μ من الأعلى عند $F(\alpha)$ أن:

$$\mu(F(\alpha)) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(F_n(\alpha)\right)\cdot$$

٣.٣ يكفي إثبات الإحتواء $^cF(\alpha) \supset {}^cA$. ليكن $x \in {}^cA$. إذن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وبالتالي يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $|f_n(x) - f(x)| < \alpha$ مهما كان $n \geq n_0$ ومنه $x \notin E_k(\alpha)$ مهما كان $k \geq n_0$ ولذا $x \notin F_{n_0}(\alpha)$. إذن $x \notin F(\alpha)$.

٣.٤ بما أن $F(\alpha) \subset A$ فإن $\mu(F(\alpha)) = 0$ وبالتالي، وفقا للسؤال ٣.٢، $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n(\alpha)) = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\alpha)) = 0$ إذ إن $E_n(\alpha) \subset F_n(\alpha)$.

4.6.3 **حل التمرين الرابع•** إننا نحصل على عناصر المتتالية $\{\varphi_n\}$ بجعل k يتغير في $\mathbb{N}^\star$ وأخذ $\varphi_n = f_i^{(k)}$ حيث $n = \frac{1}{2}k(k-1) + i$ مع $1 \leq i \leq k$. من تعريف $f_i^{(k)}$ يكون هذا التابع غير معدوم فقط على المجال $I_i^{(k)} =]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ وبما أن قياس هذا المجال هو $\frac{1}{k}$ فإن المتتالية $\{\varphi_n\}$ تؤول نحو $\varphi = 0$ بالقياس على $]0, 1]$.

ليكن $x \in]0, 1]$ عنصرا مثبتا. من أجل كل $k_0 \in \mathbb{N}^\star$ يوجد دليل وحيد i_0 محصور بين 1 وَ k_0 بحيث $x \in I_{i_0}^{(k_0)}$ وبالتالي يكون $\varphi_{n_0}(x) = 1$ وَ $\varphi_n(x) = 0$ حيث $n_0 = \frac{1}{2}k_0(k_0-1) + i_0$ وَ $n = \frac{1}{2}k_0(k_0-1) + i$ مع $i \neq i_0$ ، 1 = ... ، k_0.
وبما أن كلا من n_0 وَ n أكبر من k_0 فلا يمكن أن تكون المتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ متقاربة. إذن التقارب البسيط متعذر عند كل نقطة من $]0, 1]$.

5.6.3 **حل التمرين الخامس•** إننا نجد $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\,dx=1$. يمكنك أن تبين بإجراء تبديل في المتغير أن $\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\,dx=\frac{n}{n+1}$. أنظر كذلك حل التمرين الثاني من الموضوع العاشر حيث تُستخدم مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة.

7.3 حل الموضوع الـ 7

1.7.3 **حل التمرين الأول•** بما أن التابع θ ريمان كمول على $[a,b]$ فهو محدود على هذا المجال؛ فيوجد إذن عدد $0<M$ بحيث $|\theta(x)|\leq M$ مهما كان $x\in[a,b]$. ليكن الآن $0<\varepsilon$ عددا معطى. ولتكن $\{]a_1,b_1[,]a_2,b_2[,\ldots,]a_k,b_k[\}$ جماعة من المجالات غير المتقاطعة وذات إتحاد محتوى في $[a,b]$. لدينا:

$$\sum_{i=1}^{k}|\Theta(b_i)-\Theta(a_i)|=\sum_{i=1}^{k}\Big|\int_{a_i}^{b_i}\theta\Big|\leq M\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i).$$

عندئذ، بأخذ $\rho=\varepsilon/M$ ، نرى أنه إذا كان $\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\leq\rho$ كان $\sum_{i=1}^{k}|\Theta(b_i)-\Theta(a_i)|\leq\varepsilon$. هذا يبين الإستمرار المطلق للتابع Θ.

2.7.3 **حل التمرين الثاني•** لتكن T مجموعة تقطعات التابع ξ على $[a,b]$ ولتكن S مجموعة تقطعات التابع $|\xi|$. بما أن القيمة المطلقة تابع مستمر على $\mathbb{R}$ فإن $S\subset T$. وفي حقيقة الأمر إذا كانت c نقطة من $[a,b]$ لا تنتمي إلى T فإن ξ مستمر عند c ولذا فالتابع $|\xi|=|\cdot|\circ\xi$ مستمر عند c وبالتالي $c\notin S$. ينتج من هذا أن $B_S=\bigcup\limits_{x\in S}B_x\subset\bigcup\limits_{x\in T}B_x=B_T$. عندئذ إذا كان ξ ستيلجس كمولا نسبة إلى التابع المتزايد ψ فإن المبرهنة المعطى نصها تقتضي أن المجموعة B_T مهملة ولذا تكون المجموعة B_S مهملة وتضمن المبرهنة ذاتها أن $|\xi|$ ستيلجس كمول نسبة إلى التابع المتزايد ψ.

3.7.3 **حل التمرين الثالث•** ليكن $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[0,2]$ لا يشمل النقطة 1 وبوسيط $\delta P \geq \frac{1}{3}$. يوجد عندئذ دليل $j \in \{2,\dots,n\}$ بحيث $x_{j-1}<1<x_j$. وليكن التقسيم $Q=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ الوسط نسبة إلى P المعطاة نقطه بأن $\xi_i = x_{i-1}$ من أجل $i=1$ ، ... ، n. لدينا:

$$\begin{aligned} S(f,g,P,Q) &= \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]+f(\xi_j)[g(x_j)-g(x_{j-1})] \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=j+1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] \\ &= f(x_{j-1})[\tfrac{1}{2}+1]=\tfrac{3}{2}x_{j-1}. \end{aligned}$$

وليكن الآن التقسيم $Q^\star=\{\xi_1^\star,\dots,\xi_n^\star\}$ الوسط نسبة إلى P المعطاة نقطه بأن $\xi_i^\star = x_i$ من أجل $i=1$ ، ... ، n. لدينا:

$$\begin{aligned} S(f,g,P,Q^\star) &= \textstyle\sum_{i=1}^{j-1} f(\xi_i^\star)[g(x_i)-g(x_{i-1})]+f(\xi_j^\star)[g(x_j)-g(x_{j-1})] \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=j+1}^{n} f(\xi_i^\star)[g(x_i)-g(x_{i-1})] \\ &= f(x_j)[\tfrac{1}{2}+1]=\tfrac{3}{2}(x_j-1). \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} S(f,g,P,Q)-S(f,g,P,Q^\star) &= \frac{3}{2}x_{j-1}-\frac{3}{2}(x_j-1) \\ &= \frac{3}{2}\Big(x_{j-1}-x_j+1\Big) \geq \frac{3}{2}\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=1. \end{aligned}$$

ينتج من هذا أنه لا يمكن لمجاميع ستيلجس للتابع f نسبة إلى g أن تكون لكوشي. إذن f غير ستيلجس كمول نسبة إلى g على $[0,2]$.

4.7.3 **حل التمرين الرابع•** ٤٠١ إن قابلة تابع φ للمكاملة حسب ستيلجس نسبة إلى تابع ψ على مجال $[a,b]$ تعني أنه يوجد عدد حقيقي J بحيث يمكن رفق كل عدد $\varepsilon>0$ بعدد $\rho>0$ صفته أنه $|S(\varphi,\psi,P,Q)-J|\leq\varepsilon$ من أجل كل تقسيم P للمجال $[a,b]$ بوسيط $\delta P \leq \rho$ وكل تقسيم وسط Q نسبة إليه. عندئذ بأخذ $P_\varepsilon = P_0$ حيث P_0 هو أي تقسيم بوسيط أقل من ρ يكن لدينا:

$$|S(\varphi,\psi,P,Q)-J|\le\varepsilon,\forall P\in\mathcal{P}_{a,b},\ \ P\supset P_\varepsilon,\ \ \forall Q\in\mathcal{W}(P)\,.$$

هذا يعني أن φ ستيلجس معمم كمول نسبة إلى ψ ولدينا $\oint_a^b \varphi\,d\psi = J = \int_a^b \varphi\,d\psi$.

٤.٢ ليكن $0<\varepsilon$. إذا كان $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[0,2]$ يشمل النقطة 1 فيوجد دليل $\{2,\dots,n\}$ بحيث $x_{j-1}=1$ وعندئذ، من أجل $\mathcal{W}(P)\ni Q=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$:

$$S(f,g,P,Q)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j-1}}^{n} f(\xi_i)\delta g_i+f(\xi_{j-1})[g(x_{j-1})-g(x_{j-2})]=\frac{3}{2}\xi_{j-1},$$

حيث $\delta g_i=g(x_i)-g(x_{i-1})$. ومنه

$$|S(f,g,P,Q)-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}|\xi_{j-1}-1|\le\frac{3}{2}\delta P.$$

واضح عندها أنه إذا كان P_ε تقسيما للمجال $[0,2]$ يشمل النقطة 1 وكان وسيطه $\frac{2}{3}\varepsilon\ge\delta P$ فإنه يكون لدينا $|S(f,g,P,Q)-\frac{3}{2}|\le\varepsilon$ مهما كان $P_\varepsilon\subset P$ مع $\mathcal{W}(P)\ni Q$. إذن f قابل للمكاملة حسب ستيلجس المعمم نسبة إلى g على $[0,2]$.

٤.٣ نستدل بطريقة الخلف. لو كان f ستيلجس معمم كمولا نسبة إلى التابع γ على $[0,2]$ لوجد عدد حقيقي G بحيث يكون بإمكاننا رفق $\varepsilon=\frac{1}{2}$ بتقسيم $P_{1/2}$ للمجال $[0,2]$ يحقق:

$$|S(f,\gamma,P,Q)-G|\le\frac{1}{4},\ \forall P\in\mathcal{P}_{0,2},\ \ P\supset P_{1/2},\ \ \forall Q\in\mathcal{W}(P).$$

ليكن عندئد $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما وسيطه δP أقل من $\frac{1}{3}$ وأدق من $P_{1/2}$ ويشمل النقطة 1. يوجد دليل $\{2,\dots,n\}$ بحيث $x_j=1$. وعندئذ، من أجل Q وَ $\mathcal{W}(P)\ni Q'$ يكون لدينا:

$$|S(f,\gamma,P,Q)-S(f,\gamma,P,Q')|\le\frac{1}{2}. \qquad (\star)$$

لكن من أجل التقسيمين $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ وَ $Q' = \{\xi'_1, \ldots, \xi'_n\}$ الوسطين نسبة إلى P المعطاة نقطهما بأن $\xi_i = x_{i-1}$ وَ $\xi'_i = x_i$ من أجل $i = 1$ ، ... ، n تكون لدينا العلاقتين:

$$\begin{aligned} S(f, g, P, Q) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j+1}}^{n} f(\xi_i)\delta\gamma_i + f(\xi_{j+1})[\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)] = \frac{3}{2}, \\ S(f, \gamma, P, Q') &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j+1}}^{n} f(\xi_i)\delta\gamma_i + f(\xi_{j+1})[\gamma(x_{j+1}) - \gamma(x_j)] \\ &= \frac{3}{2}(x_{j+1} - 1). \end{aligned}$$

اللّتان تقتضيان أن:

$$|S(f, \gamma, P, Q) - S(f, \gamma, P, Q')| = \frac{3}{2}(2 - x_{j+1}) \geq 1.$$

وهذا تناقض مع العلاقة $(\star)$. إذن f غير قابل للمكاملة حسب ستيلجس المعمم نسبة إلى γ على $[0, 2]$.

5.7.3 **حل التمرين الخامس•** ٥٠١ ليكن $K \in \mathcal{K}$. بما أن K متراص في الفضاء التوبولوجي المنفصل X فإنه مغلق ولذا $K \in \mathcal{B}_\tau(X)$. إذن $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}_\tau(X)$ ومنه $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{B}_\tau(X)$.

٥٠٢ ليكن F جزءا مغلقا في X. بما أن $F \cap K$ متراص مهما كان $K \in \mathcal{K}$ فإن $F \cap K$ عنصر من $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ وبالتالي $F \in \mathcal{A}$. وبما أن $X \cap K = K \in \mathcal{K}$ مهما كان $K \in \mathcal{K}$ فإن $X \in \mathcal{A}$. وإذا كان $A \in \mathcal{A}$ كان $A \cap K \in \mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ مهما كان $K \in \mathcal{K}$ وبما أن $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ عشيرة تحتوي على $\mathcal{K}$ فإن $^c(A \cap K)$ وَ K ينتميان إلى $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ ولذا:

$$\mathcal{B}_\mathcal{K}(X) \ni {}^c(A \cap K) \cap K = ({}^cA \cup {}^cK) \cap K = ({}^cA \cap K) \cup \emptyset = {}^cA \cap K.$$

هذا يبين أن $\mathcal{A}$ مغلقة نسبة إلى عملية أخذ المتممة. ثمّ، إذا كانت $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^\star}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ وكان K متراصا في X فينتج من كون $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ عشيرة ومن:

$$K \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap A_n)$$

أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. هذا ينهي البرهان على أن $\mathcal{A}$ عشيرة. وبما أنها تحتوي أجزاء X المغلقة، المولدة للعشيرة البوريلية، فإن $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_\tau(X)$.

٥.٣ ليكن K متراصا في X. بما أن K يشكل تغطية متراصة لنفسه فإنه σ ـ محدود، إذن $K \in \mathcal{C}$ إذ إن K عنصر من $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ ؛ وبالتالي $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$.

المجموعة الخالية $\emptyset$ تنتمي إلى $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ وهي σ ـ محدودة، إذن $\emptyset \in \mathcal{C}$.

ليكن الآن A وَ B عنصرين من $\mathcal{C}$. إذن $A \setminus B$ تنتمي إلى العشيرة $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ وتوجد تغطية عدودة متراصة $\{K_n\}_{n\geq 1}$ للجزء A (مثلا). إذن $A \setminus B$ σ ـ محدودة إذ إنها محتواة في الإتحاد $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ الذي يغطي A.

لتكن $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$ متتالية من عناصر $\mathcal{C}$. إذن $C_n \in \mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ وتوجد متتالية $\{K_n^m\}_{m\in\mathbb{N}^\star}$ بحيث $C_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} K_n^m$ مع $K_n^m \in \mathcal{K}$ مهما كان n وَ m من $\mathbb{N}^\star$. عندئذ تشكل المتتالية الثنائية $\{K_n^m\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star}$ تغطية (عناصرها متراصة) للإتحاد $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. وبما أن هذا الإتحاد ينتمي إلى العشيرة $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ فإننا بهذا ننهي البرهان على أن $\mathcal{C}$ عُصبة.

٥.٤ ليكن $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$ جزءا σ ـ محدودا. إذن، وفقا للسؤال ٥.٢، $A \in \mathcal{A}$ ثمّ إنها توجد متتالية $\{K_n\}$ عناصرها متراصة تغطي A ، وبما أن:

$$A = A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap K_n.$$

فإن $A \in \mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$ لأنه يكتب كإتحاد عدود لعناصر من العشيرة $\mathcal{B}_\mathcal{K}(X)$.

أمّا الاستلزام العكسي، أي

$$A \in \mathcal{B}_\mathcal{K}(X) \quad \Leftarrow \quad A \in \mathcal{B}_\tau(X) \text{ وَ } A \text{ جزء } \sigma \text{ ـ محدود في } X$$

فهو غير صحيح بصفة عامّة كما يتضح من المثال التالي:

مثال مضاد: لتكن X مجموعة غير قابلة للعد ولنزودها بالتوبولوجية **المتقطعة** ، أي التوبولوجيا التي تكون مفتوحاتها هي كل أجزاء X ؛ إذن $\tau = \mathcal{P}(X)$. الأجزاء

المتراصة نسبة إلى هذه التوبولوجيا هي كل أجزاء X المتهية.

لدينا $X \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}(X)$ وَ X ينتمي إلى $\mathcal{B}_{\tau}(X)$ إلا أن X غير σ ـ محدود. إذ لو كان كذلك لوجدت متتالية $\{K_n\}$ من أجزاء X المتراصة بحيث $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ ويصبح X عندئذ قابلا للعد كإتحاد عدود لأجزاء متهية. وهذا تناقض لأن X غير عدود فرضا.

8.3 حل الموضوع الـ 8

1.8.3 حل التمرين الأول• واضح أن التابع δ لا يأخذ إلا قيما موجبة وبما أن $0 \notin \emptyset$ فإن $\delta(\emptyset) = 0$.

لتكن $\{E_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من أجزاء $\mathbb{R}$ غير متقاطعة مثنى مثنى. لدينا:

$$\delta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E_n) \qquad \text{إذا كان} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \not\ni 0$$

ولدينا:

$$\delta\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E_n) \qquad \text{إذا كان} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ni 0$$

إذ لا يمكن للصفر أن ينتمي إلا لعنصر واحد من عناصر المتتالية $\{E_n\}_{n\geq 1}$ بسبب عدم تقاطعها. إذن δ قياس موجب على $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

2.8.3 حل التمرين الثاني• ٢.١ ليكن x_1 وَ x_2 عنصرين من $\mathbb{R}$ مع $x_1 < x_2$. إذا كان $x_1 \leq a < x_2$ كان: $\varphi_a(x_1) = -\mu(]x_1, a]) \leq 0 \leq \mu(]a, x_2])$.

وإذا كان $a < x_1 < x_2$ كان، إعتمادا على كون μ جمعيا:

$$\begin{aligned} \varphi_a(x_2) = \mu(]a, x_2]) &= \mu(]a, x_1] \cup]x_1, x_2]) \\ &= \mu(]a, x_1]) + \mu(]x_1, x_2]) \geq \mu(]a, x_1]). \end{aligned}$$

أمّا إذا كان $x_1 < x_2 \leq a$ كان:

$$\begin{aligned} \varphi_a(x_1) = -\mu(]x_1, a]) &= -\mu(]x_1, x_2] \cup]x_2, a]) \\ &= -\mu(]x_1, x_2]) - \mu(]x_2, a]) \leq \mu(]x_1], a]) = \varphi(x_2). \end{aligned}$$

إذن φ_a متزايد.

٢.٢ التابع φ_a مستمر من اليمين عند النقطة a. وفي حقيقة الأمر، إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية حقيقية عناصرها أكبر من a ومتقاربية نحو a فبوضع $\alpha_m = \sup\{x_n \mid n \geq m\}$ نرى أن المتتالية $\{\alpha_m\}$ متناقصة وعندئذ تكون متتالية المجالات $I_m =]a, \alpha_m]$ متناقصة وبما أن $\mu(I_1) < \infty$ فينتج من إستمرار μ من الأعلى أن:

$$\varphi_a(a) = 0 = \mu(\emptyset) = \mu\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}]a, \alpha_m]\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(]a, \alpha_m]) = \lim_{m\to\infty} \varphi_a(\alpha_m).$$

وبما أن $0 \leq \varphi_a(x_n) \leq \varphi_a(\alpha_m)$ مهما كان $m \leq n$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_a(x_n) = \varphi_a(a) = 0.$$

لكي نبين استمرار φ_a من اليمين عند نقطة كيفية $b \in \mathbb{R}$ فنكتب، من أجل $a < b$ وَ $b < x$:

$$\begin{aligned}\varphi_a(x) = \mu(]a, x]) &= \mu(]a, b] \cup]b, x]) \\ &= \mu(]a, b]) + \mu(]b, x]) = \varphi_a(b) + \mu(]b, x])\end{aligned}$$

ثمّ باللّجوء إلي الأسلوب المستخدم منذ لحظة في حالة النقطة a فنثبت أن $\lim_{x\downarrow b} \mu(]b, x]) = 0$. أمّا في حالة $b < a$ وَ $b < x < a$ فنكتب:

$$\begin{aligned}\varphi_a(x) = -\mu(]a, x]) &= -\mu(]b, a] \backslash]b, x]) \\ &= -\mu(]b, a]) + \mu(]b, x]) = \varphi_a(b) + \mu(]b, x])\end{aligned}$$

ونستدل بنفس الكيفية.

3.8.3 حل التمرين الثالث•

٣.١ ليكن A وَ B وَ C ثلاثة أجزاء من المجموعة X. واضح أن
$A \cap {}^cC \subset (A \cap {}^cB) \cup (B \cap {}^cC)$ وَ ${}^cA \cap C \subset ({}^cA \cap B) \cup ({}^cB \cap C)$.

ومنه، إعتمادا على كون الاتحاد تجميعيا:

$$\begin{aligned}A\Delta C &= (A \cap {}^cC) \cup ({}^cA \cap C) \\ &\subset [(A \cap {}^cB) \cup ({}^cA \cap B)] \cup [(B \cap {}^cC) \cup ({}^cB \cap C)] \\ &= (A\Delta B) \cup (B\Delta C).\end{aligned}$$

٣.٢ $\mathcal{N}$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{A}$ ، إذ إنها:

⋆ إنعكاسية، لأنه من أجل كل عنصر A من $\mathcal{A}$ لدينا $\mu(A\Delta A)=\mu(\emptyset)=0$ أي أن $A\mathcal{N}A$.

⋆ تناظرية، لأن $A\Delta B=B\Delta A$ من أجل كل جزئين A وَ B من X ولذا إذا كان $\mu(A\Delta B)=0$ كان $\mu(B\Delta A)=0$ ، أي أن $A\mathcal{N}B$ يستلزم $B\mathcal{N}A$.

⋆ متعدية، لأنه إذا كانت A وَ B وَ C عناصر من $\mathcal{A}$ بحيث $\mu(A\Delta B)=0$ وَ $\mu(B\Delta C)=0$ كان، وفقا للسؤال ٣.١ السابق ولتحتجمعية وتزايد القياس μ :

$$\mu(A\Delta C)\leq\mu[(A\Delta B)\cap(B\Delta C)]\leq\mu(A\Delta B)+\mu(B\Delta C)=0+0=0$$

وبالتالي $A\mathcal{N}C$.

٣.٣ لتكن $\mathcal{C}$ مجموعة صفوف تكافؤ $\mathcal{N}$ على $\mathcal{A}$. لكي نثبت أن التابع d المعرف على $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ بأن $d(\overline{A},\overline{B})=\mu(A\Delta B)$ معرف جيدا نأخذ A_1 ممثلا آخر للّصف $\overline{A}$ (إذن $\mu(A\Delta A_1)=0$) وَ B_1 ممثلا آخر للّصف $\overline{B}$ (إذن $\mu(B\Delta B_1)=0$) ونكتب:

$$\begin{aligned}\mu(A\Delta B)&\leq\mu[(A\Delta A_1)\cup(A_1\Delta B)]\\&\leq\mu(A\Delta A_1)+\mu(A_1\Delta B)\\&=\mu(A_1\Delta B)\\&\leq\mu[(A_1\Delta B_1)\cup(B_1\Delta B)]\\&\leq\mu(A_1\Delta B_1)+\mu(B_1\Delta B)=\mu(A_1\Delta B_1)\end{aligned}$$

ثمّ، إنطلاقا من $A_1\Delta B_1$ وبنفس الكيفية، نثبت أن $\mu(A_1\Delta B_1)\leq\mu(A\Delta B)$ ومنه التساوي.

d مسافة على $\mathcal{C}$ لأن:

⋆ $d(\overline{A},\overline{A})=\mu(A\Delta A)=\mu(\emptyset)=0$ مهما كان $\overline{A}\in\mathcal{C}$.

⋆ $d(\overline{A},\overline{B})=\mu(A\Delta B)=\mu(B\Delta A)=d(\overline{B},\overline{A})$ مهما كان $\overline{A}$ ، $\overline{B}\in\mathcal{C}$.

⋆ ثمّ، إعتمادا على السؤال ٣.١، مهما كان $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ وَ $\overline{C}$ من $\mathcal{C}$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}d(\overline{A},\overline{B})=\mu(A\Delta B)&\leq\mu[(A\Delta C)\cup(C\Delta B)\\&\leq\mu(A\Delta C)+\mu(C\Delta B)\\&=d(\overline{A},\overline{C})+\mu(\overline{C},\overline{B}).\end{aligned}$$

4.8.3 **حل التمرين الرابع•** لتكن A_1 وَ B_1 وَ A_2 وَ B_2 أجزاء من المجموعة X.

٤٠١ ا) لدينا:

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \cap {}^c(B_1 \cup B_2) &= (A_1 \cap {}^cB_1 \cap {}^cB_2) \cup (A_2 \cap {}^cB_1 \cap B_2)\\ &\subset (A_1 \cap {}^cB_1) \cup (A_2 \cap {}^cB_2)\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}{}^c(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) &= ({}^cA_1 \cap {}^cA_2 \cap B_1) \cup ({}^cA_1 \cap {}^cA_2 \cap B_2)\\ &\subset ({}^cA_1 \cap B_1) \cup ({}^cA_2 \cap B_2)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) &\subset [(A_1 \cap {}^cB_1) \cup ({}^cA_1 \cap B_1)]\\ &\quad \cup[(A_2 \cap {}^cB_2) \cup ({}^cA_2 \cap B_2)]\\ &= (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).\end{aligned}$$

٤٠١ ب) مثل أعلاه، لدينا:

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2) \cap {}^c(B_1 \cap B_2) &= (A_1 \cap A_2 \cap {}^cB_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap {}^cB_2)\\ &\subset (A_1 \cap {}^cB_1) \cup (A_2 \cap {}^cB_2)\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}{}^c(A_1 \cap A_2) \cap (B_1 \cap B_2) &= ({}^cA_1 \cap B_1 \cap B_2) \cup ({}^cA_2 \cap B_1 \cap B_2)\\ &\subset ({}^cA_1 \cap B_1) \cup ({}^cA_2 \cap B_2)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) &\subset [(A_1 \cap {}^cB_1) \cup ({}^cA_1 \cap B_1)]\\ &\quad \cup[(A_2 \cap {}^cB_2) \cup ({}^cA_2 \cap B_2)]\\ &= (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).\end{aligned}$$

٤٠٢ التابع $\overline{\bigcup}$ معرف جيدا لأنه، من أجل كل عنصرين $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ من $\mathcal{C}$ فإذا كان A_0 وَ B_0 ممثلين آخرين للّصفين $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ على التوالي، كان لدينا، وفقا للّسؤال (٤٠١. ا):

$$\begin{aligned}\mu[(A \cup B)\Delta(A_0 \cup B_0)] &\leq \mu[(A\Delta A_0) \cup (B\Delta B_0)]\\ &\leq \mu(A\Delta A_0) + \mu(B\Delta B_0) = 0\end{aligned}$$

ولذا فإن $A_0\cup B_0 \in \overline{(A\cup B)}$ وبالتالي $\overline{(A\cup B)}=\overline{(A_0\cup B_0)}$ أي أن $\overline{\bigcup}$ معرف جيدا.

التابع $\overline{\bigcup}$ مستمر من $\mathcal{C}^2$ مزود بالمترية d_1 في $\mathcal{C}$ مزود بالمترية d. وفي الحقيقة، إذا كانت $(\overline{A}_0,\overline{B}_0)$ نقطة من $\mathcal{C}^2$ وكانت $\{(\overline{A_n},\overline{B_n})\}$ متتالية من $\mathcal{C}^2$ متقاربة نحو $(\overline{A_0},\overline{B_0})$ في هذه المجموعة، أي:

$$\begin{aligned} d_1[(\overline{A_n},\overline{B_n}),(\overline{A_0},\overline{B_0})] &\leq d(\overline{A_n},\overline{A_0})+d(\overline{B_n},\overline{B_0}) \\ &= \mu(A_n\Delta A_0)+\mu(B_n\Delta B_0)\longrightarrow 0, \quad n\to\infty \end{aligned}$$

فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} d\Big[\overline{\bigcup}(\overline{A_n},\overline{B_n}),\overline{\bigcup}(\overline{A_0},\overline{B_0})\Big] &= d(\overline{A_n\cup B_n},\overline{A_0\cup B_0}) \\ &= \mu[(A_n\cup B_n)\Delta(A_0\cup B_0)] \\ &\leq \mu[(A_n\Delta A_0)\cup(B_n\Delta B_0)] \\ &\leq \mu(A_n\Delta A_0)+\mu(B_n\Delta B_0)\longrightarrow 0,\ n\to\infty. \end{aligned}$$

الأمر الذي يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\bigcup}(\overline{A_n},\overline{B_n})=\overline{\bigcup}(\overline{A_0},\overline{B_0})$. إذن $\overline{\bigcup}$ مستمر.

٤.٣ التابع $\overline{\bigcap}$ معرف جيدا لأنه، من أجل كل عنصرين $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ من $\mathcal{C}$ فإذا كان A_0 وَ B_0 ممثلين آخرين للصفين $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ ، على التوالي، كان لدينا، وفقا من السؤال (٤.١ ب):

$$\begin{aligned} \mu[(A\cap B)\Delta(A_0\cap B_0)] &\leq \mu[(A\Delta A_0)\cup(B\Delta B_0)] \\ &\leq \mu(A\Delta A_0)+\mu(B\Delta B_0)=0 \end{aligned}$$

ولذا فإن $A_0\cap B_0 \in \overline{(A\cap B)}$ وبالتالي $\overline{(A\cap B)}=\overline{(A_0\cap B_0)}$ أي أن $\overline{\bigcap}$ معرف جيدا.

التابع $\overline{\bigcap}$ مستمر من $\mathcal{C}^2$ مزود بالمترية d_1 في $\mathcal{C}$ مزود بالمترية d. وفي الحقيقة، إذا كانت $(\overline{A}_0,\overline{B}_0)$ نقطة من $\mathcal{C}^2$ وكانت $\{(\overline{A_n},\overline{B_n})\}$ متتالية من $\mathcal{C}^2$ متقاربة نحو $(\overline{A}_0,\overline{B_0})$ في هذه المجموعة فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} d\Big[\overline{\bigcap}(\overline{A_n},\overline{B_n}),\overline{\bigcap}(\overline{A_0},\overline{B_0})\Big] &= d(\overline{A_n\cap B_n},\overline{A_0\cap B_0})\\ &= \mu[(A_n\cap B_n)\Delta(A_0\cap B_0)]\\ &\le \mu[(A_n\Delta A_0)\cup(B_n\Delta B_0)]\\ &\le \mu(A_n\Delta A_0)+\mu(B_n\Delta B_0)\longrightarrow 0,\ \ n\to\infty. \end{aligned}$$

الأمر الذي يعني أن $\lim_{n\to\infty}\overline{\bigcap}(\overline{A_n},\overline{B_n})=\overline{\bigcap}(\overline{A_0},\overline{B_0})$. إذن $\overline{\bigcap}$ مستمر.

5.8.3 **حل التمرين الخامس•** إننا في حل هذا التمرين نحتاج إلى نتيجة قدمت في تمرين حول النهايتين السفلى والعليا في الباب التمهيدي وهي أنه إذا كانت $\{Y_n\}$ متتالية من أجزاء مجموعة X فإن:

$$\Big[\limsup_{n\to\infty} Y_n\Big]\setminus\liminf_{n\to\infty} Y_n\subset\limsup_{n\to\infty}(Y_n\Delta Y_{n+1}). \tag{3.3}$$

وإثبات هذا الإحتواء يتم مباشرة: تأخذ عنصرا في المجموعة اليسرى وتبين أنه في المجموعة اليمنى.

لتكن $\{\overline{A}_n\}$ متتالية كوشية من الفضاء المتري $(\mathcal{C},d)$. بأخذ $j=1$ ، 2 ، ... ، على التوالي، نحصل على متتالية أعداد طبيعية $\{l(j)\}_{k\ge 1}$ بحيث يكون لدينا:

$$d(\overline{A}_p,\overline{A}_q)=\mu(A_p\Delta A_q)\le\frac{1}{2^j},\ \ \forall p,q\ge l(j). \tag{4.3}$$

لنعتبر عندئذ المتتالية الطبيعية $\{m_j\}$ المتزايدة تماما المعرفة بأن:

$$\begin{aligned} m(1)=l(1),\qquad m(2) &= \max\{m(1)+1,l(2)\},\dots,\\ & m(j)=\max\{m(j-1)+1,l(j)\},\dots \end{aligned}$$

لنضع عندئذ $\overline{B}_j=\overline{A}_{m(j)}$. بما أن $m(j+1)>m(j)\ge l(j)$ فمن الواضح أنه:

$$\mu(B_j\Delta B_{j+1})=d(\overline{B}_{j+1},\overline{B}_j)=d(\overline{A}_{m(j)},\overline{A}_{m(j+1)})\le\frac{1}{2^j},\ \forall j\in\mathbb{N}.$$

وعندئذ، بما أن $\liminf_{j\to\infty} B_j\supset\limsup_{j\to\infty} B_j$ فينتج من (3.3) أن (لا تنس أن المطة تشير إلى صف التكافؤ:

$$
\begin{aligned}
d(\overline{\limsup_{j\to\infty} B_j}\,,\overline{\liminf_{j\to\infty} B_j}\,) &= \mu\Big[\Big(\limsup_{j\to\infty} B_j\Big)\setminus\liminf_{j\to\infty} B_j\Big]\\
&\leq \mu\Big(\limsup_{j\to\infty}(B_j\Delta B_{j+1})\Big)=\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big)
\end{aligned}
$$

حيث $E_j=\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}(B_k\Delta B_{k+1})$ وهو الحد العام لمتتالية مجموعاتية متناقصة وبما أن

$$\mu(E_j)\leq\sum_{k=j}^{\infty}\mu(B_k\Delta B_{k+1})\leq\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2^{j+1}}+\cdots\leq\frac{1}{2^{j-1}}$$

فينتج من الاستمرار العلوي للقياسات الموجبة أن:

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j\Big)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)\leq\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2^{j-1}}=0.$$

هذا يعنى أن $\overline{\limsup_{j\to\infty} B_j}=\overline{\liminf_{j\to\infty} B_j}$.

هدفنا هو البرهان على أن المتتالية $\{\overline{A_n}\}$ متقاربة في $(\mathcal{C},d)$ نحو $\overline{B}$ حيث B هي أية مجموعة بحيث:

$$\liminf_{j\to\infty} B_j\subset B\subset\limsup_{j\to\infty} B_j. \tag{5.3}$$

لتكن إذن B مجموعة جزئية من X تحقق (5.3). واضح عندئذ من تعريفي النهايتين السفلى والعليا أن $\bigcap_{k=j}^{\infty}B_k\subset B\subset\bigcup_{k=j}^{\infty}B_k,\ \forall j\in\mathbb{N}^\star$. إذا تبثنا $\mathbb{N}^\star\ni j$ وأخذنا $\mathbb{N}\ni\ell$ مع $j\leq\ell$ يكون لدينا $B\Delta B_\ell\subset\bigcup_{k=j}^{\infty}(B_k\Delta B_{k+1})$. وفي حقيقة الأمر، من أجل $B\Delta B_\ell\ni x$ يكون $B\cap{}^cB_\ell\ni x$ أو ${}^cB\cap B_\ell\ni x$.

إذا كان $B\cap{}^cB_\ell\ni x$ كان $B_\ell\not\ni x$ وَ $\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}B_k\ni x$ ولذا يوجد $j\leq k_1$ بحيث $B_{k_1}\ni x$. في حالة $\ell<k_1$ نعتبر k_0 أكبر عدد طبيعي $k_1>$ بحيث $B_{k_0}\not\ni x$ لنرى أن $B_{k_0}\Delta B_{k_0+1}\ni x$ ولذا $\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}(B_k\Delta B_{k+1})\ni x$. في حالة $\ell>k_1$ لدنا نتيجة مماثلة.

أمّا إذا كان ${}^cB\cap B_\ell\ni x$ فإن $B_\ell\ni x$ وَ $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}B_j\not\ni x$ ولذا يوجد دليل $j\leq k_2$ بحيث $B_{k_2}\not\ni x$ ومثل أعلاه نرى أن $\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}(B_k\Delta B_{k+1})\ni x$.

ينتج مما سبق أن $\mu(B\Delta B_\ell) \leq \frac{1}{2^{j-1}}$. إذن، من أجل كل $m(j) \leq n$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned} d(\overline{B},\overline{A_n}\,) &\leq d(\overline{B},\overline{A_{m(j)}}\,)+d(\overline{A_{m(j)}},\overline{A_n}\,) \\ &= \mu(B\Delta B_j)+\mu(A_{m(j)}\Delta A_n) \\ &\leq \frac{1}{2^{j-1}}+\frac{1}{2^{j-1}}=\frac{1}{2^{j-2}}. \end{aligned}$$

ومنه تقاب المتتالية $\{\overline{A_n}\}$ نحو $\overline{B}$. وبهذا ينتهي البرهان على أن $(\mathcal{C},d)$ فضاء متري تام.

9.3 حل الموضوع الـ 9

1.9.3 حل التمرين الأول• بما أن

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=(1-x^q)x^{p-1}(x^{2q})^{n+1} \quad \text{حيث} \quad x \in]0,1[= I$$

فإن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة وعناصرها توابع موجبة وقيوسة (إذ إنها مستمرة).

1.1.9.3 • بما أن (مجموع متوالية هندسية):

$$\sum_{j=0}^{n}(x^{2q})^j=1+x^{2q}+(x^{2q})^2+\cdots+(x^{2q})^n=\frac{1-(x^{2q})^{n+1}}{1-x^{2q}}$$

وبما أن $0 < x < 1$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=(1-x^q)x^{p-1}\frac{1}{1-x^{2q}}=\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,,\ \ x\in I.$$

2.1.9.3 • بما أن $\{f_n\}$ متتالية متزايدة وحدودها توابع قيوسة وموجبة فإنه ينتج من مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx.$$

لكن

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^{p-1} - x^{p+q-1})[1 + x^{2q} + x^{4q} + \cdots + x^{2nq}] \\ &= x^{p-1} + x^{p+2q-1} + x^{p+4q-1} + \cdots + x^{p+2nq-1} \\ &\quad -x^{p+q-1} - x^{p+3q-1} - x^{p+5q-1} - \cdots - x^{p+(2n+1)q-1} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p+2q} + \tfrac{1}{p+4q} + \cdots + \tfrac{1}{p+2nq} \\ &\quad -\tfrac{1}{p+q} - \tfrac{1}{p+3q} - \tfrac{1}{p+5q} - \cdots - \tfrac{1}{p+(2n+1)q} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left[\tfrac{1}{p+2jq} - \tfrac{1}{p+(2j+1)q}\right] \end{aligned}$$

ومنه النتيجة:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{j=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{p+2jq} - \frac{1}{p+(2j+1)q}\Big].$$

2.9.3 **حل التمرين الثاني•** إننا لمعالجة هذا التمرين نتذكّر المتباينة:

$$\ln(1+t) \le t,\ \ \forall t > -1 \tag{6.3}$$

وكذا النشر المحدود من الرتبة 1 للتابع اللّوغاريتمي عند النقطة 1 :

$$\ln(1+t) = t + o(t)(t \to 0)$$

حيث، كما هو معروف، $o(t) = t\varepsilon(t)$ مع $\varepsilon(t)$ تابع معرف في جوار للصفر وبحيث $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

بما أن التابع u يأخذ قيمه في $[0, +\infty]$ وَ $J = \int_X u\,d\mu \in]0, +\infty[$ فإنه منته وَ (ينتج من متباينة تشيبتشيف أن) u موجب تماما μ ـ شك على X ، إذن يوجد جزء $N \subset X$ بحيث $\mu(N) = 0$ وَ $0 < u(x) < \infty$ مهما كان $x \in {}^cN = X \setminus N$. عندئذ، وفقا لـمتباينة (6.3) ، لدينا:

$$n\ln\left[1 + \left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{\alpha}\right] \le n\frac{[u(x)]^{\alpha}}{n^{\alpha}},\ \ \forall x \in {}^cN,\ \ \forall n \in \mathbb{R}^{\star} \tag{7.3}$$

وكذلك، إعتمادا على النشر المحدود المعطى آنفا:

$$n\ln\left[1+\left(\frac{u(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]=n\frac{[u(x)]^{\alpha}}{n^{\alpha}}+u(x)\varepsilon(u(x)/n)\,,\ \forall x\in{}^{c}N,\,\forall n\in\mathbb{N}^{\star}.\quad(8.3)$$

لنضع $u_n(x)=n\ln\left[1+\left(\frac{u(x)}{n}\right)^{\alpha}\right],\ x\in{}^{c}N$.

٢.١ في حالة $0<\alpha<1$ ، ينتج من العلاقة (8.3) أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\infty$ ، $\forall x\in^{c}N$ وبما أن المتتالية $\{u_n\}$ ذات عناصر موجبة فينتج من توطئة فاتو أن:

$$\int_X\liminf_{n\to\infty}u_n\,d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X u_n\,d\mu.$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X u_n\,d\mu=\infty,\ \forall\alpha\in]0,1[$.

٢.٢ أمّا في حالة $\alpha=1$ فينتج من المتباينة (7.3) أن:

$$0\le u_n(x)\le u(x),\ \forall x\in{}^{c}N,\quad \forall n\in\mathbb{R}^{\star}$$

ومن العلاقة (8.3) أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=u(x),\ \forall x\in^{c}N$. يمكننا إذن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ للحصول على $J=\int_X\lim\limits_{n\to\infty}u_n\,d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int_X u_n\,d\mu$.

٢.٣ أمّا في حالة $\alpha>1$ فإن المتباينة (6.3) غير كافية للوصول إلى نتيجة فنضطر إلى استخدام المتباينة التالية، المحققة من أجل كل $n\in\mathbb{R}^{\star}$

$$n\ln\left[1+\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha}\right]\le\alpha t,\ \forall t\ge0,\qquad(\alpha>1)\qquad(9.3)$$

والتي يمكن البرهان عليها باعتبار التابع ψ العرف بأن:

$$\psi(t)=n\ln\left[1+\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha}\right]-\alpha t,\ t\ge0,\qquad(\alpha>1)$$

ومشتقه هو $\psi'(t)=\alpha\frac{nt^{\alpha-1}}{n^{\alpha}+t^{\alpha}}-\alpha$ وإشارته سالبة دائما إذ إنه ينتج من متباينة يونغ أن $nt^{\alpha-1}\le\frac{1}{\alpha}n^{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}t^{(\alpha-1)\alpha'}$ حيث α' هو الأس المرافق لِـ α ، أي $\alpha'=\frac{\alpha}{\alpha-1}$.
إذن:

$$\psi'(t)\le\frac{n^{\alpha}+(\alpha-1)t^{\alpha}}{n^{\alpha}+t^{\alpha}}-\alpha\le0,\ \forall t\ge0.$$

إذن ψ متناقص وبما أنه معدوم من أجل $t=0$ فإنه سالب دائما. ينتج إذن من المتباينة (9.3) أن:

$$0\le u_n(x)\le\alpha u(x),\ \forall x\in{}^{c}N,\quad n\in\mathbb{R}^{\star}$$

ومن العلاقة (8.3) أن: $\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0,\ \forall x\in^c N$. يمكننا إذن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ للحصول على:

$$0=\int_X \lim_{n\to\infty} u_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X u_n\,d\mu.$$

يمكنك الآن أن تلاحظ أن المتباية (9.3) صادقة كذلك من أجل $\alpha=1$ وهي إذن كافية لمعالجة حالة $1\leq\alpha$.

3.9.3 **حل التمرين الثالث•** إن التكامل المقصود في هذا التمرين هو طبعا تكامل لوبيغ.

٣.١ التابع K معرف جيدا، إذ إن التابع:

$$\mathbb{R}^+\ni x\mapsto F(x,t)=e^{-\beta^2x^2}\cos tx\in\mathbb{R}$$

قيوس مهما كان $t\in\mathbb{R}$ ، ثمّ إن:

$$|K(t)|\leq\int_0^\infty e^{-\beta^2x^2}\,dx\leq 1+\int_1^\infty e^{-\beta^2x}\,dx=1+\beta^{-2}e^{-\beta^2}<\infty.$$

أمّا فيما يتعمق بالإشتقاق فإننا نلاحظ أن التابع $(x,t)\mapsto F(x,t)$ قابل للإشتقاق نسبة إلى t عند كل نقطة $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\tfrac{\partial F}{\partial t}(x,t)=-xe^{-\beta^2x^2}\sin tx,\ \ (x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}.$$

ثمّ، وعند كل نقطة $t_0\in\mathbb{R}$ ، إنه لدينا، وفقا لدستور التزايدات المتهية (حيث $\theta\in]0,1[$):

$$\left|\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}\right|=xe^{-\beta^2x^2}|\sin[t_0+\theta(t-t_0)]x|\leq xe^{-\beta^2x^2}\doteq g(x)$$

مع $g\in L^1(\mathbb{R}_+)$ ، إذ إنه ينتج من كون $e^t\geq\frac{1}{2}t^2$ مهما كان $t\geq 0$ أن:

$$\int_0^\infty xe^{-\beta^2x^2}\,dx\leq 1+\int_1^\infty xe^{-\beta^2x^2}\,dx=1+\frac{2}{\beta^4}\int_1^\infty x^{-3}\,dx<\infty.$$

إن شروط تطبيق مبرهنة الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة إذن؛ ولذا لدينا:

$$K'(t)=-\int_0^\infty xe^{-\beta^2x^2}\sin tx\,dx,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

٣.٢ لدينا، من أجل كل $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K'(t) &= -\int_0^\infty xe^{-\beta^2x^2}\sin tx\,dx \\ &= \frac{1}{2\beta^2}\int_0^\infty \sin tx\,d[e^{-\beta^2x^2}] \\ &= \frac{1}{2\beta^2}e^{-\beta^2x^2}\sin tx\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{2\beta^2}\int_0^\infty te^{-\beta^2x^2}\cos tx\,dx = -\frac{t}{2\beta^2}K(t). \end{aligned}$$

٣.٣ تكتب المعادلة المحصل عليها في السؤال السابق على الشكل:

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = -\frac{t}{2\beta^2}$$

وحلها العام هو $K(t) = \lambda\exp\{-\frac{t^2}{4\beta^2}\}$ حيث λ ثابت حقيقي. ولتعيين هذا الثابت نرى أنه يحقق $\lambda = K(0)$. لكن، بإجراء التبديل في المتغير $y = \beta x$ ، لدينا:

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-\beta^2x^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}$$

وهذا وفقا لنتيجة حصلنا عليها في الدرس كتطبيق لمبرهنة الإشتقاق تحت إشارة التكامل. إذن:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-\beta^2x^2}\cos tx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}\exp\{-\frac{t^2}{4\beta^2}\},\;\; t\in\mathbb{R}.$$

والجدير بالذكر أن هذا التكامل يستخدم في دراسة إنتشار الحرارة في قضيب مادي.

4.9.3 **حل التمرين الرابع•** لنبدأ الحل بالتذكير بكيفية تعريف تكامل لوبيغ لتابع موجب وقيوس ℓ على فضاء مقياس $(X,\mathcal{A},\mu)$ مع القياس μ موجب. يعرف هذا التكامل على أنه العدد المكتمل $\int_X \ell\,d\mu = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{F}_\ell}\int_X\varphi\,d\mu$ حيث $\mathcal{F}_\ell$ هي مجموعة كل التوابع البسيطة φ التي تحقيق $0\leq\varphi\leq\ell$. ليكن إذن $\varepsilon>0$ معطى. بما أن $|v|$ تابع كمول فرضا فيوجد تابع بسيط φ بحيث $0\leq\varphi\leq|v|$ مع $\int_X|v|\,d\mu-\int_X\varphi\,d\mu\leq\frac{1}{2}\varepsilon$. وبما أن φ تابع بسيط فهو يكتب على الشكل $\varphi=\sum\limits_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ حيث $\{A_i\}_{i=1}^n$ تغطية متهية عناصرها قيوسة وَ $\{a_i\}_{i=1}^n$ أعداد حقيقية موجبة وَ χ_i هي الدالة المميزة للجزء القيوس A_i. ليكن عندئذ E جزء قيوسا من X. بما أن $\{E\cap A_i\}_{i=1}^n\bigcup\{{}^cE\cap A_i\}_{i=1}^n$ يشكل تغطية قيوسة للمجموعة X وَ χ_E معدوم على ${}^cE$ فمن الواضح أن:

$$\int_E \varphi\, d\mu = \int_X \chi_E \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i)$$

ولذا:

$$\int_E \varphi\, d\mu \le \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E) \le \mu(E)\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i + 1\Big] \doteq M\mu(E).$$

واضح عندئذ أنه بأخذ $\eta = \frac{1}{2}\varepsilon M^{-1}$ يكون لدينا، من أجل كل جزء قيوس E من X مع $\eta \ge \mu(E)$ ، ما يلي (حيث φ هو التابع المحصل عليه آنفا):

$$\begin{aligned}
\int_E |v|\, d\mu &= \int_E |v|\, d\mu - \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \varphi\, d\mu \\
&\le \int_X |v|\, d\mu - \int_X \varphi\, d\mu + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap A_i) \\
&\le \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon M^{-1} M \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

هذا يثبت الإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ.

5.9.3 **حل التمرين الخامس•** ٥.١ ليكن A جزء قيوسا. إعتمادا على توطئة فاتو يمكننا أن نكتب $\liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} |v_n|\, d\mu \ge \int_{X\setminus A} |v|\, d\mu$ وكذلك $\liminf_{n\to\infty} \int_A |v_n|\, d\mu \ge \int_A |v|\, d\mu$. وبما أن $|v|$ كمول فرضا فإن $|v_n|$ كمول من أجل n كبير ويمكننا عندها أن نكتب:

$$\int_A |v|\, d\mu = \int_X |v|\, d\mu - \int_{X\setminus A} |v|\, d\mu \quad \text{وَ} \quad \int_A |v_n|\, d\mu = \int_X |v_n|\, d\mu - \int_{X\setminus A} |v_n|\, d\mu$$

ولذا تُمكِّن خواص النهايتين السفلى والعليا من أن نكتب:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_A |v_n|\, d\mu &= \limsup_{n\to\infty} \Big[\int_X |v_n|\, d\mu - \int_{X\setminus A} |v_n|\, d\mu\Big] \\
&= \int_X |v|\, d\mu + \limsup_{n\to\infty} \Big\{- \int_{X\setminus A} |v_n|\, d\mu\Big\} \\
&= \int_X |v|\, d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} |v_n|\, d\mu \\
&\le \int_X |v|\, d\mu - \int_{X\setminus A} |v|\, d\mu = \int_A |v|\, d\mu.
\end{aligned}$$

إذن
$$\limsup_{n\to\infty}\int_A |v_n|\,d\mu \le \int_A |v|\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_A |v_n|\,d\mu$$
ومنه النتيجة $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A |v_n|\,d\mu = \int_A |v|\,d\mu$.

٥.٢ ليكن $\varepsilon > 0$. بما $|v|$ كمول فينتج من الإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ وجود $\eta > 0$ بحيث: $\int_A |v|\,d\mu \le \alpha\varepsilon$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ مع $\mu(A) \le \eta$ حيث $\alpha > 0$ عدد يؤجل تعيينه إلى وقت لاحق. وبما أن $\{v_n\}$ متقاربة ببساطة μ ـ شك على X نحو v فإن مبرهنة إيغوروف تضمن، من أجل العدد η المحصل عليه منذ لحظة، وجود جزء قيوس A_0 مع $\mu(A_0) \le \eta$ والمتتالية $\{v_n\}$ متقاربة بإنتظام نحو v على $X \setminus A_0$. يوجد عندئذ n_1 بحيث $\sup\limits_{X\setminus A_0} |v_n - v| \le \alpha\varepsilon$ مهما كان $n \ge n_1$. ووفقا للسؤال ٥.١، بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{A_0} |v_n|\,d\mu = \int_{A_0} |v|\,d\mu$ فيوجد عدد n_2 بحيث:
$$\Big|\int_{A_0} |v_n|\,d\mu - \int_{A_0} |v|\,d\mu\Big| \le \alpha\varepsilon \quad \forall n_2 \le n.$$
لنضع الآن $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ولنأخذ $n_0 \le n$ لدينا:
$$\begin{aligned}\int_X |v_n - v|\,d\mu &= \int_{A_0} |v_n - v|\,d\mu + \int_{X\setminus A_0} |v_n - v|\,d\mu\\ &\le \int_{A_0} |v_n|\,d\mu + \int_{A_0} |v|\,d\mu + \alpha\varepsilon\mu(X\setminus A_0)\\ &\le 2\int_{A_0} |v|\,d\mu + \alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon\mu(X).\end{aligned}$$
واضح عندئذ أنه بأخذ $\alpha = [3+\mu(X)]^{-1}$ يكون لدينا $\int_X |v_n - v|\,d\mu \le \varepsilon$ مهما كان $n \ge n_0$. الأمر الذي يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |v_n - v|\,d\mu = 0$.

٥.٣ يمكننا أخذ المتتالية التابعية $\{w_n\}$ حيث $w_n = w\chi_{[\frac{1}{n},1]}$ مع $w(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \in]0,1[$. واضح أن المتتالة الموجبة $\{w_n\}$ تتقارب ببساطة نحو w في I ولدينا $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I w_n\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\ n \to \infty = \int_I w\,dx$. لكن $\int_I |w - w_n|\,dx = +\infty$ مهما كان $n \in \mathbb{R}^\star$ ولذا $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I |w - w_n|\,dx = +\infty$.

10.3 حل الموضوع العاشر

1.10.3 حل التمرين الأول• ١.١ بما أن كل تابع f_n مستمر على المجال المتراص $[1,x]$ (حيث $1 < x$) فهو ريمان كمول وعليه فهو لوبيغ كمول على المجال نفسه. ثمّ إنه واضح أن $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty} s^{1/n} = \frac{1}{s}$ مهما كان $s \in [1,x]$. وبما أن $s \le s^{1/n}$ من أجل $1 \le s$ فإن $0 \le f_n(s) \le 1 \doteq g(s)$ مهما كان $s \in [1,x]$ مع g لوبيغ كمول على المجال نفسه. ينتج إذن من مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن:

$$\ln x = \int_1^x \frac{ds}{s} = \int_1^x f(s)\,ds = \lim_{n\to\infty}\int_1^x f_n(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1).$$

٢.١ بما أن $\{2^n(x^{1/2^n}-1)\}$ متتالية مستخرجة من المتتالية $\{n(x^{1/n}-1)\}$ فإنها متقاربية نحو نفس النهاية. إذن:

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}-1),\ \ x > 1.$$

لنفرض أننا عرفنا اللّوغاريتم الطبيعي للعدد $x > 0$ بوضع:

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}-1).$$

لقد رأينا آنفا أن للعبارة السابقة معنى، أي للمتتالية المعتبرة، نهاية، إذا كان $1 < x$. عندئذ، من أجل $1 < x$ وَ $1 < y$ يكون $1 < xy$ ويمكننا أن نكتب، بإعتماد التعريف السابق:

$$\begin{aligned}
\ln(xy) &= \lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}y^{1/2^n}-1)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2^n[(x^{1/2^n}-1)y^{1/2^n}+y^{1/2^n}-1]\\
&= \lim_{n\to\infty} y^{1/2^n}\lim_{n\to\infty} 2^n(x^{1/2^n}-1)+\lim_{n\to\infty} 2^n(y^{1/2^n}-1)\\
&= \ln x + \ln y.
\end{aligned}$$

2.10.3 حل التمرين الثاني• ليكن $0 < x$. لدينا:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(1-\tfrac{x}{n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty}\exp\{n\ln(1-\tfrac{x}{n})\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\{n[-\tfrac{x}{n}+o(\tfrac{x}{n})(\tfrac{x}{n}\to 0)]\} = e^{-x}
\end{aligned}$$

حيث استخدمنا، كما فعلنا في التمرين الثاني من الموضوع التاسع، النشر المحدود من الرتبة 1 للتابع اللّوغاريتمي عند النقطة 1. وكما لاحظ القاريء، أشرنا للتابع الأسي برمزين مختلفين، هما $\exp(\cdot)$ وَ $e^{(\cdot)}$. وبما أن $\ln(1+t) \leq t,\ \forall t > -1$ فإنه، من أجل $n > x > 0$ ، لدينا:

$$\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n x^{\sigma-1} = \exp\Big\{n\ln\Big(1-\frac{x}{n}\Big)\Big\}x^{\sigma-1} \leq e^{-x}x^{\sigma-1}$$

إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n x^{\sigma-1} = e^{-x}x^{\sigma-1} \doteq h(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

إن التابع h يهيمن على التوابع الوجودة تحت إشارة التكامل وبما أنه كمول على $\mathbb{R}_+^\star$ (أنظر حل التمرين الرابع من الموضوع الخامس) وإذا مددنا التابع $(1-\frac{x}{n})^n$ بصفر خارج المجال المذكور فإن مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ تمكننا من أن نكتب:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n x^{\sigma-1}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\chi_{[0,n]}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n x^{\sigma-1}\,dx\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\sigma-1}\,dx
\end{aligned}$$

حيث $\chi_{[0,n]}$ هي الدالة المميزة للمجال $[0,n]$.

3.10.3 **حل التمرين الثالث•** إن التكامل المقصود في هذا التمرين هو طبعا تكامل لوبيغ.

٣.١ التابع J_1 معرف جيدا، إذ إن التابع: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto F(x,t) = \dfrac{1}{t^2+x^2}$ مستمر ولذا فهو قيوس مهما كان $t \in \mathbb{R}^\star$ ، ثمّ إذا كتبنا:

$$0 \leq J_1(t) = \int_0^1 \frac{dx}{t^2+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{t^2+x^2} \leq \frac{1}{t^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{t^2} + 1 < \infty$$

فنرى أن التكامل المعتبر منته ولذا فالتابع J_1 معرف جيدا. ثمّ إن:

$$\left.\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{1}{|t|}\int_0^\infty \frac{d(x/|t|)}{1+(x/|t|)^2} \\ &= \frac{1}{|t|}\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} \\ &= \frac{1}{|t|}\arctan\tau\Big|_{\tau=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2|t|} \doteq \varphi(t),\ \ t\in\mathbb{R}^\star. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

٣.٢ من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+$ يكون التابع $t\in\mathbb{R}^\star \hookrightarrow F(x,t) \in \mathbb{R}$ قابلا للإشتقاق (نسبة إلى t) ولدينا $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = -\frac{2t}{(t^2+x^2)^2},\ t\in\mathbb{R}^\star$. ليكن $t_0 \in \mathbb{R}^\star$. بأخذ t في المجال $[\frac{1}{2}t_0, \frac{3}{2}t_0]$ إذا كان $t_0 > 0$ وفي المجال $[\frac{3}{2}t_0, \frac{1}{2}t_0]$ إذا كان $t_0 < 0$ فبتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية نسبة إلى المتغير t يمكننا أن نكتب (حيث c نقطة محصورة تماما بين $\frac{1}{2}t_0$ وَ $\frac{3}{2}t_0$):

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}\right| &= \left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,c)\right| = \frac{2|c|}{(c^2+x^2)^2} \\ &\le \frac{3|t_0|}{(t_0^2/4+x^2)^2} \doteq h(x), \\ &\quad \forall x\in\mathbb{R}_+, \forall t\in\mathbb{R}^\star,\ \ |t| \in \left]\frac{1}{2}|t_0|, \frac{3}{2}|t_0|\right[. \end{aligned}$$

بما أن $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$ فيمكننا إذن أن نشتق تحت إشارة التكامل لنحصل على:

$$J_1'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t^2+x^2}\Big]\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2t\,dx}{(t^2+x^2)^2}.$$

ومنه بإشتقاق العلاقة (10.3) نسبة إلى t :

$$\begin{aligned} J_2(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t^2+x^2)^2} &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2t^3},\ \ t>0, \\ J_2(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t^2+x^2)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\pi}{2t^3},\ \ t<0. \end{aligned}$$

يمكننا أن نثبت وبنفس الطريقة أنه يمكن إشتقاق التابع J_2 وبصفة عامة التابع J_n نسبة إلى t لنحصل على العلاقة:

$$J_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(t^2+x^2)^n} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)}\frac{\pi}{2|t|^{2n-1}}, \quad \forall t\in\mathbb{R}^\star,\ \forall n\geq 2.$$

التي يمكنك أن تبرهن عليها بالتدريج.

4.10.3 **حل التمرين الرابع•** ٤.١ ليكن $0<\varepsilon$. بما أن $g \in L^1(X,\mu)$ فإن الإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ (أنظر السؤال ٤ من الموضوع التاسع) يقتضي وجود عدد $0<\eta$ بحيث يكون لدينا $\int_A g\,d\mu \leq \varepsilon$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ مع $\mu(A) \leq \eta$. ينتج عندها من كون $|v_n| \leq g$ ، μ ـ شك على X أن:

$$\textstyle\int_A |v_n|\,d\mu \leq \varepsilon,\ \forall A\in\mathcal{A}, \mu(A)\leq\eta,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,$$

أي أن $\{v_n\}$ كمولة بالتساوي على X.

٤.٢ ليكن $0<\varepsilon$. بما أن $v \in L^1(X,\mu)$ فيوجد عدد $0<\eta'$ بحيث يكون لدينا $\int_A |v|\,d\mu \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ مهما كان $A\in\mathcal{A}$ مع $\mu(A)\leq\eta$ وبما أن $\{v_n\}$ تتقارب نحو v في الفضاء $L^1(X,\mu)$ فيوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون لدينا:

$$\textstyle\int_X |v_n - v|\,d\mu \leq \frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\ n\geq n_0.$$

وبالتالي، من أجل $A\in\mathcal{A}$ مع $\mu(A)\leq\eta$ وَ $n_0\leq n$ ، يكون لدينا:

$$\int_A |v_n|\,d\mu \leq \int_X |v_n - v|\,d\mu + \int_A |v|\,d\mu \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

ثمّ إنه ينتج من كون التوابع v_1 ، v_2 ، ... ، v_{n_0-1} كمولة ومن الإستمرار المطلق لتكامل لوبيغ وجود عدد $0<\eta''$ بحيث يكون لدينا:

$$\int_A |v_i|\,d\mu \leq \varepsilon,\ \forall A\in\mathcal{A},\ \mu(A)\leq\eta'',\ \forall i=1,\ldots,n_0-1.$$

واضح عندها أنه، من أجل $\eta=\min\{\eta',\eta''\}$ ، لدينا:

$$\int_A |v_n|\,d\mu \leq \varepsilon,\ \forall A\in\mathcal{A},\ \mu(A)\leq\eta,\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,$$

أي أن $\{v_n\}$ كمولة بالتساوي.

٤.٣ لدينا بسبب زوجية التابع الموجب w_n :

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,dx = 6n\int_{0}^{1/n}(1-n^2x^2)\,dx = 6-2=4.$$

لنأخذ مثلا $\varepsilon = 3$. واضح أنه من أجل $\eta > 0$ كيفي مثبت يوجد عدد n_0 بحيث يكون $\eta > \frac{2}{n_0}$ وبالتالي يكون طول المجال $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ أقل من η مهما كان $n_0 \leq n$ ولدينا:

$$\int_{I_n} w_n(x)\,dx = 4 > 3,\ \ \forall n \geq n_0.$$

الأمر الذي يعني أن $\{w_n\}$ ليست كمولة بالتساوي.

5.10.3 **حل التمرين الخامس•** ليكن $\varepsilon = 1$. بما أن المتتالية $\{\psi_n\}$ ، التي عناصرها من $L^1(\Omega)$، كمولة بالتساوي على $\Omega =]a,b[$ فيوجد عدد $\eta > 0$ بحيث يكون لدينا:

$$\textstyle\int_A |\psi_n|\,d\mu \leq 1,\ \ \forall A \in \mathcal{L}_\Omega,\ \ |A| \leq \eta,\ \ \forall n \geq 1.$$

أشرنا هنا بـ $\mathcal{L}_\Omega$ إلى أجزاء Ω القيوسة حسب لوبيغ وبـ $|A|$ إلى قياس لوبيغ للجزء القيوس $A \subset \Omega$.

وبما أن $\overline{\Omega} = [a,b]$ متراص فيمكن تغطيته بعدد منته من المجالات المفتوحة طول كل منها أقل من η ولذا، إذا أشرنا بـ I_1 ، ... ، I_m إلى تقاطع هذه المجالات من Ω فإن $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i$ وعليه:

$$\textstyle\int_{I_i} |\psi_n|\,dx \leq 1,\ \ \forall i = 1,\ldots,m,\ \ \forall n \geq 1.$$

إذا ثبتنا $i \in \{1,\ldots,m\}$ واستخدامنا التقارب البسيط للمتتالية $\{\psi_n\}$ نحو ψ وتوطئة فاتو نجد:

$$\int_{I_i} |\psi|\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{I_i} |\psi_n|\,dx \leq 1,$$

ومنه

$$\int_{\Omega} |\psi|\,dx \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{I_i} |\psi|\,dx \leq m.$$

هذا يعني أن $\psi \in L^1(\Omega)$. ليكن الآن $\varepsilon > 0$. بما أن تكامل لوبيغ مستمر مطلقا والمتتالية $\{\psi_n\}$ كمولة بالتساوي على Ω فيوجد $\eta > 0$ بحيث:

$$\int_A |\psi|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \int_A |\psi_n|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall A \in \mathcal{L}_\Omega, \ |A| \leq \eta, \ \forall n \geq 1.$$

ومن أجل $\eta > 0$ هذا وبما أن $\{\psi_n\}$ متقاربة ببساطة نحو ψ على المجموعة Ω ذات قياس منته فإن مبرهنة إيغوروف تقتضي وجود جزء من Ω لوبيغ قيوس E مع $|E| \leq \eta$ وَ $\{\psi_n\}$ متقاربة بإنتظام على $\Omega \setminus E$ نحو ψ. يوجد إذن $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث يكون لدينا $\frac{\varepsilon}{3} \geq |\Omega| \sup\limits_{\Omega\setminus E} |\psi_n - \psi|$ من أجل كل $n \geq n_0$. واضح عندئذ أنه لدينا:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\psi_n - \psi|\, dx &= \int_{\Omega\setminus E} |\psi_n - \psi|\, dx + \int_E |\psi_n - \psi|\, dx \\ &\leq |\Omega| \sup_{\Omega\setminus E} |\psi_n - \psi| + \frac{2}{3}\varepsilon \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |\psi_n - \psi|\, dx = 0$.

11.3 حل الموضوع الـ 11

1.11.3 حل التمرين الأول• لدينا تعريفا $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m \Big)$ وَ $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m \Big)$. وبما أن:

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=n}^{\infty} [m, 2m] \times [0,\, 1 + (-1)^m] = \emptyset,$$

لأن إنتماء عنصر (a, b) من $\mathbb{R}^2$ إلى التقاطع السابق يقتضي أن يكون a أكبر من أي عدد طبيعي n وهذا غير ممكن، وكذا $\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m \subset [n, +\infty[\times [0,\, 2]$ فإنه لدينا:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \emptyset = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

هذا يبين أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة نحو الجزء الخالي $\emptyset$.

2.11.3 حل التمرين الثاني• بما أن f لوبيغ كمول فهو لوبيغ قيوس وبما أن $x \longmapsto x+t$ مستمر في $\mathbb{R}_+^\star$ ولا ينعدم مهما كان $t > 0$ فإن التابع $x \longmapsto \frac{f(x)}{t+x}$ لوبيغ قيوس. ثمّ، بما أنه لدينا، شبه كليا نسبة إلى x : $\frac{f(x)}{t+x} \leq \frac{f(x)}{t}, \ \forall t > 0$ فإن التابع $x \longmapsto \frac{f(x)}{t+x}$ كمول على $\mathbb{R}_+^\star$ مهما كان $t > 0$. إذن التابع g معرف جيدا.

١.٢ لتكن t_∞ نقطة من $\mathbb{R}_+^\star$. ولتكن $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية من $\mathbb{R}_+^\star$ متقاربة نحو t_∞. يمكننا إذن أن نفرض أن $t_n \geq \frac{1}{2}t_\infty$ مهما كان $n \geq 1$. ولتكن التوابع الكمولة $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة في $\mathbb{R}_+^\infty$ بأن $\varphi_n(x) = \frac{f(x)}{t_n+x}$. إنه لدينا، x شبه كليا:

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{|f(x)|}{t_n+x} \leq \frac{|f(x)|}{t_n} \leq \frac{2}{t_\infty}|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}_+^\star), \ \forall n \geq 1.$$

ثمّ إن، شبه كليا نسبة إن x :

$$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_\infty(x) = \frac{f(x)}{t_\infty + x}$$

ينتج عندها من مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t_n+x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{t_\infty + x}\,dx.$$

إذن g مستمر في $\mathbb{R}_+^\star$.

٢.٢ ليكن التابع $F(\cdot,\cdot)$ المعرف على $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ بأن $F(x,t) = \dfrac{f(x)}{t+x}$.
إذا كانت t_0 نقطة من $\mathbb{R}_+^\star$ فمن أجل $t \geq \frac{1}{2}t_0$ يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-\frac{f(x)}{(t+x)^2}\right| &\leq \frac{4}{t^2}|f(x)| \\ &\leq \frac{4}{t_0^2}|f(x)| \doteq \gamma(x) \in L^1(\mathbb{R}_+), \ \forall t \geq \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

ولذا، من أجل كل $t \geq \frac{1}{2}t_0$ وبإستخدام مبرهنة التزايدات المتهية نسبة إلى المتغير t ، نرى أنه:

$$\left|\frac{F(x,t) - F(x,t_0)}{t-t_0}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial t}(x, t_0 + \theta(t-t_0))\right| \leq \gamma(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

يمكن عندئذ تطبيق المبرهنة المتعلقة بالإشتقاق تحت إشارة تكامل لوبيغ: g قابل للإشتقاق عند t_0 ولدينا:

$$g'(t_0) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)\,dx = -\int_0^\infty \frac{f(x)}{(t+x)^2}\,dx.$$

3.11.3 **حل التمرين الثالث•** لتكن $\{r_n\}$ متتالية متزايدة عناصرها موجبة وتتقاب نحو $+\infty$ ولنضع $h_n(x) = \chi_{\{|h|>r_n\}}|h(x)|,\ x \in X$ ، حيث يشير $\chi_{\{|h|>r_n\}}$ إلى الدالة المميزة للمجموعة $\{|h| > r_n\}$. واضح أن $0 \leq h_n \leq |h| \in L^1(X,\mu)$. وبما أن h كمول فهو منته μ ـ شك على X ولذا فإن:

$h_n(x) \to 0$ ، μ ـ شك على X .

ينتج عندها من مبرهنة التقارب بالهيمنة أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\{|h|>r_n\}} |h(x)|\,d\mu = 0$$

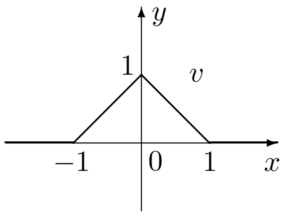
هذا يستلزم أن $\lim_{r\to+\infty} \int_{\{|h|>r\}} |h(x)|\,d\mu = 0$.

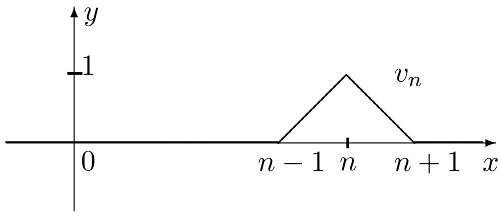
4.11.3 **حل التمرين الرابع•** يمكنك أن تتأكد من أن بيانا v وَ v_n هما المعطيان في الشكل الوارد أدنه. إنك تحصل على بيان v_n بسحب بيان v إلى يمين بمقدار n وحدة.

٤٫١ ليكن $x \in \mathbb{R}$. من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $x < n-1$ فإن $v_n(x) = 0$ ولذا لدينا $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0 = v_\infty(x)$. إذن $\{v_n\}$ متقاربة ببساطة على $\mathbb{R}$ نحو التبع $v_\infty \equiv 0$.

٤٫٢ ليكن r عددا حقيقيا موجبا. إدا كان $r \geq 1$ فإن المجموعة $\{|v_n| > r\}$ خالية إذ إن كل قيم v_n أقل من 1. ولذا $\int_{\{|v_n|>r\}} |v_n|\,dx = 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ومهما كان $r \geq 1$ ولذا فإن:

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\{|v_n|>r\}} |v_n|\,dx = 0.$$





٤.٣ بما أن تكامل لوبيغ لا يتغير من جراء الإنسحابات فإن تكامل v_n يساوي تكامل v على $\mathbb{R}$ وبما أن تكامل v هو مساحة المثلث الذي رؤوسه $(-1,0)$ وَ $(1,0)$ وَ $(0,1)$ فإن $\int_{\mathbb{R}} v_n\,dx = 1$. إذن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} v_n\,dx = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} v_\infty\,dx.$$

5.11.3 **حل التمرين الخامس•** ٥.١ ليكن $\varepsilon = 1$. بما أن المتتالية $\{u_n\}$ كمولة بانتظام على المجموعة X فيوجد عدد $0 < r_0$ بحيث يكون لدينا:

$$\sup_{n\geq 1}\int_{|u_n|>r} |u_n|\,d\mu \leq 1,\ \ \forall r \geq r_0.$$

عندئذ يمكننا أن نكتب، من أجل $r = r_0$:

$$\begin{aligned}\int_X |u_n|\,d\mu &= \int_{|u_n|\leq r_0} |u_n|\,d\mu + \int_{|u_n|>r_0} |u_n|\,d\mu\\ &\leq \int_{|u_n|\leq r_0} r_0\,d\mu + 1 \leq r_0\mu(X) + 1 \doteq M,\ \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

٥.٢ بما أن متتالية التوابع القيوسة $\{u_n\}$ متقاربية ببساطة نحو التابع u ، μ ـ شك على X فهو قيوس وبما أنها كمولة بانتظام على المجموعة X فإنها تحقق المتباينة الواردة في السؤال ٥.١ ولذا ينتج من توطئة فاتو المطبقة على التوابع الموجبة $\{|u_n|\}$ أن $\int_X |u|\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X |u_n|\,d\mu \leq M$ ، أي أن u كمول على X .

٥.٣ ليكن $0 < \varepsilon$. بما أن u كمول وتكامل لوبيغ مستمر مطلقا فيوجد $0 < \eta$ بحيث:

$$\int_E |u|\,d\mu \leq \alpha\varepsilon,\ \ \forall E \in \mathcal{A},\ \ \mu(E) \leq \eta. \tag{11.3}$$

حيث α عدد موجب يؤجل إختياره. ثمّ، حسب متباينة تشيبتشيف وإعتمادا على السؤال ٥.١، إنه لدينا، من أجل $n \geq 0$ وَ $0 < r$:

$$\mu(\{|u_n| > r\}) \leq \frac{1}{r}\int_X |u_n|\,d\mu \leq \frac{M}{r}.$$

يمكن إذن بأخذ r كبير، قل $r_1 < r$ $(0 <)$ أن نجعل:

$$\mu(\{|u_n| > r_1\}) \leq \eta,\ \forall n \geq 1. \tag{12.3}$$

وبما أن $\{u_n\}$ كمولة بإنتظام على المجموعة X فإنه يوجد $r_1 \leq r_0$ بحيث:

$$\sup_{n\geq 1}\int_{\{|u_n|>r_0\}} |u_n|\,d\mu \leq \alpha\varepsilon. \tag{13.3}$$

لنعتبر الآن التوابع $w_n(x) = |u_n(x) - u(x)|$ ، $x \in X$. لدينا:

$w_n \longrightarrow 0$ ، μ ـ شك على X

ثمّ، بكتابة التكامل على الشكل $\int_X |u_n - u|\,d\mu = I_n + J_n$ حيث

$$I_n = \int_{\{|u_n|\leq r_0\}} |u_n - u|\,d\mu \quad \text{وَ} \quad J_n = \int_{\{|u_n|>r_0\}} |u_n - u|\,d\mu$$

فنستطيع أن نكتب، وفقا للعلاقات (11.3) وَ (12.3) وَ (13.3) :

$$\begin{aligned} J_n &\leq \sup_{m\geq 1}\int_{\{|u_m|>r_0\}} |u_n|\,d\mu + \int_{\{|u_n|\leq r_0\}} |u|\,d\mu \\ &\leq \alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon. \end{aligned}$$

أمّا المقدار I_n فيكتب $I_n = \int_X |w_n|\chi_{\{|u_n|\leq r_0\}}\,d\mu$ حيث $\chi_{\{|u_n|\leq r_0\}}$ هي الدالة المميزة للمجموعة $\{|u_n| \leq r_0\}$. واضح أن $w_n\chi_{\{|u_n|\leq r_0\}} \to 0$ ، μ ـ شك على X مع

$$w_n\chi_{\{|u_n|\leq r_0\}} \leq \{|u_n| + |u|\}\chi_{\{|u_n|\leq r_0\}} \leq r_0 + |u| \in L^1(X,\mu)$$

ينتج إذن من مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. عندئذ، من أجل n كبير، قل $n \geq n_0$ ، يمكننا أن نجعل I_n أقل من $\alpha\varepsilon$. واضح عندها أنه وبأخذ $\alpha = \frac{1}{3}$ يكون لدنا $\int_X |u_n - u|\,d\mu \leq \varepsilon$ ، $\forall n \geq n_0$. هذا يستلزم أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X u_n\,d\mu=\int_X u\,d\mu.$$

12.3 حل الموضوع الـ 12

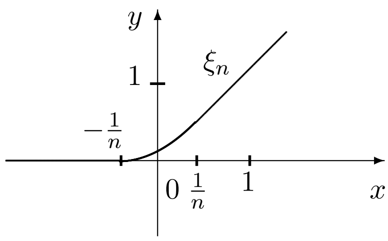
1.12.3 **حل التمرين الأول•** ١٠١ التابع ξ معدوم على المجال $]-\infty,0]$ وهو يساوي x على المجال $[0,+\infty[$ ، إنه إذن مستمر على $\mathbb{R}$ وقابل للإشتقاق في $\mathbb{R}^\star$ ؛ إلا أنه غير قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0=0$.

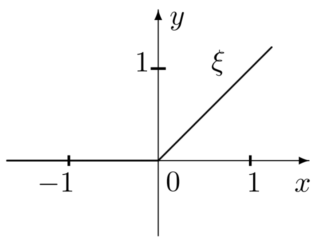
١٠٢ من أجل $x\le\frac{-1}{n}$ يكون $x+\frac{1}{n}\le 0$ ولذا يكون $\xi_n(x)=0$ ، ومن أجل $x\ge\frac{1}{n}$ يكون $x-\frac{1}{n}\ge 0$ ولذا:

$$\xi_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}t\,dt=\left.\frac{n}{4}t^2\right|_{t=x-\frac{1}{n}}^{t=x+\frac{1}{n}}=x,$$

أمّا من أجل $x\in]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ ، أي $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ ، فلدينا:

$$\xi_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{0}0\,dt+\frac{n}{2}\int_{0}^{x+\frac{1}{n}}t\,dt=\frac{n}{4}(x+\frac{1}{n})^2.$$





١٠٣ التابع ξ_n معدوم في المجال $]-\infty,-\frac{1}{n}[$ فهو إذن قابل للإشتقاق في هذا المجال؛ إنه قابل للإشقاق كذلك في المجال $]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$ مع $\xi_n'(x)=\frac{n}{2}(x+\frac{1}{n})$ وكذلك في المجال $]\frac{1}{n},+\infty[$ وبمشتق يساوي 1. بما أن المشتق من اليسار عند النقطة $-\frac{1}{n}$ يساوي 0 والمشتق من اليمين يساوي 0 فإن ξ_n قابل للإشتقاق عند النقطة $-\frac{1}{n}$. وبما أن المشتق من اليسار عند النقطة $\frac{1}{n}$ يساوي 1 والمشتق من اليمين يساوي 1 فإن ξ_n قابل للإشتقاق عند النقطة $\frac{1}{n}$. إذن ξ_n قابل للإشتقاق في $\mathbb{R}$ ثمّ إنه واضح أن ξ_n' مستمر على $\mathbb{R}$.

١٠٣ إنه لدينا:

$$|\xi_n(x)-\xi(x)| = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } \frac{1}{n}\leq |x| \\ \frac{n}{4}(x+\frac{1}{n})^2 & \text{إذا كان } -\frac{1}{n}<x\leq 0 \\ \frac{n}{4}(x+\frac{1}{n})^2-x & \text{إذا كان } 0\leq x<\frac{1}{n} \text{ .} \end{cases}$$

وعليه فإن:

$$\max_{\mathbb{R}}|\xi_n-\xi| = \max_{[-\frac{1}{n},0]}|\xi_n-\xi| = \max_{[0,\frac{1}{n}]}|\xi_n-\xi| = \xi_n(0) = \frac{1}{4n}$$

وواضح عندها أن $\{\xi_n\}$ متقاربة بإنتظام نحو التابع ξ.

2.12.3 **حل التمرين الثاني•** ٢٠١ ليكن $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}_{a,b}$ جزء $\mathcal{P}_{a,b}$ المكون من التقسيمات $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ حيث $n \ni \mathbb{N}^\star$ وَ $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ مع $i = 1$ ، ... ، n . بما أن $\delta P_n = \frac{b-a}{n}$ فمن الواضح أن $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}_{a,b}$ جزء متجه نحو الصفر.

٢٠٢ إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ وأشرنا كالعادة بِـ $\int_a^b f\,dg$ إلى تكامل f نسبة إلى g على المجال نفسه فمن أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث يكون لدينا:

$$|\int_a^b f\,dg - S(f,g,P,Q)| \leq \varepsilon, \qquad \begin{array}{l}\forall P \in \mathcal{P}_{a,b},\ \delta P \leq \rho, \\ \forall Q \in \mathcal{W}(P),\ (P^\star = P \setminus \{a\}).\end{array}$$

واضح عندها أنه لدينا بصفة خاصة:

$$|\int_a^b f\,dg - S(f,g,P,P^\star)| \leq \varepsilon,\ \ \forall P \in \mathcal{P}^0_{a,b},\ \ \delta P \leq \rho.$$

إذن النهاية المذكورة موجودة وهي تساوي $\int_a^b f\,dg$ ، أي أن:

$$\lim_{\substack{\delta P \to 0 \\ P \in \mathcal{P}^0_{a,b}}} S(f,g,P,P^\star) = \int_a^b f\,dg.$$

هذا يعي أنه، وفي حالة وجود التكامل $\int_a^b f\,dg$ ، يمكن لحساب قيمته الإقتصار على جزء من $\mathcal{P}_{a,b}$ متجه نحو الصفر.

٢٠٣ تعطى نقاط $P_n(\lambda)$ بأن:

$$x_0 = 0 \qquad \wedge \qquad x_i = \lambda^{n-i}b,\ \ i = 1, \ldots, n,$$

وبالتالي هي بحيث يكون:

$$x_{i+1} = \lambda^{n-i-1}b = \lambda^{n-i}b\frac{1}{\lambda} = x_i\frac{1}{\lambda} > x_i,\ \ i = 1, \ldots, n-1$$

لأن $\lambda \in]0,1[$. إذن نقاط $P_n(\lambda)$ متزايدة تماما مع $x_0 = a$ وَ $x_n = b$ ولذا يشكل $P_n(\lambda)$ تقسيما للمجال $[a,b]$. ثمّ إن:

$$\delta x_1 = x_1 - x_0 = \lambda^{n-1} b,$$

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1} = \lambda^{n-i} b(1-\lambda),\ i = 2, \ldots, n;$$

$$\delta x_{i+1} = \lambda^{n-i-1} b(1-\lambda) = \delta x_i \lambda^{-1},\ i = 2, \ldots, n-1.$$

إذن: $\max\{\delta x_i \mid i = 2, \ldots, n\} = \delta x_n = b(1-\lambda)$ ، ومنه:

$$\delta P_n(\lambda) = \max\{\lambda^{n-1} b, b(1-\lambda)\}\cdot$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^{n-1} b = 0$ وَ $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1} b(1-\lambda) = 0$ فإن مجموعة التقسيمات $\mathcal{P}^0_{0,b}$ متجهة نحو الصفر، لأنه، من أجل $\rho > 0$ معطى، فإذا أردنا أن نجعل $\delta P_n(\lambda)$ أقل من ρ فيكفي أن نأخذ λ قريبا من 1 لكي يكون $b(1-\lambda) \le \rho$ ثمّ نأخذ n كبيرا لكي يكون $\lambda^{n-1} b \le \rho$.

3.12.3 حل التمرين الثالث•

٣.١ بما أن m موجب تماما فالتابع $[0,b] \ni x \mapsto x^m \in \mathbb{R}$ متزايد وبما أن التابع $x \mapsto x$ مستمر على نفس المجال فإن تكامل ستيلجس $\int_0^b x\, d(x^m)$ موجود.

٣.٢ إن نقاط التقسيم $P_n(\lambda)$ والتقسيم الوسط نسبة إليه معطاة بأن:

$$x_0 = 0,\ x_i = \lambda^{n-i} b = \xi_i^\star,\ i = 1, \ldots, n$$

ولذا:

$$\begin{aligned}
S(x, x^m, P_n(\lambda), P_n^\star(\lambda)) &= \xi_1 x_1^m + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{n-i} b[(\lambda^{n-i} b)^m - (\lambda^{n-i+1} b)^m] \\
&= (\lambda^{n-1} b)^{m+1} + b^{m+1}(1-\lambda^m) \sum_{i=2}^{n} \lambda^{(m+1)(n-i)} \\
&= (\lambda^{n-1} b)^{m+1} + b^{m+1}(1-\lambda^m) \frac{1-(\lambda^{m+1})^{n-1}}{1-(\lambda^{m+1})}\cdot
\end{aligned}$$

واضح عندها أن جعل n يؤول نحو $+\infty$ يعطي:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S(x,x^m,P_n(\lambda),P_n^\star(\lambda)) &= b^{m+1}\frac{1-\lambda^m}{1-\lambda^{m+1}}\\
&= b^{m+1}\frac{1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1}}{1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1}+\lambda^m}\\
&\doteq S(\lambda).
\end{aligned}$$

ومنه بجعل λ يؤول نحو الواحد:

$$\int_0^b x\,d(x^m)=\lim_{\lambda\to1}S(\lambda)=\frac{m}{m+1}b^{m+1}.$$

٣.٢ بما أن التابع $x \longmapsto x^m$ قابل للإشتقاق بالإستمرار على $[0,b]$ والتابع $x \longmapsto x$ ريمان كامل على المجال نفسه فيمكن تحويل تكامل ستيلجس المعتبر إلى تكامل ريمان ولدينا:

$$\int_0^b x\,d(x^m)=\int_0^b x(mx^{m-1})\,dx=m\frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_{x=0}^{x=b}=\frac{m}{m+1}b^{m+1}.$$

4.12.3 **حل التمرين الرابع•** ٤.١ إذا كان C خاليا كان من نوع G_δ لأن $\emptyset$ مفتوح. لنفرض إذن أن C غير خال. وليكن $n \in \mathbb{N}^\star$ وَ $x_0 \in C$. بما أن h مستمر عند النقطة x_0 فيوجد مجال مفتوح $I_n(x_0)$ مركزه x_0 وبحيث:

$$|h(x)-h(x_0)|<\frac{1}{n},\ \forall x\in I_n(x_0).$$

إذا ثبتنا n وجعلنا x_0 يتغيّر في C فنتمكن من إنشاء جماعة من المجالات المفتوحة بالمواصفات المذكورة آنفا. ولنضع $V_n=\bigcup\limits_{x_0\in C} I_n(x_0)$. إن V_n مفتوح ثمّ إن تقاطع كل هذه الأجزء من أجل n يتغير في $\mathbb{N}^\star$ يعطي C ، أي أن: $C=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} V_n$. ولكي نثبت هذه المساواة المجموعاتية نأخذ أولا عنصرا t_0 من $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star} V_n$ ونثبت $\varepsilon>0$. يوجد $n \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $\frac{2}{n_0}<\varepsilon$ وبما أن $t_0 \in V_{n_0}$ فيوجد $x_0 \in C$ بحيث يكون $t_0 \in I_n(x_0)$. إذن من أجل كل $x \in I_n(x_0)$ يكون لدينا:

$$|h(x)-h(t_0)|\le|h(x)-h(x_0)|+|h(x_0)-h(t_0)|\le\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}=\frac{2}{n_0}<\varepsilon.$$

إذن $|h(x) - h(t_0)| < \varepsilon,\ \forall x \in I_n(x_0)$. هذا يثبت أن التابع h مستمر عند النقطة t_0 ، إذن $t_0 \in C$.

ليكن ثانيا $t_0 \in C$. بما أن $t_0 \in I_n(t_0)$ مهما كان n من $\mathbb{N}^\star$ فإن $t_0 \in V_n$ مهما كان n من $\mathbb{N}^\star$. إذن $t_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} V_n$.

٤.٢ إننا برهنا في الدروس النظرية أن المجموعة $\mathbb{Q}$ ليست من نوع G_δ (راجع [٣] أو [11] مثلا) ولذا فإنه لا يمكن ـ وفقا للسؤال السابق ـ لتابع حقيقي ذي متغير حقيقي أن يكون مستمرا فقط على مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$.

5.12.3 حل التمرين الخامس•

٥.١ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم وليكن تقسيم المجال $[0,1]$ المكون من النقاط:

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n_-1},\ \cdots,\ \frac{1}{2},\ 1.$$

ولنأخذ في كل قطعة $[0,\frac{1}{n}]$ ، $[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}]$ ، ... ، $[\frac{1}{2},1]$ عددا أصم فنحصل على النقاط y_1 ، y_2 ، ... ، y_n على التوالي؛ ولنأخذ التقسيم P_n للمجال $[0,1]$ الذي نقاطه هي:

$$x_0 = 0,\ \ x_{2i} = \frac{1}{n-i+1}, \quad x_{2i-1} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

يعطى تغيّر التابع ϕ نسبة إلى P_n على $[0,1]$ بأن:

$$\begin{aligned}
V_\phi(P_n) &= \sum_{j=1}^{2n} |\phi(x_j) - \phi(x_{j-1})| \\
&= |\phi(x_1) - \phi(x_0)| + |\phi(x_2) - \phi(x_1)| + |\phi(x_3) - \phi(x_2)| + \\
&\qquad \cdots + |\phi(x_{2n}) - \phi(x_{2n-1})| \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 \\
&= 2\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

الأمر الذي يبين أن تغيّر التابع ϕ على المجال $[0,1]$ غير محدود إذ إن السلسلة التوافقية تؤول نحو $+\infty$.

٥.٢ ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد عدد منته فقط من الأعداد الناطقة $\frac{p}{q}$ (مع p وَ q أوليين فيما بينهما) التي تنتمي إلى $[0,1]$ (إذن $p \leq q$) وبحيث $\frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ؛ إنها إذن الأعداد التي تحقق مقاماتها q المتناينة $q \leq \frac{2}{\varepsilon}$. ليكن N عدد هذه العناصر الناطقة وليكن n عددا طبيعيا بحيث يكون $\frac{N}{n}$ أقل من $\frac{\varepsilon}{2}$ ولنعتبر التقسيم P_n ، للمجال $[0,1]$ ، المتساوي القطع والذي وسيطه $\delta P_n = \frac{1}{n}$. بما أن كل قطعة $I_i \doteq [x_{i-1}, x_i]$ من قطع P_n تحتوي على عدد أصم فإن $m_i \doteq \inf\limits_{I_i} \phi = 0$ ولذا يكون مجموع ريمان السفلى $\overline{R}(\phi, P_n) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \delta x_i = 0$. ثمّ، وبما أن قطع P_n التي تحتوي على عناصر ناطقة بحيث $q \leq \frac{\varepsilon}{2}$ لا تربو عدتها العدد N ، فإذا أشرنا بِـ A إلى مجموعة أدلتها وبِـ B إلى الأدلة المتبقية وأخذنا بعين الإعتبار أن $M_i \doteq \sup\limits_{I_i} \phi \leq 1$ (هذا من تعريف ϕ) فإننا نستطيع تقدير مجموع ريمان العلوي $\underline{R}(\phi, P_n)$ كالتالي:

$$\begin{aligned}
\underline{R}(\phi, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i &= \sum_{i \in A} M_i \delta x_i + \sum_{i \in B} M_i \delta x_i \\
&= \frac{N}{n} + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

وجدنا إذن تقسيما P_n للمجال $[0,1]$ بحيث $\underline{R}(\phi, P_n) - \overline{R}(\phi, P_n) \leq \varepsilon$. هذا يبين قابلية التابع ϕ للمكاملة حسب ريمان على المجال المذكور مع $\int_0^1 \phi = 0$.

لو كان التابع ϕ يتمتع بتابع أصلي Φ على المجال $[0,1]$ لكان $\Phi'(x) = \phi(x)$ ، مهما كان $x \in [0,1]$ ومنه بالمكاملة $\Phi(x) - \Phi(0) = \int_0^x \phi(t)\, dt = 0$ مهما كان $x \in [0,1]$ ولذا يكون Φ ثابتا على المجال المعتبر ولذا $\Phi'(x) = 0 = \phi(x)$ ، مهما كان x من المجال $[0,1]$ وهذا محال. لا يمكن إذن أن يتمتع التابع ϕ بتابع أصلي على المجال $[0,1]$.

٥.٣ لتكن x_0 نقطة صماء من $[0,1]$ وليكن $\varepsilon > 0$; بما أن $\phi(x_0) = \phi(x) = 0$ مهما كان $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ فإن $|\phi(x) - \phi(x_0)| = 0 \leq \varepsilon$ مهما كان $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. ثمّ إن الأعداد الناطقة المنتمية إلى $]0,1]$ التي لا تحقق $|\phi(x)| \leq \varepsilon$ هي التي تكتب على على الشكل غير القابل للإختزال $\frac{p}{q}$ وبحيث $\frac{1}{q} > \varepsilon$ أي أنها بحيث $0 < p < q < \varepsilon$ مع p وَ q من $\mathbb{N}$. لا يوجد طبعا إلا عدد منته من مثل هذه الأعداد الناطقة: r_1 ،

... ، r_k. واضح عندئذ أننا، بوضع $\alpha = \frac{1}{2}\min\{|x_0 - r_i| \mid i = 1, \dots, k\}$ ، نرى أن $\alpha > 0$ وأن $|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq \varepsilon$ مهما كان $[0,1] \ni x$ مع $|x_0 - x| \leq \alpha$. إذن ϕ مستمر عند كل نقطة من $[0,1]$ صماء.

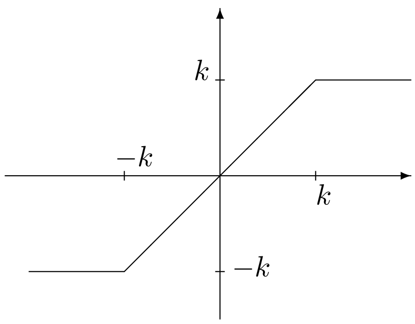
لتكن r_0 نقطة من $[0,1]$ ناطقة. بما أنه يمكن إنشاء متتالية من الأعداد الصماء المتقاربة نحو r_0 فإذا كانت للتابع ϕ نهاية عند r_0 عندما يؤول x نحو r_0 فإن هذه النهاية هي $\ell = 0$. ليكن الآن ε. بما أن الإستدلال السابق يبين أن عدد الأعداد الناطقة المنتمية إلى $[0,1]$ والمختلفة عن r_0 والتي لا تحقق $|\phi(x)| \leq \varepsilon$ منته فإن التابع يقبل $\ell = 0$ كنهاية عند النقطة الناطقة r_0 عندما يؤول x نحو r_0 بقيم تختلف عن r_0. إذن:

$$\lim_{x \not\to r} \phi(x) = 0 \text{ مهما كان } r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} .$$

13.3 حل الموضوع الـ 13

1.13.3 حل التمرين الأول• ١٠١ يمكنك أن تتأكد من أن $T_k(t) = -k$ إذا كان $-k \geq t$ وَ $T_k(t) = t$ من أجل $k \geq t \geq -k$ وَ $T_k(t) = k$ إذا كان $k \leq t$ ومنه بيان T_k :

$$T_k(t) = \frac{1}{2}\Big\{|t+k| - |t-k|\Big\},\ t \in \mathbb{R}$$



لكي نبين أن T_k قيوس يكفي أن نثبت أن $T_k^{-1}(]-\infty, \alpha])$ قيوس مهما كان $\mathbb{R} \ni \alpha$. ليكن إذن $\mathbb{R} \ni \alpha$. إذا كان $k \leq \alpha$ كان $T_k^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \mathbb{R}$ وإذا كان $[-k, k[\ni \alpha$ كان $T_k^{-1}(]-\infty, \alpha]) =]-\infty, \alpha]$ أمّا إذا كان $-k > \alpha$ فإن $T_k^{-1}(]-\infty, \alpha]) = \emptyset$. هذا يبين أننا نحصل في كل الحالات على أجزاء قيوسة، إذن

T_k قيوس. كان بإمكاننا كذلك أن نلاحظ أن T_k مستمر وبالتالي قيوس.

١٠٢ بما أن $(T_k \circ f)^{-1}(J) = f^{-1}[T_k^{-1}(J)]$ مهما كان الجزء J من $\mathbb{R}$ وبما أن f قيوس فإن $(T_k \circ f)^{-1}(]-\infty, \alpha])$ قيوس مهما كان α من $\mathbb{R}$ إذ إن $T_k^{-1}(]-\infty, \alpha])$ قيوس كما رأينا منذ لحظة.

2.13.3 **حل التمرين الثاني•** ٢٠١ اعتمادا على رتابة $\lambda^\star$ وتحتجمعيته لدينا:

$$\lambda^\star(A) \leq \lambda^\star(A \cup B) \leq \lambda^\star(A) + \lambda^\star(B) = \lambda^\star(A).$$

ثمّ، إنه لدينا:

$$\begin{aligned}\lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap [B \cup {}^cB]) &\leq \lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap {}^cB)\\ &\leq \lambda^\star(B) + \lambda^\star(A \cap {}^cB) \leq \lambda^\star(A)\end{aligned}$$

ومنه العلاقة $\lambda^\star(A \cup B) = \lambda^\star(A) = \lambda^\star(A \cap {}^cB)$.

٢٠٢ بما أن $A = (A \cap B) \cup (A \cap {}^cB)$ وَ $B = (B \cap A) \cup (B \cap {}^cA)$ فإن:

$$\lambda^\star(A) \leq \lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap {}^cB) \leq \lambda^\star(B) + \lambda^\star(A \,\Delta\, B)$$

وَ

$$\lambda^\star(B) \leq \lambda^\star(B \cap A) + \lambda^\star(B \cap {}^cA) \leq \lambda^\star(A) + \lambda^\star(A \,\Delta\, B)$$

وبما أن $\lambda^\star(A)$ وَ $\lambda^\star(B)$ متهيين فرضا فلدينا النتيجة:

$$|\lambda^\star(A) - \lambda^\star(B)| \leq \lambda^\star(A \,\Delta\, B).$$

٢٠٣ ليكن E جزءا من $\mathbb{R}$ ولنشير $\mathcal{R}_{ع}(E)$ إلى مجموعة كل التغطيهات $\{I_n\}$ العدودة للجزء E بواسطة مجالات مغلقة. لدينا تعريفا:

$$\ell^\star(E) = \inf\Big\{\sum_n |I_n| \mid \{I_n\} \in \mathcal{R}_{ع}(E)\Big\}.$$

ليكن $0 < \varepsilon$ ولتكن $\{I_n\}_n$ تغطية عدودة للجزء $\mathbb{N}$ المعطاة بأن $I_n = [n - \varepsilon \cdot 2^{-n-2}, n + \varepsilon \cdot 2^{-n-2}]$. لدينا:

$$0 \leq \ell^\star(\mathbb{N}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

ومنه $\ell^\star(\mathbb{N}) = 0$.

3.13.3 **حل التمرين الثالث•** ٣.١ ليكن A جزءا كيفيا من $\mathbb{R}^N$. لدينا:

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap (E \cup {}^cE) &= \mu^\star((A \cap E) \cup (A \cap {}^cE)) \\ \text{(التحت جمعية)} &\leq \mu^\star(A \cap E) + \mu(A \cap {}^cE) \\ \text{(الرتابة)} &\leq \mu^\star(E) + \mu(A) = \mu^\star(A). \end{aligned}$$

ومنه $\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE)$ مهما كان $A \subset \mathbb{R}^N$. إذن E لوبيغ قيوس.

٣.٢ يمكننا أن نكتب $E \cup F = (E \cap {}^cF) \cup ({}^cE \cap F) \cup (E \cap F)$ حيث $E \cap {}^cF$ ، ${}^cE \cap F$ ، $E \cap F$ أجزاء غير متقاطعة مثنى مثنى وبما أن μ قياس فهو جمعي وعليه:

$$\mu(E \cup F) = \mu(E \cap {}^cF) + \mu({}^cE \cap F) + \mu(E \cap F)$$

وبما أن E وَ F قيوسان فإن:

$$\mu(E) = \mu(E \cap F) + \mu(E \cap {}^cF) \qquad \text{(} F \text{ قيوس)}$$

وَ

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \cap {}^cE) \qquad \text{(} E \text{ قيوس)}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \mu(E) + \mu(F) &= \mu(E \cap F) + [\mu(E \cap {}^cF) + \mu({}^cE \cap F) + \mu(E \cap F)] \\ &= \mu(E \cap F) + \mu(E \cup F). \end{aligned}$$

4.13.3 **حل التمرين الرابع•** ٤.١ ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن g مستمر عند النقطة a فيوجد $0 < \rho_0$ بحيث:

$$g(a) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(a) + \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |x - a| < \rho_0.$$

ومنه $g(a)-\varepsilon \leq m(\rho_0) = \inf\{g(x) \mid x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \rho_0\}$ وعليه:

$$g(a)-\varepsilon \leq \sup_{\rho>0} m(\rho) = \liminf_{x\to a} g(x).$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فلدينا $g(a) \leq \liminf_{x\to a} g(x)$. إذن g نصف مستمر سفليا عند النقطة a.

٤.٢ بما أن γ مستمر عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ فاصلتها a غير معدومة فإنه ـ وفقا للسؤال السابق، نصف مستمر سفليا في $\mathbb{R}^\star$. أمّا نصف الستمرار السفلي عند النقطة $a=0$ فينتج من كون γ موجب أن $\inf\{\gamma(x) \mid |x| < \rho\} \geq 0$ ولذا فإن $\liminf_{x\to 0} \gamma(x) \geq 0 = \gamma(0)$.

٤.٣ ليكن α عددا حقيقيا أقل تماما من $g(a)$. ولضع $\beta = \liminf_{x\to a} g(x) = \sup_{\rho>0} m(\rho)$، حيث $m(\rho) = \inf\{g(x) \mid x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \rho\}$.

وليكن $\varepsilon = \frac{1}{2}\{g(a)-\alpha\}$. ينتج من الخاصية المميزة للحد الأعلى وجود $\rho > 0$ بحيث يكون $\beta - \varepsilon < m(\rho) \leq \beta$. ومنه المطلوب:

$$\alpha < \frac{\alpha + g(a)}{2} = g(a) - \frac{g(a)-\alpha}{2} \leq \beta - \varepsilon < g(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \rho.$$

٤.٤ لكي لثبت أن g قيوس يكفي أن نبرهن على أن $V(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha\}$ جزء قيوس من $\mathbb{R}$ وهذا مهما كان α من $\mathbb{R}$. ليكن إذن α عددا حقيقيا. إن الجزء $V(\alpha)$ مفتوح في $\mathbb{R}$. وفي حقيقة الأمر، من أجل كل $a \in V(\alpha)$ يكون $g(a) > \alpha$ ولذا يوجد، وفقا للسؤال ٤.٣، السابق عدد $\rho > 0$ بحيث يكون $]a-\rho, a+\rho[\subset V(\alpha)$ ومعنى هذا أن $V(\alpha)$ مفتوح. إنه إذن قيوس في $\mathbb{R}$.

5.13.3 **حل التمرين الخامس•** ليكن $n \in \mathbb{N}$. يوجد فرضا جزء مفتوح $\mathcal{O}_n$ بحيث: $\mathcal{O}_n \supset E \quad \wedge \quad \mu^\star(\mathcal{O}_n \cap {}^cE) \leq \frac{1}{n}$. ليكن عندئذ A جزءا كيفيا من $\mathbb{R}^N$. بما أن $\mathcal{O}_n$ لوبيغ قيوس فإنه لدينا:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mu^\star(A) & = & \mu^\star(A \cap \mathcal{O}_n) + \mu^\star(A \cap {}^c\mathcal{O}_n) \\ & \geq & \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^c\mathcal{O}_n) \end{array}\right\} \quad (14.3)$$

وبأخذ على التوالي $n = 1$ ، 2 ، ... نحصل على متتالية من المفتوحات $\{\mathcal{O}_n\}_n$ يحتوي كل واحد منها الجزء E ويحقق (14.3). هدفنا هو جعل n يؤل نحو $+\infty$ في المتباينات (14.3) ولهذا الغرض نقدر ما يلي:

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A\cap {}^cE) &= \mu^\star((A\cap {}^cE)\cap(\mathcal{O}_n\cap {}^c\mathcal{O}_n)) \\
&\le \mu^\star(A\cap {}^cE\cap\mathcal{O}_n)+\mu^\star(A\cap {}^cE\cap {}^c\mathcal{O}_n) \\
&\le \mu^\star({}^cE\cap\mathcal{O}_n)+\mu^\star(A\cap {}^c\mathcal{O}_n)\le \frac{1}{n}+\mu^\star(A\cap {}^c\mathcal{O}_n)
\end{aligned}$$

ت ومنه، بأخذ الاحتواء $A\cap {}^E\supset A\cap {}^c\mathcal{O}_n$ بعين الاعتبار:

$$0\le \mu^\star(A\cap {}^E)-\mu^\star(A\cap {}^c\mathcal{O}_n)\le\frac{1}{n}$$

وعليه $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^\star(A\cap {}^c\mathcal{O}_n)=\mu^\star(A\cap {}^cE)$. هذا يعني أن جعل n يؤول إلى $+\infty$ في المتباينات (14.3) يؤدي إلى $\mu^\star(A)\ge\mu^\star(A\cap E)+\mu^\star(A\cap {}^cE)$. ومنه قابلية E للقياس حسب لوبيغ.

14.3 حل الموضوع الـ 14

1.14.3 حل التمرين الأول•

1.1.14.3 •١ من أجل كل t من $\mathbb{R}$ يكون التابع $x \longmapsto e^{-x}\sin tx$ مستمرا على $\mathbb{R}_+$ ولذا فهو قيوس على هذا المجال وبما أن $|e^{-x}\sin tx|\le\psi(x)\doteq e^{-x}$ ، مع التابع $x\longmapsto\psi(x)$ لوبيغ كمول على $\mathbb{R}_+$ ، فإن T معرف جيدا على $\mathbb{R}$.

لتكن t_∞ نقطة من $\mathbb{R}$ ولتكن $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية حقيقية متقاربة نحو t_∞ ولنضع $\varphi_n(x)=e^{-x}\sin t_nx$ ، $x\in\mathbb{R}_+$. واضح أن المتتالية $\{\varphi_n\}$ ذات عناصر قيوسة وأن $\{\varphi_n\}$ تؤول نحو التابع φ ، حيث $\varphi(x)=e^{-x}\sin t_\infty x$ ، كليا على $\mathbb{R}_+$ وبما أن $|\varphi_n(x)|\le\psi(x)$ (مع التابع ψ لوبيغ كمول على $\mathbb{R}_+$) فإنه ينتج من مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(t_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x}\sin t_n x\,dx &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-x}\sin t_n x\,dx\\ &= \int_0^\infty e^{-x}\sin t_\infty x\,dx = T(t_\infty),\end{aligned}$$

أي أن T مستمر على $\mathbb{R}$.

١٠٢ ليكن التابع $F(\cdot,\cdot)$ المعرف على $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ بأن $F(x,t)=e^{-x}\sin tx$ وليكن $t_0\in\mathbb{R}$. لدينا:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| = \left|xe^{-x}\cos tx\right| \leq xe^{-x} \doteq \gamma(x)\in L^1(\mathbb{R}_+),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

ولذا، باستخدام مبرهنة التزايدات المنتهية نسبة إلى المتغير t نرى أن:

$$\left|\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0+\theta(t-t_0))\right| \leq \gamma(x),\ \forall x\in\mathbb{R}_+.$$

يمكن عندئذ تطبيق المبرهنة المتعلقة بالإشتقاق تحت إشارة تكامل لوبيغ: T قابل للإشتقاق عند t_0 ولدينا:

$$T'(t_0) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\cos t_0 x\,dx.$$

١٠٣ لدينا:

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-x}\sin tx\,dx &= -\int_0^b [e^{-x}]'\sin tx\,dx\\ &= -e^{-x}\sin tx\Big|_{x=0}^{x=b} + t\int_0^b e^{-x}\cos tx\,dx\\ &= -e^{-b}\sin tb - t\int_0^b [e^{-x}]'\cos tx\,dx\\ &= -e^{-b}\sin tb - te^{-b}\cos tb + t - t^2\int_0^b e^{-x}\sin tx\,dx,\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^b e^{-x}\sin tx\,dx = \frac{t}{1+t^2} - \frac{e^{-b}}{1+t^2}[\sin tb + t\cos tb].$$

لنجعل الآن b يؤول نحو $+\infty$ ، إننا نحصل على:

، $T(t) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\sin tx\, dx = \dfrac{t}{1+t^2}$ ، مهما كان $\mathbb{R} \ni t$ ،

لأن e^{-b} يؤول نحو الصفر وَ $\sin tb + t\cos tb$ يبقى محدودا عندما يؤول b نحو $+\infty$. ينتج من هذا ومن السؤال ١.٢ السابق أن:

$$T'(t) = \int_0^{\infty} xe^{-x}\cos tx\, dx = \Big[\frac{t}{1+t^2}\Big]' = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

١.٤ يمكننا، مثل أعلاه، وباعتبار التابع الحقيقي $F_1(\cdot,\cdot)$ المعرف على $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ بأن $F_1(x,t) = xe^{-x}\cos tx$ ، أن نبرر أن شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة من جديد وهذا لأن:

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-x^2e^{-x}\sin tx\right| \le x^2e^{-x} \doteq \gamma_1(x)\in L^1(\mathbb{R}_+),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

ومنه بالإشتقاق:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\sin tx\, dx = -T''(t) = -\frac{2t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}\cdot$$

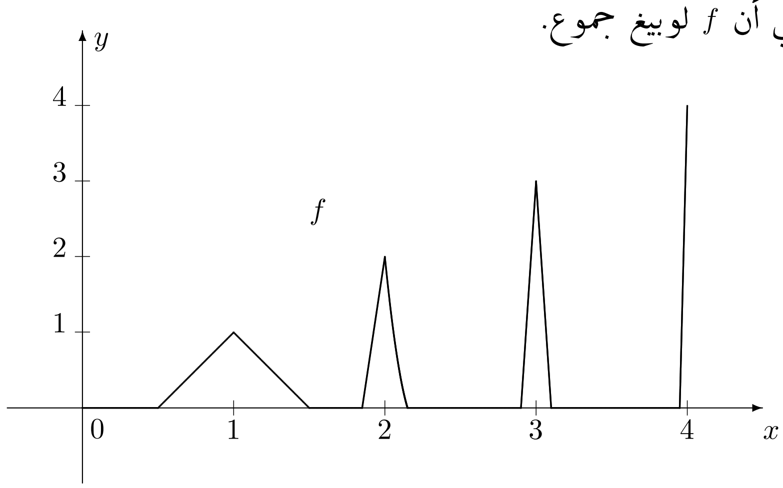
2.14.3 **حل التمرين الثاني•** ٢.١ ليكن $n \ni \mathbb{N}^\star$. على المجال الحقيقي $I_n = [n-\frac{1}{n2^n}, n+\frac{1}{n2^n}]$ يتكون بيان f من قطعتين مستقيمتين، قطعة صاعدة تربط النقطتين $(n-\frac{1}{n2^n},0)$ وَ (n,n) وقطعة نازلة تربط النقطتين (n,n) وَ $(n+\frac{1}{n2^n},0)$. وبما أن f معدوم خارج L ، اتحاد المجالات I_n ، فإننا نرى، بإعطاء لِـ n القيم 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ... ، على التوالي، نحصل على جزء البيان الموافق للمجال $[0,4]$ على معلم حيث تساوي الوحدة على المحور Ox ضعف الوحدة على المحور Oy ، أنظر الشكل أسفله.

التابع f مستمر على $\mathbb{R}_+$ لأنه مستمر على كل مجال I_n وينعدم عند طرفي هذا المجال وخارج L وهو غير محدود على هذه المجموعة، إذ إنه يأخذ القيمة n عند كل نقطة فاصلتها $x = n$.

٢.٢ التابع f لوبيغ قيوس لأنه مستمر وبما أنه موجب فإن للتكامل $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f\, dx$ معنى. وبما أن f معدوم خارج L وَ L إتحاد عدود لمجالات غير متقاطعة فيمكننا أن نكتب:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f\,dx = \int_L f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{I_n} f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\Big\{\frac{1}{n2^n}+\frac{1}{n2^n}\Big\} = 1.$$

هذا يعني أن f لوبيغ جموع.



٢.٣ لو كان f مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}_+$ لوجد من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عدد $0 < \delta$ بحيث يكون لدينا $|f(x) - f(x')| \leq 1$ مهما كان x وَ x' من $\mathbb{R}_+$ مع $|x - x'| \leq \delta$. لكننا، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ بحيث يكون $\delta \geq \frac{1}{n2^n}$ ، بأخذ $x = n$ وَ $x' = n + \frac{1}{n2^n}$ ، نرى أن $|x - x'| = \frac{1}{n2^n} \leq \delta$ ومع هذا $|f(x) - f(x')| = n > \frac{1}{2}$. إذن f غير مستمر بانتظام على $\mathbb{R}_+$.

3.14.3 **التمرين الثالث** • ٣.١ لنضع $v_n = nx^{n-1}$. إذن $u_n = v_n - v_{n+1}$ وعندئذ، من أجل $k \in \mathbb{N}^\star$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} u_n &= \sum_{n=1}^{k}(v_n - v_{n+1})\\ &= v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \cdots + v_n - v_{n+1} = 1 - (k+1)x^k\end{aligned}$$

وبما أن $0 < x < 1$ فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} u_n = \lim_{k\to\infty}[1 - (k+1)x^k] = 1.$$

تأكد من هذا. إذن $\int_I \Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big]\,dx = 1$.
لنحسب الآن $\int_I u_n\,dx$. لدينا:

$$\int_I u_n\,dx = \int_0^1 nx^{n-1}\,dx - \int_0^1 (n+1)x^n\,dx = x^n\Big|_0^1 - x^{n+1}\Big|_0^1 = 0.$$

ومنه $\sum_{n=1}^{\infty}\int_I u_n\,dx = 0$. إذن $\int_I \Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big]\,dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_I u_n\,dx$.

إن هذه النتيجة لا تناقض المبرهنة المتعلقة بمكاملة سلسلة عنصر بعنصر، لأن من شروط هذه المبرهنة أن تكون السلسلة ذات حدود موجبة، وَ u_n يغير إشارته كما سيتضح في السؤال الموالي.

٣.٢ لدينا:

$$u_n'(x) = n(n-1)x^{n-2} - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-2}\Big[\frac{n-1}{n+1} - x\Big].$$

وواضح، عندئذ أنه، من أجل $2 \le n$ ، يكون التابع u_n متزايدا في المجال $]0, \frac{n-1}{n+1}[$ ومتناقصا في المجال $]\frac{n-1}{n+1}, 1[$ وينعدم عند النقطين $x = 0$ وَ $x = \frac{n}{n+1}$. يمكننا إذن أن نكتب:

$$\begin{aligned}\int_I |u_n|\,dx \ge \int_0^{\frac{n}{n+1}} u_n\,dx &= (x^n - x^{n+1})\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n - \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1}\\ &= \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{4}\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

لرؤية المتباينة الآخيرة يمكنك أن التذكر أن المتتالية ذات الحد العام $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ـ والتي تستخدم لتعريف العدد e ـ تحقق $2 \le \alpha_n \le 4$ مهما كان n من $\mathbb{N}^\star$.
وخلاصة القول إن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I |u_n|\,dx \ge \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\frac{n}{n+1}} u_n\,dx \ge \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{1}{n+1} = +\infty.$$

4.14.3 **حل التمرين الرابع•** لنفرض أن g لا يؤول إلى الصفر عندما يؤول x نحو ∞. يوجد عندئذ $0 < \varepsilon_0$ بحيث، مهما كان $0 < A$ ، يوجد $A \le x$ يحقق $\varepsilon_0 < f(x)$

بما أن g لبشيتزي بثابت يساوي λ فإنه من أجل كل x وَ x' من $\mathbb{R}$ مع $|x - x'| \le \alpha$ ، حيث $\alpha_0 = \frac{\varepsilon_0}{2\lambda}$ ، يكون لدينا $|g(x) - g(x')| \le \frac{1}{2}\varepsilon_0$. إذا ثبتنا x' فنجد أن:

$$f(x') - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \le f(x),\ \forall x \in [x' - \alpha_0, x' + \alpha_0]. \tag{15.3}$$

لنأخذ الآن $A = 1$. يوجد $1 \le x_1$ بحيث $\varepsilon_0 < f(x_1)$. وعندها يكون لدينا، وفقا للعلاقة (15.3) ، وبأخذ $x' = x_1$:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \le f(x),\ \forall x \in [x_1 - \alpha_0, x_1 + \alpha_0] \doteq J_1.$$

وإذا أخذنا $A = x_1 + 3\alpha_0$ فيوجد $A \le x_2$ بحيث $\varepsilon_0 < f(x_2)$ ، وعندها يكون لدينا:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \le f(x),\ \forall x \in [x_2 - \alpha_0, x_2 + \alpha_0] \doteq J_2.$$

مع $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. وإذا واصلنا على هذا المنال (نأخذ $A = x_2 + 3\alpha_0$ ، ...) فنحصل على متتالية من النقاط المتزايدة تماما ومتتالية من المجالات غير المتقاطعة $J_n = [x_n - \alpha_0, x_n + \alpha_0]$ بحيث $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \le f(x)$ مهما كان $x \in J_n$ وعليه (تذكر أن g موجب):

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx \ge \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n} g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{J_n} g(x)\,dx \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot 2\alpha_0 = +\infty.$$

هذا يتناقض مع كون g لوبيغ جموع على $\mathbb{R}_+$. هذا ينهي البرهان على أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,dx = 0$.

ملاحظة. تبقى النتيجة صحيحة من أجل g مستمر فقط بانتظام على $\mathbb{R}_+$. ويظل البرهان السابق يعمل في هذه الحالة بدون تغيير، عدا عبارة α_0 بدلالة ε_0. في حالة الاستمرار بانتظام يكون $0 < \alpha_0$ موجودا، يتعلق بِـ ε_0 بكيفية غير صريحة، ولا يتعلق بالنقط x وَ x' المعتبرة، وهذا يكفي لاستقامة البرهان.

5.14.3 **حل التمرين الخامس•** ٥٫١ بما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |h_n-h|\,d\mu=0$
فمن أجل $\varepsilon=\frac{1}{2}$ يوجد n_1 بحيث $\int_X |h_n-h|\,d\mu\le\frac{1}{2}$ مهما كان $n_1\le n$ ، ومن أجل $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$ يوجد $n_1<n_2$ بحيث: $\int_X |h_n-h|\,d\mu\le\frac{1}{2^2}$ مهما كان $n_2\le n$ ، وإذا واصلنا على هذا النحو فنرى أنه، من أجل $\varepsilon=\frac{1}{2^j}$ ، يوجد $n_{j-1}<n_j$ بحيث $\int_X |h_n-h|\,d\mu\le\frac{1}{2^j}$ مهما كان $n_j\le n$. إننا بهذه الكيفية نستطيع ـ من $\{h_n\}$ ـ استخراج متتالية جزئية $\{h_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ بحيث: $\int_X |h_{n_j}-h|\,d\mu\le\frac{1}{2^j}$ مهما كان j من $\mathbb{N}^\star$. واضح عندها أن:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_X |h_{n_j}-h|\,d\mu\le\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1<\infty.$$

٥٫٢ بما أن السلسلة $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|h_{n_j}-h|$ ذات عناصر قيوسة وموجبة فوفقا لمبرهنة نحصل عليها كلازمة لمبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي، نستطيع مكاملتها عنصر بعنصر. إذن:

$$\int_X\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|h_{n_j}-h|\Big]\,d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\int_X |h_{n_j}-h|\,d\mu<+\infty.$$

٥٫٣ تعني النتيجة السابقة أن التابع $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|h_{n_j}-h|$ جموع على X نسبة إلى القياس μ ولذا فهو منته μ ـ شبه كليا على X. يوجد إذن جزء قياس Y من X بحيث $\mu(X\setminus Y)=0$ وَ

$$\sum_{j=1}^{\infty}|h_{n_j}(x)-h(x)|<+\infty,\ \ \forall x\in Y.$$

بما أن السلسلة السابقة متقاربة فإن حدها العام $|h_{n_j}(x)-h(x)|$ مع $Y\ni x$ يؤول إلى الصفر ومنه النتيجة:

$h_{n_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}h$ ، μ – شك على X .

15.3 حل الموضوع الـ 16

1.15.3 حل التمرين الأول•

1.1.15.3 • لدينا تعريفا

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) \quad \text{وَ} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\Big).$$

وبما أن المتتالية $\{A_n\}$ متزايدة فإن $\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ وَ $\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m = A_n$ مهما كان n من $\mathbb{N}$ ولذا $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \doteq A$ أي أن المتتالية المتزايدة $\{A_n\}$ متقاربة نحو اتحاد عناصرها A.

وبما أن المتتالية $\{B_n\}$ متناقصة فإن $\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} B_m = B_n$ وَ $\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} B_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ مهما كان n من $\mathbb{N}$ ولذا $\liminf\limits_{n\to\infty} B_n = \limsup\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \doteq B$ أي أن المتتالية المتناقصة $\{B_n\}$ متقاربة نحو تقاطع عناصرها B.

2.1.15.3 • ليكن $n \in \mathbb{N}^\star$. إذا كان زوجيا، أي $n = 2p$ مع $p \in \mathbb{N}^\star$، كان:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{m=n}^{\infty} C_m = \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} C_{2j}\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} C_{2j+1}\Big) &= \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} B_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=p+1}^{\infty} A_j\Big) \\
&= \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_{2j}\Big) \cap A_{p+1}
\end{aligned}$$

لأن $\{A_q\}$ متزايدة وَ $\{B_q\}$ متناقصة. وإذا كان $n = 2p - 1$ كان

$$\begin{aligned}
\bigcap_{m=n}^{\infty} C_m = \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} C_{2j-1}\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} C_{2j}\Big) &= \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} A_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=p}^{\infty} B_j\Big) \\
&= A_p \cap B
\end{aligned}$$

ومنه ومن تزايد $\{A_q\}$:

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m\big) &= \Big[\bigcup_{n\in 2\mathbb{N}^\star}\big(\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m\big)\Big]\cup\Big[\bigcup_{n\in 2\mathbb{N}^\star+1}\big(\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m\big)\Big]\\ &= \Big[\bigcup_{p=1}^{\infty}\Big(B\cap A_{p+1}\Big)Big]\cup\Big[\bigcup_{p=1}^{\infty}\Big(B\cap A_p\Big)\Big]=A\cap B\end{aligned}$$

3.1.15.3 • يمكننا، مستخدمين تزايد $\{A_n\}$ وتناقص $\{B_n\}$ ، أن نرى أن $\limsup_{n\to\infty} C_n = A\cup B$ وعندها إذا كان $A=B$ كان $\limsup_{n\to\infty} C_n = \liminf_{n\to\infty} C_n$ أي أن المتتالية $\{C_n\}$ متقاربة وإذا كانت هذه المتتالية متقاربة كان $A\cap B = A\cup B$ وهذا لا يستقيم إلا إذا كان $A=B$.

2.15.3 **حل التمرين الثاني•** يبقى فقط البرهان على أن μ سيغما جمعي. لتكن إذن $\{E_n\}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ غير متقاطعة مثنى مثنى وليكن k عددا طبيعيا ولنضع E_n $F_{k+1} = \bigcup_{n=k+1}^{\infty}$. واضح أن الأجزاء E_1 ، ... ، E_k ، F_{k+1} قيوسة وغير متقاطعة مثنى مثنى وبما أن μ موجب ويتمتع بخاصية الجمعية المتهية فلنا أن نكتب:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{k}E_n\cup F_{k+1}\Big)=\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)+\mu(F_{k+1})\\ &\geq \sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)\end{aligned}$$

وبما أن k كيفي فإن المتباينة السابقة تستلز أن $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ وبما أن μ سيغما تحت جمعي وَ $\mu(\emptyset)=0$ فرضا فإنه قياس موجب.

3.15.3 **حل التمرين الثالث•**

1.3.15.3 • ينتج من استمرار φ في $\mathbb{R}_+^\star$ أن التابع $x\longmapsto\frac{\varphi(x)}{x}$ ريمان كمول على كل مجال متراص من $\mathbb{R}_+$ لا يحتوي على 0. هذا يبرر وجود تكاملات ريمان التي تأتي كتابتها. وكما جاء في الإرشاد نأخذ عددين α وَ β مع $0<\alpha<1<\beta$ ونعتبر

ثمّ $I(\alpha,\beta)=I(\alpha,1)+I(1,\beta)$ نكتبه على الشكل ، $I(\alpha,\beta)\doteq\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx$ نكتب $I(\alpha,1)=\int_\alpha^1 \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx-\int_\alpha^1 \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx$ ونجري في التكامل الأول التبديل في المتغير $t=ax$ وفي التكامل الثاني التبديل $t=bx$ لنجد أن:

$$\begin{aligned} I(\alpha,1) &= \int_{a\alpha}^{a}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt-\int_{b\alpha}^{b}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\\ &= \int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\int_{b\alpha}^{a}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt-\int_{b\alpha}^{a}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt-\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\\ &= I(\alpha)-\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt,\qquad I(\alpha)\doteq\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt. \end{aligned}$$

ت وإذا كتبنا $I(1,\beta)=\int_1^\beta \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx-\int_1^\beta \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx$ وأجرينا التبديلين في المتغير $t=ax$ وَ $t=bx$ في التكاملين فنحصل، بعد الإختصار، على:

$$I(1,\beta)=-I(\beta)+\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt,\qquad I(\beta)\doteq\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

إذن $I(\alpha,\beta)=I(\alpha)-I(\beta)$

لنجعل α يؤول إلى الصفر في $I(\alpha)$. يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt-\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(0)}{t}\,dt+\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(0)}{t}\,dt\\ &= \int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt+\varphi(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}\cdot \end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon>0$. بما أن التابع φ متمر عند النقطة 0 فيوجد $\rho>0$ بحيث $|\varphi(t)-\varphi(0)|\le\varepsilon$ مهما كان $t\in[0,\rho]$. وعندها، من أجل $\alpha>0$ بحيث $b\alpha\le\rho$ ، يمكننا أن نكتب:

$$\left|\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt\right|\le\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt\le\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

إذن $\lim_{\alpha\downarrow 0} I(\alpha)=0$.

لنجعل الآن β يؤول إلى $+\infty$ في $I(\beta)$. لدينا

$$I(\beta)=\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t}\,dt+\varphi(\infty)\ln\frac{b}{a}\cdot$$

وبما أن $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\varphi(\infty)$ فمن أجل $\varepsilon>0$ معطى يوجد عدد $K>0$ بحيث $|\varphi(t)-\varphi(\infty)|\leq\varepsilon$ مهما كان $t\in\mathbb{R}_+$ مع $t\geq K$. وعندها، من أجل كل β مع $a\beta\geq K$ ، يكون لدينا:

$$\left|\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t}\,dt\right|\leq\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{|\varphi(t)-\varphi(\infty)|}{t}\,dt\leq\varepsilon\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}\cdot$$

ومنه $\lim_{\beta\to\infty}I(\beta)=\varphi(\infty)\ln\frac{b}{a}$. ينتج مما سبق أن:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx &= \lim_{\substack{\alpha\downarrow 0\\ \beta\to\infty}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x}\,dx\\ &= \lim_{\substack{\alpha\downarrow 0\\ \beta\to\infty}}[I(\alpha)-I(\beta)]=[\varphi(0)-\varphi(\infty)]\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

2.3.15.3 • بأن التابع $x\mapsto\arctan x$ مستمر على $\mathbb{R}_+$ ويتمتع بنهاية، هي $\frac{\pi}{2}$ ، عندما يؤول x نحو $+\infty$ فإن شروط تطبيق الدستور السابق محققة ولدينا، من أجل $0<a<b$ النتيجة $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x}\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

4.15.3 حل التمرين الرابع •

1.4.15.3 • يمكنك أن تتأكد من أن:

$$\min\{s,t\}=\frac{1}{2}\{s+t-|s-t|\},\ \ \max\{s,t\}=\frac{1}{2}\{s+t+|s-t|\},\ \ \forall s,t\in\mathbb{R},$$

ولذا فإن:

$$s+t=\min\{s,t\}+\max\{s,t\},\ \ |s-t|=\max\{s,t\}-\min\{s,t\},\ \ \forall s,t\in\mathbb{R}.$$

ليكن n عددا طبيعيا. ينتج مما سبق أنه، من أجل x غير استثنائي من X ، يكون لدينا بأخذ $s=\psi_n(x)$ وَ $t=\psi(x)$:

$$\begin{aligned}\min\{\psi_n,\psi\}(x) &= \min\{\psi_n(x),\psi(x)\}=\frac{1}{2}\{\psi_n(x)+\psi(x)-|\psi_(x)-\psi(x)|\}\\ \max\{\psi_n,\psi\}(x) &= \max\{\psi_n(x),\psi(x)\}=\frac{1}{2}\{\psi_n(x)+\psi(x)+|\psi_(x)-\psi(x)|\}\end{aligned}$$

ينتج مما سبق أنه لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$:
$\psi_n + \psi = \min\{\psi_n, \psi\} + \max\{\psi_n, \psi\}; |\psi_n - \psi| = \max\{\psi_n, \psi\} - \min\{\psi_n, \psi\}$.

2.4.15.3 • ينتج من عبارة $\min\{\psi_n, \psi\}$ الواردة في السؤال السابق أن $\lim_{n\to\infty} \min\{\psi_n, \psi\}(x) = \psi$ ، $\mu-$ شك في X وبما أن التوابع ψ_n وَ ψ موجبة فإن

$$0 \leq \min\{\psi_n, \psi\} \leq \psi \in L^1(X, \mu) \text{ ، } \mu- \text{ شك على } X$$

ولذا ينتج من مبرهنة التقارب بالهيمنة أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \min\{\psi_n, \psi\}\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu.$$

5.15.3 **حل التمرين الخامس**• قبل البدأ في حل هذا التمرين يتعين علينا أن تتذكر أن:

$$e^s \geq \frac{s^m}{m!}, \ \ \forall s \geq 0, \ \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{16.3}$$

1.5.15.3 • التابع f قيوس علي $\mathbb{R}_+$ ولوبيغ كمول فرضا على المجال $[0, A]$. أمّا على المجال $[A, +\infty[$ فإن f يحقق $|f(x)| \leq \lambda x^r$ مهما كان $A \leq x$ ولذا يمكننا أن نكتب، مستعملين (16.3) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(x)| e^{-xt}\, dx &= \int_0^A |f(x)| e^{-xt}\, dx + \int_A^\infty |f(x)| e^{-xt}\, dx \\
&= \int_0^A |f(x)|\, dx + \int_A^\infty \lambda x^r \frac{m!}{x^m t^m}\, dx \\
&= \int_0^A |f(x)|\, dx + \frac{\lambda m!}{t^m} \frac{x^{r-m+1}}{r-m+1}\Big|_{x=A}^\infty
\end{aligned}$$

ويكون الحد الأخير في التقدير السابق متهيا إذا كان $r + 1 < m$. إذن بأخذ $m = r + 2$ (مثلا) نرى أن $L_f(t)$ معرف جيدا مهما كان $0 < t$.

2.5.15.3 • لكي نبرهن على أن $\lim_{t\to\infty} L_f(t) = 0$ يكفي البرهان على أن $\lim_{t\to\infty} L_f(t_n) = 0$ مهما كانت المتتالية العددية $\{t_n\}$ المتقاربة نحو $+\infty$.

نلاحظ أولا أن كون f كمولا على كل مجال $[p, p+1[$ ، مع $\mathbb{N} \ni p$ ، يقتضى أنه منته شبه كليا على هذا المجال ولذا فهو منته شبه كليا على اتحاد هذه المجالات (العدودة) أي على $\mathbb{R}_+$. لتكن الآن $\{t_n\}$ متتالية عددية متقاربة نحو $+\infty$. ولنضع $f_n(x) = f(x)e^{-xt_n}$ ، $0 \le x$. واضح عندها أنه، من أجل x غير استثنائي (أي لا ينتمي إلى جزء $\mathbb{R}_+$ المهمل حيث f غير معرف أي غير منته)، تكون $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. إذن $f_n \to 0$ شبه كليلا على $\mathbb{R}_+$. وبما أن المتتالية $\{|f_n|\}$ مكبورة بالتابع الكمول h المعرف بأن $h(x) = |f(x)|$ من أجل $[0, A] \ni x$ وَ $h(x) = \frac{\lambda(r+2)!}{t^{r+2}}\frac{1}{x^2}$ من أجل $A \le x$ فإن مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ تستلزم أن

$$\lim_{n\to\infty} L_f(t_n) = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

16.3 حل الموضوع الـ 17

1.16.3 التمرين الأول•

1.1.16.3 • بما أن التابع g_0 متزايد على $[a, b]$ فمن أجل أي تقسيم $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ لهذا المجال يكون لدينا:

$$V(g_0, P) = \sum_{i=1}^{n}(g_0(x_i) - g(x_{i-1}) = g_0(x_n) - g_0(x_0) = g_0(b) - g_0(a).$$

إذن g_0 محدود التغيُّر على $[a, b]$ وتغيُّره الكلي $V_a^b(g_0) = g_0(b) - g_0(a) = e^b - e^a$.

2.1.16.3 • إن تكامل ستيلجس $\int_0^1 x\, dg$ موجود لكون التابع $x \mapsto x$ مستمر على $[0, b]$ والتابع g محدود التغيُّر، وفقا للسؤال السابق حيث نأخذ $a = 0$.

3.1.16.3 • ليكن $x \in]0,b[$ والتقسيم $P=\{0,x,b\}$ للمجال $[a,b]$. إنه لدينا:

$$V(\tilde{g},P)=\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)+|\tilde{g}(b)-\tilde{g}(x)|=2(e^x-1).$$

ينتج من هذا ومن استمرار التابع الأسي عند النقطة 1 وتزايده أن التابع $\tilde{g}$ محدود التغيُّر ولدينا $V_0^b(\tilde{g})=2V_0^b(g)=2(e^b-1)$. هذا يبين أن تكامل ستيلجس $\int_0^b x\,d\tilde{g}$ موجود.

2.16.3 **التمرين الثاني •** ليكن $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $I=[0,1]$. يمكنك أن تتأكد من أن:

$m_i=\inf\limits_{I_i}\varphi=\frac{1}{4}x_{i-1}^2$ وَ $M_i=\sup\limits_{I_i}\varphi=\sqrt{x_i}$ حيث $I_i=[x_{i-1},x_i]$.

ولذا لدينا:

$$\begin{aligned}\underline{R}(\varphi,P) &= \sum_{i=1}^n m_i\delta x_i=\sum_{i=1}^n\frac{1}{4}x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1})\le\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})\le\frac{1}{4},\\ \overline{R}(\varphi,P) &= \sum_{i=1}^n M_i\delta x_i=\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}(x_i-x_{i-1})\ge\sum_{i=1}^n x_i(x_i-x_{i-1})\ge\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

لقد حصلنا على التقدير الأخير باستخدام المتباينة $x_ix_{i-1}\le\frac{1}{2}\{x_i^2+x_{i-1}^2\}$. ينتج مما سبق أن $\underline{\int_0^1}\varphi\le\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\le\overline{\int_0^1}\varphi$. إذن φ غير ريمان كمول على المجال $[0,1]$.

3.16.3 **التمرين الثالث •**

1.3.16.3 • من أجل $n=1$ العلاقة (10.2) صحيحة إذ إنها تكتب على الشكل $1=\frac{1-q-q(1-q)}{(1-q)^2}$. لنفرض إذن أنه صحيحة من أجل المرتبة n ولنكتب، معتمدين على فرض الدريج، من المرتبة $n+1$ ، ما يلي:

$$\begin{aligned}1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1} &+ (n+1)q^n\\ &= \frac{1-q^n-nq^n(1-q)}{(1-q)^2}+(n+1)q^n\\ &= \frac{1-q^n-nq^n(1-q)+(n+1)q^n(1-q)^2}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+q^n(1-q)[-n+(n+1)(1-q)]}{(1-q)^2}\\
&= \frac{1-q^n+q^n(1-q)-(n+1)q^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2}\\
&= \frac{1-q^{n+1}-(n+1)q^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2}.
\end{aligned}
$$

هذا ينهي إثبات العلاقة (10.2) .

2.3.16.3 • بما أن التابع $x \longmapsto x$ ستيلجس كمول نسنة إلى التابع g المعطى بأن $g(x)=e^x$ على $[0,b]$ موجود (وفقا لسؤال سابق) فيمكننا الحصول على هذا التكامل $\int_0^b x\,d(e^x)$ على أنه $\lim_{n\to\infty} S(x,e^x,P_n,Q_n)$ ، حيث P_n هو التقسيم الوارد في نص التمرين وَ $Q_n = P_n \setminus \{0\}$. اعتمادا على (10.2) يمكننا أن نكتب:

$$
\begin{aligned}
S(x,e^x,P_n,Q_n) &= \frac{b}{n}[e^{b/n}-1]\sum_{i=1}^{n} i(e^{b/n})^{i-1}\\
&= \frac{b}{n}[e^{b/n}-1]\frac{1-e^b-ne^b(1-e^{b/n})}{(1-e^{b/n})^2}\\
&= -\frac{b(1-e^b)}{n(1-e^{b/n})}+be^b.
\end{aligned}
$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} n(1-e^{b/n})=-b$ (استخدم النشر المحدود لحساب النهاية)، فينتج لدينا $\int_0^b x\,d(e^x)=be^b-e^b+1$.

3.3.16.3 • يمكنك أن تتأكد من أن:

$$
\begin{aligned}
S(x,\tilde{g},P_n,Q_n)=S(x,e^x,P_n,Q_n) &- b[e^b-e^{(n-1)b/n}]\\
&+ b[\tilde{g}(b)-\tilde{g}((n-1)b/n)]\\
&= S(x,e^x,P_n,Q_n)-be^b+b.
\end{aligned}
$$

إذن $\displaystyle\int_0^b x\,d\tilde{g}=1+b-e^b$.

4.16.3 **التمرين الرابع •** لكي نثبت أن f^2 ريمان كمول نستخدم الشرط اللّازم والكافي للقابلية للمكاملة حسب ريمان القائل بأنه حتى يكون تابع ما u قابلا للمكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ يلزم ويكفي أن نتمكن من رفق كل $\varepsilon > 0$ بتقسيم P للمجال $[a,b]$ **بحيث** $\overline{R}(u,P) - \underline{R}(u,P) \leq \varepsilon$.

ليكن إذن $\varepsilon > 0$. بما أن f ريمان كمول فيوجد تقسيم $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ للمجال $[a,b]$ **بحيث:** $\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \leq \varepsilon/2M+1$ ، **حيث** $M = \sup\limits_{[a,b]} f$.
لنضع $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ وَ $m_i = \inf\limits_{I_i} f$ وَ $M_i = \sup\limits_{I_i} f$ ، $i = 1$ ، ... ، n . إنه لدينا $m_i \leq f(x) \leq M_i$ مهما كان $x \in I_i$ وبما أن f موجب فإن $m_i^2 \leq f^2(x) \leq M_i^2$ مهما كان $x \in I_i$. هذا يستلزم أن:

$$m_i^2 \leq \inf_{I_i} f^2 \leq \sup_{I_i} f^2 \leq M_i^2, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

إذن:

$$\sup_{I_i} f^2 - \inf_{I_i} f^2 \leq (M_i + m_i)(M_i - m_i) \leq 2M(M_i - m_i), \, i = 1, \ldots, n.$$

ينتج من هذا أن:

$$\overline{R}(f^2,P) - \underline{R}(f^2,P) \leq 2M\{\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P)\} \leq 2M\frac{\varepsilon}{2M+1}.$$

إذن f^2 ريمان كمول على $[a,b]$.

5.16.3 **التمرين الخامس •** الحل غير موجود.

17.3 حل الموضوع الـ 18

1.17.3 **التمرين الأول •** ليكن $x \in A \cap (E \cup F)$. إذن $x \in A$ وَ $x \in E \cup F$. إذا كان $x \in A$ وَ $x \in E$ كان $x \in A \cap E$ ولذا $x \in (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE)$.
أمّا إذا كان $x \in A$ وَ $x \in F$ وَ $x \notin E$ فإن $x \in A \cap F \cap {}^cE$ ولذا $x \in (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE)$. هذا يبين الاحتواء $A \cap (E \cup F) \subset (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE)$.

ليكن الآن $x \in (A\cap E)\cup(A\cap F\cap {}^cE)$ إذا كان $x \in A\cap E$ فإن $x \in A$ وَ $x \in E\cup F$ ولذا $x \in A\cap(E\cup F)$. أمّا إذا كان $x \in A\cap F\cap {}^cEA$ فإن $x \in A$ وَ $x \in F$ ولذا $x \in A\cap(E\cup F)$. ومنه الاحتواء $A\cap(E\cup F) \supset (A\cap E)\cup(A\cap F\cap {}^cE)$.

2.17.3 التمرين الثاني •

• 1.2.17.3 لدينا:

$$\begin{aligned}
A_1^1 &= \{x\in\mathbb{R} \mid 0 \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2}\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 > 1\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\
A_1^2 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^2} < 1\} = \{x\in\mathbb{R} \mid 1 \le x^2 > 0\} = [-1,0[\cup]0,1[\\
A_1 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{1+x^2} \ge 1\} = \{0\}\cdot
\end{aligned}$$

إذن $f_1(x) = 0\chi_{A_1^1}(x) + \frac{1}{2}\chi_{A_1^2}(x) + 1\chi_{A_1}(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$. ولدينا:

$$\begin{aligned}
A_2^1 &= \{x\in\mathbb{R} \mid 0 \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{4}\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2 > 3\} =]-\infty[,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[\\
A_2^2 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2}\} = \{x\in\mathbb{R} \mid 1 \ge x^2 > \frac{1}{3}\} = [-\sqrt{3},-1[\cup]1,\sqrt{3}[\\
A_2^3 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{2}{4} \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{3}{4}\} = \{x\in\mathbb{R} \mid 1 \ge x^2 > \frac{1}{3}\} = [-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}},1[\\
A_2^4 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \le \frac{1}{1+x^2} < 1\} = \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \ge x^2 > 0\} = [-\frac{1}{\sqrt{3}},0[\cup]0,\frac{1}{\sqrt{3}}[\\
A_2^5 &= \{x\in\mathbb{R} \mid 1 \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{5}{4}\} = \{0\} \\
A_2^6 &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{5}{4} \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{6}{4}\} = A_2^7 = A_2^8 = A_2 = \emptyset.
\end{aligned}$$

إذن $f_2(x) = 0\chi_{A_2^1}(x) + \frac{1}{4}\chi_{A_2^2}(x) + \frac{1}{2}\chi_{A_2^3}(x) + \frac{3}{4}\chi_{A_2^4}(x) + 1\chi_{A_2^5}(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

الرسومات غير موجودة.

• 2.2.17.3 f قيوس من $\mathbb{R}$ في نفسه مزود بعشيرته البوريلية (في الإنطلاق والوصول) لأنه مستمر على $\mathbb{R}$. هذا يستلزم أنه، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، تكون الأجزاء A_n^k ، $k = 1$ ، ...، $n2^n$ قيسة وكذا الجزء A_n وبما أن الدالة المميزة لجزء قيوس تابع قيوس فإن التوابع $\chi_{A_n^k}$ وَ χ_{A_n} وكذا $\frac{k-1}{2^n}\chi_{A_n^k}$ وَ $n\chi_{A_n}$ قيوسة ولذا فإن f قيوس كمجموع توابع قيوسة.

3.2.17.3 • من أجل $2 \leq n$ تكون المجموعة A_n خالية وتشكل الأجزاء $\{A_n^k\}_{k=1}^{n2^n}$ تغطية غير متقاطعة مثنى مثنى لِـ $\mathbb{R}$ وعندها، من أجل كل عدد حقيقي t يوجد دليل وحيد k بحيث $A_n^k \ni t$ ومن تعريف هذا الجزء لدينا $0 \leq f(t) - \frac{k-1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ ولذا $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. الأمر الذي يبين أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بالنتظام نحو f على $\mathbb{R}$.

3.17.3 **التمرين الثالث** • ليكن $\mathbb{R} \ni \lambda$ مثبتا وليكن $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n < \lambda\}$. يوجد $\mathbb{N}^\star \ni n_0$ بحيث $\{g_{n_0} < \lambda\} \ni x$. إذن $g_{n_0}(x) < \lambda$ ولذا $\inf\limits_{n\geq 1} g_n(x) < \lambda$ ، أي $\{\inf\limits_{n\geq 1} g_n < \lambda\} \ni x$. ليكن الآن $\{\psi < \lambda\} \ni x$. إذن $\psi(x) = \inf\limits_{n\geq 1} g_n(x) < \lambda$ وعندئذ ينتج من الخاصية المميزة للحد الأدنى أنه، من أجل $0 < \varepsilon = \frac{1}{2}(\lambda - \psi(x))$ ، يوجد $\mathbb{N}^\star \ni n_0$ بحيث $g_{n_0}(x) < \psi(x) + \varepsilon = \frac{1}{2}\{\lambda + \psi(x)\} < \lambda$ ولذا فإن $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n < \lambda\} \supset \{g_{n_0} < \lambda\} \ni x$. بينا إذن أن $\{\inf\limits_{n\geq 1} g_n < \lambda\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n < \lambda\}$.

ليكن $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n > \lambda\} \ni x$. يوجد $\mathbb{N}^\star \ni n_0$ بحيث $\{g_{n_0} > \lambda\} \ni x$. إذن $g_{n_0}(x) > \lambda$ ولذا $\sup\limits_{n\geq 1} g_n(x) > \lambda$ ، أي أن $\{\sup\limits_{n\geq 1} g_n > \lambda\} \ni x$. وليكن الآن $\{\varphi > \lambda\} \ni x$. إذن $\varphi(x) = \sup\limits_{n\geq 1} g_n(x) > \lambda$ وعندئذ، ينتج من الخاصية المميزة للحد الأعلى أنه، من أجل $0 < \varepsilon = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \lambda)$ ، يوجد $\mathbb{N}^\star \ni n_0$ بحيث $g_{n_0}(x) > \varphi(x) - \varepsilon = \frac{1}{2}\{\lambda + \varphi(x)\} > \lambda$. ولذا فإن $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n > \lambda\} \supset \{g_{n_0} > \lambda\} \ni x$.

هذا ينهي البرهان على أن $\{\sup\limits_{n\geq 1} g_n > \lambda\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{g_n > \lambda\}$.

بما g_n قيوس من جل كل $1 \leq n$ فإن $\{g_n < \lambda\}$ وَ $\{g_n > \lambda\}$ جزءان قيوسان من X ولذا يكون $\{\psi < \lambda\}$ وَ $\{\varphi > \lambda\}$ قيوسين كإتحادين عدودين لأجزاء قيوسة. إذن ψ وَ φ تابعان قيوسان.

1.3.17.3 • لدينا تعريفا $u = \liminf\limits_{n\to\infty} g_n = \sup\limits_{n\geq 1} \underline{g}_n$ مع $\underline{g}_n = \inf\limits_{m\geq n} g_m$ وكذلك

$$v = \limsup_{n\to\infty} g_n = \inf_{n\geq 1} \overline{g}_n \quad \text{مع} \quad \overline{g}_n = \sup_{m\geq n} g_m$$

ثمّ إن أسلوب مماثل للذي ورد في السؤال السابق يبين أنه، من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، لدينا: $\{\underline{g}_n < \lambda\} = \bigcup_{m\geq n} \{g_m < \lambda\}$ وَ $\{\overline{g}_n < \lambda\} = \bigcup_{m\geq n} \{g_m > \lambda\}$. ينتج من السؤال السابق أن عناصر المتتاليتين $\{\underline{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ وَ $\{\overline{g}_n\}_{n=1}^{\infty}$ توابع قوسة ولذا يكون u وَ v تابعين قيوسين.

إذا كانت المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو التابع g كان $u = \liminf_{n\to\infty} g_n = v = \limsup_{n\to\infty} g_n = g$. إذن g قيوس.

4.17.3 **التمرين الرابع** • بما أن h قابل للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على هذه المجموعة وبما أن التابع $\mathbb{R} \ni x + \frac{1}{n} \leftarrow x \in \mathbb{R}$ مستمر مهما كان $n \in \mathbb{N}^{\star}$ فإن المتتالية التابعية $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، حيث $\rho_n(x) = n[h(x+\frac{1}{n}) - h(x)]$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، ذات عناصر قيوسة. وينتج من قابلية h للإشتقاق على $\mathbb{R}$ أن $h'(x) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$. إذن، وفقا لسؤال الأخير من التمرين السابق، h' قيوس.

5.17.3 **التمرين الخامس** • لنذكر أنه إذا كان $E \subset \mathbb{R}$ وإذا أشرنا بِـ $\mathcal{R}_{ع}(E)$ إلى مجموعة كل التغتيات العدودة لِـ E بواسطة بلاطات مغلقة، فلدينا تعريفا:

$$\mu^{\star}(E) = \inf_{\{R_n\}_n \in \mathcal{R}_{ع}(E)} \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \quad \text{حيث } |R_n| \text{ هو حجم البلاطة } R_n .$$

ليكن إذن $\varepsilon > 0$. إذا كان $a = (a_1, \ldots, a_N)$ كان

$$[a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon] \supset \emptyset$$

وكذا $[a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon] \supset \{a\}$ ولذا $0 \leq \mu^{\star}(\emptyset) \leq (2\varepsilon)^N$

وكذا $0 \leq \mu^{\star}(\{a\}) \leq (2\varepsilon)^N$ ومنه $\mu^{\star}(\emptyset) = \mu^{\star}(\{a\}) = 0$.

1.5.17.3 • لنثبت أولا أنه إذا كان القياس الخارجي $\mu^{\star}(J)$ لجزء $J \subset \mathbb{R}^N$ معدوما كان هذا الجزء J لوبيغ قيوسا. هذا ينتج من تزايد القياس الخارجي $\mu^{\star}$. وفي الحقيقة، من أجل $A \subset \mathbb{R}^N$ ، لدينا:

$$\begin{aligned}\mu^\star(A)=\mu^\star(A\cap(J\cup {}^cJ) &= \mu^\star((A\cap J)\cup(A\cap {}^cJ))\\ &\le \mu^\star(A\cap J)+\mu^\star(A\cap {}^cJ))\\ &\le \mu^\star(J)+\mu^\star(A)=\mu^\star(A).\end{aligned}$$

ينتج من هذا أن $\emptyset$ وَ $\{a\}$ لوبيغ قيوسان.

وبما أن القياس الخارجي تحتجمعي عدوديا فإن كل إتحاد عدود لأجزاء ذات قياس خارجي معدوم هو جزء قياسه الخارجي معدوم. إذن

$$\mu^\star(\mathbb{N}^N)=\mu^\star(\mathbb{Z}^N)=\mu^\star(\mathbb{Q}^N)=0$$

لأن كل هذه الجزء عدودة.

18.3 حل الموضوع الـ 22

1.18.3 **التمرين الأول •** نلاحظ أولا أن التابع ξ مستمر على $[0,1]$ وقابل للإشتقاق في $]0,1[$ مع

$$\xi'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\ \ x\in]0,1[.$$

إذن $|\xi'(x)|\le 3$ مهما كان $x\in]0,1[$. لتكن عندئذ $\{]a_1,b_1[,\dots,]a_n,b_n[\}$ جماعة متهية من المجالات المفتوحة غير المتقاطعة مثنى مثنى وذات إتحاد محتوى في $[0,1]$. لدينا، وفق مبرهنة التزايدات المتهية:

$$\sum_{n=1}^{n}|\xi(b_i)-\xi(a_i)|=\sum_{n=1}^{n}(b_i-a_i)|\xi'(c_i)|\le 3\sum_{n=1}^{n}(b_i-a_i),$$

حيث $c_i\in]a_i,b_i[$. واضح عندئذ أنه من أجل $\varepsilon>0$ معطى فبأخذ $\rho=\varepsilon/3$ يكون لدينا:

$$\sum_{n=1}^{n}|\xi(b_i)-\xi(a_i)|\ \le\ \varepsilon,\quad \forall\{]a_1,b_1[,\dots,]a_n,b_n[\}\ \text{(غير متقاطعة)}$$

$$]a_i,b_i[\subset[0,1],\ \sum_{n=1}^{n}(b_i-a_i)\le\rho.$$

هذا يثبت أن ξ مستمر مطلقا على $[0,1]$.

19.3 حل الموضوع الـ 23

1.19.3 حل التمرين الأول•

1.1.19.3 • من تعريف النهاية العليا لمتتالية مجموعات لدينا $\limsup_{n\to\infty} A_n \doteq \bigcap_{n\geq 0}\left\{\bigcup_{k\geq n} A_k\right\}$. ولذا، إذا كان $\limsup_{n\to\infty} A_n \ni x$ ، كان $\bigcup_{k\geq n} A_k \ni x$ مهما كان $\mathbb{N}^\star \ni n$. إذن، من أجل $n=1$ يوجد عدد طبيعي $1 \leq n_1$ بحيث $A_{n_1} \ni x$ ومن أجل $n = n_1' \doteq n_1 + 1$ يوجد $n_1' \leq n_2$ بحيث $A_{n_2} \ni x$ وإذا واصلنا على هذا المنوال نرى أن x ينتمي إلى ما لانهاية من أجزاء A_n . وإذا أخذنا عنصرا y ينتمي إلى ما لانهاية من الأجزاء A_n فهو ينتمي إلى $\bigcup_{k\geq n} A_k$ مهما كان $\mathbb{N}^\star \ni n$ ولذا $\limsup_{n\to\infty} A_n \ni y$.

2.1.19.3 • إذا كان x ينتمي إلى $\{u=\infty\}$ كان $u(x)=\infty$ ولذا يوجد جزء غير منته $\mathbb{N}\supset Z$ بحيث $\chi_{A_k}(x)=1$ مهما كان k من Z وعليه ينتمي x إلى ما لانهاية من الأجزاء A_k وعليه $\limsup_{n\to\infty} A_n \ni x$. وإذا كان الآن y عنصرا من $\limsup_{n\to\infty} A_n$ فيمكننا، بالأسلوب المتبع في حل السؤال السابق، إنشاء تابع p متزائد تماما من $\mathbb{N}^\star$ في نفسه بحيث $\chi_{A_{p(n)}}(y)=1$ مهما كان n من $\mathbb{N}^\star$. ومنه

$$u(y) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_{p(n)}}(y) = \infty.$$

إذن $\{u=\infty\} \ni y$.

2.19.3 حل التمرين الثاني•

1.2.19.3 • ليكن B جزءا قيوسا من Y . بما أن $h(X)$ عدود فإن $B\cap h(X)$ جزء عدود من Y ولذا يمكن كتابته على الشكل $B\cap h(X)=\bigcup\limits_{n\in M}\{y_n\}$ ، حيث M جزء من $\mathbb{N}$ عدود على الأكثر. ومنه

$$h^{-1}(B)=h^{-1}(B\cap h(X))=h^{-1}\Big(\bigcup_{n\in M}\{y_n\}\Big)=\bigcup_{n\in M}h^{-1}(\{y_n\}).$$

وبمأن الصور العكسية لوحيدات العنصر $\{y_n\}$ قيوسة فرضا فإن $h^{-1}(B)$ قيوس كاتحاد منته أو عدود لأجزاء قيوسة.

20.3 حل الموضوع الـ 24ـ

1.20.3 حل التمرين الأول•

1.1.20.3 • ليكن $n\in\mathbb{N}^\star$. إنه لدينا $\varphi_n(0)=\varphi_n(1)=0$ ومن أجل $x\in]0,1[$ يكون لدينا

$$x^n=e^{n\ln x}=\frac{1}{e^{-n\ln x}}\leq\frac{6}{n^3|\ln x|^3}$$

إذ إن $e^{-n\ln x}\geq\frac{1}{6}n^3|\ln x|^3$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$ مهما كان $x\in I$. تؤول إذن المتتالية $\{\varphi_n\}$ ببساطة على I نحو التابع المعدوم $\varphi\equiv 0$. ولفحص ما إذا كان هذا التقارب منتظما نحسب المشتق:

$$\varphi_n'(x)=(n+1)n^2x^{n-1}\Big(\frac{n}{n+1}-x\Big),\ \forall x\in I,\ n\in\mathbb{N}^\star$$

لنرى أن للتابع φ_n ذروة عند النقطة $x_n=\frac{n}{n+1}$ وهي

$$\varphi_n(x_n)=n^2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n\frac{1}{n+1}=n\frac{n}{n+1}\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{-1}.$$

وعليه يكون تقارب $\{\varphi_n\}$ نحو φ غير منتظم إذ إن

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_I|\varphi_n-\varphi|\}=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_n)=+\infty.$$

ملاحظة. لأخذ فكرة عن بيان φ_n يمكنك أن تحسب مشتقه الثاني لتجد

$$\varphi_n''(x) = (n+1)n^3x^{n-2}\Big\{\frac{n-1}{n+1} - x\Big\},\ \forall x \in I \quad (n \geq 2)$$

وترى أن φ_n محدب على المجال $[0, \frac{n-1}{n+1}]$ ومقعر على المجال $[\frac{n-1}{n+1}, 1]$ وعند نقطة الإنعطاف $t_n = \frac{n-1}{n+1}$ (وهي على يسار x_n) لدينا $\varphi_n'(t_n) \geq e^{-2}n^2$ ثمّ إن $\varphi_n'(1) = -n^2$.

• 2.1.20.3 بما أن عناصر المتتالية $\{\varphi_n\}$ توابع قيوسة (إذ إنها مستمرة) وموجبة فيمكن تطبيق توطئة فاتو ولذا $0 = \int_I \varphi\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\, dx$. لدينا:

$$\int_I n^2x^n(1-x)\, dx = \frac{n^2}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{n^2}{n+2}x^{n+2}\Big|_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)\, dx = 1$. وهذه النهاية مختلفة عن قيمة التكامل $\int_I \varphi\, dx$. لم يكن إذن من الممكن تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ على المتتالية $\{\varphi_n\}$.

2.20.3 حل التمرين الثاني•

• 1.2.20.3 ليكن t عددا حقيقيا. بما أن التابع f ينتمي إلى $L^1(I)$ فهو قيوس ولذ يكون التابع $I \ni x \longmapsto \sqrt{|f(x)|^2 + t^2} \in \mathbb{R}_+$ قيوسا كتركيب تابع قيوس بتابع مستمر (هو الجذر التربيعي). وبما أن $\sqrt{|f(x)|^2 + t^2} \leq |f(x)| + |t|$ مع $|f|$ كمول فرضا والتابع الثابت $x \longmapsto |t|$ كمول على I فإن $\int_I \sqrt{|f(x)|^2 + t^2}$ منته. إذن التابع K معرف جيدا على $\mathbb{R}$. وواضح أنه لا يأخذ إلا قيما موجبة. ليكن t_∞ عددا حقيقيا ولتكن $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية حقيقية متقاربة نحو t_∞ . ولتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة شبه كليا على I بأن $f_n(x) = \sqrt{|f(x)|^2 + t_n^2}$. واضح أن كل تابع f_n قيوس ولذينا $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{|f(x)|^2 + t_\infty^2}$ ، شبه كليا على I . وبما أن

$$0 \leq f_n(x) \leq |f(x)| + |t_\infty| + 1 \in L^1(I) \quad \text{شبه كليا على } I \text{ ،}$$

من أجل n كبير، فينتج من مبرهنة التقارب بالهيمنة للبيغ أن

$$\lim_{n\to\infty} K(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I \sqrt{|f(x)|^2 + t_n^2}\, dx = \int_I \sqrt{|f(x)|^2 + t_\infty^2}\, dx = K(t_\infty).$$

أي أن التابع K مستمر على $\mathbb{R}$.

2.2.20.3 • لنضع $F(x,t) = \sqrt{|f(x)|^2 + t^2}$. إن F معرف شبه كليا نسبة إلى x على I وكليا نسبة إلى t على $\mathbb{R}$ ولدينا عند كل نقطة $t_0 \neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=t_0} = \frac{t_0}{\sqrt{|f(x)|^2 + t_0^2}}$$ ، شبه كليا على I .

لاحظ أن تعويض t_0 بصفر في العلاقة السابقة ممكن فقط في حالة f غير معدوم شبه كليا على I (في هذه الحالة يكون المشتق معدوما شبه كليا على I). لنخذ t من إشارة t_0 . إن تطبيق مبرهنة التزايدات المتهية نسبة إلى المتغير الثاني على المجال الذي طرفاه t_0 وَ t يعطي:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}\Big| &= \frac{|t_0+\theta(t-t_0)|}{\sqrt{|f(x)|^2+(t_0+\theta(t-t_0))^2}},\ \ \theta=\theta(x,t)\in]0,1[\\ &\leq \frac{|t_0+\theta(t-t_0)|}{|t_0+\theta(t-t_0)|} = 1 \in L^1(I).\end{aligned}$$

هذا يعني أن كل شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة ولذا لدينا:

$$K'(t_0) = \int_I \frac{t_0}{\sqrt{|f(x)|^2+t_0^2}}\,dx,\ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

3.20.3 حل التمرين الثالث•

1.3.20.3 • ليكن $0 < \varepsilon$. إن اقتصار التابع r ريمان كمول على المجال $[\varepsilon, 1]$ لأنه مستمر على هذا المجلال المتراص. ثمّ إنه ولدينا

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 r(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2.$$

الأمر الذي يعني أن التابع r الموجب يتمتع بتكامل لريمان معمم على $]0,1]$ ، إنه إذن لوبيغ جموع على المجال I .

لدينا $r(1) = 1$ وَ $\lim_{t\downarrow 0} r(t) = +\infty$. وبما أن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ مهما كان $x \in]0,1[$ فمن الواضح أن المتتالية $\{r_n\}_{n\geq 1}$ تؤول ببساطة نحو التابع الحقيقي المكتمل R المعرف بأن $R(x) = +\infty$ من أجل $x \in]0,1[$ وَ $R(1) = 1$.

التابع الأصلي للتابع r_2 على $I^\star$ هو التابع $\ln$ وهو غير ريمان معمم كمول ولذا r_2 غير لوبيغ جموع. ليكن $2 < n$. لدينا

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 r_n(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{-2}{n-2}x^{-(n-2)/2}\Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

إذن التابع الموجب r_n غير لوبيغ جموع على I .

يمكن تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي على المتتالية $\{r_n\}$ لأنها متزاية (إذا إن التابع r متناقص وَ $x^{n+1} \leq x^n$ على I) وذات عناصر موجبة. ولذا

$$+\infty = 1\cdot\infty = \int_I R(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I r_n(x)\,dx = +\infty.$$

2.3.20.3 • بما أن التابع ψ متناقص والتابع $x \mapsto x^n$ متزايد على I فإن التابع $x \mapsto \psi(x^n)$ متناقص على I ولذا فهو ريمان كمول على المجال المتراص I وبالتالي فهو لوبيغ جموع وعليه هو قيوس على I . بما أن متتالية التوابع القيوسة $\{\psi_n\}$ موجبة ومتزايدة فيمكن تطبيق عليها مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي وبما أن استمرار ψ عند 0 يقتضي أن يكون لدينا $\lim_{n\to\infty}\psi(x^n) = \psi(0)$ مهما كان $x \in]0,1[$. إذن

$$\psi(0) = \int_I \lim_{n\to\infty}\psi(x^n)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I \psi(x^n)\,dx.$$

4.20.3 **حل التمرين الرابع •** لدينا $|t| \leq \sqrt{|f(x)|^2+t^2}$ مهما كان t من $\mathbb{R}$ وشبه كليا نسبة إلى x على I . ينتج من هذا أن

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_I \sqrt{|f(x)|^2+t^2}\,dx \geq \lim_{t\to\pm\infty}|t|\int_I 1\,dx = +\infty.$$

1.4.20.3 • ليكن s وَ t عنصرين مختفين من $\mathbb{R}$. لدينا

$$\begin{aligned}
|K(s)-K(t)| &\leq \int_I \left|\sqrt{|f(x)|^2+s^2}-\sqrt{|f(x)|^2+t^2}\right| dx\\
&= \int_I \frac{|s^2-t^2|}{\sqrt{|f(x)|^2+s^2}+\sqrt{|f(x)|^2+t^2}}\,dx\\
&\leq |s-t|\int_I \frac{|s|+|t|}{|s|+|t|}\,dx = |s-t|.
\end{aligned}$$

هذا يعني أن التابع K ليبشيتزي على $\mathbb{R}$ وهو لذلك مستمر بانتظام على هذه المجموعة.

2.4.20.3 • بما أن $\frac{1}{f}$ لوبيغ جموع فإنه منته شبه كليا على I هذا يقتضي أن يكون f غير معدوم شبه كليا على I . إذن $|f| > 0$ شك على I . نستطيع إذن أن نعوض t_0 بـ 0 في عنبارة المشتق التي وجدنانا في التمرين الثاني أعلاه لنحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\Big|_{t_0=0} = 0 \quad \text{شبه كليا على } I .$$

وبتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية، إنه لدينا من أجل $0 < |t| \leq 1$ وشبه كليا نسبة إلى x على I :

$$\Big|\frac{F(x,t) - F(x,0)}{t}\Big| = \frac{|\theta t|}{\sqrt{|f(x)|^2 + (\theta t)^2}} \leq \frac{1}{|f(x)|} \in L^1(I).$$

هذا يعني أن شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند النقطة $t_0 = 0$ وعليه $K'(0)$ موجود ولدينا $K'(0) = 0$.

3.4.20.3 • من أجل كل t من $\mathbb{R}^\star$ يمكننا أن نكتب:

$$|K'(t)| \leq \int_I \frac{|t|}{\sqrt{|f(x)|^2 + t^2}}\,dx \leq \int_I \frac{|t|}{|t|}\,dx = 1$$

وبما أن $K'(0) = 0$ (في حالة فرض $\frac{1}{f}$ جموع) فإن $|K'(t)| \leq 1$ مهما كان t من $\mathbb{R}$.

4.4.20.3 • لنضع $G(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)$ ، حيث F هو التابع المعرف في حل التمرين الثاني. إنه إذن لدينا $G(x,t) = \frac{t}{\sqrt{|f(x)|^2 + t^2}}$ ، x شك في I وَ مهما كان t من $\mathbb{R}^\star$. وبفرض $1/f$ كمول يكون للعبارة السابقة معنى من أجل $t = 0$ ولدينا $G(x,0) = 0$ ، شك في I . ثمّ إنه لدينا، من أجل كل t من $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = \frac{|f(x)|^2}{[|f(x)|^2 + t^2]^{3/2}} \text{ ، شك في } I .$$

كما أنه لدينا، وفقا لمبرهنة التزايدات المتهية، ومن أجل t_0 وَ t من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |G(x,t)-G(x,t_0)| &= \Big|\frac{t}{\sqrt{|f(x)|^2+t^2}}-\frac{t_0}{\sqrt{|f(x)|^2+t_0^2}}\Big| \\ &= \frac{|t-t_0||f(x)|^2}{[|f(x)|^2+(t_0+\theta(t-t_0))^2]^{3/2}} \\ &\le \frac{|t-t_0||f(x)|^2}{[|f(x)|^2]^{3/2}}=\frac{|t-t_0|}{|f(x)|}\in L^1(I). \end{aligned}$$

ذا يعني أن شروط الإشتقاق تحت إشارة التكامل محققة عند كل نقطة t من $\mathbb{R}$ ولدينا

$$K''(t)=\int_I \frac{|f(x)|^2}{[|f(x)|^2+t^2]^{3/2}}\,dx,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

ونتج من إشارة K'' الموجبة أن K محدب على $\mathbb{R}$.

21.3 حل الموضوع الـ 25^-

1.21.3 **حل التمرين الأول•** إنه لدينا $\varphi(x)=0$ مهما كان $x \not\ni [-1,1] \doteq I$ وَ $\varphi(x)=\frac{15}{16}(1-x^2)^2$ مهما كان $x \ni I$. واضح عندئذ أن φ قابل للإشتقاق بالإستمرار عند كل نقطة من $\mathbb{R}$ مختلفة عن ±1 ولدينا $\varphi'(x)=0$ مهما كان $x \not\ni I$ وَ $\varphi'(x)=-\frac{15}{4}x(1-x^2)$ مهما كان $x \ni I^o$. ومن عبارتي φ' في المجال I^o وفي متممة المجال I نرى أن

$$\lim_{x\downarrow 1}\varphi'(x)=\lim_{x\uparrow 1}\varphi'(x)=\lim_{x\downarrow -1}\varphi'(x)=\lim_{x\uparrow -1}\varphi'(x)=0.$$

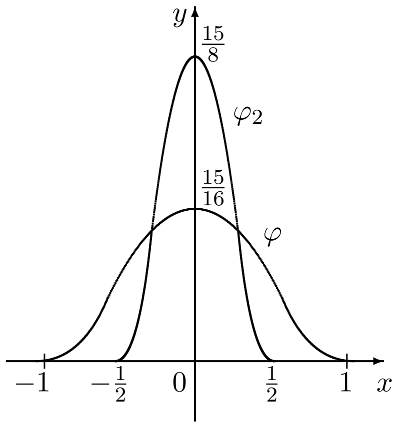
ينتج من هذا باستخدام مبرهنة التزايدات المتهية ان φ قابل للإشتقاق عند ±1 وبمشتق مستمر عند هاتين النقطتين. إذن φ قابل للإشتقاق بالإستمرار على $\mathbb{R}$.

في المجال I^o لدينا $\varphi''(x)=\frac{15}{4}(3x^2-1)$ مهما كان $x \ni I^o$ ، وعليه يكون بيان φ مقعرا في المجال $Q \doteq [-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}]$ ومحدّبا في ${}^cQ$ ، متممة Q . أنظر البيان جانبه. وحيث لا ترى البيانين فهما منطبقين مع المحور Ox .

حساب التكامل $\int_{-1}^1\varphi(x)\,dx$ بسيط. لدينا:

$\int_{-1}^1\varphi(x)\,dx=\frac{15}{16}\int_{-1}^1(1-2x^2+x^4)\,dx=1.$

التابع φ_2 يساوي تعريفا $\varphi_2(x) = 2\varphi(2x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ وهو غير معدوم فقط في المجال المفتوح $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ وبيانه موضح أسفله.



بما أن $\varphi_n(x) = \frac{15}{16}(1-n^2x^2)^2\chi_I(nx)$ وَ $\chi_I(nx)$ غير معدوم فقط إذا كان $|nx| \leq 1$ ، أي $|x| \leq \frac{1}{n}$ وإذا أخذنا بعين الإعتبار $1-n^2x^2$ فنرى أن φ_n موجب تماما فقط على المجال $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\doteq J_n$.

1.1.21.3 • إنه لدينا $\varphi_n(0) = \frac{15}{16}n$ ومن أجل x غير معدوم فمن أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $|x| > \frac{1}{n_0}$ يكون $\varphi_n(x) = 0$ مهما كان $n_0 \leq n$. إذن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_n$ متقاربة ببساطة نحو التابع Φ المعدوم عند كل نقطة من $\mathbb{R}^\star$ وَ $\Phi(0) = +\infty$. إن هذا التقارب غير منتظم إذ إن $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \Phi(x)| = +\infty$.

بما أن φ_n غير معدوم فقط في المجال J_n فإنه لدينا، بإجراء التبديل في المتغير $nx = s$:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} n\varphi(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} \varphi(s)\,ds = 1.$$

واضح عندها أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = 1$.

لو كان من الممكن استخدام مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي أو مبرهنة التقارب بالهيمنة لكانت النهاية السابقة معدومة كتكامل تابع معدوم شبه كليا هو التابع Φ . لم يكن إذن من الممكن استخدام هاتين المبرهنتين.

2.21.3 **حل التمرين الثاني•**

1.2.21.3 • إذا أبعدنا المجالين حيث ξ_0 معدوم وأجرينا التبديل في المتغير $t-x=s$ فنرى أن:

$$\begin{aligned}(\xi_0 \star \psi_0)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \xi_0(x)\psi_0(t-x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+(t-x)^2} \\ &= \int_{t-1}^{t+1} \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(t+1) - \arctan(t-1)\cdot\end{aligned}$$

22.3 حل الموضوع الـ 27^{-}

1.22.3 التمرين الثالث•

1.1.22.3 • ليكن $Z \in \mathcal{A}'$. عندئذ من أجل الجزئين A_1 وَ A_2 ، الموجودين تعريفا، لدينا $^cA_2 \subset {^c\mathcal{A}'} \subset {^cA_1}$ وَ $^cA_1 \setminus {^cA_2} = A_2 \setminus A_1$. إذن $^cZ \in \mathcal{A}'$. لتكن الآن $\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}'$. من أجل كل n يوجد A_1^n وَ A_2^n بحيث $A_2^n \supset Z^n \supset A_2^n$. لنضع $A_1^{\infty} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_1^n$ وَ $A_2^{\infty} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_2^n$ وَ $Z^{\infty} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z^n$. واضح أن $A_1^{\infty} \subset Z^{\infty} \subset A_2^{\infty}$ وَ $A_2^{\infty} \setminus A_1^{\infty} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_2^n \setminus A_1^n)$. مع الاتحاد الأخير مهمل كإتحاد عدود لأجزاء مهملة. إذن $Z^{\infty} \in \mathcal{A}'$. بيّنا إذن أن $\mathcal{A}'$ عشيرة.

2.1.22.3 • لنقوم الآن بتمديد القياس μ إلى $\mathcal{A}'$. لنعرف μ' على $\mathcal{A}'$ كما يلي. من أجل $Z \in \mathcal{A}'$ يوجد A_1 وَ A_2 من $\mathcal{A}$ يحققان ما ورد في تعريف $\mathcal{A}'$. إنه لدينا

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 \cap {^cA_1}) + \mu(A_1) = \mu(A_1).$$

وعندئذ نضع $\mu'(Z) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$. إن العبارة $\mu'(Z)$ لا تـتعلق بالجزئين A_1 وَ A_2 ، لأنه من أجل A_1' وَ A_2' من $\mathcal{A}$ مع $A_1' \subset Z \subset A_2'$ وَ $\mu(A_2' \setminus A_1') = 0$ ، يكون لدينا $A_1 \subset A_2'$ ولذا $\mu(A_2') \geq \mu(A_1) = \mu(A_2)$ ، ويكون لدينا $A_1' \subset A_2$ ولذا $\mu(A_2') = \mu(A_1') \leq \mu(A_2)$. إذن $\mu(Z) = \mu(A_1') = \mu(A_1)$.

3.1.22.3 • لنثبت الآن أن μ' سيغما جمعي. لتكن إذن $\{Z^n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير متقاطعة من عنصر $\mathcal{A}'$. فتكون $\{A_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ تحقق ما ورد في تعريف $\mathcal{A}'$. إنها حتما غير متقاطعة ولدينا

$$\mu'\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z^n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_1^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_1^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(Z^n).$$

إذن μ' قياس وهو يمدد القياس μ .

4.1.22.3 • ثمّ إن μ' تام، لأنه من أجل $Z \in \mathcal{A}'$ مع $\mu'(Z) = 0$ يوجد $A_2 \in \mathcal{A}$ مع $\mu(A_2) = 0$ ولذلك إذا كان $Z_1 \subset Z$ فيوجد B_1 من $\mathcal{A}$ بحيث $A_2 \supset Z_1 \supset B_1$ مع $\mu(A_2 \setminus B_1) = 0$ وعليه $Z_1 \in \mathcal{A}'$.

23.3 حل الموضوع الـ 40

1.23.3 **التمرين الأول•** بما المربع المفتوح $C =]0,1[\times]0,1[$ مزود بعشيرته البوريلية فإن التابع الحقيقي f المعرف على C بأن $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ قيوس لكونه مستمر كنسبة تابعين مستمرين مع التابع الموجود في المقام لا ينعدم أبدا في C .

1.1.23.3 • حساب المشتق الجزئي المطلوب ومشتق جزئي آخر نحتاج إليه:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(x+y)^2}\right) &= \frac{-(x+y)^2 + 2x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-(x+y)+2x}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3},\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) &= \frac{(x+y)^2 - 2y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

هذا يسمح لنا بحساب $T = \int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\,dx]\,dy$ وَ $K = \int_0^1 [\int_0^1 f(x,y)\,dy]\,dx$. لدينا:

$$T = \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(x+y)^2}\right)dx\Big]\,dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{-x}{(x+y)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\, dy = \frac{1}{1+y}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{2};\\
K &= \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) dy\Big]\, dx\\
&= \int_0^1 \frac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

وتلاحظ أن $T \neq K$.

2.23.3 • علينا أن نثبت بالحساب الفعلي أن $\int_C |f(x,y)|\, d\lambda_(x,y) = +\infty$. وإذا ما استفدنا من مبرهنة فوبيني (تونيلي)، يكفي أن نثبت أن $\int_0^1 [\int_0^1 |f(x,y)|\, dy]\, dx = +\infty$. لنحسب التكامل الداخلي. لدينا (لاحظ الإشارة بسبب القيمة المطلقة):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x,y)|\, dy &= \int_0^x f(x,y)\, dy - \int_x^1 f(x,y)\, dy\\
&= \frac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=x} - \frac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=x}^{y=1}\\
&= \frac{x}{(2x)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{(2x)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

هذا يستلزم أن

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big[\int_0^1 |f(x,y)|\, dy\Big]\, dx &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big)\, dx\\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 + \frac{1}{x+1}\Big|_0^1 = +\infty.
\end{aligned}$$

هذا ينهي الإثبات على أن $f \not\in \mathcal{L}^1(C, \mathcal{B}_C, \lambda_2)$.

3.23.3 **التمرين الثاني•** الشريط $S =]0,+\infty[\times]0,1[$ قيوس (بوريلي) لكونه مفتوحا ولذلك تكون دالته المميزة χ_S قيوسة. وحتى نتأكد من أن $\chi_S = \chi_{]0,+\infty[} \times \chi_{]0,1[}$ يكفي أن نتأك من تطابق طرفي المساواة عند كل نقطة (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، وهذا واضح.

1.3.23.3 • ليكن $I_b(y) = \int_0^b e^{-x}\sin(2yx)\,dx$. بما أن

$$I_b(y) = -\frac{e^{-b}}{1+4y^2}[\sin(2by) + 2y\cos(2by)] + \frac{2y}{1+4y^2},$$

فإن $I(y) = \lim_{b\to\infty} I_b(y) = \frac{2y}{1+4y^2}$.

2.3.23.3 • إن التابع $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto g(x,y) = \chi_S(x,y)e^{-x}\sin(2yx) \in \mathbb{R}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ لكونه قيوسا ولدينا، وفقا لمبرهنة تونيلي (تذكر أن $\chi_S = \chi_{]0,+\infty[} \times \chi_{]0,1[}$):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,+\infty[}(x)e^{-x}\Big\{\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,1[}(y)|\sin(2yx)|\,dy\Big\}\,dx \\
&\le \int_0^\infty e^{-x}\Big\{\int_0^1 dy\Big\}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

3.3.23.3 • بما أن g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ فإن مبرهنة فوبيني تسمح لنا بأن نكتب (لاحظ غياب القيمة المطلقة):

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dy\Big]dx = \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx\Big]dy.$$

لكنه لدينا

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dy\Big]dx &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,+\infty[}(x)e^{-x}\Big\{\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,1[}(y)\sin(2yx)\,dy\Big\}\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\Big\{\int_0^1 \sin(2yx)\,dy\Big\}\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\Big\{-\frac{\cos(2yx)}{2x}\Big|_{y=0}^{y=1}\Big\}\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = L.
\end{aligned}$$

ولدينا (باستخدام نتيجة السؤال ما قبل السابق)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx\Big]dy &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,1[}(y)\Big\{\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,+\infty[}(x)e^{-x}\sin(2yx)\,dx\Big\}\,dy \\
&= \int_0^1 \Big\{\int_0^\infty e^{-x}\sin(2yx)\,dx\Big\}\,dy \\
&= \int_0^1 I(y)\,dy = \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\,dy \\
&= \frac{1}{4}\ln(1+4y^2)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4}\ln 5.
\end{aligned}$$

إذن $L = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln 5$.

4.23.3 **التمرين الثالث•** تتكون المتتالية التابعية $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $h_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ من توابع مستمرة إنها إذن قيوسة ثم، بما أنها موجبة ولدينا

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+nx^2}\,dx \le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi < \infty$$

فإنها ذات عناصر من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ومن الواضح أن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة (نقطيا) نحو $h = \chi_{\{0\}}$ ، الدالة المميزة لوحيدة العنصر $\{0\}$. وكما سبق لنا أن استدخدمنا كونها مكبورة بتابع من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ فإن مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ تضمن تقاربها في هذا الفضاء نحو التابع $h = \chi_{\{0\}}$.

5.23.3 **حل التمرين الرابع•** ليكن $2 < p$ عددا حقيقيا وليكن التابع φ المعرف على $\mathbb{R}_+$ بأن $\varphi(x) = x^p + 1 - (x^2+1)^{p/2}$. لدينا

$$\varphi'(x) = px^{p-1} - px(x^2+1)^{\frac{p-2}{2}} = px[(x^2)^{\frac{p-2}{2}} - (x^2+1)^{\frac{p-2}{2}}] \le 0,\ \ \forall x \ge 0.$$

لأن التابع $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto t^{\frac{p-2}{2}} \in \mathbb{R}_+$ متزايد لكون $2 < p$. إذن φ متناقص على $\mathbb{R}_+$ وهو معدوم عند الصفر. إذن

$$x^p + 1 \le (x^2+1)^{p/2},\ \ \forall x \ge 0, \qquad (p \ge 2).$$

ليكن الآن a وَ b عددين موجبين مع $0 < b$. بوضع $x = \frac{a}{b}$ في المتباينة السابقة نحصل على المتباينة $(\frac{a}{b})^p + 1 \le [(\frac{a}{b})^2 + 1]^{p/2}$ التي تستلزم المتباينة

$$a^p + b^p \leq (a^2+b^2)^{p/2}, \quad \forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0.$$

ليكن الآن x وَ y عددين حقيقيين ولنأخذ في المتباينة السابقة $a = \frac{|x-y|}{2}$ وَ $b = \frac{|x+y|}{2}$ فنجد:

$$\begin{aligned}\frac{|x-y|^p}{2^p} + \frac{|x+y|^p}{2^p} &\leq \left(\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4}\right)^{p/2} \\ &= \left(\frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p.\end{aligned}$$

أمّا المتباينة الأخيرة فهي ناتجة من تحدب التابع $t \mapsto t^{p/2}$ من أجل $0 \leq t$ وَ $2 < p$. ومنه المتباينة المطلوبة

$$|x-y|^p + |x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p),\ \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (p \geq 2).$$

ملاحظة ـ في حالة $1 \leq p < 2$ «تنقلب» كل المباينات السابقة لنحصل على

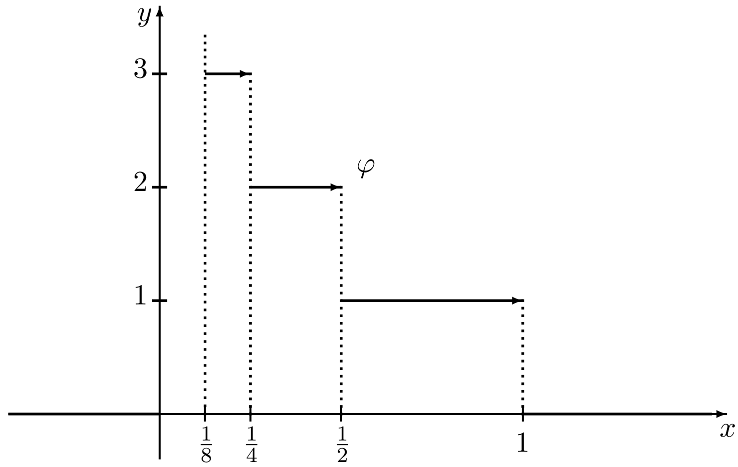
$$|x-y|^p + |x+y|^p \geq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p),\ \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (1 \leq p < 2).$$

24.3 حل المضوع الـ 41

1.24.3 **التمرين الأول•** ا) ليكن التابع الحقيقي $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{I_n}(x)$ ، حيث $I_n = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$. بما أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n =]0,1[$ فإن بيان φ خارج المجال $]0,\infty[$ ينطبق مع المحور $0x$ وبما أن

$$\varphi(x) = \chi_{[\frac{1}{2},1[}(x) + 2\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}(x) + 3\chi_{[\frac{1}{8},\frac{1}{4}[}(x) + \sum_{n=4}^{\infty} n\chi_{I_n}(x)$$

فإن بيان φ على المجموعة $]-\infty,0] \cup [2^{-3},\infty[$ هو الموضح أسفله.



ب) إننا نعرف من المحاضرة والأعمال الموجهة أن التابع $N_\infty(\varphi)$ الذي يستخدم في تعريف الفضاء $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \lambda)$ (λ هو هنا قياس لوبيغ) يعطي بالكيفيتين التاليتين (لاحظ أن φ موجب):

$$N_\infty(\varphi) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda(\{\varphi > \alpha\}) = 0\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda(\{\varphi > \alpha\}) > 0\},$$

حيث $\{\varphi > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) > \alpha\}$. ليكن إذن α عددا موجبا. ينتج من شكل التابع φ أنه إذا كان العدد الطبيعي n_0 أكبر من α كان لدينا $[\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{1}{2^{n_0-1}}] \subset \{\varphi > \alpha\}$ وعليه $0 < \frac{1}{2^{n_0}} \leq \lambda(\{\varphi > \alpha\})$. هذا يقتضي أن $N_\infty(\varphi) = +\infty$ وبالتالي $\varphi \notin \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

جـ) ليكن $p \in [1, \infty[$. بما أن φ مجموع سلسلة توابع قيوسة وموجبة فلدينا

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^p(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^p \chi_{I_n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

حيث $a_n = \frac{n^p}{2^n}$ وهو الحد العام لسلسلة عددية موجبة وبما أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{1}{2} < 1$$

فإن اختبار النسبة لِدالامبير d'Alembert يبين أن السلسلة متقاربة وعليه فإن $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما $p \in [1, \infty[$.

2.24.3 **التمرين الثاني•** نذكِّر أن $a \neq b$ فرضا. ليكن x عددا حقيقيا. إذا كان $x > 0$ فنستطيع أن نكتب

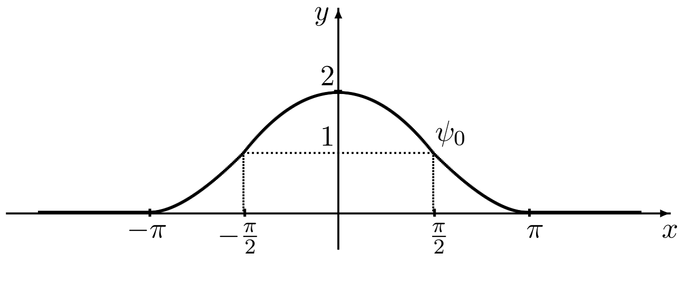
$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{x} e^{-a(x-y)} e^{by}\, dy + \int_{x}^{0} e^{a(x-y)} e^{by}\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{a(x-y)} e^{-by}\, dy \\ &= e^{-ax} \int_{-\infty}^{x} e^{(a+b)y}\, dy + e^{ax} \int_{x}^{0} e^{(b-a)y}\, dy + e^{ax} \int_{0}^{\infty} e^{-(a+b)y}\, dy \\ &= \frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{ax}-e^{bx}}{b-a} + \frac{e^{ax}}{a+b} = \frac{e^{ax}+e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}.\end{aligned}$$

لاحظ أن العبارة السابقة صحيحة من أجل $x = 0$. إذا كان $x > 0$ فنستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-y)} e^{by}\, dy + \int_{0}^{x} e^{-a(x-y)} e^{-by}\, dy + \int_{x}^{\infty} e^{a(x-y)} e^{-by}\, dy \\ &= \frac{e^{-ax}+e^{-bx}}{a+b} - \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{a-b}.\end{aligned}$$

لدينا إذن

$$(f \star g)(x) = \frac{e^{-a|x|}+e^{-b|x|}}{a+b} - \frac{e^{-a|x|}-e^{-b|x|}}{a-b}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$



3.24.3 **حل التمرين الثالث•**

1.3.24.3 • بيان التابع ψ_0 موضح أعلاه. ولدينا

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos x)\, dx = 2\pi + \sin x \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

ثمّ إن ψ_0 قابل للاشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ لأنه لدينا $\psi_0'(x) = -\sin x$ من أجل $|x| < \pi$ ولدينا $\psi_0'(x) = 0$ من أجل $|x| > \pi$. ويمكن التأكد من أن مشتق من ψ_0 من اليمين عند النقطة $-\pi$ يساوي مشتقه من اليسار عند هذه النقطة كما يمكننا التأكد من شيء مماثل عند النقطة π ، أي أن $\psi_0'(\pm\pi) = 0$. أمّا استمرار المشتق ψ_0' فينتج من استمرار الجيب وانعدامه عن النقطين $-\pi$ وَ π .

2.3.24.3 • بوضع $t = nx$ (إذن $dt = n\,dx$) نستطيع أن نكتب:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{2\pi}\psi_0(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \psi_0(t)\,dt = 1.$$

من الواضح أن $\operatorname{supp}\psi_0 = [-\pi, \pi]$ وَ $\operatorname{supp}\psi_n = [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$. وعليه $\psi_n(0) = \frac{n}{2\pi} \times 2 = \frac{n}{\pi}$ ومن أجل $x \neq 0$ يكون لدينا $\psi_n(x) = 0$ ، من أجل $n_0 \leq n$ مع $|x| > \frac{\pi}{n_0}$. ولذا

$$\psi_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

ولاختبار التقارب في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ نكتب

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n(x) - \psi_0(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,dx = 1$$

وبالتالي لا تتقارب المتتالية $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ نحو ψ_0 في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

3.3.24.3 • ليكن $u \in C_c(\mathbb{R})$ وَ $x \in \mathbb{R}$. بما أنه لدينا كذلك $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-y)\,dy = 1$ فيمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
(\psi_n \star u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-y)u(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-y)u(x)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-y)[u(y) - u(x)]\,dy \\
&= \int_{|x-y|\leq\frac{\pi}{n}} \psi_n(x-y)[u(y) - u(x)]\,dy \\
&= \int_{x-\frac{\pi}{n}\leq y\leq x+\frac{\pi}{n}} \psi_n(x-y)[u(y) - u(x)]\,dy
\end{aligned}$$

إذن

$$|(\psi_n \star u)(x) - u(x)| \leq \int_{x-\frac{\pi}{n}}^{x+\frac{\pi}{n}} \psi_n(x-y)|u(y)-u(x)|\,dy.$$

ليكن الآن $\varepsilon > 0$. بما أن u مستمر عند النقطة x فيوجد $\delta > 0$ بحيث يكون لدينا

$$|u(y)-u(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in [x-\delta, x+\delta].$$

إذن، من أجل n_0 بحيث $\frac{\pi}{n_0} < \delta$ فبأخذ $n_0 \leq n$ ، نستطيع أن نكتب

$$|(\psi_n \star u)(x) - u(x)| \leq \varepsilon \int_{x-\frac{\pi}{n}}^{x+\frac{\pi}{n}} \psi_n(x-y)\,dy = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x-y)\,dy = \varepsilon.$$

هذا يثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n \star u)(x) = u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

لقد رأينا في المحاضرات أن هذا التقارب منتظم على $\mathbb{R}$. يمكنك أن تثبت هذا بنفسك مقلدا الحسابات السابقة مع قصر التكامل على متراص ملائم ثمّ استخدام الاستمرار المنتظم للتابع u على هذا المتراص. وبما أن ψ_n قابل للاشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ فينتج كذلك من نتيجة رأيناها في المحاضرات أن $\psi_n \star u$ قابل للاشتقاق بالاستمرار في $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$(\psi_n \star u)'(x) = (\psi_n' \star u)(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4.24.3 **التمرين الرابع•** ١. إذا كان θ هو التابع الحقيقي المعرف بأن $\theta(t) = 0$ من أجل $t \leq 0$ وَ $\theta(t) = e^{-1/t}$ من أجل $t > 0$ (لقد رأينا في الأعمال الموجهة أن $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$) وكان $c < d$ عددين حقيقيين فإن التابع θ_{cd} المعرف بأن

$$\theta_{cd}(x) = \theta((x-c)(d-x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

يحقق الخواص التالية: $\theta_{cd} \in C^\infty(\mathbb{R})$ ، $\operatorname{supp}\theta_{cd} = [c,d]$ ، $0 \leq \theta_{cd} \leq 1$.

٢. بوضع

$$\eta_{cd}(x) = C\int_{-\infty}^{x} \theta_{cd}(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{C} = \int_c^d \theta_{cd}(t)\,dt,$$

نرى أن التابع η_{cd} يحقق الخواص:

$$\eta_{cd} \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \ \eta_{cd}(x) = 0,\ \forall x \le c,\ \ 0 \le \eta_{cd} \le 1,\ \ \eta_{cd}(x) = 1,\ \forall x \ge d.$$

٣. إذا كانت a وَ b وَ ε أعداد حقيقية مع $a < b$ وَ $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$ فيكون لدينا $a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b - \frac{\varepsilon}{2}$ وبأخذ

$$\varphi_{ab\varepsilon}(x) = (\eta_{a+\frac{\varepsilon}{2},a+\varepsilon})(x)(1 - \eta_{b-\varepsilon,b-\frac{\varepsilon}{2}})(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

نرى أن هذا التابع يحقق الخواص التالية:

$$\begin{aligned}\varphi_{ab\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \qquad & \operatorname{supp}\varphi_{ab\varepsilon} = [a + \frac{1}{2}\varepsilon, b - \frac{1}{2}\varepsilon],\\ & 0 \le \varphi_{ab\varepsilon} \le 1, \qquad \varphi_{ab\varepsilon}(x) = 1,\ \forall x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon].\end{aligned}$$

٤. لنأخذ $a = \frac{1}{4}$ وَ $b = \frac{7}{4}$ وَ $\varepsilon = \frac{1}{2}$. بما أن $\frac{1}{2} < \frac{b-a}{2} = \frac{6}{8}$ فيمكن الاستفادة من السؤال السابق للحصول على تابع، نشير إليه اختصارا بِـ φ ، بالمواصفات الموالية

$$\begin{aligned}\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\varphi = \Big[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Big], \qquad & \varphi(x) = 1, \forall x \in \Big[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\Big],\\ & 0 \le \varphi(x) \le 1, \forall\, x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

عندئذ بوضع

$$\varrho(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}\,), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

نحصل على تابع $\varrho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ يحقق ما يلي:

$$\begin{aligned}\varrho \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2), \qquad & \operatorname{supp}\varrho = T(0.5, 1.5),\ \ 0 \le \varrho(x,y) \le 1,\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\ & \varrho(x,y) = 1,\ \ \forall (x,y) \in T(0.75, 1.25).\end{aligned}$$

حيث $T(0.5, 1.5)$ (مثلا) هو التّاج

$$T(0.5, 1.5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0.5)^2 \le x^2 + y^2 \le (1.5)^2\}.$$

لاحظ أن ϱ قابل للاشتقاق ما لا نهاية من المرات لكون φ يتمتع بهذه الخاصية وكون التابع $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ يتمتع بالخاصية نفسها عند كل نقطة تختلف عن نقطة الأصل $(0,0)$ ، التي يبعدنا عنها سند φ ، الذي يجعل ϱ معدوما في الكرة الأقليدية ذات المركز $(0,0)$ ونصف القطر 0.5 .

25.3 حل الموضوع الـ 42

1.25.3 التمرين الأول • أ) ليكن $y > 0$ عددا حقيقيا. لدينا

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dx &= \frac{1}{y}\int_1^{\infty}d_x(-e^{-xy}+e^{-2xy})\\ &= \frac{1}{y}(-e^{-xy}+e^{-2xy})|_{x=1}^{\infty} \doteq \psi(y),\end{aligned}$$

حيث $\psi(y)=\frac{e^y-1}{ye^y}e^{-y}$ وهو تابع مستمر على $]0,1]$ وبما أن $\lim_{y\downarrow 0}\psi(y)=1$ (استخدم مثلا مبرهنة التزايدات المتهية) فيمكن تمديده بالاستمرار عند النقطة 0 وعليه فهو ريمان كمول على $[0,1]$. هذا يعني أن التكامل

$$\int_0^1\Big[\int_1^{\infty}(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dx\Big]\,dy=\int_0^1\frac{e^y-1}{ye^y}e^{-y}\,dy$$

موجود وهو موجب تماما لكون ψ مستمرا وموجبا تماما على $]0,1]$. ومن أجل $x > 0$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^1(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dy &= \frac{1}{x}\int_0^1 d_y(-e^{-xy}+e^{-2xy})\\ &= \frac{1}{x}(-e^{-xy}+e^{-2xy})|_{y=0}^{1} \doteq \xi(x),\end{aligned}$$

حيث $\xi(x)=\frac{e^{-x}-1}{x}e^{-x}$ وهو تابع مستمر على $[1,+\infty[$ وبما أن $|\xi(x)|\le e^{-x}$ فهو لوبيغ كمول على المجال $[1,+\infty[$. هذا يثبت أن التكامل

$$\int_1^{\infty}\Big[\int_0^1(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dy\Big]\,dx=\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}-1}{x}e^{-x}\,dx$$

موجود وهو سالب تماما لكون ξ مستمرا وسالبا تماما على $[1,\infty[$.

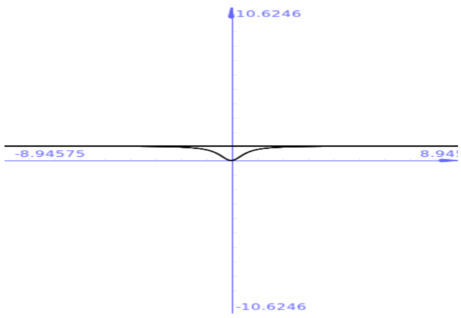
ب) بما أن التكاملين من إشارتين مختلفتين فإن

$$\int_0^1\Big[\int_1^{\infty}(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dx\Big]\,dy\neq\int_1^{\infty}\Big[\int_0^1(e^{-xy}-2e^{-2xy})\,dy\Big]\,dx$$

جـ) إن عدم تساوي التكاملين السابقين يثبت (وفقا لمبرهنة فوبيني) أن التابع $g(x,y)=e^{-xy}-2e^{-2xy}$ لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(]1,+\infty[\times]0,1[)$ ، أي أنه غير لوبيغ كمول على الشريط المذكور.

26.3 حل الموضوع الـ 43

1.26.3 **التمرين الأول•** ا) كل بيانات التوابع $\varphi_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ تقع فوق محور الفواصل وتمر من نقطة الأصل وتقبل المستقيم $y=0$ كمماس لها عند $x=0$ ، وهذا لأن $\varphi_n'(x)=\dfrac{2nx}{(1+nx^2)^2}$ ، وتقبل عند $\pm\infty$ المستقيم الأفقي $y=1$ كخط مقارب عندما يؤول x نحو $-\infty$ وَ $+\infty$ كذلك، ثمّ إنها تقع دائما تحت هذا الخط لكون $\varphi_n(x)\leq 1$ ، مهما كان $x\in\mathbb{R}$. أنظر الشكل أسفله الذي يمثل بيان φ_3 مع خطه المقارب.



ب) ليكن $1\leq p<\infty$ عددا حقيقيا. بما أن φ_n تابع قيوس (لكونه مستمرا) فمن أجل كل $u\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ، يكون التابع $u\varphi_n$ منتميا إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. إذن تكون كل عناصر المتتالية $\{u\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ منتمية إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=1$ ، مهما كان $x\in\mathbb{R}^\star$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}|u(x)\varphi_n(x)-u(x)|^p=0 \quad \text{شك في} \quad x\in\mathbb{R}.$$

ثمّ إن

$$\lim_{n\to\infty}|u(x)\varphi_n(x)-u(x)|^p\leq|u(x)|^p\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{شك في} \quad x\in\mathbb{R}.$$

تضمن عندها مبرهنة التقارب بالهيمنة للبيغ تقارب المتتالية $\{u\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو u في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

جـ) إذا أخذنا التابع $u_0(x) = (1-|x|)\chi_J(x)$ ، حيث χ_J هي الدالة المميزة للمجال $J = [-1, 1]$ ، فيكون لدينا

$$\max_{\mathbb{R}} |u_0(x)\varphi_n(x) - u_0(x)| = \max_{J} \frac{u_0(x)}{1+nx^2} = u_0(0) = 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

وبالتالي لا تتقارب $\{u_0\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو u_0 في $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

2.26.3 **التمرين الثاني•** بما أن $\mathbb{R}^2$ مزود بالعشيرة البوريلية فإن الشريط $S_b =]0, b[\times]0, +\infty[$ قيوس لجداء مجالين مفتوحين، وتكون دالته المميزة χ_b قيوسة. ونلاحظ أنه يمكن البرهان على أن

$$\chi_b(x,y) = \chi_{]0,b[}(x)\cdot\chi_{]0,+\infty[}(y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

ا) واضح أن التابع $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto g_b(x,y) = \chi_b(x,y)e^{-xy}\sin x \in \mathbb{R}$ قيوس لجداء توابع قيوسة. ثمّ إن مبرهنة تونيلي تسمح لنا بأن نكتب:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |g_b(x,y)|\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,b[}(x)|\sin x|\Big[\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,\infty[}(y)e^{-xy}\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^b |\sin x|\Big[-\frac{e^{-xy}}{x}\Big]_{y=0}^{y=+\infty}\,dx\\
&= \int_0^b \frac{|\sin x|}{x} < +\infty.
\end{aligned}$$

هذا يعني أن التابع g_b ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ لكون التكامل $\int_0^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ منتهيا كتكامل لريمان لتابع مستمر على المتراص $[0,b]$ ، هو التابع الذي نحصل عليه بتمديد بالاستمرار التابع $x \longmapsto \frac{|\sin x|}{x}$ عند النقطة 0 .

ب) اعتمادا على مبرهنة فوبيني نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g_b(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,b[}(x)\sin x\Big[\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,\infty[}(y)e^{-xy}\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^b \sin x\Big[-\frac{e^{-xy}}{x}\Big]_{y=0}^{y=+\infty}\,dx = \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

جـ) بما أن

$$\int_0^b e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,[y\sin b+\cos b],$$

فإن مبرهنة فوبيني تُمكننا من أن نكتب

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} g_b(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \Big[\int_0^b e^{-xy}\sin x\,dx\Big]\,dy \\
&= \arctan y|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,[y\sin b+\cos b]\,dy \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty h_b(y)\,dy.
\end{aligned}$$

د) بما أنه لدينا

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |h_b(y)|\,dy &\le \int_0^\infty \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,[y+1]\,dy \\
&\le \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-by}}{1+y^2}\,[y^2+3]\,dy \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-by}\,dy = \frac{3}{2}\,\frac{e^{-by}}{-b}\Big|_0^\infty = \frac{3}{2b},
\end{aligned}$$

فإن $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^\infty h_b(y)\,dy = 0$. ومنه ومن السؤال السابق:

$$T = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

3.26.3 **التمرين الثالث•** ا) واضح أن التابع $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}\chi_I(x)$ قيوس. ثمّ إن

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2 < +\infty.$$

ينتمي إذن f إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ويكون عندها جداء اللّف $f\star f$ معرفا جيدا وفقا لمبرهنة قدمت في المحاضرات.

ب) إذا لاحظنا أن $\chi_I(-y)\cdot\chi_I(y) = 0$ مهما كان $y \in \mathbb{R}$ ، فنرى أن

$$(f\star f)(0) = \int_{\mathbb{R}} |-y|^{-\frac{1}{2}}\chi_I(-y)\cdot|y|^{-\frac{1}{2}}\chi_I(y)\,dy = 0$$

اعتمادا على سند التابع f ، من أجل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا

$$(f\star f)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)\,dy=\int_{]0,1[\cap]x-1,x[}\frac{dy}{\sqrt{(x-y)y}}.$$

وبالتالي، يكون $(f\star f)(x)=0$ مهما كان $x\leq 0$ ومهما كان $x\geq 2$. وبما أن $]0,1[\cap]x-1,x[=]0,x[$ من أجل $x\in]0,1[$ وَ $]0,1[\cap]x-1,x[=]x-1,1[$ من أجل $x\in]1,2[$ فمن الواضح أن $(f\star f)(x)>0$ مهما كان x من المجال $]0,2[$.

جـ) التابع المعرف على المجال $[0,x]$ ($0<x$) بأن $\varphi(y)=(x-y)y$ موجب ويتمتع بذروة هي $\varphi(x/2)=x^2/4$ على مجال تعريفه. إذن

$$0<(x-y)y\leq\frac{x^2}{4}\iff\frac{2}{x}\leq\frac{1}{\sqrt{(x-y)y}},\ \forall y\in]0,x[.$$

هذا يستلزم أن

$$2\leq\int_0^x\frac{dy}{\sqrt{(x-y)y}},\quad\forall x\in]0,1[$$

أمّا فيما يخص سلوك $f\star f$ عند النقطة 0 ، فبما أنه لدينا $\lim_{x\uparrow 0}(f\star f)(x)=0$ وَ $\lim_{x\downarrow 0}(f\star f)(x)\geq 2$ فإن $f\star f$ متقطع عند النقطة $x=0$.

27.3 بعض المراجع حول نظرية القياس والمكاملة

[١] ف. ي. سميرنوف [1973 ، 318 ص.] ، دروس في الرياضيات العليا، الجزء الخامس (القسم الاول)، ترجمة لفيف من الاساتذة، مطبعة جامعة دمشق.

[٢] ي. عتيق [1996 ، 32 ص.] ، تمارين ومسائل في نظرية القياس والمكاملة، مطبوعة، المدرسة العليا للأساتذة، القبة.

[٣] ي. عتيق [1998 ، 103 ص.] ، نظرية القياس والمكاملة، مطبوعة، المدرسة

العليا للأساتذة، القبة .

[٤] أ. كولموغوروف وَ س. فومين [1973 ، 1987 ، 786 ص.] ، مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي، ديوان المطبوعات الجامعية، ترجمة أبوبكر خالد سعد الله.

[1] J.C. BURKILL [1951, 1975, 87 p.], *The Lebesgue integral*, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Claude W. BURRILL & John R. KNUDSEN [1969, 419 p.], *Real variables*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

[3] Nicolas BOURBAKI [1965, 283 p.], *Éléments de mathématiques : Intégration (chap. 1-4)*, Hermann, Paris.

[4] Jean DIEUDONNÉ [1968, 406 p.], *Éléments d'analyse*, Tome 2, Gauthiers-Villars, Paris.

[5] Bernard R. GELBAUM [1992, 488 p.], *Problems in real and complex analysis*, Springer-Varlag, Berlin.

[6] Claude GEORGE [1980, 432 p.], *Exercices et problèmes d'intégration*, Gauthier-Villars, Paris.

[7] René GOUYON [1967, 169 p.], *Intégration et distributions*, Vuibert, Paris.

[8] A.GUICHARDET [1969, 263 p.], *Calcul Intégral*, Armand Colin, Paris.

[9] Stanisław HARTMAN & Jan MIKUSIŃSKI [1961, 176 p.], *The theory of Lebesgue measure and integration*, Translated from Polish, Pergamon Press, Oxford.

[10] E. HEWITT & K. STROMBERG [1965, — p.], *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

[11] Roger V. JEAN [1989, 327 p.], *Mesure et intégration*, Presses de l'Université du Québec, Québec.

[12] Alexandre KIRILOV & Alexeï GVICHIANI [1982, 324 p.], *Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle*, Mir, Moscou.

[13] Henri LEBESGUE [1904, 138 p.], *Leçons sur l'intǵration et la recherche des fonctions primitives*, Gathier-Villars, Paris.

[14] Lakhdar MEZIANI [1978, 237 p.], *Mesure et intégration*, Cours polycopié, Université d'Alger.

[15] Walter RUDIN [1966, 412 p.], *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Prentice-Hill, New York.

[16] Malempati Madhusudana RAO [1987, 540 p.], *Measure theory and integration*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[17] M. SAMUELIDES & L. TOUZILLIER [1993, 391 p.], *Problèmes d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique*, Cépaduès-Éditions, Toulouse.

[18] Stanisław SAKS [1933, 1964, 443 p.], *Theory of the integral*, Dover Publications, Inc., New York.

[19] Laurent SCHWARTZ [1967, 830 p.], *Cours d'analyse*, Hermann, Paris.

[20] G.E. SHILOV & B.L. GUREVICH [1966, 1977, 233 p.], *Integral, measure and derivative: A unified approach*, Dover Publications, Inc., New york.

[21] Angus E. TAYLOR [1965, 1985, 437 p.], *General theory of functions and integration*, Dover Publications, Inc., New york.

[22] Alberto TORCHINSKY [1988, 403 p.], *Real variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New york.

[23] Richard L. WHEEDEN & Antoni ZYGMUND [1977, 274 p.], *Measure and integral: An introduction to real analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.

المحتويات