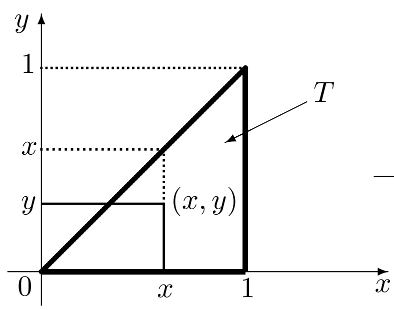
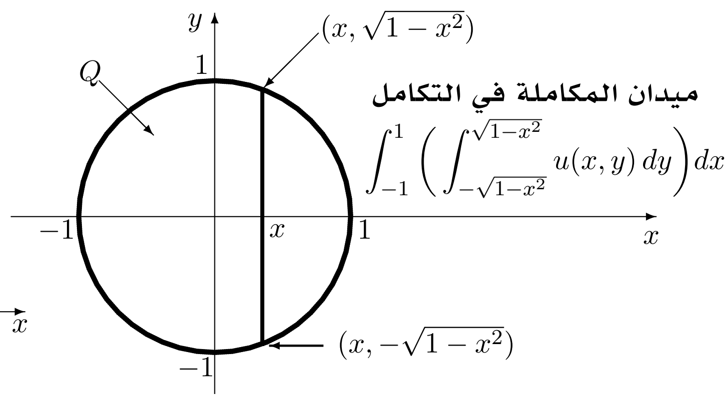
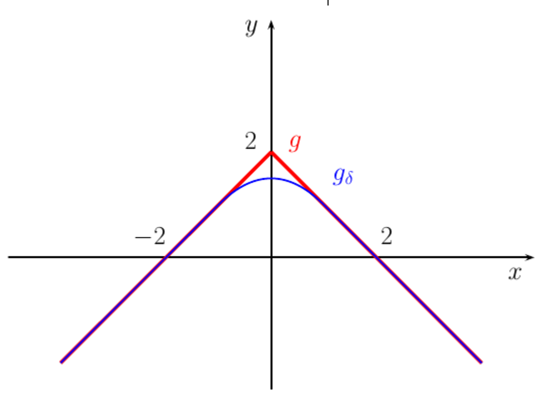
يوسف عتيق

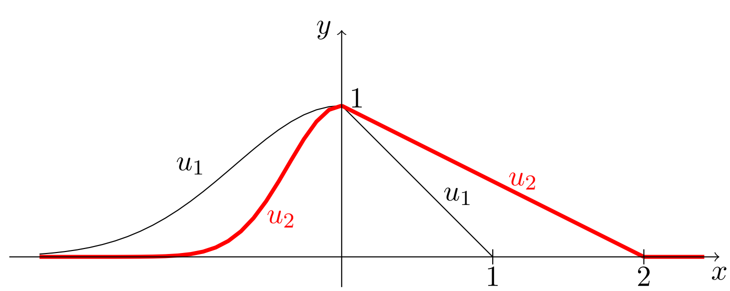
قسم الرياضيات ـــــ المدرسة العليا للأساتذة ـــــ القبة الجزائر

امتحانات في القياس والمكاملة









السنة الجامعية 2014 – 2015

الفهرس

1 امتحان 2010/02/13 4
2 امتحان 2010/06/09 5
3 امتحان 2010/09/20 6
4 امتحان 2011/02/06 7
5 امتحان 2011/06/21 8
6 امتحان 2011/06/29 9
7 امتحان 2011/09/10 9
8 امتحان 2012/03/15 10
9 امتحان 2012/06/24 11
10 امتحان 2012/09/06 12
11 امتحان 2013/02/06 12
12 امتحان 2013/06/01 13
13 امتحان 2013/09/10 14
14 امتحان 2014/02/06 15
15 امتحان 2014/06/11 16
16 امتحان 2014/06/23 16
17 امتحان 2014/09/10 17
18 حل امتحان 2010/02/13 20
19 حل امتحان 2010/09/20 23
20 حل امتحان 2011/06/21 24
21 حل امتحان 2011/09/10 27
22 حل امتحان 2012/03/15 30
23 حل امتحان 2012/09/06 31
24 حل امتحان 2013/02/06 34
25 حل امتحان 2013/06/01 37
26 حل امتحان 2013/09/10 42
27 حل امتحان 2014/02/06 45
28 حل امتحان 2014/09/10 49

المواضيع

نقدم للقارئ الكريم عددا من الامتحانات التي قدمت لطلبة السنة الرابعة رياضيات (نظام بكالوريا + 5) بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة في الفترة ما بين فيفري 2010 وسبتمبر 2014.

ولقد أرفقنا البعض من هذه الإختبارات بحلولها المفصلة.

وأملنا كبير في أن هذا سيوفر للدارس مادة مناسبة تمكنه من فهم أفضل لنظرية القياس والمكاملة ومن التحضير ، إن كان طالبا ، بكيفية مناسبة للامتحان.

1. امتحان 2010/02/13

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$) وأي جزء منه بعشيرته البوريلية وبقياسه للوبيغ.

1.1. التمرين الأول

.1.1.1

أحسب التكامل $\int_0^\pi (\int_0^x \sin y\, dy)\, dx$ مباشرة ثمّ بعكس ترتيب المكاملة.

.2.1.1

أحسب $\int_0^1 ye^{-xy}\, dy$ حيث $0 < x$.

أحسب كذلك المشتق

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}[\cos x + y\sin x]\Big).$$

2.1. التمرين الثاني

ليكن S شريط $\mathbb{R}^2$ المعرف بأن $S =]0,\infty[\times]0,1[$ وَ χ_S دالته المميزة. هل S قيوس؟ هل χ_S قيوسة؟ من أجل $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ أكتب، بدون تبرير، $\chi_S(x,y)$ بدلالة الدالتين المميزتين للمجالين المذكورين $\chi_{]0,\infty[}(x)$ وَ $\chi_{]0,1[}(y)$.

.1.2.1

أثبت أن التابع $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \chi_S(x,y)\, ye^{-xy}\sin x \in \mathbb{R}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

[**إرشاد:** يمكنك الاستفادة من مبرهنة تونيلي مع اكبار مناسب.]

.2.2.1

استخدم مبرهنة فوبيني لِكتابة التكامل $T = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$ بكيفية تُمكّنك من حساب قيمته. ثمّ بكتابة التكامل بكيفية مغايرة بين أن

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big)\, dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

3.1. التمرين الثالث

ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi(x) = 2x\chi_I(x)$ حيث χ_I هي الدالة المميزة للمجال $I = [0,1]$. ولتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بأن $\varphi_n(x) = n\varphi(n(x-n))$ ، $\mathbb{R} \ni x$. عيّن $\operatorname{supp}\varphi_n$ ، $\mathbb{N}^\star \ni n$.

سند φ_n هي المجموعة المعرفة بأن $\operatorname{supp}\varphi_n = \overline{\{x\in\mathbb{R} \mid \varphi_n(x)\neq 0\}}$ ($\overline{\{...\}}$ هي اللاقصة).

.1.3.1

على نفس المعلم، أرسم بيانات التوابع φ ، φ_1 ، φ_2 ، φ_3 . وبصفة عامة φ_n ، $3 < n$.

.2.3.1

بيّن أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ تتقارب ببساطة على $\mathbb{R}$ نحو تابع φ_∞ يُطلب تعيينه.

ماذا عن تقارب هذه المتتالية نحو φ_∞ في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ؟

4.1. التمرين الرابع

.1.4.1

ليكن $\alpha \in [1,+\infty[$ عددا حقيقيا وليكن التابع الحقيقي g_α المعطى على $I_\star =]0,1[$ بأن $g_\alpha(x) = x^{-1/\alpha}(1-\ln x)^{-2/\alpha}$. بين أن $g_\alpha \in \mathcal{L}^\alpha(I_\star)$ ، لكن $g_\alpha \notin \mathcal{L}^p(I_\star)$ مهما كان $\alpha < p$.

.2.4.1

بين أن التابع g المعرف على $J =]0,+\infty[$ بأن $g(x) = x^{-1/2}(1+|\ln x|)^{-1}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^2(J)$ ، لكن $g \notin \mathcal{L}^p(J)$ مهما كان $p \in]1,\infty[$ وَ $p \neq 2$.

2. امتحان 2010/06/09

في ما يلي، نزود $\mathbb{R}$ (أو أي جزء منه) بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ. ونضع $I = [0,+\infty[$ وَ χ_I دالته المميزة.

1.2. التمرين الأول

ليكن f وَ g التابعين الحقيقين المعرفين بأن $f(x) = e^{-|x|}$ وَ $g(x) = e^{-x}\chi_I(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

(ا) أثبت أن f وَ g ينتميان إلى فضاء لوبيغ $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1,+\infty]$.

(ب) أحسب جداء اللّف $f \star g$ عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}$.

2.2. التمرين الثاني

ليكن $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}$ مع $1 \leq p < \infty$ ولنضع $J_n =]-\infty,-n[\cup]n,\infty[$ وَ $Q_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |u(x)| > n\}$ ، $n \in \mathbb{N}$. عيّن Q_1 في حالة التابع u_0 المعرف بأن $u_0(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

(ا) اعتمد مبرهنة مناسبة للتقارب لِتحسب النهاية $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{J_n}|u|^p\,dx$.

(ب) بيِّن بمقارنة $\int_{\mathbb{R}}|u|^p\,dx$ وَ $\int_{Q_n}|u|^p\,dx$ والاكبار أن $\int_{\mathbb{R}}|u|^p\,dx \geq n^p\lambda(Q_n)$ ، حيث $\lambda(Q_n)$ هو قياس لوبيغ للجزء Q_n . استنتج $\lim_{n\to\infty}\lambda(Q_n)$.

3.2. التمرين الثالث

تذكير: نقول عن تابع حقيقي ξ مستمر على $\mathbb{R}$ إنه معدوم عند ما لا نهاية إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد جزء متراص K من $\mathbb{R}$ بحيث $|\xi(x)| \leq \varepsilon$ مهما كان $x \in {}^cK$ (متممة K).
تشكل هذه التوابع فضاء شعاعيا نشير إليه بِـ $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ونزوده بنظيم الذروة

$$|\xi|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\xi(x)|, \qquad \xi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

(ا) أعط مثالا لتابع $\xi_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ وسنده غير متراص، أي $\xi_0 \notin \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. ثمّ بين أن $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(ب) ليكن $a > 0$ عددا حقيقيا. عين صراحة تابعا حقيقيا مستمرا g_a يحقق (supp = سند):

$$0 \leq g_a(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{وَ} \quad g_a(x) = 1,\ \forall x \in [-a,a] \quad \text{وَ} \quad \operatorname{supp} g_a = [-a-1,a+1]$$

(جـ) استفد مما سبق لتثبت أن $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ كثيف في $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ مزود بنظيم الذروة.

4.2. التمرين الرابع

لقد علمت من الأعمال الموجهة أنه إذا كان $w \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مع $p \in]1,+\infty[$ كان:

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |w(z+t)-w(z)|^p\, dz = 0.$$

هل يمكنك توظيف هذه النتيجة (التي تقبلها بدون إثبات) ومتباينة هولدر للبرهان على أنه إذا كان $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مع $1 < p < \infty$ وكان $\psi \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ ، $(p' = \frac{p}{p-1})$ ، كان جداء اللّف $\varphi\star\psi$ مستمرا بانتظام على $\mathbb{R}$ بأكمله؟

3. امتحان 2010/09/20

تذكير — ليكن φ تابعا حقيقيا كمولا على $\mathbb{R}^2$ مزودا بقياس لوبيغ. إذا كان متناظرا شعاعيا، أي أن $\varphi(x_1,x_2)=\varphi(r)$ حيث $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ فإنه لدينا

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 2\pi\int_0^\infty \varphi(r)r\,dr.$$

وبصفة عامة من أجل تابع φ متناظر شعاعيا وكمولا في $\mathbb{R}^N$ فلدينا (σ_N هي مساحة غلاف الوحدة الكروي الأقليدي) :

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\varphi(|x|)\,dx \quad = \quad \sigma_N\int_0^\infty \varphi(r)r^{N-1}\,dr,$$
$$x=(x_1,\dots,x_N),\ r=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}\,.$$

1.3. التمرين الأول

ليكن التابعان الحقيقيان u و v المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن

$$u(x) = -\chi_{[-1,0]}(x)+\chi_{]0,1]}(x) \quad \text{و} \quad v(x)=(1+x^2)^{-1}.$$

احسب جداء اللف $u\star v$ ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}(u\star v)(x)$.

2.3. التمرين الثاني

أ) بين أن التابع الحقيقي ψ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\psi(x)=e^{-x^2}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. هل ينتمي ψ إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان p من المجال المغلق $[1,+\infty]$؟

ب) لنضع $I_1=\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\,dx_2$. احسب مستعينا بمبرهنة فوبيني والتذكير أعلاه قيمة I_1^2 واستنتج منها قيمة I_1.

جـ) لنضع الآن $I_N=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_N^2}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_N$ (حيث N عدد طبيعي أكبر من 2). أحسب I_3 ثم وبصفة عامة I_N مهما كان N.

3.3. التمرين الثالث

أ) ليكن $0<R<1$ عددا حقيقيا ولتكن $B_R=B(0,R)$ الكرة الأقليدية المفتوحة في $\mathbb{R}^N$ ذات المركز 0 ونصف القطر R. وليكن التابع θ المعرف في B_R بأن

$$\theta(0)=0 \qquad \text{و} \qquad \theta(x)=|x|^{-N}|\ln|x||^{-\alpha},\quad 0<|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}<R$$

حيث $\alpha>1$ عدد حقيقي ثابت معطى. أثبت أن θ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(B_R)$.

ب) أثبت أن θ لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^{1+\varepsilon}(B_R)$ مهما كان $\varepsilon>0$.

4.3. **التمرين الرابع** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ حيث $1 \leq p < +\infty$. ولتكن $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من $\mathcal{L}^{\infty}(X,\mathcal{A},\mu)$. لنفرض أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة في $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ نحو تابع f من هذا الفضاء. وأن المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة μ ـــ شك في X نحو تابع g مع

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}^{\infty}(X,\mathcal{A},\mu)} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\star},$$

حيث M عدد حقيقي موجب تماما. برهن عندها على أن المتتالية $\{f_ng_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو fg في $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$.

﴿إرشاد: يمكنك أن تكتب $f_ng_n - fg = (f_n - f)g_n + f(g_n - g)$ وتستخدم مبرهنة التقارب بالهيمنة.﴾

4. امتحان 2011/02/06

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$ أو أي جزء منه) بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ.

1.4. **التمرين الأول** ليكن التكامل $T = \int_1^e \Big(\int_0^{\ln x} \frac{dy}{x(1+y)}\Big)\, dx$.

(أ) أرسم ميدان المكاملة. (ب) احسب T مباشرة ثم (جـ) بعكس ترتيب المكاملة.

2.4. **التمرين الثاني** ليكن المربع غير المنته $C = [1,+\infty[\times[1,+\infty[\subset \mathbb{R}^2$ وليكن التابع الحقيقي f المعرف على C بأن

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

هل f قيوس؟ برر اجابتك.

(أ) احسب المشتق الجزئ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(x+y)^2}\right)$ واستفد منه لحساب المقدار

$$K = \int_1^{\infty} \big[\int_1^{\infty} f(x,y)\, dx\big]\, dy.$$

احسب كذلك المقدار $L = \int_1^{\infty}\Big[\int_1^{\infty} f(x,y)\, dy\Big]\, dx$. هل $K = L$؟

(ب) أثبت بالإصغار والحساب الفعلى أن التابع f لا ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^1(C,\mathcal{B}_C,\lambda_2)$، λ_2 هو قياس لوبيغ.

3.4. **التمرين الثالث** ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi(x) = (\sin x)\chi_I(x)$ حيث χ_I هي الدالة المميزة للمجال $I =]0,\pi[$. ولتكن متتالية التوابع الحقيقية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $\varphi_n(x) = \varphi(x - n\pi)$، $x \in \mathbb{R}$. عين $\operatorname{supp}\varphi_n$، سند φ_n.

(أ) على نفس المعلم، أرسم بيانات التوابع φ، φ_1، φ_2، φ_3. وبصفة عامة φ_n، $n > 3$.

(ب) بين أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب ببساطة على $\mathbb{R}$ نحو تابع φ_∞ يطلب تعيينه.

ماذا عن تقارب هذه المتتالية نحو φ_∞ في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$؟

4.4. **التمرين الرابع** ليكن $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$ عددين حقيقين.

(أ) كيف يجب اختيار العدد الحقيقي α كي يكون تكامل ريمان الموسع $\int_0^a x^{-\alpha}\,dx$ منتهيا؟

(ب) وكيف يجب اختيار العدد الحقيقي β كي يكون تكامل ريمان الموسع $\int_b^1 (1-x)^{-\beta}\,dx$ منتهيا؟

(جـ) استنتج مماسبق الشرطين على α و β كي يكون التابع $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}$ منتميا إلى $\mathcal{L}^1(0,1)$؟

5. امتحان 2011/06/21

يزود في كل مايلي $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^N$) أو أي جزء منه بعشيرة لوبيغ وقياسه.

1.5. **التمرين الأول** ليكن المجالان المتراصان $I = [-1,1]$ و $J = [-2,2]$ والتابعان الحقيقيان $f(x) = 2x\chi_I(x)$ و $g(x) = \chi_J(x)$. عين سندي f و g ثم جداء اللف $f \star g$ وسنده.

2.5. **التمرين الثاني** ليكن h تابعا حقيقيا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. إذا كان $0 < h(x)$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ فأثبت أن h^{-1} (مقلوب التابع h) لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

﴿إرشاد: يمكنك تطبيق متباينة ملائمة على الجداء $h^{-1/2}h^{1/2}$﴾.

تذكير — ليكن φ تابعا حقيقيا قيوسا وموجبا على $\mathbb{R}^N$. إذا كان متناظرا شعاعيا، أي أن

$$\varphi(x_1,\ldots,x_N) = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$$

فإنه لدينا (σ_N هي مساحة غلاف الوحدة الكروي الأقليدي) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)\,dx = \sigma_N \int_0^\infty \varphi(r) r^{N-1}\,dr,\\ &\quad x = (x_1,\ldots,x_N),\ r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\,.\end{aligned}$$

3.5. **التمرين الثالث** لتكن $\mathcal{U}$ كرة الوحدة الاقليدية في $\mathbb{R}^N$. وليكن $\alpha \neq 0$ و $p \geq 1$ عددين حقيقيين. أثبت التكافؤ:

$$\alpha p + N > 0 \iff \varphi(x) = |x|^\alpha \in L^p(\mathcal{U}). \tag{1}$$

$$\alpha p + N < 0 \iff \psi(x) = |x|^\alpha \in L^p({}^c\mathcal{U}), \quad {}^c\mathcal{U} = \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{U}. \tag{2}$$

4.5. **التمرين الرابع** ليكن المجال المفتوح $\Omega =]0,1[$ و $1 < p < \infty$ عددا حقيقيا. لنضع $u_n(x) = n^{1/p}e^{-nx}$، $x \in \Omega$.

أثبت أن المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^\infty$:

١) غير محدودة لكنها تتقارب ببساطة في Ω نحو التابع المعدوم.

٢) محدودة في $L^p(\Omega)$، بمعنى أنه يوجد ثابت $M > 0$ بحيث $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$، مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٣) غير متقاربة في $L^p(\Omega)$ نحو التابع المعدوم.

٤) لكن $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v\,dx = 0$، مهما كان $v \in L^{p'}(\Omega)$، حيث p' هو العدد المعرف بأن $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

﴿إرشاد: يمكنك استخدام كثافة التوابع المستمرة وذات سندات متراصة في Ω في الفضاء $L^{p'}(\Omega)$﴾.

6. امتحان 2011/06/29

يزود في كل مايلي $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^N$) أو أي جزء منه بعشيرة لوبيغ وقياسه.

1.6. **التمرين الأول** ليكن المجالان المتراصان $I = [-2, 2]$ و $J = [-4, 4]$ والتابعان الحقيقيان $f(x) = 3x^2\chi_I(x)$ و $g(x) = \chi_J(x)$. عين سندي f و g ثم جداء اللف $f \star g$ وسنده. أرسم كذلك بيان التابع $f \star g$.

2.6. **التمرين الثاني** ليكن h تابعا حقيقيا ينتمي إلى $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. إذا كان $0 < h(x)$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ فأثبت أن h^{-2} (مربع مقلوب التابع h) لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

3.6. **التمرين الثالث** لتكن $\mathcal{U}$ كرة الوحدة الاقليدية في $\mathbb{R}^N$ ولتكن $\overline{\mathcal{U}}$ ملاصقة $\mathcal{U}$ وليكن $\alpha \neq 0$ و $p \geq 1$ عددين حقيقيين. كيف يجب اختيار العدد α كي ينتمي التابع:

١) $\varphi(x) = (1 - |x|)^\alpha$ إلى $L^p(\mathcal{U})$؟

٢) $\psi(x) = (|x| - 1)^\alpha$ إلى $L^p({}^c\overline{\mathcal{U}})$؟ هنا ${}^c\overline{\mathcal{U}} = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathcal{U}}$.

4.6. **التمرين الرابع** ليكن المجال المفتوح $\Omega =]-1, 1[$ و $1 < p < \infty$ عددا حقيقيا. لنضع

$$u_n(x) = (n|x|)^{1/p} e^{-nx^2}, \quad x \in \Omega.$$

هل المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$:

١) محدودة؟ متقاربة ببساطة في Ω نحو تابع ما؟

٢) محدودة في $L^p(\Omega)$ ؟

٣) متقارية في $L^p(\Omega)$ ؟

7. امتحان 2011/09/10

لا نستخدم هنا إلا قياس لوبيغ على الفضاء كله أو على جزء منه.

1.7. **التمرين الأول** لتكن المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $u_n(x) = \dfrac{x^2}{n^4x^4 + 1}$. أثبت أنها متقاربة ببساطة وفي $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$، مهما كان $p \in [1, \infty]$، نحو تابع u_∞ ينبغي تعيينه. التبرير ضروري!

2.7. **التمرين الثاني** لتكن B كرة $\mathbb{R}^2$ المعرفة بأن

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\right\}$$

ومن أجل α عدد حقيقي موجب، نعتبر φ التابع الحقيقي المتناظر شعاعيا والمعرف على B بأن

$$\varphi(x, y) = \left|\ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\right|^{-\alpha} (x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad (x, y) \in B \setminus \{(0, 0)\}, \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

كيف يجب اختيار العدد α كي ينتمي التابع φ إلى $L^2(B)$ ؟

3.7. **التمرين الثالث** ليكن المجال الحقيقي $I = [-1, 1]$ والتابعان الحقيقيان المعرفان بأن $f(x) = 2x\chi_I(x)$ و $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$، χ_I هي الدالة المميزة للمجال المذكور. عين جداء اللف $f \star g$.

4.7. **التمرين الرابع** ليكن المجال $J=[0,1]$ والمتتالية التابعية $\{v_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على J بأن $v_n(x)=n/(n^2x^2+1)$.

١) عين النهاية البسيطة v_∞ لهذه المتتالية.

٢) أثبت أن المتتالية $\{v_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب نحو v_∞ في $\mathcal{L}^1(J)$. لكن، التقارب وارد في $\mathcal{L}^1([a,1])$ مهما كان $0<a<1$.

٣) أثبت أن المتتالية $\{x\,v_n\}_{n\geq 1}$ تتقارب نحو v_∞ في $\mathcal{L}^1(J)$.

في السؤالين التاليين يرمز h إلى تابع حقيقي موجب ومستمر على المجال J.

٤) إذا كان حضيض h، $\min\limits_J h=g_m>0$، فأثبت أن المتتالية $\{h\,v_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب نحو التابع المعدوم في الفضاء $\mathcal{L}^1(J)$.

٥) لكن، إذا كان $h(0)=0$، فأثبت أن $\{h\,v_n\}_{n\geq 1}$ تتقارب نحو التابع المعدوم في الفضاء $\mathcal{L}^1(J)$.

8. امتحان 2012/03/15

لا نستخدم هنا إلا قياس لوبيغ على الفضاء $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$) كله أو على جزء منه.

1.8. التمرين الأول

(أ) أرسم حيز المستوي $\mathbb{R}^2$ المعرف بأن $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 9 \quad \wedge \quad y\geq\sqrt{x^2+1}\right\}$.

(ب) لتكن χ_D الدالة المميزة للحيز D. بين أن التابع $f(x,y)=xy\chi_D(x,y)$ كمول على $\mathbb{R}^2$.
أحسب تكامل التابع f على $\mathbb{R}^2$ وهذا بالمكاملة نسبة إلى y ثم x وبعكس هذا الترتيب.

2.8. **التمرين الثاني** ليكن φ التابع الحقيقي المعطى بأن $\varphi(x)=(1-x)\chi_I(x)$ حيث χ_I هي الدالة المميزة للمجال المتراص $I=[0,1]$. ولتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $\varphi_n(x)=n\varphi(n(x+n))$.

(أ) أرسم بيانات التوابع φ، φ_1، φ_2 وبصفة عامة φ_n وعين $\operatorname{supp}\varphi_n$، سند التابع φ_n.

(ب) بين أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ببساطة نحو تابع φ_∞ يطلب تعيينه.

(جـ) هل تتقارب المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو φ_∞ في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ؟

3.8. التمرين الثالث

(أ) عين الثابتين α و β كي يكون التابع g المعرف بأن $g(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$ من أجل $0<x<1$ و $g(0)=\alpha$ و $g(1)=\beta$ مستمرا على المجال المتراص $[0,1]$.

إذن تكامل ريمان $T=\displaystyle\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\,dx$ موجود وهدفنا هو حساب قيمته باستخدام التكامل الثنائي.

(ب) ليكن Ω الجزء المفتوح في $\mathbb{R}^2$ المعرف بأن $\Omega=]0,1[\times]0,1[$. وليكن u التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}^2$ بأن $u(x,y)=x^y$ إذا كان $(x,y)\in\Omega$ و $u(x,y)=0$ إذا كان $(x,y)\not\in\Omega$.

(جـ) بين أن u كمول على $\mathbb{R}^2$.

(د) أحسب بكيفيتين التكامل الثنائـي $K = \int_\Omega x^y\,dxdy$.
حدد العلاقة التي تربط T و K واستخدمها لحساب تكامل ريمان T.

4.8. **التمرين الرابع** لتكن المتتالية التابعية $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ حيث $\xi_n(x) = 1/(1+x^2)^n$.

(أ) بين أن المتتالية $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة ببساطة نحو تابع ξ_∞ يطلب تعيينه.

(ب) هل تقارب $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ نحو ξ_∞ وارد في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1,\infty[$ ؟ هل هو وارد في $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ ؟

9. امتحان 2012/06/24

1.9. **السؤال الأول** ليكن التابعان الحقيقيان f و g المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = e^x\chi_{]-\infty,0[}(x)$ و $g(x) = e^{-x}\chi_{]0,\infty[}(x)$. يشير χ إلى الدالة المميزة للمجموعة المذكورة في الدليل.
قل لماذا جداء اللف $f \star g$ معرف جيدا ثم أحسب قيمته عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$.

2.9. **السؤال الثاني**

1.2.9. $\star$ أرسم بيان التابع الحقيقي المعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^\star$ بأن

$$T_n(t) = \frac{1}{2}\{|t+n| - |t-n|\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2.9. $\star$ ليكن $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مع $p \in [1,\infty]$. ولنعتبر التابع $T_n(f) = T_n \circ f$. هل هذا التابع محدود ؟ قارن بين التابعين f و $T_n(f)$. أثبت أن المتتالية التابعية $\{T_n(f)\}_{n=1}^\infty$ متقاربة نحو f في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

3.9. **السؤال الثالث** لنشر بـ f_n إلى التابع المعرف من أجل كل تابع $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ وكل $n \in \mathbb{N}^\star$ بأن $f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t)\,dt$، $x \in \mathbb{R}$.

1.3.9. $\star$ عين التابع $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \psi_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n}\psi(t)\,dt \in \mathbb{R}$ في حالة التابع $\psi(x) = x\,\chi_{[0,\infty[}(x)$.
أرسم بيانه وبيان ψ على نفس المعلم. ثم أثبت أن المتتالية $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة بانتظام نحو التابع ψ على $\mathbb{R}$.

2.3.9. $\star$ إذا كان $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ فبين أن سندات التوابع f_n متراصة ثم برهن على أن المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ تتقارب بانتظام نحو f على $\mathbb{R}$. استنتج تقارب هذه المتتالية نحو f فى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1,\infty]$.

4.9. **السؤال الرابع** ليكن المجال $J \doteq]0,+\infty[$ مزودا بعشيرة وقايس لوبيغ وليكن $1 < p < \infty$ و $f \in \mathcal{L}^p(J)$ وليكن التابع F المعرف بأن $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$، $x \in J$.

1.4 $\star$. إذا كان $f > 0$ مع $f \in \mathcal{L}^1$ فبين أن $F \notin L^1$.

1.4 $\star$. بفرض $f \geq 0$ مع $f \in \mathcal{C}_c(J)$ فأثبت مكاملا بالتجزئة أن

$$\int_0^\infty F^p(x)\,dx = -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)\,dx.$$

لاحظ أن $xF' = f - F$ ثم بتطبق متباينة هولدر على $\int F^{p-1}f$ استنتج متباينة هاردي Hardy

$$\|F\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{\mathcal{L}^p}.$$

.10 امتحان 2012/09/06

لا نستخدم هنا إلا قياس لوبيغ على الفضاء كله أو على جزء منه. ونضع $J = [0, +\infty[$.

.1.10 **السؤال الأول** ليكن التابع الحقيقي f المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = e^{-x}\chi_J(x)$ حيث يشير χ_J إلى الدالة المميزة للمجال J. قل لماذا جداء اللف $f \star f$ معرف جيدا ودون حساب، أذكر نصف المستقيم العددي الذي يحتوي سنده $\operatorname{supp}(f \star f)$، برر إجابتك. أحسب $(f \star f)(x)$ عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$.

.2.10 **التمرين الثاني** ليكن T المثلث الذي رؤوسه عند النقط $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$. وليكن α عددا حقيقيا مختلفا عن 0 وعن 1. أحسب التكامل $L = \displaystyle\int_T \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^{\alpha+1}}$.

.3.10 **التمرين الثالث** ليكن P تابعا حقيقيا معرفا وقابلا للإشتقاق بالاستمرار على المجال J ويحقق $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$ وبحيث يكون التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty} P'(x)e^{-x}\,dx$ متقاربا.

.1.3.10 أثبت أن التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty} P(x)e^{-x}\,dx$ متقارب مع ذكر العلاقة التي تربط التكاملين.

.2.3.10 تطبيق: أحسب التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt$.

﴿إرشاد: يمكنك أن تستعين بتبديل المتغير $x = \sqrt{t}$ وفكر في تكرار استخدام العلاقة المحصل عليها السابقة.﴾

.4.10 **التمرين الرابع**

.1.4.10 أوجد تابع u_0 ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ويحقق $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,dx = 0$ و $\displaystyle\int_0^{\infty} u_0(x)\,dx > 0$.

.2.4.10 ليكن u تابعا كيفيا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ويحقق $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = 0$ و $\displaystyle\int_0^{\infty} u(x)\,dx > 0$. ولتكن المتتالية التابعية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $u_n(x) = nu(nx)$، $x \in \mathbb{R}$. برهن على أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in E,$$

حيث E يرمز إلى فضاء التوابع الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$ والمستمرة على المجال المتراص $[-1, 1]$.

﴿إرشاد: يمكنك أن نبين أن

$$\int_{-1}^{1} u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-n}^{n} u(t)\Big[\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big) - \varphi(0)\Big]\,dt + \varphi(0)\int_{-n}^{n} u(t)\,dt$$

ثم نستخدم مبرهنة ملائمة لإثبات أن التكاملين على اليمين يؤولان إلى الصفر.﴾

.11 امتحان 2013/02/06

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$ أو أي جزء منه) بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ.

.1.11 **التمرين الأول** (أ) أرسم ميدان المكاملة في التكامل الثنائ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} u(x,y)\,dy\Big)dx$.

(ب) احسب هذا التكامل في حالة التابع $u(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

2.11. **التمرين الثاني** قل لماذا التابع الحقيقي $f(x,y)=|x-y|$ قيوس على $\mathbb{R}^2$ ثم احسب تكامله على المربع $C=]0,1[\times]0,1[$.

3.11. **التمرين الثالث** ليكن $\Omega=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ الربع الأول مفتوحا.

(أ) هل التابع الحقيقي g المعرف في Ω بأن $g(x,y)=e^{-xy}$ قيوس؟

(ب) استخدم مبرهنة تونيلي لتختبر انتماء g إلى $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

(جـ) ليكن الشريط $S=]0,+\infty[\times]\alpha,\beta[$ حيث $\beta>\alpha>0$ عددان حقيقيان. بحساب التكامل $\int_\alpha^\beta\Big[\int_0^\infty e^{-xy}\,dx\Big]dy$ استنتج انتماء التابع g إلى $\mathcal{L}^1(S)$.

(د) احسب التكامل السابق بكيفية أخرى (مع ذكر التبرير) لإيجاد قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx$.

4.11. **التمرين الرابع** ليكن المربع المفتوح $C=]0,1[\times]0,1[$ والتابع الحقيقي h المعرف على C بأن

$$h(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

هل h قيوس؟ برر إجابتك.

(أ) احسب المشتق الجزئ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ واستفد منه لحساب المقدار $K=\int_0^1\Big[\int_0^1 h(x,y)\,dx\Big]dy$.

احسب كذلك المقدار $L=\int_0^1\Big[\int_0^1 h(x,y)\,dy\Big]dx$. هل $K=L$؟

(ب) عين إشارة التابع h على المثلث T الذي رؤوسه النقط $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ ثم احسب التكامل $\int_T h(x,y)\,dxdy$. استنتج أن التابع h لا ينتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^1(C,\mathcal{B}_C,\lambda_2)$، λ_2 هو قياس لوبيغ.

12. امتحان 2013/06/01

1.12. **السؤال الأول** لتكن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $f_n(x)=e^x$ من أجل $x\le 1$ و $f_n(x)=\frac{e}{x^n}$ من أجل $1\le x$. هل التابع f_1 ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$؟

1.1.12. عين النهاية البسيطية f للمتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ على $\mathbb{R}$. ماذا عن انتماء f إلى $L^p(\mathbb{R})$ من أجل $1\le p<\infty$ ؟ إلى $L^\infty(\mathbb{R})$ ؟

2.1.12. أثبت تتقارب $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ نحو f في $L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p\in[1,\infty[$.

2.12. **السؤال الثاني** تذكير: من أجل $g\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (تابع كمول محليا) نعرف متوسط ستيكلوف g_δ للتابع g بأن $g_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\,dt$ حيث $0<\delta$ وسيط حقيقي.

1.2.12. ليكن التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $g(x)=2-|x|$. أرسم بيان g ثم عين g_δ من أجل $\delta\in[0,1]$ وأرسم بيانه على المعلم حيث رسمت بيان g.

2.2.12. أثبت أن g_δ يؤول نحو g في $L^\infty(\mathbb{R})$ عندما يؤول δ نحو 0، أي أن $\lim_{\delta\downarrow 0}\|g-g_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=0$.

3.12. **السؤال الثالث** احسب $\mathbb{R} \ni x \mapsto (\varphi \star \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\, dy \in \mathbb{R}$ ، **جداء لف التابعين φ و ψ حيث**

$$\varphi(x) = \chi_I(x), \quad I = [0,2]; \qquad \psi(x) = \frac{e}{e-1}|x|e^{-x^2}\chi_J(x), \quad J = [-1,1].$$

4.12. **السؤال الرابع**

1.4.12. **بين أن التابع** $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x) = e^{-x^2} \in \mathbb{R}$ **ينتمي إلى** $L^\infty(\mathbb{R})$ **وأحسب** $N_\infty(u)$. **بين كذلك أن u ينتمي إلى** $L^1(\mathbb{R})$. **لنضع** $T = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$. **هل يمكن للعدد T أن يكون معدوما؟**

2.4.12. **ليكن** $v \in L^1(\mathbb{R})$. **أثبت أن جداء اللف** $u \star v$ **معرف عند كل نقطة** $x \in \mathbb{R}$ **وأن** $|(u \star v)(x)| \leq \|v\|_1$ **مهما كان x ، حيث** $\|v\|_1$ **هو نظيم v في** $L^1(\mathbb{R})$.

3.4.12. **أثبت أن** $u \star v$ **مستمر وأنه يؤول نحو 0 عندما يؤول** $|x|$ **نحو** $+\infty$.

4.4.12. **أثبت أن** $u \star v$ **ينتمي إلى** $L^1(\mathbb{R})$ **وأن** $\|u \star v\|_1 \leq T\|v\|_1$.

13. امتحان 2013/09/10

لا نستخدم هنا إلا قياس لوبيغ وتكامله على $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^\star)$ **أو على أي جزء منه.**

1.13. **السؤال الأول** **ليكن التابعين الحقيقين f و g المعرفين بأن (χ هي الدالة المميزة للجزء المذكور في الدليل) :**

$$f(x) = (2-x)\chi_{[1,2]}(x), \quad g(x) = \chi_{[3,4]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

بين أن جداء اللف $f \star g$ **معرف جيدا ثم عين قيمته عند كل نقطة x من** $\mathbb{R}$.

2.13. **السؤال الثاني** (أ) **ليكن φ و ψ تابعين حقيقين مع** $\varphi \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R})$ **و** $\psi \in L^4(\mathbb{R})$. **هل التابع** $\varphi\psi$ **كمول ؟**

(ب) **ليكن المجال** $I =]0,1[$ **ولتكن** $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ **متتالية تابعية من** $L^4(I)$ **متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع** $\xi \in L^4(I)$. **أثبت أن المتتالية** $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ **تتقارب نحو نفس التابع ξ في** $L^2(I)$. **هل تتقارب المتتالية نفسها نحو التابع نفسه في كل فضاء** $L^q(I)$ **مهما كان** $q \in [1,4]$.

3.13. **السؤال الثالث** (أ) **عين ثم أرسم V حيز الفضاء** $\mathbb{R}^3$ **المعرف بأن**

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

(ب) **احسب حجم الحيز V ، أي العدد** $|V| = \displaystyle\int_V dxdydz$.

4.13. **السؤال الرابع** **ليكن** $J =]a,b[$ **مجالا مفتوحا ومحدودا من** $\mathbb{R}$ **وليكن u تابعا كمولا على J، أي أن** $u \in L^1(J)$. **نقول عن نقطة** $x \in J$ **حيث** $u(x) \neq \pm\infty$ **إنها** نقطة للوبيغ **للتابع u إذا كان**

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h [u(x+t) - u(x)]\, dt = 0.$$

1.4.13. **أثبت أن كل نقطة من المجال** $I =]0,1[$ **هي نقطة للوبيغ للتابع الكمول u_0 المعرف بأن** $u_0(x) = \frac{1}{1+x}$ ، $x \in I$.

.2.4.13 أثبت أن كل نقطة استمرار للتابع $u \in L^1(J)$ هي نقطة للوبيغ لهذا التابع u في J.

.3.4.13 أثبت أنه إذا كانت $x_0 \in J$ نقطة للوبيغ للتابع $u \in L^1(J)$ فإن التابع $U(x) = \int_a^x u(s)\,ds$ قابل للاشتقاق عند x_0 ولدينا $U'(x_0) = u(x_0)$.

.14 امتحان 2014/02/06

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$ أو أي جزء منه) بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ.

.1.14 **التمرين الاول** ليكن القرص $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. احسب التكامل

$$\int_Q \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

.2.14 **التمرين الثاني** (أ) أرسم حيز المستوي D المعرف بأن

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ |x| \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq (1-|x|)^2\}.$$

(ب) احسب $\displaystyle\int_D dxdy$، قياس D:

(ب.١) مكاملا أولا نسبة إلى y ثم نسبة إلى x. (ب.٢) وثانيا بعكس ترتيب المكاملتين.

.3.14 **التمرين الثالث** ليكن الشريطان S_1 وَ S_2 المعرفين بأن

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x \geq 0 \ \wedge\ x \leq y < x+1\}$$

وَ

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x \geq 0 \ \wedge\ x+1 \leq y < x+2\}.$$

وليكن التابع f المعرف بأن $f(x,y)=1$ إذا كان $(x,y) \in S_1$ وَ $f(x,y)=-1$ إذا كان $(x,y) \in S_2$ وَ $f(x,y)=0$ إذا كان $(x,y) \in [\mathbb{R}^2 \setminus (S_1 \cup S_2)]$.

(أ) احسب التكاملين

$$\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\Big]dx \qquad \text{وَ} \qquad \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

ماذا تلاحظ؟

(ب) هل التابع f كمول على $\mathbb{R}^2$؟

.4.14 **التمرين الرابع** ليكن التابع الحقيقي φ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi(x) = 3x^2\chi_I(x)$ حيث I هو المجال $[0,1]$. ولتكن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$.

(أ) أرسم على نفس المعلم بيانات التوابع φ، φ_1، φ_2.

(ب) عين التابع $\sup\limits_{n\geq 1}\varphi_n$ ثم احسب المقدارين $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(\sup_{n\geq 1}\varphi_n\Big)(x)\,dx$ وَ $\displaystyle\sup_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,dx$ وقارن بينهما. هل تتناقض النتيجة المحصل عليها مع مبرهنة التحدب العدود التي قدمت في الدرس النظري؟

(جـ) أثبت أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب ببساطة نحو تابع φ_∞ ينبغي تعيينه. هل التقارب وارد في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$؟

15. امتحان 2014/06/11

في كل ما يلي نستخدم عشيرة بوريل وقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ أو على أي جزء منه.

1.15. التمرين الأول **ليكن D جزءا من فضاء لوبيغ $L^\infty(\mathbb{R})$. عرف معنى كون D كثيفا في هذا الفضاء.**

1.1.15. ليكن التابع $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ المعطى بأن $\varphi(x) \equiv 1$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$. وليكن v تابعا مستمرا وسنده متراص، أي $v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. احسب $\|\varphi - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

2.1.15. استنتج عدم كثافة $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ في $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.15. التمرين الثاني **ليكن التابعان الحقيقيان f وَ g المعرفين بأن**

$$f(x) = e^x \chi_{]-\infty,0]}(x) \quad \wedge \quad g(x) = xe^{-x}\chi_{]0,\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.2.15. بين أن التابع f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ وأن التابع g ينتمي إلى $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.2.15. أحسب جداء اللف $f \star g$. ثم إعط تقديرا للنظيم $\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

3.15. التمرين الثالث **لتكن المتتالية التابعية الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $u_n(x) = e^x$ لما $x \le 0$ وَ $u_n(x) = \frac{1}{n}(n-x)^+$ لما $0 \le x$. يشير الرمز $(\cdot)^+$ إلى الجزء الموجب. أرسم بياني u_1 وَ u_2.**

1.3.15. أثبت أن عناصر المتتالية السابقة تنتمي إلى $L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1, +\infty]$.

2.3.15. عين النهاية البسيطة u للمتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. ماذا عن إنتماء u إلى الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ مع $1 \le p < \infty$ ؟ وماذا عن إنتمائه إلى $L^\infty(\mathbb{R})$ ؟

3.3.15. احسب $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ ، $p \in [1, \infty[$ وَ $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. هل لدينا ($n$ مثبت):

$$\lim_{p\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ ?$$

4.15. التمرين الرابع **ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن $w \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ نضع** $w_n = \min\{|w|, n\}$.

١) أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X ||w| - w_n|\, d\mu = 0$.

٢) استنتج مما سبق أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ معطى، يوجد $\rho > 0$ بحث

$$\int_A |w|\, d\mu \le \varepsilon, \ \forall A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) \le \rho.$$

تدعى هذه الخاصية **بالاستمرار المطلق** لتكامل لوبيغ.

16. امتحان 2014/06/23

في كل ما يلي نستخدم عشيرة بوريل وقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ أو على أي جزء منه.

1.16. التمرين الأول **ليكن التابعان الحقيقيان f وَ g المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = xe^{-x^2}$ وَ** $g(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

.1.1.16 بين أن التابع f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ وأن التابع g ينتمي إلى $L^\infty(\mathbb{R})$.

.2.1.16 أحسب جداء اللف $f \star g$. ثم إعط تقديرا للنظيم $\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

.2.16 **التمرين الثاني** ليكن D جزءا من فضاء لوبيغ $L^\infty(\mathbb{R})$. عرف معنى كون D كثيفا في هذا الفضاء.

.1.2.16 ليكن التابع $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ المعطى بأن $h(x) \equiv 1$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$. وليكن v تابعا مستمرا وسنده متراص، أي $v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. عين صاغرا موجبا تماما للنظيم $\|h - v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

.2.2.16 استنتج عدم كثافة $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ في $L^\infty(\mathbb{R})$.

.3.16 **التمرين الثالث** لتكن المتتالية التابعية الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بأن $u_n(x) = e^{-n^2x^2}$ لما $x \geq 0$ و $u_n(x) = \frac{1}{n}(n-x)^+$ لما $x \leq 0$. يشير الرمز $(\cdot)^+$ إلى الجزء الموجب. أرسم بياني u_1 و u_2.

.1.3.16 أثبت أن عناصر المتتالية السابقة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ تنتمي إلى $L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1, +\infty]$.

.2.3.16 عين النهاية البسيطة u للمتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. ماذا عن إنتماء u إلى الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ مع $1 \leq p < \infty$ ؟ وماذا عن إنتمائه إلى $L^\infty(\mathbb{R})$ ؟

.3.3.16 ليكن $n \in \mathbb{N}^\star$ عددا مثبتا. احسب $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ وعلما بأن $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ فاحسب $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ حيث $p \in]1, \infty[$. هل لدينا $\lim\limits_{p\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ؟

.4.16 **التمرين الرابع** ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. ولتكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ حيث $1 \leq p < +\infty$. ولتكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. لنفرض أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة في $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ نحو تابع φ من هذا الفضاء. وأن المتتالية $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة μ ـ شك في X نحو تابع ψ مع $\|\psi_n\|_{\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)} \leq M$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ، حيث M عدد حقيقي موجب تماما.

برهن عندها على أن المتتالية $\{\varphi_n\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو $\varphi\psi$ في $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

﴿إرشاد: يمكنك أن تكتب $\varphi_n\psi_n - \varphi\psi = (\varphi_n - \varphi)\psi_n + \varphi(\psi_n - \psi)$ وتستخدم مبرهنة التقارب بالهيمنة.﴾

.17 امتحان 2014/09/10

في كل ما يلي نستخدم عشيرة بوريل وقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ (أو على $\mathbb{R}^2$) أو على أي جزء منه. ونشير بـ χ_E إلى الدالة المميزة للمجموعة E. كما نشير بـ sign إلى التابع الحقيقي الذي يساوي -1 في المجال $]-\infty, 0[$ ويساوي 1 على المجال $]0, \infty[$.

.1.17 **التمرين الأول** ليكن المربع المفتوح غير المنتهي $C =]0, \infty[\times]0, \infty[$. وليكن التابع الحقيقي h المعرف على $\mathbb{R}^2$ بأن

$$h(x, y) = \chi_C(x, y)\operatorname{sign}(x - y)e^{-|x-y|}.$$

.1.1.17 احسب $K = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} h(x, y)\,dy \Big]\,dx$ و $L = \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} h(x, y)\,dx \Big]\,dy$ لتستنتج أنه لا يمكن للتابع h أن ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^2)$. قل لماذا.

.2.1.17 تأكد بالحساب الفعلي أن $h \notin L^1(\mathbb{R}^2)$.

2.17. **التمرين الثاني** ليكن التابعان الحقيقيان f وَ g المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = xe^{-x^2}$ وَ $g(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$.

1.2.17. بين أن التابع f ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ وأن التابع g ينتمي إلى $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.2.17. أحسب جداء اللف $f \star g$. ثم إعط تقديرا للنظيم $\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

3.17. **التمرين الثالث** لتكن المتتالية التابعية الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بأن $u_n(x) = e^{-n^2x^2}$ لما $x \leq 0$ وَ $u_n(x) = \frac{1}{n}(n-x)^+$ لما $0 \leq x$. يشير الرمز $(\cdot)^+$ إلى الجزء الموجب. أرسم بياني u_1 وَ u_2.

1.3.17. أثبت أن عناصر المتتالية السابقة $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ تنتمي إلى $L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1, +\infty]$.

2.3.17. عين النهاية البسيطة u للمتتالية $\{u_n\}_{n=1}^\infty$. ماذا عن إنتماء u إلى الفضاء $L^p(\mathbb{R})$ مع $1 \leq p < \infty$ ؟ وماذا عن إنتمائه إلى $L^\infty(\mathbb{R})$ ؟

3.3.17. ليكن $n \in \mathbb{N}^\star$ عددا مثبتا. احسب $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ وعلما بأن $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ فاحسب $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ حيث $p \in]1, \infty[$. هل لدينا $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ؟

4.17. **التمرين الرابع** لتكن $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ المتتالية التابعية من $L^2(\mathbb{R})$ المعرفة بأن

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[n,2n]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.17. احسب النظيمات $\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ ، $n \in \mathbb{N}^\star$.

2.4.17. أثبت أنه إذا كان $\psi_0 \in C_c(\mathbb{R})$ كانت لدينا $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi_0\, dx = 0$. يشير $C_c(\mathbb{R})$ إلى فضاء التوابع الحقيقية المستمرة وذات سندات متراصة في $\mathbb{R}$.

3.4.17. استنتج مما سبق أنه لدينا $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi\, dx = 0$ مهما كان $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. نقول إن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ تتقارب بضعف نحو التابع المعدوم في $L^2(\mathbb{R})$.

الحلول

الوقت الرسمي المخصص للامتحانات التي سبق سردها هو 90 دقيقة.

إننا نعتقد أن الاستفادة من حلول الامتحانات الواردة في الصفحات الموالية لا تحصل إلا للدارس الذي يخصص وقتا لا بأس به في محاولة حل المواضيع، ونقدر أن هذا الوقت قد يمتد إلى ضعف المدة الرسمية، أي 180 دقيقة.

يجب أن تكون محاولتك كافية من حيث إنه يتعين علك أن تكتب حلولا كاملة تشمل كل التبريرات النظرية وكل التفاصيل الحسابية اللازمة.

حظ سعيد

.18 حل امتحان 2010/02/13

.1.18 حل التمرين الأول

.1.1.18

إنه لدينا
$$L=\int_0^\pi\Big(\int_0^x \sin y\,dy\Big)\,dx=-\int_0^\pi \cos y\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^\pi(1-\cos x)\,dx=\pi.$$
وإذا لاحظنا أن ميدان المكاملة في التكامل $L=\int_0^\pi(\int_0^x \sin y\,dy)\,dx$ هو المثلث الذي رؤوسه عند النقط $(0,0)$ وَ $(\pi,0)$ وَ (π,π) فلدينا كذلك (وفق مبرهنة فوبيني مثلا) مكاملين بالتجزئة:
$$\begin{aligned}L &= \int_0^\pi\Big(\int_y^\pi \sin y\,dx\Big)\,dy\\ &= \int_0^\pi(\pi-y)\sin y\,dy\\ &= -\pi\cos y\Big|_0^\pi+\int_0^\pi y(\cos y)'\,dy=-\pi(-1-1)+y\cos y\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos y\,dy=\pi.\end{aligned}$$

.2.1.18

لديا فرضا $x>0$ وبالمكالة بالتجزئة، نجد:
$$\begin{aligned}\int_0^1 ye^{-xy}\,dy &= -\frac{1}{x}\int_0^1 y\big(e^{-xy}\big)'_y\,dy\\ &= -\frac{1}{x}\Big[ye^{-xy}\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 e^{-xy}\,dy\Big]\\ &= -\frac{1}{x}\Big[e^{-x}+\frac{1}{x}e^{-xy}\Big|_{y=0}^{y=1}\Big]=\frac{1}{x}\Big[\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\Big].\end{aligned}$$
وفيما يخص الإشتقاق، لدينا:
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}[\cos x+y\sin x]\Big) &= \frac{e^{-xy}}{1+y^2}\big(y[\cos x+y\sin x]-[-\sin x+y\cos x]\big)\\ &= e^{-xy}\sin x.\end{aligned}$$

.2.18 حل التمرين الثاني

الشريط $S=]0,+\infty[\times]0,1[$ مستطيل مفتوح ولذا فهو قيوس وبالتالي تكون دالته المميزة χ_S قيوسة. ولدينا $\chi_S(x,y)=\chi_{]0,\infty[}(x)\times\chi_{]0,1[}(y)$ ، $\mathbb{R}^2\ni(x,y)$.

.1.2.18

التابع f قيوس على $\mathbb{R}^2$ كجداء توابع قيوسة. ثمّ بالاكبار واستخدام مبرهنة تونيلي نستطيع أن نكتب:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|\,dxdy &\le \int_{\mathbb{R}^2}\chi_S(x,y)|y|e^{-xy}\,dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}}\chi_{]0,1[}(y)\Big[\int_{\mathbb{R}}\chi_{]0,\infty[}(x)|y|e^{-xy}\,dx\Big]\,dy\\ &= \int_0^1\Big[\int_0^\infty ye^{-xy}\,dx\Big]\,dy\\ &= \int_0^1[-e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=\infty}]\,dy=\int_0^1 dy=1.\end{aligned}$$

وعليه ينتمي التابع f إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

.2.2.18

بما أن f ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ فإن مبرهنة فوبيني تسمح بأن نكتب، مع استخدام السؤال الثاني من التمرين الأول:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 y\Big[\int_0^\infty \sin x e^{-xy}\,dx\Big]\,dy \quad (\text{وفق مبرهنة فوبيني})\\
&= \int_0^1 y\Big[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}[\cos x + y\sin x]\Big)\,dx\Big]\,dy\\
&= \int_0^1 y\Big[-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}[\cos x + y\sin x]\Big|_{x=0}^{x=\infty}\Big]\,dy\\
&= \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln 2\\
&= \int_0^\infty \sin x\Big[\int_0^1 ye^{-xy}\,dy\Big]\,dx \quad (\text{نغيّر ترتيب المكاملة})\\
&= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big[\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

ومنه النتيجة:

$$T = \int_{\mathbb{R}^2} y\sin x e^{-xy}\,dxdy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big[\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big]\,dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

3.18 حل التمرين الثالث

لدينا تعريفا $\varphi(x) = 2x\chi_I(x)$ وَ

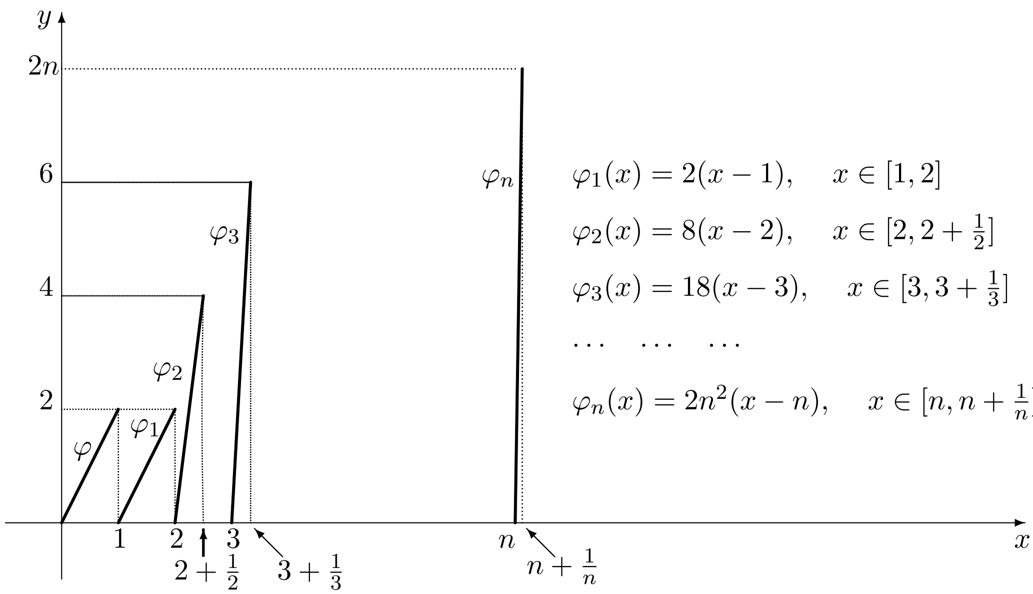
$$\varphi_n(x) = n\varphi(n(x-n)) = 2n^2(x-n)\chi_I(n(x-n)),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

وعليه $\operatorname{supp}\varphi_n = [n, n+\frac{1}{n}]$ لأن التابع φ_n غير معدوم إذا وفقط إذا كان x يحقق التكافؤات:

$$0 < n(x-n) < 1 \Longleftrightarrow 0 < x-n < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow n < x < n+\frac{1}{n}.$$

.1.3.18

على سنده يُكتب φ_n على الشكل $\varphi_n(x) = 2n^2(x-n)$ ومنه البيانت، حيث نرى فقط ما هو غير معدوم.



.2.3.18

بما أن φ_n معدوم خارج المجال $[n, n+\frac{1}{n}]$ فإذا كانت x نقطة مثبتة من $\mathbb{R}$ ، فمن أجل كل $n \leq [x]+1$ ، $[x]$ هو الجزء الصحيح، يكون $\varphi_n(x) = 0$ ، وعليه $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$. هذا يعني أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ تتقارب ببساطة نحو التابع المعدوم $\varphi_\infty \equiv 0$. لنحسب الآن

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi_\infty(x)|\, dx &= \int_n^{n+\frac{1}{n}} \varphi_n(x)\, dx \\
&= \int_n^{n+\frac{1}{n}} n\varphi(n(x-n))\, dx, \quad t = n(x-n) \\
&= \int_0^1 \varphi(t)\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1.
\end{aligned}$$

إذن لا تتقارب المتتالية $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ نحو φ_∞ في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

4.18 حل التمرين الرابع

.1.4.18

التابع g_α مستمر في $I_\star$ ولذا فهو قيوس. ولدينا (لاحظ أن g_α موجب):

$$\begin{aligned}
\int_{I_\star} g_\alpha^\alpha(x)\, dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x(1-\ln x)^2} \\
&= -\int_{+\infty}^0 \frac{dt}{(1+t)^2} \quad (\text{بعد التبديل في المتغير } t = -\ln x) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

إذن $\mathcal{L}^\alpha(I_\star) \ni g_\alpha$. ليكن الآن $\alpha < p$. ولنكتب التكامل الموافق ثمّ، مثل أعلاه، نلجىء إلى التبديل في المتغير $t = -\ln x$ ، إذن $x = e^{-t}$ وعليه $dx = -e^{-t}dt$ ومن أجل $x \downarrow 0$ ، لدينا $t \uparrow +\infty$ وإذا كان $x = 1$ كان $t = 0$. إذن:

$$\begin{aligned}\int_{I_\star} g_\alpha^p(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x^{p/\alpha}(1-\ln x)^{2p/\alpha}}\\ &= -\int_{+\infty}^0 \frac{e^{(\frac{p}{\alpha}-1)t}dt}{(1+t)^{\frac{2p}{\alpha}}} = \int_0^\infty \frac{e^{(\frac{p}{\alpha}-1)t}dt}{(1+t)^{\frac{2p}{\alpha}}} = +\infty.\end{aligned}$$

وسبب هذا هو أن $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(\frac{p}{\alpha}-1)t}}{(1+t)^{\frac{2p}{\alpha}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(\frac{p}{\alpha}-1)t}}{t^{\frac{2p}{\alpha}}} = +\infty$.

.5.18

التابع $g(x) = x^{-1/2}(1+|\ln x|)^{-1}$ قيوس في $J =]0,+\infty[$ لأنه مستمر في هذا المجال. ومن أجل $p = 2$ نكتب التكامل الموافق ونجري فيه التبديل في المتغير $t = \ln x$ للحصول على:

$$\begin{aligned}\int_J g^2(x)\,dx &= \int_0^\infty \frac{dx}{x(1+|\ln x|)^2}\\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1+|t|)^2} \le \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi.\end{aligned}$$

ليكن الآن $\mathbb{R} \ni p$ مع $2 \neq p$. لدينا بإجراء التبديل في المتغير $t = \ln x$:

$$\begin{aligned}\int_J |g(x)|^p\,dx &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^{p/2}(1+|\ln x|)^{2p}}\\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^t dt}{e^{pt/2}(1+|t|)^{2p}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(1-p/2)t}dt}{(1+|t|)^{2p}} = +\infty.\end{aligned}$$

وسبب هذا يرجع إلى أن نهاية التابع تحت إشارة التكامل هي $+\infty$ من أجل $t \to +\infty$ إذا كان $\frac{p}{2} < 1$ ومن أجل $t \to -\infty$ إذا كان $\frac{p}{2} > 1$.

.19 **حل امتحان** 2010/09/20

.1.19 **التمرين الأول** **ليكن التابعان الحقيقيان u و v المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن**

$$v(x) = (1+x^2)^{-1} \quad \text{و} \quad u(x) = -\chi_{[-1,0]}(x) + \chi_{]0,1]}(x)$$

حسا ب جداء اللف $u \star v$. ليكن x عددا مثبتا من $\mathbb{R}$. لدينا تعريفا

$$\begin{aligned}(u\star v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\,dy\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{[-1,0]}(x-y)\,dy}{1+y^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{[0,1]}(x-y)\,dy}{1+y^2}\\ &= -\int_x^{x+1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{x-1}^x \frac{dy}{1+y^2}\\ &= -\arctan y\big|_x^{x+1} + \arctan y\big|_{x-1}^x\\ &= 2\arctan x - \arctan(x+1) - \arctan(x-1).\end{aligned}$$

اعتمدنا في الحساب السابق على التكافؤات التالية:

$$\chi_{[-1,0]}(x-y)\neq 0 \Longleftrightarrow -1\leq x-y\leq 0 \Longleftrightarrow 1\geq y-x\geq 0 \Longleftrightarrow x+1\geq y\geq x$$

و

$$\chi_{]0,1]}(x-y)\neq 0 \Longleftrightarrow 0< x-y\leq 1 \Longleftrightarrow 0> y-x\geq -1 \Longleftrightarrow x> y\geq x-1.$$

بما أن التابع قوس الظل يؤول إلى $\frac{\pi}{2}$ لما x يؤول نحو $+\infty$ فإنه لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(u\star v)(x)=0.$$

2.19. **التمرين الثاني** أ) التابع الحقيقي ψ المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\psi(x)=e^{-x^2}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. وهذا لأنه قيوس ولدينا:

$$e^{-x^2}\leq \frac{1}{1+x^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

وبالتالي:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi<\infty.$$

التابع ψ ينتمي إلى $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ لأنه قيوس ولدينا

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})}=\max_{\mathbb{R}}\psi=1<\infty.$$

ومن أجل p من المجال المفتوح $]1,+\infty[$ لدينا

$$e^{-px^2}\leq\frac{1}{(1+x^2)^p}\leq\frac{1}{1+x^2},\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

ولذا فالتابع ψ ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان p من المجال المغلق $[1,+\infty[$.

ب) حساب قيمة التكامل I_1. اعتمادا على بمبرهنة فوبيني والعلاعة المعطاة في التذكير، تستطيع أن تكتب:

$$\begin{aligned}
I_1^2 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1\Big)\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\,dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1\Big)\,dx_2\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1\,dx_2\\
&= 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=-\pi\int_0^\infty (e^{-r^2})'\,dr=-\pi e^{-r^2}\Big|_0^\infty=\pi.
\end{aligned}$$

هذا يعطي $I_1=\sqrt{\pi}$.

جـ) لنضع الآن $I_N=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_N^2}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_N$ (حيث N عدد طبيعي أكبر من 2). أحسب I_3 ثم وبصفة عامة I_N مهما كان N.

20. حل امتحان 2011/06/21

يزود في كل مايلي $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^N$) أو أي جزء منه بعشيرة لوبيغ وقياسه.

.1.20 **التمرين الأول** ليكن المجالان $I=[-1,1]$ و $J=[-2,2]$ والتابعان الحقيقيان $f(x)=2x\chi_I(x)$ و $g(x)=\chi_J(x)$. واضح أن لدينا السندان $\operatorname{supp} f=I$ و $\operatorname{supp} g=J$. ولدينا:

$$\begin{aligned}(f\star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\\ &= \int_{-2}^{2} f(x-y)\,dy=\int_{x-2}^{x+2} f(z)\,dz=\int_{[x-2,x+2]\cap[-1,1]} 2z\,dz.\end{aligned}$$

وبعتبار الحالات المختلفة نحصل على:

$$(f\star g)(x)=\begin{cases}0, & \{|x|\le 1\}\cup\{|x|\ge 3\},\\ (3-|x|)(1-|x|), & 1\le |x|\le 3.\end{cases}$$

وسند $f\star g$ هو $\operatorname{supp}(f\star g)=[-3,-1]\cup[1,3]$.

.2.20 **التمرين الثاني** بما أن h كمول وهو لا ينعدم أبدا فإن $0<\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx$ ثم إن التوابع h^{-1} و $h^{-1/2}$ و $h^{1/2}$ قيوسة ونستطع أن نكتب (مستخدمين متباينة كوشي وشوارتز):

$$\infty=\int_{\mathbb{R}} 1\,dx=\int_{\mathbb{R}} h^{-1/2}h^{1/2}\,dx\le\Big(\int_{\mathbb{R}}(h^{-1/2})^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}}(h^{1/2})^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

ومنه

$$\infty=\frac{\infty}{\int_{\mathbb{R}} h\,dx}\le\int_{\mathbb{R}} h^{-1}\,dx.$$

إذن h^{-1} لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

.3.20 **التمرين الثالث** لإثبات التكافؤ (1) نلاحظ أولا ان الدالة المميزة $\chi_{\mathcal{U}}$ لكرة الوحدة الأقليدية تتمتع بالتناظر الشعاعي (أو الكروي) ولذا نستطيع أن نكتب وفقا لتذكير:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}}|\varphi(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\varphi(|x|)|^p\chi_{\mathcal{U}}(|x|)\,dx\\ &= \sigma_N\int_0^\infty|\varphi(r)|^p\chi_{\mathcal{U}}(r)r^{N-1}\,dr=\sigma_N\int_0^1 r^{\alpha p+N-1}\,dr\end{aligned}$$

إذا كان لدينا $0<\alpha p+N$ فنستطيع أن نكتب

$$\int_0^1 r^{\alpha p+N-1}\,dr=\frac{1}{\alpha p+N}\,r^{\alpha p+N}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha p+N}<\infty.$$

أما إذا كان $0>\alpha p+N$ فإن التكامل المعتل السابق يكون غير منته، لكون $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{\alpha p+N}=\infty$. وهو كذلك غير منته إذا كان $\alpha p+N-1=-1$. ومنه التكافؤ (1).

أما التكافؤ (2) فنتبينه بكتابة (في حالة $\alpha p+N\neq 0$):

$$\begin{aligned}\int_{^c\mathcal{U}}|\psi(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\psi(|x|)|^p\chi_{^c\mathcal{U}}(|x|)\,dx\\ &= \sigma_N\int_0^\infty|\psi(r)|^p\chi_{^c\mathcal{U}}(r)r^{N-1}\,dr\\ &= \sigma_N\int_1^\infty r^{\alpha p+N-1}\,dr\\ &= \frac{1}{\alpha p+N}\,r^{\alpha p+N}\Big|_1^\infty=\frac{1}{\alpha p+N}\Big[\lim_{b\to\infty}b^{\alpha p+N}-1\Big].\end{aligned}$$

واضح عندها أن النهاية تكون منتهية فقط في حالة $0>\alpha p+N$. أما في حالة $\alpha p+N=0$ فتأتي المكاملة بالتابع اللوغاريتمي الطبيعي ويكون التكامل غير منته. هذا يتبث التكافؤ (2).

4.20. **التمرين الرابع** ليكن المجال $\Omega =]0,1[$ و $1 < p < \infty$ عددا حقيقيا ولتكن المتتالية $u_n(x) = n^{1/p}e^{-nx}$، $x \in \Omega$.

١) إن المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ غير محدودة لأن $\lim\limits_{x \downarrow 0} u_n(x) = n^{1/p}$. (حاول فهم الموقف.)

لكنها تتقارب ببساطة في Ω نحو التابع المعدوم. وسبب هذا هو أنه من أجل $x > 0$ يكون $e^{nx} > nx$ الأمر الذي يستلزم أن $0 \leq n^{1/p}e^{-nx} \leq n^{-1+1/p}x^{-1}$ ومنه النتيجة:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

٢) إنه لدينا:

$$\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_0^1 ne^{-npx}\,dx = -\frac{1}{p}e^{-npx}\Big|_0^1 = \frac{1}{p}(1-e^{-np}) \leq \frac{1}{p} \doteq M^p.$$

إذن $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$، مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٣) من الحساب السابق نرى أن:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - 0\|^p_{L^p(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}\big(1-e^{-np}\big) = \frac{1}{p}.$$

ولذا لا تتقارب المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو التابع المعدوم في الفضاء $L^p(\Omega)$.

٤) لنبدأ أولا بحالة التوابع المستمرة وذات سندات متراصة في Ω. ليكن إذن $v \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. يوجد عندها عدد a بحيث $0 < a < 1$ مع $\operatorname{supp} v \subset [a,1[$. وبما أن التابع u_n متناقص فيمكننا أن نكتب:

$$\int_\Omega |u_n v|\,dx = \int_a^1 u_n|v|\,dx \leq n^{1/p}e^{-na}\int_0^1 |v|\,dx.$$

هذا يستلزم أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n v\,dx = 0, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

ليكن الآن $v \in L^{p'}(\Omega)$ حيث p' هو العدد المعرف بأن $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. بما أن $\mathcal{C}_c(\Omega)$ كثيف في $L^{p'}(\Omega)$ فمن أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $v_0 \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ بحيث $\|v-v_0\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \beta\varepsilon$ حيث $\beta > 0$ عدد نأجل اختياره إلى وقت لاحق. لدينا (نستخدم متباينة هولدر):

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega u_n v\,dx\Big| &= \Big|\int_\Omega u_n(v - v_0 + v_0)\,dx\Big| \\
&\leq \Big|\int_\Omega u_n v_0\,dx\Big| + \|u_n\|_{L^p(\Omega)}\|v-v_0\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&\leq \Big|\int_\Omega u_n v_0\,dx\Big| + M\beta\varepsilon.
\end{aligned}$$

إذا استخدمنا الخطوة الأولى في هذا السؤال يتبين لنا أنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون لدينا $\left|\int_\Omega u_n v_0\,dx\right| \leq \varepsilon/2$، مهما كان $n \in \mathbb{N}$ مع $n \geq n_0$. واضح الآن أننا إذا اخترنا $\beta = (2M)^{-1}$ يكون لدينا:

$$\Big|\int_\Omega u_n v\,dx\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

هذا يثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega u_n v\,dx = 0$ مهما كان $v \in L^{p'}(\Omega)$.

21. حل امتحان 2011/09/10

1.21. **حل التمرين الأول** المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن $u_n(x) = x^2/(n^4x^4+1)$. متقاربة ببساطة نحو التابع $u_\infty \equiv 0$ على $\mathbb{R}$ إذا إن $u_n(0) = 0$ ولدينا

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n^4x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star.$$

بما أن

$$u_n'(x) = 2x\frac{1-n^4x^4}{(n^4x^4+1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

فإن التابع u_n يتمتع بذروة مطلقة عند النقطتين $x = \pm\frac{1}{n}$ تساوي

$$\max_{\mathbb{R}} |u_n| = u_n\Big(\pm\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2n^2}$$

ولذا

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_n - u_\infty| = \|u_n - u_\infty\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{2n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

هذا يعني تقارب المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو u_∞ في $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. ليكن الآن $p \in]1,\infty[$. لدينا

$$u_n(x) = \frac{x^2}{n^4x^4+1} \leq \frac{x^2}{x^4+1} \doteq u_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مع التابع المهيمن u_1 ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$؛ وهذا لان:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{(x^2)^p}{(x^4+1)^p}\,dx &= 2\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{(x^4+1)^p}\,dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{x^{2p}}{(x^4+1)^p}\,dx + 2\int_1^\infty \frac{x^{2p}}{(x^4+1)^p}\,dx \\
&\leq 2\int_0^1 x^{2p}\,dx + 2\int_1^\infty \frac{x^{2p}}{x^{4p}}\,dx \\
&\leq 2 + \frac{2}{1-2p}\lim_{b\to\infty} \frac{1}{x^{2p-1}}\Big|_1^b = 2 + \frac{2}{2p-1} < +\infty.
\end{aligned}$$

ينتج عندها من مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ ان المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب كذلك نحو $u_\infty \equiv 0$ في $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in]1,\infty[$.

2.21. **حل التمرين الثاني** التابع φ المعرف على الكرة $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}$ بأن

$$\varphi(x,y) = \big|\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\big|^{-\alpha}(x^2+y^2)^{-1/2}, \quad (x,y) \in B\setminus\{(0,0)\}, \quad \varphi(0,0) = 0,$$

حيث α عدد حقيقي موجب، قيوس لأن مستمر في B عدا عند نقطة الأصل التي قياسها معدوم. وبما ان التابع φ يتمتع بالتناظر الشعاعي (أو الكروي) فيكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\int_B |\varphi(x,y)|^2\,dx\,dy &= \int_B \big|\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\big|^{-2\alpha}(x^2+y^2)^{-1}\,dx\,dy \\
&= 2\pi\int_0^{1/2} |\ln r|^{-2\alpha}\,r^{-2}\,r\,dr \\
&= 2\pi\int_0^{1/2} (-\ln r)^{-2\alpha}\,\frac{dr}{r}, \quad t = -\ln r \quad \text{تبديل المتغير} \\
&= 2\pi\int_{\ln 2}^\infty t^{-2\alpha}\,dt = \frac{2\pi}{1-2\alpha}\lim_{b\to\infty} t^{1-2\alpha}\Big|_{\ln 2}^b.
\end{aligned}$$

افترضنا في حساب التكامل الأخير أن $\alpha \neq \frac{1}{2}$ لأن التكامل في هذه الحالة غير منته. وحتى تكون النهاية السابقة منتهية فينبغي أن يكون $1 - 2\alpha < 0$. إذن، حتى ينتمي التابع φ إلى $L^2(B)$ فيجب اختيار العدد $\alpha > \frac{1}{2}$.

3.21. **حل التمرين الثالث** بما أن التابع $f(x) = 2x\chi_I(x)$ مستمر على المجال المتراص $I = [-1,1]$ ومعدوم خاجه فهي ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ وبما أن التابع $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ مهما كان $p \in [1,\infty]$ فإن جداء اللف $f \star g$ معرف جيدا. ومن أجل $x \in \mathbb{R}$، لدينا:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy \\
&= \int_{x-y \in \operatorname{supp} f} f(x-y)g(y)\,dy \\
&= \int_{x-1}^{x+1} \frac{2(x-y)}{y^2+1}\,dy \\
&= 2x[\arctan(x+1) - \arctan(x-1)] - \ln(y^2+1)\Big|_{x-1}^{x+1} \\
&= 2x[\arctan(x+1) - \arctan(x-1)] + \ln\frac{(x-1)^2+1}{(x+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

4.21. **حل التمرين الرابع**

١) النهاية البسيطة للمتتالية $\{v_n\}_{n\geq 1}$ المعرفة على $J = [0,1]$ بأن $v_n(x) = \frac{n}{n^2x^2+1}$ هي بكل وضوح التابع v_∞ المعرف بأن $v_\infty(0) = \infty$ و $v_\infty(x) = 0$ مهما كان $x \in]0,1]$.

٢) بما أن التابع v_∞ معدوم شبه كليا على J فيمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
\int_J |v_n - v_\infty|\,dx &= \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx, \quad t = nx \quad \text{تبديل المتغير} \\
&= \int_0^n \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan n.
\end{aligned}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} \int_J |v_n - v_\infty|\,dx = \pi/2$. لذا لا تتقارب $\{v_n\}_{n\geq 1}$ نحو v_∞ في $\mathcal{L}^1(J)$.

لكن، لدينا

$$\begin{aligned}
\int_a^1 |v_n - v_\infty|\,dx &= \int_a^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx, \quad t = nx \quad \text{تبديل المتغير} \\
&= \int_{na}^n \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \arctan n - \arctan(na), \quad \text{التزايدات المنتهية} \\
&= \frac{n - na}{[na + \theta_n(n-na)]^2 + 1}, \quad \theta_n \in]0,1[\\
&\leq \frac{n - na}{[na]^2 + 1} \leq \frac{1-a}{na^2}
\end{aligned}$$

هذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} \int_a^1 |v_n - v_\infty|\,dx = 0$ ويكون التقارب وارد في $\mathcal{L}^1([a,1])$ مهما كان $0 < a < 1$.

٣) فيمايخص المتتالية $\{x\,v_n\}_{n\geq 1}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |xv_n - v_\infty|\,dx &= \int_0^1 \frac{xn}{n^2x^2+1}\,dx, \quad t = nx \quad \text{تبديل المتغير}\\ &= \int_0^n \frac{t}{t^2+1}\,\frac{dt}{n}\\ &= \frac{1}{2n}\,\ln(t^2+1)\Big|_0^n\\ &= \frac{1}{2n}\,\ln(n^2+1) \leq \frac{1}{2n}\,\ln(2n^2) = \frac{\ln 2}{2n} + \frac{\ln n}{n}\cdot\end{aligned}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |xv_n - v_\infty|\,dx = 0$. تتقارب إذن المتتالية $\{x\,v_n\}_{n\geq 1}$ نحو v_∞ في $\mathcal{L}^1(J)$.

٤) لنفرض أن حضيض التابع المستمر h، $\min\limits_J h = g_m$، موجب تماما. لدينا:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |hv_n - 0|\,dx &= \int_0^1 \frac{hn}{n^2x^2+1}\,dx\\ &\geq g_m \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx = g_m\,\arctan n.\end{aligned}$$

إذن

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |hv_n - 0|\,dx \geq \liminf_{n\to\infty}(g_m \arctan n) = g_m\frac{\pi}{2} > 0.$$

ولذا فالمتتالية $\{h\,v_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب نحو التابع المعدوم في الفضاء $\mathcal{L}^1(J)$.

٥) ليكن $\varepsilon > 0$ عددا حقيقيا. بما أن التابع h مستمر عند النقطة 0 مع $h(0) = 0$، فيوجد $\delta > 0$ بحيث

$$0 \leq h(x) \leq c\varepsilon, \quad \forall x \in [0,\delta],$$

حيث c ثابت موجب تماما يؤجل اختياره. لنكتب:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{hn}{n^2x^2+1}\,dx &= \int_0^\delta \frac{hn}{n^2x^2+1}\,dx + \int_\delta^1 \frac{hn}{n^2x^2+1}\,dx\\ &\leq c\varepsilon \int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx + \max_J h \int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx\\ &\leq c\varepsilon\frac{\pi}{2} + \max_J h \int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx\end{aligned}$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx = 0$ ، وفقا للسؤال (٢)، فيوجد عدد طبيعي n_0 بحيث

$$\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\,dx \leq c\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \leq n.$$

واضح عندئذ أننا إذا ما أخترنا العدد c بحيث $c^{-1} = \frac{\pi}{2} + \max\limits_J$ فيكون لدينا

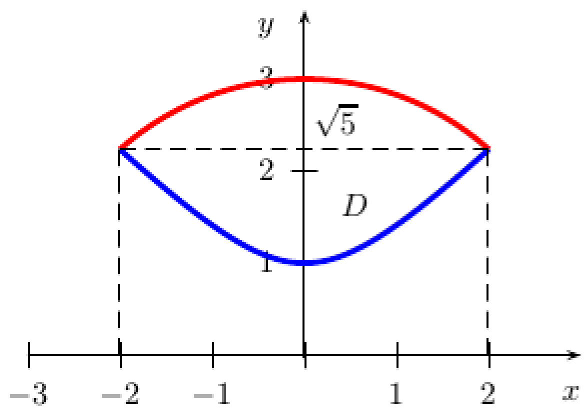
$$\int_0^1 \frac{hn}{n^2x^2+1}\,dx \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

هذا يثبت أن $\{h\,v_n\}_{n\geq 1}$ تتقارب نحو التابع المعدوم في الفضاء $\mathcal{L}^1(J)$.

22. حل امتحان 2012/03/15

1.22. التمرين الأول

(أ) رسم الحيز D: يتكون هذا الحيز من نقط المستوي الموجودة بين بياني التابعين $k(x) = \sqrt{9-x^2} \longmapsto x$ و $\ell(x) = \sqrt{1+x^2} \longmapsto x$.



(ب) التابع $f(x,y) = xy\chi_D(x,y)$ كمول على $\mathbb{R}^2$ لأنه قيوس كجداء تابعين قيوسين هما الدالة المميزة للجزء المغلق D (وهذا ناتج من استمرار التابعين k و ℓ) والتابع المستمر $(x,y) \mapsto xy$. ثم إن التابع f معدوم خارج المستطيل $R = [-2,2]\times[1,3]$ مع $|f(x,y)| \le 2\times 3$ على R. إذن (λ_2 هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^2$):

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dxdy \le 6\lambda_2(R) = 48 < \infty.$$

حساب تكامل التابع f على $\mathbb{R}^2$. لدينا، وفقا لمبرهنة فوبيني وبالمكاملة نسبة إلى y ثم x:

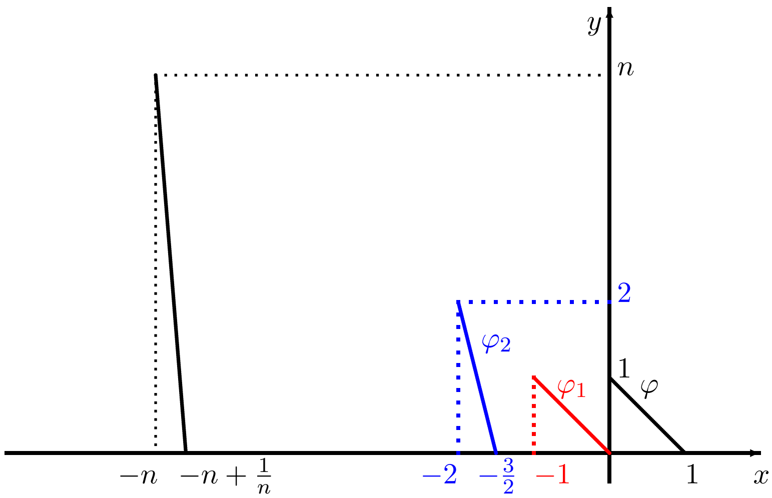
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} xy\chi_D(x,y)\,dxdy &= \int_{-2}^{2}\left[\int_{\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{9-x^2}} xy\,dy\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} xy^2\Big|_{y=\sqrt{x^2+1}}^{y=\sqrt{9-x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x(9-x^2-x^2-1)\,dx = \int_{-2}^{2} x(4-x^2)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

أما بعكس الترتيب السابق فبالنظر إلى رسم الحيز D نرى أن قيم y التي تساهم في الحساب هي تلك الموجودة بين 1 و 3 ومن شكل الحيز يتعين علينا المكاملة نسبة إلى y من 1 إلى $\sqrt{5}$ ومن هذه القيمة إلى 3. وبعد تعيين تقاطعات المستقيمات الأفقية التي معادلاتها $y \in [1,3]$ مع الحيز D نرى أنه لدينا:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} xy\chi_D(x,y)\,dxdy &= \int_{1}^{\sqrt{5}}\left[\int_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{y^2-1}} xy\,dx\right]dy + \int_{\sqrt{5}}^{3}\left[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xy\,dx\right]dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{5}} yx^2\Big|_{x=-\sqrt{y^2-1}}^{x=\sqrt{y^2-1}}\,dy + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3} yx^2\Big|_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{1}^{\sqrt{5}} y[y^2-1-(y^2-1)]\,dy + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3} y[9-y^2-(9-y^2)]\,dy = 0.
\end{aligned}$$

2.22 التمرين الثاني

(أ) لدينا $\varphi(x) = (1-x)\chi_I(x)$ مع $I = [0,1]$. إذن سند φ هو المجال I. وبما أن $\varphi_n(x) = n\varphi(n(x+n))$ فيتكون سند φ_n من نقط x التي تحقق $0 \leq n(x+n) \leq 1$ وعليه $\operatorname{supp}\varphi_n = [-n, -n+\frac{1}{n}]$. وعلى السند لدينا $\varphi_n(x) = n(1-n(x+n))$. وعليه، حيث هو غير معدوم، يتكون بيان φ_n من القطعة المستقيمة التى تنطلق من النقطة $(-n, n)$ وتصل إلى النقطة $(-n+\frac{1}{n}, 0)$. ومنه البيانات التالية.



المتتالية متقاربة ببساطة نحو التابع العدوم $\varphi_\infty \equiv 0$.

23. حل امتحان 2012/09/06

1.23 حل التمرين الأول إن جداء اللف $f\star f$ معرف جيدا لكون التابع f ينتمي إلى $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. وهذا لأن f قيوس ولدينا

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 < \infty.$$

وفيما يخص السند فلدينا $f\star f \subset J$ وهذا وفقا للنتيجة العلاقة التي تقول إن

$$\operatorname{supp}(f\star f) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} f} = J.$$

ليكن الآن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان $x \leq 0$ كان

$$\begin{aligned}(f\star f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)}\chi_J(x-y)e^{-y}\chi_J(y)\,dy\\ &= \int_{J\cap]-\infty,x]} e^{-(x-y)}e^{-y}\,dy = 0.\end{aligned}$$

وإذا كان $x > 0$ كان

$$\begin{aligned}(f\star f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)}\chi_J(x-y)e^{-y}\chi_J(y)\,dy\\ &= \int_{J\cap]-\infty,x]} e^{-(x-y)}e^{-y}\,dy = \int_0^x e^{-x}\,dy = xe^{-x}.\end{aligned}$$

إذن $(f\star f)(x) = xe^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$.

2.23. **حل التمرين الثاني** ميدان المكاملة هو المثلث $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. لتكن χ_T الدالة المميزة للمثلث T. التكامل L موجود لكون التابع $f(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|+1}\chi_T(x,y)$ قيوس على $\mathbb{R}^2$ وتكامله منته إذ إنه مستمر على المتراص T ومعدوم خارج هذا الجزء. يمكننا أن نكتب (وفقا لمبرهنة فوبيني)

$$\begin{aligned} L = \int_T \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^{\alpha+1}} &= \int_0^1 \Big[\int_0^x \frac{dy}{(x+y+1)^{\alpha+1}}\Big]\,dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \Big[\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\Big\{\frac{1}{(x+y+1)^{\alpha}}\Big\}dy\Big]\,dx \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \Big[\frac{1}{(2x+1)^{\alpha}} - \frac{1}{(x+1)^{\alpha}}\Big]\,dx. \end{aligned}$$

لكن:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^{\alpha}} &= \frac{1}{2(1-\alpha)}\frac{1}{(2x+1)^{\alpha-1}}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2(1-\alpha)}\Big[\frac{1}{3^{\alpha-1}} - 1\Big], \\ \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^{\alpha}} &= \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{(1-\alpha)}\Big[\frac{1}{2^{\alpha-1}} - 1\Big]. \end{aligned}$$

ومنه:

$$L = \frac{3^{1-\alpha} - 2^{2-\alpha} + 1}{2\alpha(\alpha-1)}.$$

يمكننا طبعا لحساب L أن نكامل أولا نسبة إلى x ثم نسبة إلى y فنجد:

$$\begin{aligned} L = \int_T \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^{\alpha+1}} &= \int_0^1 \Big[\int_y^1 \frac{dx}{(x+y+1)^{\alpha+1}}\Big]\,dy \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \Big[\int_y^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{1}{(x+y+1)^{\alpha}}\Big\}dx\Big]\,dy \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \Big[\frac{1}{(y+2)^{\alpha}} - \frac{1}{(2y+1)^{\alpha}}\Big]\,dy \\ &= -\frac{1}{\alpha}\Big[\frac{1}{1-\alpha}\Big\{\frac{1}{3^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big\} - \frac{1}{2(1-\alpha)}\Big\{\frac{1}{3^{\alpha-1}} - 1\Big\}\Big] \\ &= \frac{3^{1-\alpha} - 2^{2-\alpha} + 1}{2\alpha(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

3.23. **حل التمرين الثالث**

1.3.23. لدينا (باستخدام تعريف التكامل المعمم وفرضيات التمرين)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b P(x)e^{-x}\,dx \\ &= -\lim_{b\to+\infty}\int_0^b P(x)(e^{-x})'\,dx \\ &= -\lim_{b\to+\infty}\Big[P(x)e^{-x}\Big|_{x=0}^{b} - \int_0^b P'(x)e^{-x}\,dx\Big] \\ &= -\lim_{b\to+\infty}\Big[P(b)e^{-b} - P(0) - \int_0^b P'(x)e^{-x}\,dx\Big] \\ &= P(0) + \int_0^{+\infty} P'(x)e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

إذن التكامل $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}\,dx$ **متقارب ولدينا**

$$\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}\,dx = P(0) + \int_0^{+\infty} P'(x)e^{-x}\,dx.$$

2.3.23. **تطبيق** **نبدأ أولا بإجراء التبديل في المتغير** $x = \sqrt{t}$ **لنحصل على**

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\,dx,$$

إذ إن $dt = 2x\,dx$. **هنا** $P(x) = x^3$. **ويمكنك أن تتأكد من أن فرضيات السؤال السبقة محققة (وهي في الواقع محققة من أجل كل حدودية) فيكمن إذن تطبيق العلاقة السابقة (مرتين) لإيجاد:**

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,dt &= 2\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\,dx\\ &= 2\times 3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx = 2\times 3\times 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 12.\end{aligned}$$

4.23. حل التمرين الرابع

1.4.23. **يكفي مثلا أخذ** $u_0 = -\chi_{[-1,0]} + \chi_{[0,1]}$.

5.23. **ليكن** φ **تابعا حقيقيا معرفا على** $\mathbb{R}$ **ومستمرا على المجال المتراص** $[-1,1]$. **بإجراء التبديل في المتغير** $t = nx$ **نستطيع ان نكتب:**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{-n}^n u(t)\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,dt\\ &= \int_{-n}^n u(t)\Big[\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big) - \varphi(0)\Big]\,dt + \varphi(0)\int_{-n}^n u(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} v_n(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} w_n(t)\,dt,\end{aligned}$$

حيث

$$v_n(t) = \chi_{[-n,n]}(t)u(t)\Big[\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big) - \varphi(0)\Big] \quad \text{و} \quad w_n(t) = \chi_{[-n,n]}(t)u(t).$$

بما أن التابع u **ينتمي إلى** $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ **فهو منتهي شبه كليا على** $\mathbb{R}$. **وعندئذ ينتج من استمرار التابع** φ **عند** 0 **أن** $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = 0$ **شبه كليا على** $\mathbb{R}$. **وبما أن** v_n **معدوم خارج المجال** $[-n,n]$ **فإن**

$$|v_n| \le 2\|\varphi\|_E\,|u| \quad \text{حيث} \quad \|\varphi\|_E = \max_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)|.$$

بما أن $|u|\,\|\varphi\|_E$ **تابع كمول فتضمن عندها مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} v_n\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]}(t)u(t)\Big[\varphi\Big(\frac{t}{n}\Big) - \varphi(0)\Big]\,dt = 0.$$

أما المرور إلى النهاية في التكامل المبقى فيتم كذلك باستخدام مبرهنة التقارب بالهيمنة لكون $\lim_{n\to\infty} w_n = u$ **شبه كليا مع** $|w_n| \le |u|$. **إذن**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} w_n\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dt = 0.$$

وفي الخلاصة، برهنا على أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi\in E.$$

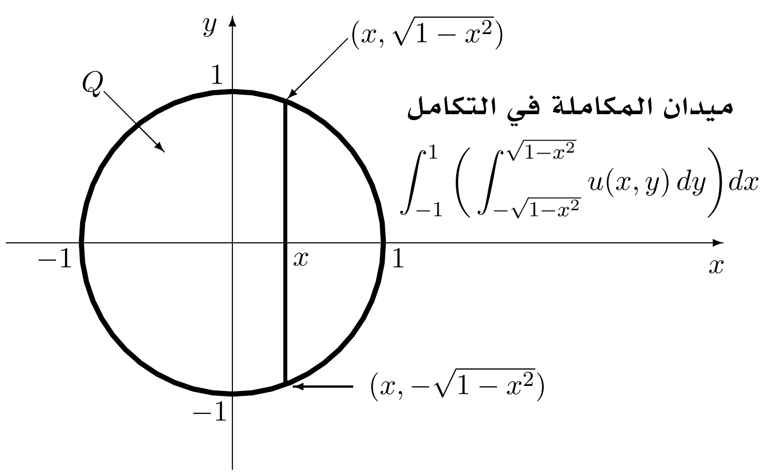
24. حل امتحان 2013/02/06

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^2$ أو أي جزء منه) بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ.

1.24. **حل التمرين الأول** (أ) بما أن التكامل بالنسبة إلى المتغير x يتم على المجال $[-1,1]$ فإن ميدان المكاملة واقع في الشريط $[-1,1]\times\mathbb{R}$. ومن أجل $x\in[-1,1]$ يتم التكامل نسبة إلى y من النقطة $y=-\sqrt{1-x^2}$ إلى النقطة $y=\sqrt{1-x^2}$. وبالتربيع في الحالتين نرى أنه لدينا $y^2=1-x^2$. هذا يعني أنه من أجل كل $x\in[-1,1]$ فالتكامل نسبة إلى y يتم على وتر الدائرة ذات المعادلة $x^2+y^2=1$ الذي فاصلته x. وبجعل x يتغير من 1 إلى -1 فالوتر الموافق يغطي القرص

$$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\},$$

وهو ميدان المكاملة المطلوب. ومنه الرسم:



(ب) **حساب هذا التكامل في حالة التابع** $u(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

بما أن ميدان المكاملة يتمتع بالتناظر الشعاعي وكذلك التابع u فيكمننا استخدام الدستور الذي يحول حساب تكامل على المستوي لتابع متناظر شعاعيا إلى تكامل على المجال $[0,+\infty[$. إذا مدد التابع u بـ 0 خارج القرص فنحصل على تابع متناظر شعاعيا معدوم خارج القرص. هذا يؤدي إلى ما يلي:

$$\int_Q \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=2\pi\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2}=\pi\int_0^1\frac{d(1+r^2)}{1+r^2}=\pi\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\pi\ln 2.$$

2.24. **حل التمرين الثاني** التابع الحقيقي $f(x,y)=|x-y|$ قيوس على $\mathbb{R}^2$ لأنه مستمر على هذا الفضاء والاستمرار يأتي من كونه يحقق شرط ليبشيتز إذا إنه من أجل (x,y) و (x',y') من $\mathbb{R}^2$، لدينا:

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x',y')| &= ||x-y|-|x'-y'||\\ &\le |x-x'+y'-y|\\ &\le |x-x'|+|y-y'| \doteq \|(x,y)-(x',y')\|_1\end{aligned}$$

وهذا يبين أن ليبشيتزي بثابت يساوي 1.

حساب التكامل $\int_C f(x,y)\,dxdy$ **حيث** $C=]0,1[\times]0,1[$.

لدينا، وفقا لمبرهنة فوبيني:

$$\int_C |x-y|\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 |x-y|\,dy\right]dx$$

لكن:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x-y|\,dy &= \int_0^x (x-y)\,dy + \int_x^1 (y-x)\,dy\\ &= x^2 - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^x + \frac{1}{2}y^2\Big|_x^1 - x(1-x)\\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) - x + x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[\times]0,1[} |x-y|\,dxdy &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3.24 **حل التمرين الثالث** ليكن $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ الربع الأول مفتوحا.

(أ) التابع الحقيقي g المعرف في Ω بأن $g(x,y) = e^{-xy}$ قيوس لأنه اقتصار على الجزء القيوس Ω لتابع مستمر على $\mathbb{R}^2$ بأكمله هو التابع $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto e^{-xy} \in \mathbb{R}$.

(ب) بما أن التابع g موجب فمبرهنة تونيلي تسمح بالمكاملة بالترتيب الذي نختاره. لدينا:

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(x,y)\,dxdy &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-xy}\,dy\right]dx\\ &= \int_0^\infty \frac{-1}{x}e^{-xy}\Big|_{y=0}^{y=+\infty} dx\\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \geq \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^\infty = +\infty.\end{aligned}$$

إذن التابع g لا ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

(جـ) ليكن الشريط $S =]0,+\infty[\times]\alpha,\beta[$ حيث $0 < \alpha < \beta$ عددان حقيقيان. لدينا (وفقا لحساب سابق):

$$M \doteq \int_\alpha^\beta \left[\int_0^\infty e^{-xy}\,dx\right]dy = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \ln\beta - \ln\alpha = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) < \infty.$$

إذن ينتمي التابع g إلى $\mathcal{L}^1(S)$.

(د) بما أن التابع g ينتمي إلى $\mathcal{L}^1(S)$ فمبرهنة فوبيني تسمح بأن نكتب

$$\begin{aligned}M &= \int_0^\infty \left[\int_\alpha^\beta e^{-xy}\,dy\right]dx\\ &= \int_0^\infty \frac{-1}{x}e^{-xy}\Big|_{y=\alpha}^{y=\beta} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx.\end{aligned}$$

ومنه ومن السؤال السابق

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

4.24 **حل التمرين الرابع** بما أن التابع الحقيقي $h(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ مستمر في المربع المفتوح $C =]0,1[\times]0,1[$ فهو قيوس في هذا المربع.

(أ) --- حساب المشتق الجزئ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$. لدينا:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) &= -\frac{2x(x^2+y^2)^2 - 2x^2(x^2+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^4}\\ &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^3}[x^2+y^2-2x^2]\\ &= 2\,\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.\end{aligned}$$

تمكننا النتيجة السابقة من الكتابة:

$$\begin{aligned}K &= \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,dx\Big]\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[y\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\,dx\Big]\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 y\,\frac{-x^2}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{x=0}^{x=1} dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-y}{(1+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{1+y^2}\Big) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+y^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

أما حساب المقدار $L = \int_0^1 \Big[\int_0^1 h(x,y)\,dy\Big]\,dx$ فيعتمد على الملاحظة أن

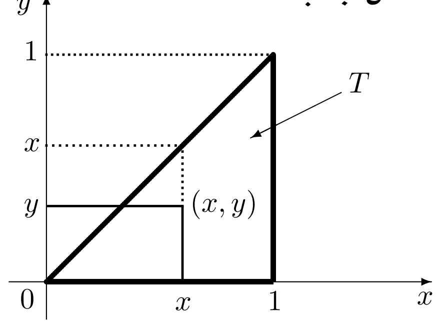
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 2\,\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

وبالتالي لدينا:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[x\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\,dy\Big]\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{y=0}^{y=1} dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

إذن $K \neq L$.

(ب) --- أما إشارة التابع h على المثلث T الذي رؤوسه النقط $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$ فهي موجبة لأن عند كل نقطة (x,y) من T لدينا $y \leq x$. أنظر الشكل جانبه.



حساب التكامل $\int_T h(x,y)\,dxdy$.
وفقا لماسبق، لدينا:

$$\begin{aligned}\int_T h(x,y)\,dxdy &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[x\int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\,dy\Big]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{y=0}^{y=x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{(2x^2)^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\ln x\Big|_0^1 = +\infty.\end{aligned}$$

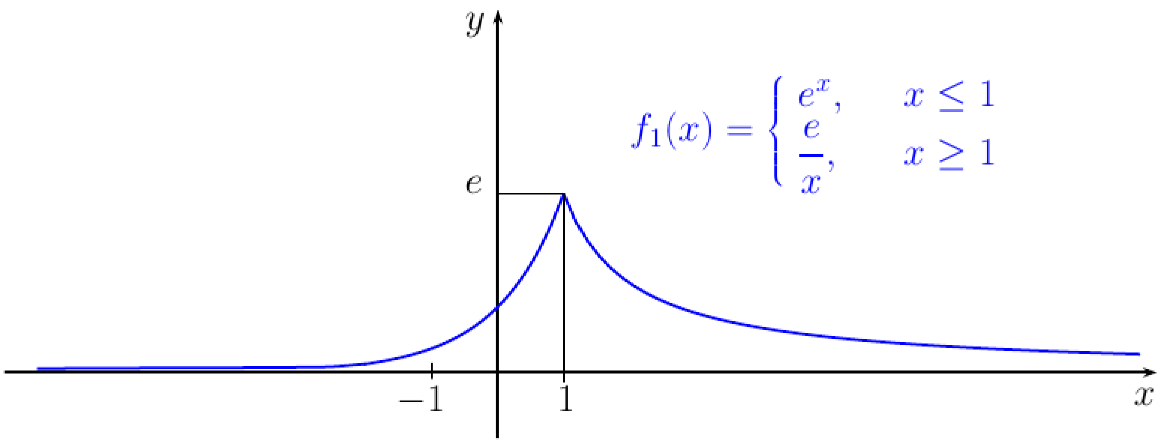
ينتج من الحساب السابق أن

$$\int_C |h(x,y)|\,d\lambda_2(x,y) \geq \int_T h(x,y)\,d\lambda_2(x,y) = +\infty.$$

لا ينتمي إذن التابع h إلى الفضاء $\mathcal{L}^1(C,\mathcal{B}_C,\lambda_2)$، λ_2 هو قياس لوبيغ.

25. حل امتحان 2013/06/01

1.25. **السؤال الأول** يستحسن أن نقدم أولا بيان f_1. بيانات التوابع f_n لها نفس الشكل (وكلها ماتطابقة على المجال $]-\infty,1]$).



التابع f_1 القيوس (لكونه مستمرا) لا ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ إذ إن

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx &= \int_{-\infty}^1 e^x\,x + \int_1^\infty \frac{e}{x}\,dx \\ &= e^x\Big|_{-\infty}^1 + e\ln x\Big|_1^\infty = e+\infty = +\infty.\end{aligned}$$

1.1.25.
لتعيين النهاية البسيطة f للمتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ على $\mathbb{R}$ نلاحظة أن كل التوابع متطابقة على المجال $]-\infty,1]$ ولذا $f(x)=e^x$ مهما كان $x \leq 1$. ومن أجل $x > 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{x^n}=0$. وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x\chi_{]-\infty,1]}(x), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

أمّا عن إنتماء f إلى فضاءات لوبيغ فنلاحظ أولا أن f قيوس كنهاية متتالية توابع قيوسة وإذا بدأنا بحالة $p=\infty$ فبما أن $E=\{x\in\mathbb{R}\mid x>e\}=\emptyset$ فإن قياس لوبيغ للجزء E معدوم، $\lambda(E)=0$ ، وعليه $N_\infty(f)\leq e<\infty$. إذن $f\in L^\infty(\mathbb{R})$. ومن أجل $p\in]1,\infty[$ ، لدينا

$$\int_{\mathbb{R}} f^p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx=\frac{e^x}{p}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{e}{p}<\infty.$$

إذن f ينتمي إلى $L^p(\mathbb{R})$ مهما كان $1\leq p\leq\infty$.

.2.1.25

من أجل كل عدد منته $p\geq 1$ وَ $n\geq 2$ ، نستطيع أن نكتب:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|^p\,dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x^{pn}}=\frac{1}{1-np}\frac{1}{x^{np-1}}\Big|_1^\infty=\frac{1}{np-1}.$$

إذن $\lim_{n\to\infty}\|f_n-\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$. وهذا يثبت تقارب المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ نحو f في $L^p(\mathbb{R})$ من أجل كل $p\in]1,\infty[$.

أمّا من أجل $p=\infty$ فلدينا

$$N_\infty(|f_n-f|)=\inf\{\alpha\geq 0\mid \lambda(\{|f_n-f|>\alpha\})=0\}\geq e$$

وهذا لأنه من أجل كل $\alpha<e$ يكون لدينا (أنظر بيان f_1 السابق وهو يماثل بيانات التوابع f_n):

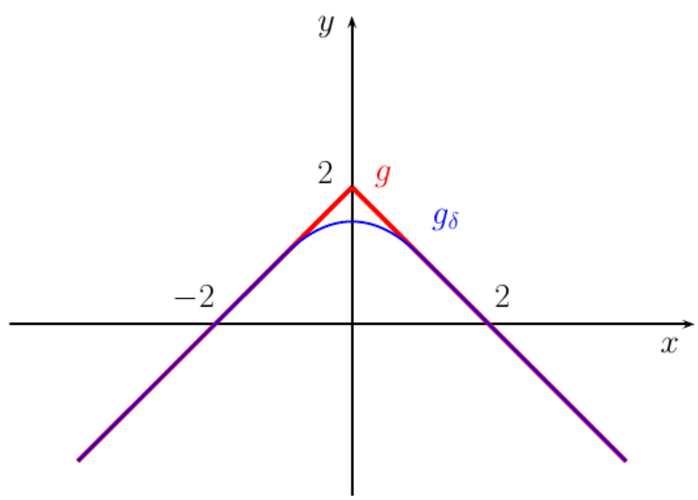
$$\{|f_n-f|>\alpha\}\supset\Big[1,\sqrt[n]{\frac{e}{\alpha}}\Big[.$$

وهذا يبين أن $\lambda(\{|f_n-f|>\alpha\})=1-\sqrt[n]{e/\alpha}>0$ مهما كان $\alpha<e$. وبالتالي لا تؤول المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ نحو f في $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.25. السؤال الثاني

.1.2.25

لنبدأ بتقديم بيان التابع $g(x)=2-|x|$ وهو باللّون الأحمر وعلى نفس المعلم رسمنا بيان g_1 وهو يماثل بيان كل g_δ . (بيان g_δ منطبق مع بيان g خارج المجال $]-\delta,\delta[$ ولدينا $g_\delta\leq g$ على هذا المجال.)



التابع g كامل محليا أي أن $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ وعليه نستطيع حساب g_δ . ليكن إذن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان $x \leq -\delta$ كان $x+\delta \leq 0$ ويكون كل مجال المكاملة $[x-\delta, x+\delta] \subset]-\infty, 0]$ وعليه لدينا في هذه الحالة:

$$\begin{aligned}
g_\delta(x) &= \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} (2+t)\,dt \\
&= \frac{1}{4\delta}(2+t)^2\Big|_{x-\delta}^{x+\delta} \\
&= \frac{1}{4\delta}[(2+x+\delta)^2-(2+x-\delta)^2] = \frac{1}{4\delta}\times 2\delta(4+2x) = 2+x = 2-|x|.
\end{aligned}$$

هذا يبيّن تطابق التابعين g وَ g_δ على المجال $]-\infty, -\delta]$. وإذا كان $x \geq \delta$ كان $x-\delta \geq 0$ ولذا يكون كل مجال المكامة $[x-\delta, x+\delta] \subset [0, \infty[$ وعليه:

$$\begin{aligned}
g_\delta(x) &= \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} (2-t)\,dt \\
&= -\frac{1}{4\delta}(2-t)^2\Big|_{x-\delta}^{x+\delta} \\
&= -\frac{1}{4\delta}[(2-x-\delta)^2-(2-x+\delta)^2] = -\frac{1}{4\delta}\times(-2\delta)(4-2x) = 2-x = 2-|x|.
\end{aligned}$$

هذا يبيّن تطابق g وَ g_δ على المجال $[\delta, \infty[$. أمّا في حالة $-\delta \leq x \leq \delta$ فيقع جزء من مجال المكالة في $]-\infty, 0]$ وجزؤه الآخر في المجال $[0, \infty[$. ولذا نكتب:

$$\begin{aligned}
g_\delta(x) &= \frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{0}(2+t)\,dt + \frac{1}{2\delta}\int_{0}^{x+\delta}(2-t)\,dt \\
&= \frac{1}{4\delta}(2+t)^2\Big|_{x-\delta}^{0} - \frac{1}{4\delta}(2-t)^2\Big|_{0}^{x+\delta} \\
&= \frac{1}{4\delta}\Big\{[4-(2+x-\delta)^2]-[(2-x-\delta)^2-4]\Big\} = 2-\frac{1}{2\delta}(x^2+\delta^2).
\end{aligned}$$

.2.2.25

بما أن التوابع g وَ g_δ مستمرة فإن

$$\|g-g_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = N_\infty(|g-g_\infty|) = \sup_{\mathbb{R}}|g-g_\delta|$$

وبالتالي اعتمادا على الحسبات السابقة وعلى البيانات:

$$N_\infty(|g-g_\delta) = \sup_{x\in[-\delta,\delta]}|g(x)-g_\delta(x)| = |g(0)-g_\delta(0)| = \frac{\delta}{2}.$$

هذا يقتضي أن

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\|g-g_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\delta}{2} = 0.$$

3.25 **السؤال الثالث** حساب جداء اللف $\varphi\star\psi$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا تعريفاً $(\varphi\star\psi)(x)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-y)\psi(y)\,dy$. وحتى نرى أي جزء من $\mathbb{R}$ يساهم بالفعل في التكامل نعيّن المواطن حيث يكون الجداء $\varphi(x-y)\psi(y)$ غير معدوم. إنه غير معدوم إذا كان $y \in J=[-1,1]$ وَ $x-y \in I=[0,2]$. إذن يكون الجداء غير معدوم من أجل

$$y\in Q=[x-2,x]\cap[-1,1].$$

ومنه (لكون $\varphi(x-y)=1$ على Q):

$$(\varphi\star\psi)(x)=\int_Q \varphi(x-y)\psi(y)\,dy=\int_{[x-2,x]\cap[-1,1]}\psi(y)\,dy.$$

نحن إذن أمام الحالات التالية:

- ⋆ إذا كان $x\le -1$ كان Q خاليا أو محتويا في وحيدة العنصر $\{-1\}$. ولذا $(\varphi\star\psi)(x)=0$ في هذه الحالة.
- ⋆ وإذا كان $x\ge 3$ كان $Q\subset\{1\}$ ويكون $(\varphi\star\psi)(x)=0$ هنا كذلك.
- ⋆ إذا كان $-1\le x\le 0$ كان $x-2\le -2$ وعليه $Q=[-1,x]$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}(\varphi\star\psi)(x)=\int_{-1}^{x}\frac{e}{e-1}(-y)e^{-y^2}\,dy &= \frac{e}{2(e-1)}e^{-y^2}\Big|_{-1}^{x}\\ &= \frac{e}{2(e-1)}[e^{-x^2}-e^{-1}],\qquad x\in[-1,0].\end{aligned}$$

- ⋆ إذا كان $0\le x\le 1$ كان $x-2\le -1$ ولذا $Q=[-1,x]$ ولدينا:

$$\begin{aligned}(\varphi\star\psi)(x) &= \frac{e}{e-1}\int_{-1}^{0}(-y)e^{-y^2}\,dy+\frac{e}{e-1}\int_0^x ye^{-y^2}\,dy\\ &= \frac{1}{2}-\frac{e}{2(e-1)}e^{-y^2}\Big|_0^x=\frac12+\frac{e}{2(e-1)}[1-e^{-x^2}],\qquad x\in[0,1].\end{aligned}$$

- ⋆ إذا كان $1\le x\le 2$ كان $-1\le x-2$ وعليه $Q=[x-2,1]$ ولذا:

$$\begin{aligned}(\varphi\star\psi)(x) &= \frac{e}{e-1}\Big[\int_{x-2}^{0}(-y)e^{-y^2}\,dy+\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy\Big]\\ &= \frac{e}{2(e-1)}\Big[e^{-y^2}\Big|_{x-2}^{0}-e^{-y^2}\Big|_0^1\Big]\\ &= \frac{e}{2(e-1)}[2-e^{-1}-e^{-(x-2)^2}],\qquad x\in[1,2].\end{aligned}$$

- ⋆ وأخيراً إذا كان $2\le x\le 3$ كان $0\le x-2\le 1$ وعليه $Q=[x-2,1]$ ولذا:

$$\begin{aligned}(\varphi\star\psi)(x) &= \frac{e}{e-1}\int_{x-2}^{1}ye^{-y^2}\,dy\\ &= -\frac{e}{2(e-1)}e^{-y^2}\Big|_{x-2}^{1}\\ &= \frac{e}{2(e-1)}[e^{-(x-2)^2}-e^{-1}],\qquad x\in[2,3].\end{aligned}$$

وكطريقة لاختبار صحة الحسابات السابقة يمكنك أن تتأكد من استمرار $\varphi\star\psi$ عند أطراف المجالات المعتبرة أعلاه.

4.25. السؤال الرابع

.1.4.25

التابع $x \mapsto u(x) = e^{-x^2}$ مستمر ويدرك ذروته عند النقطة 0 ولذا فهو قيوس وينتمي إلى $L^\infty(\mathbb{R})$ إذ إن

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = \|e^{-(\cdot)^2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = N_\infty(u) = 1.$$

وإذا تذكرنا أن $e^t \geq 1+t$ مهما كان $0 \leq t$ فإن $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ وعليه

$$T = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi < \infty.$$

ينتمي إذن التابع u إلى $L^1(\mathbb{R})$. لا يمكن للعدد T أن ينعدم لكون التابع المستمر u موجبا تماما عند كل نقطة من $\mathbb{R}$.

.2.4.25

بما أن $v \in L^1(\mathbb{R})$ فهو قيوس ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون التابع $\mathbb{R} \ni y \longmapsto e^{-(x-y)^2}v(y)$ قيوسا ولدينا

$$|(u\star v)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2}|v(y)|\,dy \leq \sup_{\mathbb{R}} e^{-(\cdot)^2}\int_{\mathbb{R}}|v(y)|\,dy \leq \|v\|_{L^1(\mathbb{R})},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

.3.4.25

لكي نثبت أن $u\star v$ مستمر على $\mathbb{R}$ فيكفي أن نثبت أنه «مستمر متتالياتيا.» لنثبت إذن نقطة x_∞ من $\mathbb{R}$ ونأخذ متتالية كيفية $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة نحو x_∞ . وباعتبار المتتالية التابعية $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة شبه كليا على $\mathbb{R}$ بأن $w_n(y) = e^{-(x_n-y)^2}v(y)$ نرى (من استمرار التابع الأسي) أن

$$w_n(y) = e^{-(x_n-y)^2}v(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w(y) = e^{-(x_\infty-y)^2}v(y) \quad \text{شك في} \quad \mathbb{R}.$$

وبما أن $|w_n(y)| \leq |v(y)|$ شك (مع v كمول) فينتج اعتمادا على مبرهنة التقارب بالهيمنة للوبيغ أن

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(u\star v)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x_n-y)^2}v(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x_\infty-y)^2}v(y)\,dy = (u\star v)(x_\infty).\end{aligned}$$

هذا يثبت استمرار $u\star v$ على $\mathbb{R}$.

ولكي نثبت أنه يؤول نحو 0 عندما يؤول $|x|$ نحو $+\infty$ فيكفي أن نثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty}(u\star v)(x_n) = 0$ مهما كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \infty$. لتكن إذن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية تؤول بالقيمة المطلقة نحو ∞ . واضح (لكون $v(y)$ متنهيا شبه كليا) أن

$$e^{-(x_n-y)^2}v(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{شك في} \quad \mathbb{R}.$$

وينتج عندها من مبرهنة التقارب بالهيمنة للبيغ أن $\lim\limits_{n\to\infty}(u\star v)(x_n) = 0$. هذا يثبت أن

$$\lim_{|x|\to\infty}(u\star v)(x) = 0.$$

.4.4.25
بما أن $u\star v$ مستمر فهو قيوس ولدينا وفقا لمبرهنة تونيلي:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|(u\star v)(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-y)^2}|v(y)|\,dy\Big]\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}|v(y)|\Big[\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-y)^2}\,dx\Big]\,dy = T\int_{\mathbb{R}}|v(y)|\,dy = T\|v\|_1.\end{aligned}$$

وهذا لأن

$$T=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-y)^2}\,dx$$

مهما كان $y \in \mathbb{R}$. فينتمي إذن جداء اللّف $u\star v$ إلى $L^1(\mathbb{R})$ مع $\|u\star v\|_1\leq T\|v\|_1$.

.26 **حل امتحان** 2013/09/10

.1.26 **السؤال الأول بماأن التابعين الحقيقين المعرفين بأن $f(x)=(2-x)\chi_{[1,2]}(x)$ و $g(x)=\chi_{[3,4]}(x)$ كمولان فإن جداء اللف $f\star g$ معرف جيدا وهو تابع كمول. ثم إن**

$$\begin{aligned}(f\star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\,dy\\ &= \int_3^4 f(x-y)\,dy=\int_{[3,4]\cap[x-2,x-1]}[2-(x-y)]\,dy.\end{aligned}$$

- ⋆ واضح عندها أنه لدينا $(f\star g)(x)=0$ من أجل $x\leq 4$ أو $x\geq 6$.
- ⋆ إذا كان $4\leq x\leq 5$ كان $[3,4]\cap[x-2,x-1]=[3,x-1]$ وعليها يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(f\star g)(x)=\int_3^{x-1}[2-(x-y)]\,dy &= -\frac{1}{2}(x-3)^2+2x-7.5\\ &= -\frac{1}{2}x^2+5x-12.\end{aligned}$$

- ⋆ وإذا كان $5\leq x\leq 6$ كان $[3,4]\cap[x-2,x-1]=[x-2,4]$ وعليها يكون لدينا:

$$\begin{aligned}(f\star g)(x)=\int_{x-2}^{4}[2-(x-y)]\,dy &= \frac{1}{2}(x-4)^2-2x+10\\ &= \frac{1}{2}x^2-6x+18.\end{aligned}$$

.2.26 **السؤال الثاني (أ) واضح أن التابع $\varphi\psi$ قيوس، ثم إننا إذا ما طبقنا متباينة هولدر بأخذ $p=\frac{4}{3}$ (إذن $p'=4$) فنحصل على:**

$$\int_{\mathbb{R}}|\varphi\psi|\,dx\leq\Big(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^{\frac{4}{3}}\,dx\Big)^{\frac{3}{4}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\psi|^4\,dx\Big)^{\frac{1}{4}}<\infty,$$

وهذا لكون $\varphi \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R})$ و $\psi \in L^4(\mathbb{R})$. إذن التابع $\varphi\psi$ كمول على $\mathbb{R}$.

(ب) للإجابة على هذا السؤال نلاحظ أولا أن $L^4(I) \subset L^q(I)$ مهما كان $q \in [1,4]$. هذا ناتج من تطبيق متباينة هولدر. وفي الحقيقة، من أجل $q \in]1,4[$ و $\zeta \in L^4(I)$ ، نستطيع أن نكتب:

$$\int_I |\zeta|^q \, dx \leq \left(\int_I |\zeta|^4 \, dx \right)^{\frac{q}{4}} \left(\int_I 1^{\frac{4}{4-q}} \, dx \right)^{1-\frac{q}{4}}.$$

ومنه (لأن قياس $I =]0,1[$ هو 1):

$$\|\zeta\|_{L^q(I)} \leq \|\zeta\|_{L^4(I)}, \quad \forall \zeta \in L^4(I).$$

عندئذ إذا كانت $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^4(I)$ متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع $\xi \in L^4(I)$ فبما أن:

$$\|\xi_n - \xi\|_{L^q(I)} \leq \|\xi_n - \xi\|_{L^4(I)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

فهذا يثبت تقارب المتتالية التابعية $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو نفس التابع ξ في كل الفضاءات $L^q(I)$ مهما كان $q \in [1,4]$. التقارب وارد إذن بصفة خاصة في $L^2(I)$.

3.26 **السؤال الثالث** (أ) **يقع الحيز بين السطحين الدواريين $z = 3x^2 + 3y^2$ (الموجه نحو الأعلى) و $z = 1 - x^2 - y^2$ (الموجه نحو الأسفل). إن هذين السطحين لهما نفس المحور، وهو المحور $0z$، وعند تطابقهما يكون لدينا:**

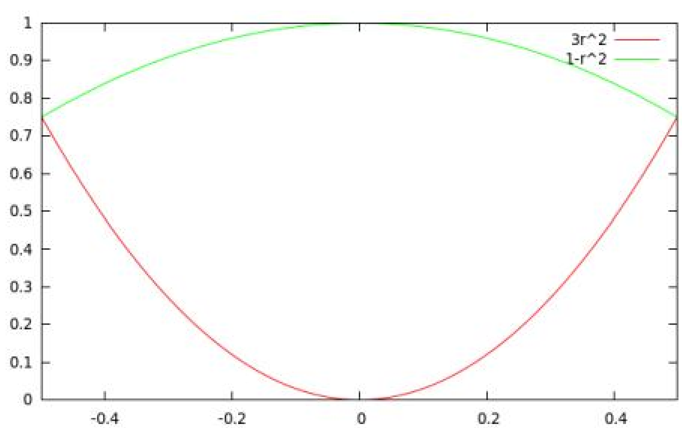
$$3x^2 + 3y^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad \iff \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

إذن مسقط تقاطع السطحين هي الدائرة المركزة عند نقطة الأصلة ونصف قطرها هو $\frac{1}{2}$. ينتج مما سبق أن

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y) \in D \quad \wedge \quad 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\},$$

حيث D هو القرص المعطى بأن $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2\}$. أمّا رسم V فهو على النحو أسفله.

V هو الحيز في الفضاء الذي نحصل عليه بدوران الشكل التالي حول المحور العمودي المار بالنقطة 0 .



(ب) حساب حجم V . لدينا (بالوحدة المكعبة):

$$
\begin{aligned}
|V| &= \int_V dxdydz \\
&= \int_D \left[\int_{3x^2+3y^2}^{1-x^2-y^2} dz\right] dxdy \\
&= \int_D (1-4x^2-4y^2)\, dxdy = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4r^2) r\, dr = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

4.26. السؤال الرابع

.1.4.26

لتكن x_0 نقطة من المجال المفتوح $I =]0,1[$. لدينا من أجل $h \in \mathbb{R}^\star$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_0^h [u_0(x_0+t)-u_0(x_0)]\, dt &= \frac{1}{h}\int_0^h \Big(\frac{1}{1+x_0+t}-\frac{1}{1+x_0}\Big)\, dt \\
&= \frac{\ln(1+x_0+h)-\ln(1+x_0)}{h} - \frac{1}{1+x_0}.
\end{aligned}
$$

وبوضع $\gamma(x) = \ln(1+x)$ ، حيث $x > -1$ ، نرى أن هذا التابع قابل للاشتقاق ولدينا

$$
\gamma'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h} = \frac{1}{1+x}
$$

وإذا ما طبقنا النتيجة السابقة عند النقطة $x_0 \in I$ ، يتبين لنا أن

$$
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h [u_0(x_0+t)-u_0(x_0)]\, dt = 0.
$$

هذا يثبت أن كل نقطة من I هي للوبيغ للتابع u_0 .

.2.4.26

لتكن x نقطة من المجال الفتوح J حيث للتابع u مستمر. وليكن $\varepsilon > 0$. ينتج من استمرار التابع u عند انقطة x وجود $\delta > 0$ بحيث يكون لدينا $[x-\delta, x+\delta] \subset J$:

$$
|u(x+t)-u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [-\delta, \delta].
$$

وعندئذ، من أجل h يحقق $|h| \leq \delta$ ، نستطيع أن نكتب:

$$
\left|\frac{1}{h}\int_0^h [u(x+t)-u(x)]\, dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{-|h|}^{|h|} |u(x+t)-u(x)|\, dt \leq \frac{1}{|h|} \times 2|h|\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
$$

هذا يثبت أن x نقطة للوبيغ للتابع u على J ، لأن ما سبق يعني أن:

$$
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h [u(x+t)-u(x)]\, dt = 0.
$$

.3.4.26

لتكن $J \ni x_0$ نقطة للوبيغ للتابع $L^1(J) \ni u$. لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h} - u(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} u(s)\,ds - \int_a^{x_0} u(s)\ ,ds\right) - u(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} u(s)\,ds - u(x_0) \\
(t = s - x_0 \quad \text{تبديل المتغير}) &= \frac{1}{h}\int_0^h u(x_0+t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^h u(x_0)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h [u(x_0+t)\,dt - u(x_0)]\,dt
\end{aligned}$$

وبما أن x_0 نقطة للوبيغ للتابع u فإن

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h} - u(x_0)\Big) = \lim_{h\to 0}\int_0^h [u(x_0+t) - u(u_0)]\,dt = 0.$$

إذن التابع $U(x) = \int_a^x u(s)\,ds$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة للوبيغ x_0 للتابع u ولدينا $U'(x_0) = u(x_0)$.

.27 **حل امتحان** 2014/02/06

.1.27 **التمرين الأول** بما أن التابع المطلوب تكامله يتمتع بالتناظر الشعاعي وبما أن ميدان المكالة

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

يتمتع بنفس التناظر فيكن تحويل التكامل الثنائ المعطى إلى تكامل بسيط، فلدينا

$$\begin{aligned}
\int_Q \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\,dxdy &= 2\pi\int_0^1 \frac{\ln(1+r^2)}{1+r^2}\,r\,dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \{[\ln(1+r^2)]^2\}'\,dr \\
&= \frac{\pi}{2}[\ln(1+r^2)]^2\Big|_{r=0}^1 \\
&= \boxed{\frac{\pi}{2}[\ln 2]^2.}
\end{aligned}$$

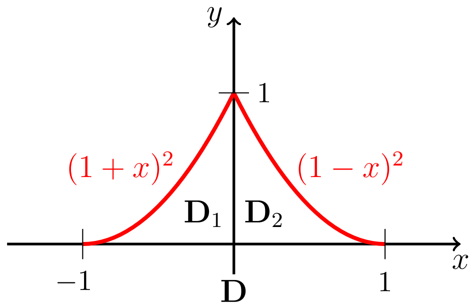
.2.27 **التمرين الثاني** (أ) رسم حيز المستوي D المعرف بأن

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le y \le (1-|x|)^2\}\cdot$$

الحيز المطلوب رسمه موجود ضمن الشريط $[-1,1]\times\mathbb{R}$ ويمكن كتابته على الشكل $D = D_1 \cup D_2$، حيث

$$\begin{aligned}
D_1 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le (1+x)^2\big\}, \\
D_2 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le (1-x)^2\big\}\cdot
\end{aligned}$$

ومنه الرسم



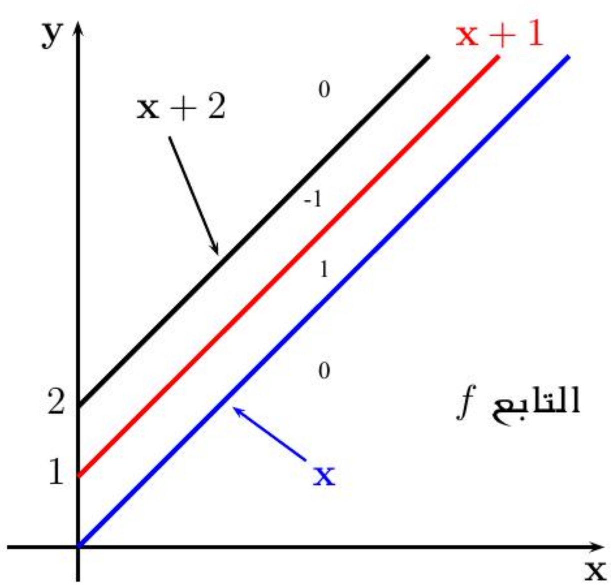
(ب) حساب $\int_D dxdy$ — (ب.١). لدينا:

$$\begin{aligned}
L = \int_D dxdy &= \int_{D_1} dxdy + \int_{D_2} dxdy \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\int_0^{(1+x)^2} dy\right] dx + \int_0^1 \left[\int_0^{(1-x)^2} dy\right] dx \\
&= \int_0^1 (1+x)^2\, dx + \int_0^1 (1-x)^2\, dx \\
&= \frac{1}{3}(1+x)^3\Big|_{x=-1}^{0} - \frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_{x=0}^{1} = \boxed{\frac{2}{3}.}
\end{aligned}$$

(ب.٢) المكاملة بعكس الترتيب. بالنظر ألى رسم D نرى انه لدينا:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}-1}^{1-\sqrt{y}} dx\right] dy \\
&= \int_0^1 [2-2\sqrt{y}]\, dy = 2 - \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{1} = 2 - \frac{4}{3} = \boxed{\tfrac{2}{3}.}
\end{aligned}$$

3.27. **التمرين الثالث** الشريطان S_1 وَ S_2 والتابع f مبينة في الشكل التالي، حيث S_1 وَ S_2 يقعان في الربع الأول وَ S_1 محصور بين بياني التابعان x وَ $x+1$ أما S_2 فهو محصور بين بياني $x+1$ وَ $x+2$:



(أ) حساب التكامل $\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\Big]dx$. لدينا:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\Big]\,dx &= \int_0^\infty\Big[\int_0^\infty f(x,y)\,dy\Big]\,dx\\ &= \int_0^\infty\Big[\int_x^{x+1} dy+\int_{x+1}^{x+2}(-1)\,dy\Big]\,dx\\ &= \int_0^\infty[1+(-1)]dx=\boxed{0.}\end{aligned}$$

حساب التكامل $\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]dy$. بالنظر إلى الشكل السابق نرى أنه يجب عند المكاملة نسبة ألى y تقسيم مجال المكالة إلى ثلاثة أجزاء:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy=\int_0^1\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy &+ \int_1^2\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy\\ &+\int_2^\infty\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy\end{aligned}$$

لكن

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy &= \int_0^1\Big[\int_0^y dx\Big]\,dy=\int_0^1 y\,dy=\boxed{\frac{1}{2},}\\ \int_1^2\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy &= \int_1^2\Big[\int_0^{y-1}(-1)\,dx+\int_{y-1}^y dx\Big]\,dy\\ &= \int_1^2(2-y)\,dy=-\frac{1}{2}(2-y)^2\Big|_{y=1}^2=\boxed{\frac{1}{2},}\end{aligned}$$

أما التكامل الثالث فهو معدوم، إذا إن:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy &= \int_2^\infty\Big[\int_{y-2}^{y-1}(-1)\,dx+\int_{y-1}^y dx\Big]\,dy\\ &= \int_2^\infty\Big[(-1)+1\Big]\,dy=\boxed{0.}\end{aligned}$$

إذن $\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\Big]\,dy=1$.

نلاحظ أن التكاملين المطلوب حسابهما مختلفان.

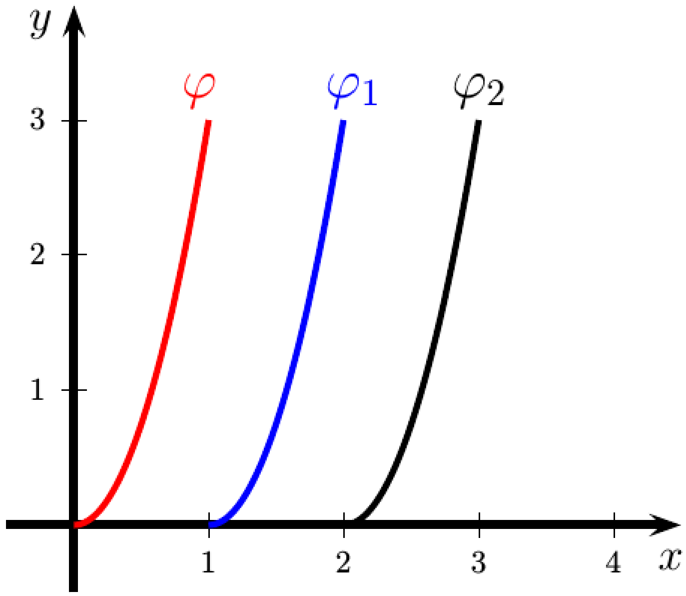
(ب) إنه لدينا (فكر مثلا في تطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبولفي):

$$\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\Big[\int_x^{x+2}dy\Big]\,dx=\lim_{n\to\infty}2n=\boxed{+\infty.}$$

إذن، التابع f غير كمول على $\mathbb{R}^2$.

4.27 **التمرين الرابع** بما أن المتتالية التابعية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ معرفة بأن $\varphi_n(x)=\varphi(x-n)$ حيث φ هو التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}$ بأن $\varphi(x)=3x^2\chi_I(x)$ مع $I=[0,1]$ فإن سند φ_n هو $\operatorname{supp}\varphi_n=[n,n+1]$ وعلى هذا السند لدينا: $\varphi_n(x)=3(x-n)^2$. هذا يبرر ما يلي:

(أ) رسم، على نفس المعلم، بيانات التوابع φ، φ_1، φ_2 هو (حيث لا تُمثل إلا الأجزاء غير المعدوم من كل تابع):



(ب) تعين التابع $\sup\limits_{n\geq 1}\varphi_n$. بما أن سندات التوابع المكونة للمتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقاطع إلا عند نقطة على الأكثر حيث يكون أحد التابعين معدوما فإنه لدينا:

$$\sup_{n\geq 1}\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n.$$

إذن (فكر في استخدام مبرهنة بيبو لفي):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big(\sup_{n\geq 1}\varphi_n\Big)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\,dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,dx=\boxed{+\infty}\end{aligned}$$

إذا إن

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,dx=\int_n^{n+1}3(x-n)^3\,dx=(x-n)^3\Big|_n^{n+1}=1.$$

واضح عندها أن $\sup\limits_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,dx=1$ ونرى أن المقدارين

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\sup_{n\geq 1}\varphi_n\Big)(x)\,dx \qquad \text{وَ} \qquad \sup_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,dx$$

مختلفان.

إن النتيجة المحصل عليها لا تتناقض مع مبرهنة التحدب العدود التي قدمت في الدرس النظري لكون المتتالية المعطاة غير متزايدة.

(جـ) تتقارب المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ببساطة نحوالتابع $\varphi_\infty\equiv 0$. عليك لرؤية هذا الاستعانة بسند التابع φ_n الذي يذهب إلى $+\infty$ مع n. وبما أن

$$\int_{\mathbb{R}}|\varphi_n-\varphi_\infty|\,dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\,dx=1,$$

فالمتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب نحوالتابع في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

28. حل امتحان 2014/09/10

1.28. **التمرين الأول** نلاحظ أولا أن التابع المعطى $h(x,y)=\chi_C(x,y)\,\mathrm{sign}\,(x-y)e^{-|x-y|}$ قيوس على $\mathbb{R}^2$ كجداء توابع قيوسة.

1.1.28. يمكننا أن نكتب $C=T_1\cup T_2$ حيث T_1 وَ T_2 هما المثلثان

$$T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y\le x<\infty\},\qquad T_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<y<\infty\}.$$

واضح أن $\mathrm{sign}\,(x-y)=1$ مهما كان $(x,y)\in T_1$ وَ $\mathrm{sign}\,(x-y)=-1$ مهما كان $(x,y)\in T_2$. وعليه لدينا (بأخذ تعريف الدالة المميزة χ_C بعين الاعتبار):

$$\begin{aligned}
K &= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^x \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dy+\int_x^\infty \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^x e^{-x+y}\,dy-\int_x^\infty e^{x-y}\,dy\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty\Big[e^{-x}e^{y}\Big|_{y=0}^{y=x}+e^{x}e^{-y}\Big|_{y=x}^{y=\infty}\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty[e^{-x}\{e^{x}-1\}+e^{x}\{0-e^{-x}\}]\,dx=-\int_0^\infty e^{-x}\,dx=e^{-x}\Big|_0^\infty=-1.
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,dx\Big]\,dy\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^\infty \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dx\Big]\,dy\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^y \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dx+\int_y^\infty \mathrm{sign}(x-y)e^{-|x-y|}\,dx\Big]\,dy\\
&= \int_0^\infty\Big[-\int_0^y e^{x-y}\,dx+\int_y^\infty e^{-x+y}\,dx\Big]\,dx\\
&= \int_0^\infty\Big[-e^{-y}e^{x}\Big|_{x=0}^{x=y}-e^{y}e^{-x}\Big|_{x=y}^{x=\infty}\Big]\,dy\\
&= \int_0^\infty[-e^{-y}\{e^{y}-1\}-e^{y}\{0-e^{-y}\}]\,dy=\int_0^\infty e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_0^\infty=1.
\end{aligned}$$

إذن $K\neq L$. وعليه لا يمكن، وفقا لمبرهنة فوبيني، أن ينتمي التابع h إلى $L^1(\mathbb{R}^2)$.

2.1.28. للتأكد بالحساب الفعلي من أن h لا ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^2)$ نلاحظ أولا أن $|\mathrm{sign}(x,y)|=1$ على $\mathbb{R}^2$ ولدينا، اعتمادا على مبرهنة توبيلي:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}|h(x,y)|\,dxdy &= \int_C e^{-|x-y|}\,dxdy\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^\infty e^{-|x-y|}\,dy\Big]dx\\
&= \int_0^\infty\Big[\int_0^x e^{-x+y}\,dy+\int_x^\infty e^{x-y}\,dy\Big]dx\\
&= \int_0^\infty[e^{-x}\{e^{x}-1\}-e^{x}\{0-e^{-x}\}]dx=\int_0^\infty[2-e^{-x}]\,dx=+\infty.
\end{aligned}$$

2.28. **التمرين الثاني** ليكن التابعان الحقيقيان f و g المعرفين على $\mathbb{R}$ بأن $f(x) = xe^{-x^2}$ و $g(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)$، $x \in \mathbb{R}$.

1.2.28. التابع $f(x) = xe^{-x^2}$ قيوس لأنه مستمر ولدينا

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = 2\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = -\int_0^\infty [e^{-x^2}]'\,dx = -e^{-x^2}\Big|_0^\infty = 1.$$

ينتمي إذن التابع f إلى $L^1(\mathbb{R})$.

لتكن المجموعة

$$A(g) = \{\alpha \geq 0 \mid \lambda(\{g > \alpha\}) = 0\}$$

حيث λ هو قياس لوبيغ و $\{g > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha\}$. واضح أنه إذا كان $1 \leq \alpha$ كان لدينا $\{g > \alpha\} = \emptyset$ وعليه $\lambda(\{g > \alpha\}) = 0$ ولذا تنتمي كل أعداد المجال $[1, \infty[$ إلى $A(f)$ وبمأنه من أجل $\alpha \in [0, 1[$ لدينا $\{g > \alpha\} = [0, \infty[$ ولذا $\lambda(\{g > \alpha\}) = \infty$. إذن

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \inf A(g) = 1.$$

هذا يثبت إنتماء التابع g إلى $L^\infty(\mathbb{R})$.

2.2.28. حساب جداء اللف $f \star g$. ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا:

$$\begin{aligned}
(f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dx \\
&= \int_0^\infty f(x-y)\,dy \\
&= \int_0^\infty (x-y)e^{-(x-y)^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d}{dy}\{e^{-(x-y)^2}\} = \frac{1}{2}e^{-(x-y)^2}\Big|_{y=0}^{y=\infty} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

وفقا لمبرهنة قدمت في المحاضرات، لدينا التقدير:

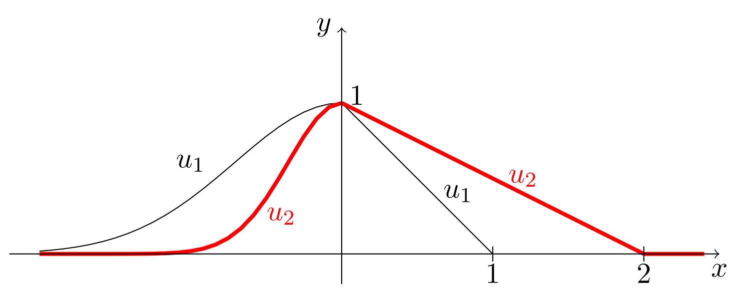
$$\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1 \times 1 = 1.$$

إن التقدير السابق ناتج عن مبرهنة عامة وهو لا يراعي بالضرورة الدقة إذ إنك تستطيع أن ترى أنه لدينا هنا $\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}$.

3.28. **التمرين الثالث** بما أن المتتالية التابعية الحقيقية $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ المعرفة بأن $u_n(x) = e^{-n^2x^2}$ لما $x \leq 0$ و $u_n(x) = \frac{1}{n}(n-x)^+$ لما $x \geq 0$، فإن $u_1(x) = e^{-x^2}$ لما $x \leq 0$ و $u_1(x) = 1 - x$ لما $0 \leq x \leq 1$ و $u_1(x) = 0$ لما $x > 1$.

ولدينا كذلك $u_2(x) = e^{-4x^2}$ لما $x \leq 0$ و $u_2(x) = 2 - x$ لما $0 \leq x \leq 2$ و $u_2(x) = 0$ لما $x > 2$.

ومنه رسم التابعين u_1 و u_2:



في النصف الأيسر من المحور العديي، يقع بيان u_2 تماما تحت بيان u_1 وهما لا ينعدمان أبدا، خلافا لما يبدو على الرسم.

.1.3.28 **واضح أن عناصر المتتالية قيوسة لكونها مستمرة ومن أجل** $p \in [1,\infty[$ **لدينا:**

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u_n(x)|^p\,dx &= \int_{-\infty}^{0} e^{-pn^2x^2}\,dx + \int_0^n \frac{(x-n)^p}{n^p}\,dx \\ &\text{باجراء تبديل في المتغير مناسب في كل من التكاملين} \\ &= \frac{1}{n\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dx + \frac{1}{n^p}\int_0^p t^p\,dt \\ &= \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{p}} + \frac{n}{p+1},\end{aligned}$$

إذ إن (وفقا للنتيجة المعطاة في سؤال موالي)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

أما من أجل $p=\infty$ **فلدينا (لكون عناصر المتتالية مستمرة)**

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| = 1.$$

هذا يثبت أن عناصر المتتالية السابقة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ **تنتمي إلى** $L^p(\mathbb{R})$ **مهما كان** $p \in [1,+\infty]$.

لاحظ أنه كان بالإمكان الإجابة بالإكبار وبدون الحساب الفعلي للتكاملات.إن كيفية الإجابة المتبعة تجعلنا نجيب في الوقت نفسه على الفرع الأخير من هذا السؤال.

.2.3.28 **لتعيين النهاية البسيطة** u **للمتتالية** $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$**، نأخذ** $x \in \mathbb{R}$. **إذا كان** $x < 0$ **كانت**

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2x^2} = 0.$$

وإذا كان $x \geq 0$ **فابتداء من مرتبة طبيعية** n_0 **تُـعطى قيمة** $u_n(x)$ **من أجل** $n \geq n_0$ **بأن** $u_n(x) = 1 - \frac{x}{n}$ **وعليه:**

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right) = 1.$$

إذن، النهاية البسيطة للمتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ **هي الدلة المميزة للمجال** $[0,\infty[$:

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \chi_{[0,\infty[}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

واضح أن u **لا ينتمي إلى** $L^p(\mathbb{R})$ **مع** $1 \leq p < \infty$ **لكنه ينتمي إلى** $L^\infty(\mathbb{R})$.

.3.3.28 **ليكن** $n \in \mathbb{N}^\star$ **عددا مثبتا. وفقا للحسابات التي قدمت آنفا لدينا:**

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1, \qquad \|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{p}} + \frac{n}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}},\ p \in [1,\infty[.$$

لدينا

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{p}} + \frac{n}{p+1}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln\frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{p}}\Big(1 + \frac{2n^2\sqrt{p}}{(p+1)\sqrt{\pi}}\Big)\right).$$

لكن

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{p}}\Big(1+\frac{2n^2\sqrt{p}}{(p+1)\sqrt{\pi}}\Big) &= \ln\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\ln p+\ln\Big(1+\frac{2n^2\sqrt{p}}{(p+1)\sqrt{\pi}}\Big)\\
&= \ln\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\ln p+\frac{2n^2\sqrt{p}}{(p+1)\sqrt{\pi}}+o\Big(\frac{\sqrt{p}}{p+1}\Big)\ (p\to\infty).
\end{aligned}$$

ينتج مما سبق أن

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\ln\Big(\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\pi}{p}}+\frac{n}{p+1}\Big)=0.$$

وعليه $\lim\limits_{p\to\infty}\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}=1=\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

4.28. التمرين الرابع

1.4.28. لتكن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ حيث $\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[n,2n]}(x)$ ، $x\in\mathbb{R}$. لدينا

$$\|\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2(x)\,dx=\int_n^{2n}\frac{1}{n}\,dx=1.$$

2.4.28. ليكن $\psi_0\in C_c(\mathbb{R})$. يوجد عدد $0<a$ بحيث $\operatorname{supp}\psi_0\subset[-a,a]$. وليكن n_0 عددا طبيعيا بحيث $a<n_0$. عندئذ

$$(\operatorname{supp}\psi_0)\cap[n,2n]=\emptyset,\qquad \forall\, n\geq n_0.$$

ينتج من هذا أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi_0\,dx=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

3.4.28. ليكن $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ وليكن $0<\varepsilon$. بما أن $C_c(\mathbb{R})$ كثيف في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ فيوجد $\psi_\varepsilon\in C_c(\mathbb{R})$ بحيث $\|\psi-\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq\frac{\varepsilon}{2}$. وبماأن (فكر في متباينة هولدر)

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi\,dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(\psi-\psi_\varepsilon+\psi_\varepsilon)\,dx\Big|\\
&\leq \Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(\psi-\psi_\varepsilon)\,dx\Big|+\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi_\varepsilon\,dx\Big|\\
&\leq \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi-\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}+\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi_\varepsilon\,dx\Big|\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi_\varepsilon\,dx\Big|
\end{aligned}$$

فباستخدام السؤال السابق يمكننا، من أجل n كبير، جعل التكامل الأخير أقل من $\frac{\varepsilon}{2}$ ولذا يكون المقدار $\Big|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi\,dx\Big|$ أقل من ε من أجل n كبير. إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n\psi\,dx=0$ ، أي أن المتتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ تتقارب بضعف نحو التابع المعدوم في $L^2(\mathbb{R})$.