يوسف عتيق
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة
القبة - الجزائر العاصمة

مدخل إلى نظرية القياس والمكاملة

تصدير

عزيزي القارىء!
إنك الآن بدأت تتصفح كتابا تمخض عن الدروس التي قدمتها لأول مرة في السنة الجامعية 1995 – 1996 إلى طلبة السناة الثالثة للسانس الرياضيات في وحدة القياس والمكاملة بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة، الجزائر العاصمة. إذا كنت ترغب في مواصلة القراءة فأقول لك إنه من الضروري أن تتحلى بكثير من الصبر والشجاعة لأنك مقدم على دراسة نظرية من أجمل وأصعب فروع الرياضيات. إنك لفهمها (ولو فهماً خفيفاً) تحتاج إلى توظيف مفاهيم كثيرة من التحليل الرياضياتي وإلى عمل ضخم. يجب أن تعرف جيدا خواص المستقيم العددي الجبرية والتوبولوجية، وأن تعرف مفهوم الكوابر والصواغر والحدين الأدنى والأعلى وخاصتيهما المميزتين، ونهاية متتالية وتابع، ومفوم الاستمرار وما إليه... ويستحسن أن تكون لديك معرفة جيدة ـ ومسبقة ـ لتكامل ريمان وكذا خبرة ممتازة في التعامل مع المجموعات والعمليات عليها.

يحتوي برنامج نظرية القياس والمكاملة الذي نريد دراسته معا على المواضيع التالية: جبر المجموعات؛ الفضاءات والتطبيقات القيوسة؛ القياسات الموجبة؛ قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$؛ المكاملة (تكامل لوبيغ، تكامل ستيلجس ولوبيغ على $\mathbb{R}$، المقارنة بين تكاملي ريمان ولوبيغ، تمييز التوابع الكمولة حسب ريمان على مجال $[a,b]$)، قياسات الجداء، عناصر من تحليل فوريي، وأخيرا سلاسل فوريي وخواصها.

وبالرغم مما يبدو من قائمة الواضيع السابقة فإن الهدف الرئيسي الذي نرمي إليه هو دراسة تكامل لوبيغ بكل عموميته ثمّ تقديم بعض تطبيقاته. إذن، بيت القصيد هو دراسة قياس وتكامل لوبيغ. إننا نبدأ هذه الدراسة بتقديم بعض النتائج التمهيدية ونتبعها بتمارين وننصح الدارس بتخصيص وقت لا بأس به لحلها وهذا ليتمكن من استحضار بعض المعلومات والسلوكات والآليات والخبرات التي يكون قد نسيها. إننا نقدم بعدئذ ثلاث تعاريف لتكامل ريمان ونبرهن على أنها متكافئة. وهدفنا من وراء هذا هو تزويد اعتباراتنا بشيء من المادة «الملموسة» وتدريب الدارس على بعض التقنيات والطرق المستخدمة في المكاملة. إننا حتما سنستفيد من كل هذا في تقديم تكامل ستيلجس الذي يعمم تكامل ريمان. وأملنا كبير بعد هذا أن الدارس قد كوّن لنفسه فكرة عن مكاملة التوابع الحقيقية على مجال حقيقي. هذا يجعلنا أكثر اطمئنانا لتقديم نظرية للمكاملة مجردة على مجموعة كيفية ونسبة إلى قياس موجب كيفي. سوف نتبع في هذا الترتيب الوارد في قائمة مواضيع البرنامج المعطى آنفا.

الرموز الرئيسية

نقدم هنا قائمة الرموز الرئيسية المستخدمة في هذا الكتاب مع توضيح مدلول البعض منها.

الرمز $\doteq$ يعني « يساوي تعريفا»

الرموز المجموعاتية

$A \cap B$	تقاطع المجموعتين A وَ B
$A \cup B$	اتحاد المجموعتين A وَ B
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$	تقاطع الجماعة المجمعاتية $\{A_i\}_{i \in I}$ ، I مجموعة أدلة
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$	اتحاد الجماعة المجمعاتية $\{A_i\}_{i \in I}$ ، I مجموعة أدلة
${}^{c}A$	متممة الجزء A نسبة إلى المجموعة الكلية
$A \setminus B$	الفرق بين المجموعتين A وَ B ، $A \setminus B \doteq A \cap {}^{c}B$
$A \Delta B$	الفرق التناظري بين المجموعتين A وَ B ، $A \Delta B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$f : X \to Y$	f تطبيق للمجموعة X في المجموعة Y
$Y \leftarrow X : f$	f تطبيق للمجموعة X في المجموعة Y
$f(A)$	الصورة المباشرة للجزء $A \subset X$ وفق التطبيق f لِـ X في Y
$f^{-1}(B)$	الصورة العكسية للجزء $B \subset Y$ وفق التطبيق $f : X \to Y$

الحدان السفلي والعلوي، الحضيض والذروة، الجزءان السالب والموجب

$\inf A$	الحد السفلي للجزء A
$\sup A$	الحد العلوي للجزء A
$\inf\limits_{D} f$	الحد السفلي للتابع f على الجزء D
$\sup\limits_{D} f$	الحد العلوي للتابع f على الجزء D
$\min\limits_{D} f$	حضيض التابع f على الجزء D
$\max\limits_{D} f$	ذروة التابع f على الجزء D
f^-	الجزء السالب للتابع f ، $f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{1}{2}\{\lvert f \rvert - f\}$
f^+	الجزء الموجب للتابع f ، $f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{1}{2}\{\lvert f \rvert + f\}$

نهايات المتتاليات والتوابع

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$	نهاية المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\liminf\limits_{n \to \infty} x_n$ أو $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n$	النهاية السفلى للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\limsup\limits_{n \to \infty} x_n$ أو $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$	النهاية العليا للمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	نهاية التابع f عند النقطة a

$\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$ أو $\liminf_{x\to a} f(x)$	النهاية السفلى للتابع f عند النقطة a
$\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$ أو $\limsup_{x\to a} f(x)$	النهاية العليا للتابع f عند النقطة a

تكالا ريمان وستيلجس

$[a,b]$	مجال حقيقي متراص
$P=\{x_0,\dots,x_n\}$	مع $a=x_0<\cdots<x_n=b$ تقسيم للمجال $[a,b]$
Q	تقسيم لِـ $[a,b]$ وسط نسبة إلى تقسيم P
$\mathcal{P}_{a,b}$	مجموعة تقسيمات المجال $[a,b]$
$\mathcal{W}(P)$	مجموعة تقسيمات المجال $[a,b]$ الوسطى نسبة إلى التقسيم P
$\underline{R}(f,P)$	مجموع ريمان السفلي للتابع f نسبة إلى التقسيم P
$\overline{R}(f,P)$	مجموع ريمان العلوي للتابع f نسبة إلى التقسيم P
$R(f,P,Q)$	مجموع ريمان للتابع f نسبة إلى التقسيم P والتقسيم الوسط Q نسبة إلى P
$\int_a^b f$	تكامل ريمان للتابع f على المجال $[a,b]$
$\int_a^b f\,dg$	تكامل ستيلجس لِـ f على المجال $[a,b]$ نسبة إلى التابع g
$\int_{a+}^b f$	تكامل ريمان المعمم للتابع f ، $\int_{a+}^b f \doteq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon} f$

العشائر والفضاءات القيوسة والمقيسة

$\mathcal{F}$	فئة أجزاء مجوعة X
$[\mathcal{F}]$	الجبر أو العشيرة المولدة من الفئة $\mathcal{F}$
$\mathcal{A}$	جبر أو عشيرة أجزاء مجوعة X
$(X,\mathcal{A})$	فضاء قيوس، X مجموعة وَ $\mathcal{A}$ عسيرة عليها
μ	قياس موجب
$(X,\mathcal{A},\mu)$	فضاء مقيس، X مجموعة وَ $\mathcal{A}$ عشيرة عليها وَ μ قياس موجب على $\mathcal{A}$

تكاملات وفضاءات لوبيغ

$\int_X f\,d\mu$	تكامل لوبيغ للتابع f على المجموعة X نسبة إلى القياس الموجب μ
$\mathcal{L}^1(X,\mu)$	فضاء لوبيغ للتوابع f الجموعة على X نسبة إلى μ ، $\int_X \lvert f\rvert\,d\mu<\infty$
$L^1(X,\mu)$	فضاء لوبيغ لأصناب التوابع $\tilde{f}$ الجموعة على X نسبة إلى μ ، $\int_X \lvert f\rvert\,d\mu<\infty$ ، مهما كان $f\in\tilde{f}$
p	عدد حقيقي بحيث $1\le p<\infty$ أو $p=+\infty$
$\mathcal{L}^p(X,\mu)$	فضاء لوبيغ للتوابع f بحيث $\lvert f\rvert^p\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$
$L^p(X,\mu)$	فضاء لوبيغ لأصناف التوابع $\tilde{f}$ بحيث $\lvert\tilde{f}\rvert^p\in L^1(X,\mu)$

الفصل 1

لماذا تكامل لوبيغ؟ ألا يكفي تكامل ريمان؟

إنك تعرف أن تكامل ريمان يستطيع مكاملة التوابع المستمرة على المجالات المتراصة وبعض التوابع المحدودة شريطة ألا تكون شديدة التقطعات.
إن تكامل ريمان يتمتع بخواص ثمينة جدا نذكر منها:

⋆ $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ ؛ ⋆ $\int_a^b cf = c\int_a^b f$ ؛
⋆ $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ ؛ ⋆ إذا كان $f \leq g$ كان $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ ؛
⋆ خاصية القيمة الوسطى؛ ⋆ الجمعية المتهية للمجالات غير المتقاطعة؛
⋆ إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال متراص $[a,b]$ وكانت متقاربة بانتظام نحو تابع f على $[a,b]$ كان:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

1.1 نقائص تكامل ريمان

- عدم إمكانية مكاملة بعض التوابع المحدودة على مجال متراص، مثل تابع ديريخلي ـ وهو الدالة المميزة لأعداد الناطقة المحصورة بين 0 وَ 1.
- شروط المرور إلى النهاية في التكاملات قاسية جدا: توجد عدة حالات ذات أهمة في التحليل الرياضياتي حيث لا يتوفر لا الاستمرار ولا التقارب المنتظم.
- إن مكاملة السلاس حد بحد غير ممكنة دوما حتى في حالة التقارب المنتظم للسلاسل، إذ قد يتعذر أن يكون مجموع هذه السلاس كمولا حسب ريمان.
- منذ 1870 عثر الرياضياتيون على توابع تـتمتع بمشتقات محدودة لكنها غير ريمان كمولة. ليس إذن للعلاقة الأساسية $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$ التي تربط بين الاشتقاق والتكامل معنى في حالة هذه التوابع.

ثمّ إن رنيـي بَير Baire $(1874-1936)$ ابتكر سنة 1899 التوابع النصف مستمرة، ويمكن لهذه التوابع أن تكون شديدة التقطع. فكان إذن من الضروري ابتكار نظرية جديدة للمكاملة أقوى من نظرية تكامل ريمان. لقد جاء هذا الابتكار سنة 1902 في أطروحة هانري ليون لوبيغ Lebesgue $(1875-1941)$.

إن أهم نتيجة حصل عليها لوبيغ، وهي حجر الزاوية في أبحاثه، هي مبرهنته للتقارب بالهيمنة. وسنة

1906 نشرت مبرهنتان مهمتان هما توطئة بيار فاتو Fatou (1878 – 1929) ومبرهنة التقاتب الرتيب لبيبو لفي Beppo Levi (1875 – 1961). يمكن القول إن هذه المبرهنات الثلاث هي مبنع كل النتائج المهمة في نظرية القياس والمكاملة وتطبيقاتها.
حظيت نظرية لوبيغ منذ البداية باهتمام مركز من طرف الرياضياتين فعممت في عدة اتجاهات، وعلى سبيل المثال نذكر أن سنة 1918 نشر پج. دانيال Daniell (1889 – 1946) نظرية للمكاملة مجردة تعتمد على أربع بديهيات.

2.1 حول الكيفيات المختلفة لتقديم تكامل لوبيغ

توجد عدة كيفيات لتقديم تكامل لوبيغ لتابع محدود على مجموعة قياسها منته. إننا نقون عن كيفيتين (أو تعريفين) إنهما متكافئان إذا مكّنتا من مكاملة نفس التوابع للحصول على نفس النتائج. فبالإضافة إلى الكيفة التي تجده لآحقا في دروسنا هذه، فإننا نشير إلى الكيفيات التالية.

1.2.1 **كيفية لوبيغ** • إن لوبيغ قد عرّف تكامل تابع f قيوس وموجب على مجموعة $E \subset \mathbb{R}$ ذات قياس منته بأنه العدد:

$$\int_E f\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{nM}\frac{k}{n}\Big|\Big\{x\in E \mid \frac{k}{n}\le f(x) < \frac{k+1}{n}\Big\}\Big|$$

حيث M هو الحد الأعلى للتابع f على E وَ $|\cdot|$ هو قياس لوبيغ للجزء المذكور.
ووسع دلا فالي بوسين de la Vallée-Poussin (1866 – 1962) تعريف لوبيغ ليشمل التوابع القيوسة غير المحدودة علي النحو التالي: ليكن T_m (m عدد طبيعي) التابع الحقيقي المعرف بأن $T_m(t) = \frac{1}{2}\{|t+m| - |t-m|\}$ ، $t \in \mathbb{R}$. (يدعى T_m بتابع البتر، ماذا عن بيانه؟) إذا كان $f_m = T_m \circ f$ هو تابع بتر f عند الأفق m كانت $\{f_m\}$ متتالية عناصرها توابع محدودة وتكامل f هو تعريفا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_X f_m\,dx\,.$$

2.2.1 **كيفية ساكس** • أمّا ساكس Saks (1897 – 1942) فإنه يعرف التكامل بطريقة تذّكر بتعريف تكامل ريمان ـ ستيلجس. وبعبارة ادق إذا كانت $\mathcal{P} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ تجزئة قيوسة لِـ X وكان $m_k = \inf_{E_k} f$ فإن التكامل يعطى بأن (حيث يؤخذ الحد الأعلى نسبة إلى كل التجزئات القيوسة لِـ E):

$$\int_X f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}}\sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|\,.$$

3.2.1 **كيفية كاراثيودوري** • يوجد تعريف للتكامل بأنه «المساحة تحت البيان». يعرف كاراثيودوري Carathéodory (1873 – 1950) تكامل تابع موجب ومحدود وقيوس على النحو التالي: ليكن الجزء

$$A(f) = \{(x,y)\in X\times\mathbb{R} \mid 0\le y\le f(x)\}\,.$$

إن $A(f)$ جزء من $\mathbb{R}^{N+1}$ قيوس والتكامل هو تعريفا

$$\int_X f(x)\,dx = |A(f)|$$

حيث يشير $|A(f)|$ إلى قياس لوبيغ في $\mathbb{R}^{N+1}$ للجزء المعتبر.
يمكن البرهان على أن كل التعاريف السابقة تكافيء التعريف الذي ستجده في هذه الدروس.

ولتعريف تكامل تابع من إشارة كيفية تُستخدم العلاقة $f = f^+ - f^-$ ، حيث f^+ هو الجزء الموجب لِـ f وَ f^- جزءه السالب.

3.1 تكامل كوشي وريمان

إن تكامل كوشي Cauchy (1789 – 1857) وريمان Riemann (1826 – 1866) هو تعميم تكامل ريمان إلى التوابع غير المحدودة على مجالات ليس بالضرورة محدودة. وعلى سبيل المثال نضع:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^k f(x)\,dx.$$

يسمح هذا التعريف بالتقارب المشروط، بمعنى أنه يمكن أن يكون f كمولا دون أن يكون $|f|$ كمولا، ومثال ذلك:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكن} \quad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty .$$

في هذه الحالة، لدينا التقارب المشروط بمعنى كوشي وريمان لكن التقارب بمعنى لوبيغ غير وارد. سوف نرى أنه حتى يكون تابع قيوس f كمولا على مجموعة E يلزم ويكفي أن يكون $|f|$ كمولا على E (هذا ما يسمى بالقابلية للمكاملة المطلقة).

إن كل تعريف لتكامل لوبيغ يسمح بالتقارب المشروط يُبعد الجمعية الكلية، أي إذا كان $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ اتحادا عدودا وغير متقاطع لأجزاء قيوسة كان:

$$\int_E f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,dx.$$

4.1 بعض الخواص المرجوة في المكاملة

إليك بعض الخواص يستحن توفيرها في نظرية ما للتكامل:

1. قابلية التوابع القيوسة والمحدودة للمكاملة على المجموعات التي قياسها منته.
2. الجمعية الكلية للمجموعات والتكامل.
3. التقارب المشروط للتكامل.

يتمتع تكامل لوبيغ بالخاصيتين الأوليين. أمّا تكامل كوشي وريمان فلا يتمتع إلا بالثالثة.

يمكن مزج الخاصيتين (1) وَ (2) ، أي مكاملة توابع شديدة التقطع للحصول على تكامل ريمان مع الإحتفاظ بالتقارب المشروط. هذا ما يفعله تكامل پيرون Perron وتكامل دانجوي Denjoy . الخاصيتان (2) وَ (3) متنافرتان.

5.1 نبذة تاريخية

من الأهداف الرئيسية لنظرية القياس والمكاملة إعطاء معنى لمفهوم «قياس» جزء من $\mathbb{R}$ (المستقيم) أو $\mathbb{R}^2$ (المستوي) أو $\mathbb{R}^3$ (الفضاء) ... إلخ. إن مسألة القياس هذه من أصعب المسائل الرياضياتية وقد شغلت عقول الكثير من الفحول في العديد من الحضارات، بدءا من الحضارة الإغريقية ومرورا بالحضارة العربية الإسلامية وانتهاء بالحضارة الأوروبية الغربية. إننا نجد مثلا أرخميدس Archimèdes (287 – 212 ق م) يهتم بتعيين المساحة المحصورة بين قوس قطع مكافيء ومستقيم عمودي على محوره. ونجد ثابت بن قرّة (836 – 901 م) يهتم بالمسألة نفسها لكن بأسلوب مختلف. كما نجد ابن الهيثم (

965 – 1039 م) يهتم بحساب مساحة الحيز المحصور بين قطع أربعي ومستقيمين متعامدين أحدهما مماس له عند رأسه. وبعد النهضة الأوروبية (القرن 15 ـ القرن 16) انصبّ اهتمام الكثير من العلماء إلى دراسة مسائل القياس هذه؛ فحسب كيبلر Kepler (1571 – 1630 م) مساحة الدائرة وحجوم الكرة والمخروط والأسطوانة والطارة. وأول من قدم نظرية للقياس ـ بل للمكاملة ـ تعالج مكاملة التوابع المستمرة على مجال متراص هو الرياضياتي الفرنسي كوشي وكان هذا سنة 1823. وفي سنة 1854 قدم الرياضياتي الألماني ريمان نظرية للمكاملة أعم من نظرية كوشي وهذا ليتمكن من تمثيل توابع ذات مالا نهاية من التقطعات بواسطة سلاسل فوريي Fourier (1768 – 1830). وإذا كانت نظرية كوشي تُمكِّن من قياس المجالات فإن نظرية ريمان تمكن من قياس أجزاء من $\mathbb{R}$ أعم من المجالات، الأمر الذي فتح الطريق لنظرية القياس التي وجدت شكلها العام سنة 1902 على أيدي الرياضياتي الفرنسي لوبيغ. طبق لوبيغ نظريته لقياس أجزاء من $\mathbb{R}$ وسرعان ما عممت النظرية لتتمكن من قياس أجزاء من مجموعات مجردة جدا.

الفصل 2

تمهيد

تخصص هذا الباب لتقديم بعض النتائج الجبرية والتحليلية العامة التي نحتاج إليها في نظرية القياس والمكاملة.

1.2 حول المجموعات

إننا نرفض أن لدى القارىء خبرة في التعامل مع المجمعات والتطبقات (أو التوابع). ولنذكّر ببعض التعاريف والخواص المتعلقة بها.

1.1.2 مجموعات الأعداد الشهيرة •

١ - مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$.

٢ - مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z} \doteq \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

٣ - مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q} \doteq \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$.

٤ - مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

٥ - مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C} \doteq \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ، $i = \sqrt{-1}$.

2.1.2 العمليات على المجموعات •

1.2.1.2 تقاطع مجموعتين • يُرمز إلى **تقاطع مجموعتين** A وَ B بِـ $A \cap B$ وهي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي في آن واحد إلى A وَ B .

2.2.1.2 اتحاد مجموعتين • يُرمز إلى **اتحاد مجموعتين** A وَ B بِـ $A \cup B$ وهي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A أو B .

3.2.1.2 متممة مجموعة • لتكن X مجموعة وَ A جزء منها. تُدعى **متممة الجزء** A نسبة إلى X مجموعة العناصر التي تنتمي إلى X ولا تنتمي إلى A . يُرمز إلى هذه المجموعة بِـ ${}^{c}_{X}A$ أو بِ ${}^{c}A$ إذا لم يكن هناك مجال للالتباس.

4.2.1.2 الفرق بين مجموعتين • لتكن A وَ B مجموعتين. نشير إلى **الفرق بين المجموعتين** A وَ B بِ $A \setminus B$ وهي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B .

5.2.1.2 **الفرق التناظري بين مجموعتين •** لتكن A وَ B مجموعتين. نشير إلى **الفرق التناظري بين المجموعتين** A وَ B بِـ $A \triangle B$ وهي المجموعة المعطاة بأن $A \triangle B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

6.2.1.2 **الجداء الديكارتي لمجموعتين •** لتكن A وَ B مجموعتين. نشير إلى **الجداء الديكارتي للمجموعتين** A وَ B بِـ $A \times B$ وهي المجموعة المعرفة بأن $A \times B \doteq \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

بعض الخواص الأساسية •

١ - العلاقة $A \times B = \emptyset$ تكافىء [$A = \emptyset$ أو $B = \emptyset$].

٢ - إذا كان $A \times B \neq \emptyset$ كان $A \neq \emptyset$ وَ $B \neq \emptyset$ وعندها العلاقة $A' \times B' \subset A \times B$ تكافىء [$A' \subset A$ وَ $B' \subset B$].

٣ - $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$.

٤ - $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2.2 حول التطبيقات أو التوابع

7.0.2.2 **البيان التابعي •** نقول عن جزء G من الجداء الديكارتي $A \times B$ لمجموعتين A وَ B إنه بيان تابعي إذا كانت صفته أنه من أجل كل a من A يوجد عنصر واحد b من B بحيث $G \ni (a,b)$.

8.0.2.2 **التطبيق أو التابع •** نسمي **تطبيقا** للمجموعة X في المجموعة Y كل ثلاثية (X,Y,G) ، حيث $G \subset X \times Y$ بيان تابعي. ونقول كذلك تابع من X في Y . يُشار إلى التطبق بِـ $f = (X,Y,G)$ أو كذلك $f : X \to Y$ أو $f : X \leftarrow Y$. ليكن x عنصرا من X ، يشار إلى العنصر الوحيد y من Y بحيث $G \ni (x,y)$ بِـ $y = f(x)$ ويُدعى **صورة** x وفق f ؛ ونكتب كذلك $x \mapsto f(x)$.

9.0.2.2 **التطبقات المتباينة، الغامرة، التقابلية •** ليكن $f : X \to Y$ تطبيقا. نقول إنه **متباين** إذا كان ينتج من $f(x) = f(x')$ أن $x = x'$ من أجل كل x وَ x' من X . ونقول إن f **غامر** إذا وجد من أجل كل y من Y عنصر x من X بحيث $y = f(x)$. ونقول إن f **متقابل** إذا كان متباينا وغامرا في نفس الوقت.

10.0.2.2 **الصورة المباشرة والصورة العكسية •** ليكن $f : X \to Y$ تطبيقا وليكن A جزء من X وَ B جزء من Y . يُشار إلى **الصورة المباشرة** للجزء A وفق f بأن $f(A)$ وهي المجوعة $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$. ويُشار إلى **الصورة العكسية** للجزء B وفق f بأن $f^{-1}(B)$ وهي المجوعة $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

3.2 الجماعات

لتكن I وَ X مجموعتين. يُقال أحيانا عن تبيق لِـ I في X بأنه **جماعة من عناصر** X **مجموعة أدلتها** ونكتب $i \mapsto x_i$ أو $\{x_i\}_{i \in I}$ أو فتط $\{x_i\}$ إذا لم يكن هناك مجال للالتباس. إذا كانت مجموعة أدلة هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ فنقول عن الجماعة إنها **متتالية.** تشكل المتتاليات أشهر الأمثلة للجماعات ويشار عندها للّدليل بِـ n ، m ، ...

11.0.3.2 **تقاطع واتحاد جماعة** • لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جماعة مجموعات. يشار إلى **تقاطع** هذه **الجماعة** بـ $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ وهي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي في آن واحد إلى A_i مهما كان $i \in I$. ويشار إلى **اتحاد** هذه **الجماعة** بـ $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ وهي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعات A_{i_0} ، $i_0 \in I$.

12.0.3.2 **الخواص الأساسية** • لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ وَ $\{B_j\}_{j\in J}$ جماعتي مجوعات. يمكن للقارىء أن يتأكد من أنه لدينا:

$$ {}^c\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}({}^cA_i). \tag{1.2}$$

$$ \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j). \tag{2.2}$$

$$ \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\cup\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j). \tag{3.2}$$

وإذا كان f تطبيقا لمجموعة X في مجموعة Y وكانت $\{A_i\}_{i\in I}$ جماعة من أجزاء X وَ $\{B_j\}_{j\in J}$ جماعة من أجزاء Y فإن:

$$ f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i). \tag{4.2}$$

$$ f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j). \tag{5.2}$$

$$ f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j). \tag{6.2}$$

1.3.2 **التغطية والتجزئة** • لتكن X مجموعة وَ A جزء منها. نسمى **تغطية** للجزء A كل جماعة $\{T_i\}_{i\in I}$ من أجزاء X بحيث $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} T_i$.

ونسمى **تجزئة** للمجموعة X كل جماعة $\{T_i\}_{i\in I}$ من أجزاء X غير متقاطعة مثنى مثنى وتغطي X ، بمعنى أن $T_i\cap T_{i'}=\emptyset$ مهما كان i وَ i' من I مع $i\neq i'$ وَ $X=\bigcup\limits_{i\in I} T_i$.

4.2 القابلية للعد

لنعذكر القارىء ببعض التعاريف وكذا بعض القضايا، بدون برهان.

1.4.2 **تعريف** • نقول إن للمجوعتين X وَ Y **نفس القوة** إذا وجد تقابل بين X وَ Y . ونقول عن مجموعة X إنها **قابلة للعد** إذا كانت لها نفس القوة مع مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. ونقول عن مجموعة إنها **عدودة** إذا كانت متهية أو قابلة للعد.

1.1.4.2 **قضية** • **كل جزء من $\mathbb{N}$ عدود.**

2.1.4.2 **قضية** • **لتكن X مجموعة عدودة وليكن f تطبيقا غامرا لِـ X في مجموعة Y . عندها تكون Y عدودة.**

3.1.4.2 **قضية** • **المجموعة $\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ قابلة للعد.**

الاثبات يمكنك أن تتأكد من أن التطبيق f للجداء $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ في $\mathbb{N}$ المعرف بأن $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y$ ، $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ تقابل.

4.1.4.2 **قضية • حقل الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ قابل للعد. لكن حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ غير قابل للعد.**

5.1.4.2 **تعريف •** نقول عن جماعة $\{x_i\}_{i\in I}$ إنها قابلة للعد (عدودة على التوالي) إذا كانت مجموعة الأدلة I قابلة للعد (عدودة على التوالي).

6.1.4.2 **قضية • هو عدود كل اتحاد عدود لجماعة عدودة.**

تمارين

1.2 أثبت أن الاتحاد والتقاطع توزيعيان نسبة إلى التقاطع والاتحاد على الترتيب. وبعبار أدق، من أجل كل مجموعة أدلة I ، أثبت أن:

$$B \cap \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \quad \text{وَ} \quad C \cup \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(C \cup A_i).$$

بين كذلك صحة علاقتي دي مرغان:

$$B \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i) \quad \text{وَ} \quad C \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(C \setminus A_i).$$

2.2 لتكن X وَ Y مجموعتين وَ f تطبيقا من X في Y . لتكن I مجموعة أدلة وَ $\{A_i\}_{i\in I}$ جماعة من أجزاء X وَ $\{B_i\}_{i\in I}$ جماعة من أجزاء Y . أثبت أن:

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{وَ} \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{وَ} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) ،$$

ومن أجل $A \subset X$ وَ $B \subset Y$ ، أن:

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \quad \text{وَ} \quad f^{-1}(f(A)) \supset A$$

$$f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A) \quad \text{وَ} \quad f^{-1}(Y \setminus B)) = X \setminus f^{-1}(B).$$

3.2 لتكن X وَ Y مجموعتين وَ f تطبيقا من X في Y . أثبت أن:

١) $A' = f^{-1}(f(A)) = A$ مهما كان $A \subset X$ $\iff$ f تطبيق متباين.

٢) $B' = f(f^{-1}(B)) = B$ مهما كان $B \subset Y$ $\iff$ f تطبيق غامر.

أعط أمثلة حيث $A' \neq A$ وَ $B' \neq B$.

٣) $f(J \cap K) = f(J) \cap f(K)$ مهما كان J ، $K \subset X$ $\iff$ f تطبيق متباين.

5.2 حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

إننا نفرض، في كل ما يلي، أن حقل الأعدد الحقيقية $\mathbb{R}$ مرتب بالترتيب الكلي المألوف $\leq$.

1.5.2 الكوابر والصواغر والحدين الأعلى والأدنى •

1.1.5.2 **الكوابر •** نقول عن عدد حقيقي a إنه كابر لجزء E من $\mathbb{R}$ إذا كان $x \leq a$ مهما كان x من E.

إذا كان الجزء E يتمتع بكابر على الأقل قلنا إنه مكبور.

2.1.5.2 **الحد الأعلى •** نقول عن عنصر a من $\mathbb{R}$ إنه الحد الأعلى للجزء E من $\mathbb{R}$ إذا كان a هو أصغر كوابر E ، بمعنى أن a كابر لِـ E وإذا كان b كابرا آخر للجزء E كان $a \leq b$. يُشار إلى الحد الأعلى للجزء E بِـ $\sup E$.

3.1.5.2 **الصواغر •** نقول عن عدد حقيقي a إنه صاغر لجزء E من $\mathbb{R}$ إذا كان $x \leq a$ مهما كان x من E.

إذا كان الجزء E يتمتع بصابر على الأقل قلنا إنه مصغور.

4.1.5.2 **الحد الأدنى •** نقول عن عنصر a من $\mathbb{R}$ إنه الحد الأدنى للجزء E من $\mathbb{R}$ إذا كان a هو أكبر صواغر E ، بمعنى أن a صاغر لِـ E وإذا كان b صاغرا آخر للجزء E كان $b \leq a$. يُشار إلى الحد الأدنى للجزء E بِـ $\inf E$.

5.1.5.2 **مبرهنة [الخاصية المميزة للحد الأعلى] • ليكن E جزءا من $\mathbb{R}$. حتى يكون العدد الحقيقي a هو الحد الأعلى للجزء E يلزم ويكفي أن يكون:**

١) **a كابرا لِـ E ، ثمّ**
٢) **مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد x من E بحيث** $a - \varepsilon < x \leq a$.

6.1.5.2 **مبرهنة [الخاصية المميزة للحد الأدنى] • ليكن E جزءا من $\mathbb{R}$. حتى يكون العدد الحقيقي a هو الحد الأدنى للجزء E يلزم ويكفي أن يكون:**

١) **a صاغرا لِـ E ، ثمّ**
٢) **مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد x من E بحيث** $a \leq x < a + \varepsilon$.

2.5.2 بديهية الحد الأعلى • يتمتع كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومكبور بحد أعلى.

وباستخدام هذه البديهية نستطيع أن نبرهن على أن **كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومصغور يتمتع بحد أدنى**. واعتمادا على البديهية نفسها يمكن البرهان على مبدأ أرخميدس وكثافة الأعدد الناطقة (الصماء على التوالي) في $\mathbb{R}$.

1.2.5.2 **مبرهنة [مبدأ أرخميدس] • من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي y يوجد عدد صحيح n بحيث** $(n-1)x \leq y < nx$.

2.2.5.2 **مبرهنة [كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$] . مهما كان** a **وَ** b **من** $\mathbb{R}$ **مع** $a < b$ **، يحتوي المجال** $]a, b[$ **على عدد ناطق.**

لدينا نفس النتيجة من أجل الأعداد الصماء، أي أن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **كثيف في** $\mathbb{R}$.

تمارين

4.2 برهن الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى والأعلى.

5.2 ليكن E جزءا محدودا من $\mathbb{R}$. برهن على أن $\sup(-E) = -\inf E$ وأن $\inf(-E) = -\sup E$ حيث $-E = \{t \in \mathbb{R} \mid t = -x,\ x \in E\}$.

6.2 برهن مبدأ أرخميدس.

7.2 برهن كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$. برهن كذلك كثافة $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

8.2 ليكن A وَ B جزئين من $\mathbb{R}$ محدودين. بين أن:

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ وأن $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

عمم هاتين النتيجتين إلى عدد منته من أجزاء $\mathbb{R}$ المحدودة.

9.2 ليكن A وَ B جزئين غير خاليين من $\mathbb{R}$. نسمى **الجموع الحسابي** $A+B$ للمجموعتين A وَ B المجموعة $A + B = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$.
بين أنه إذا كان A وَ B مكبورين تكون $A+B$ مكبورة ولدينا:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

عمم هاتين النتيجتين إلى عدد منته من أجزاء $\mathbb{R}$ المحدودة.
هل لدينا نتائج مماثلة في حالة الحد الدنى؟

10.2 ليكن A وَ B جزئين غير خاليين من $\mathbb{R}$. نسمى **الجداء الحسابي** $A \cdot B$ للمجموعتين A وَ B المجموعة $A \cdot B = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x \cdot y,\ x \in A,\ y \in B\}$.
بين أنه إذا كان A وَ B مكبورين وكانت عناصرهما موجبة فإن $A \cdot B$ مكبورة ولدينا:

$$\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot \sup B.$$

عمم هاتين النتيجتين إلى عدد منته من أجزاء $\mathbb{R}$ المحدودة.
هل لدينا نتائج مماثلة في حالة الحد الدنى؟

11.2 ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$ وَ n عددا طبيعا غير معدوم. نسمى **القوة الحسابية النونية** لِـ A المجموعة $A^n = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x^n,\ x \in A\}$.
هل لدينا $A^2 = A \cdot A$ ؟ (أنظر تعريف $A \cdot A$ في التمرين السابق . بين أنه إذا كان A مكبورا وكانت عناصره موجبة فإن A^n مكبور ولدينا $\sup(A^n) = (\sup A)^n$.
هل لدينا نتائج مماثلة في حالة الحد الدنى؟

12.2 ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$ وليكن f وَ g تطبيقين لِـ A في $\mathbb{R}$ محدودين. بين أنـ(ـه):

١) $\sup\limits_{x\in A}\{f(x) + g(x)\} \leq \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

٢) $\inf\limits_{x\in A} f(x) + \inf\limits_{x\in A} g(x) \leq \inf\limits_{x\in A}\{f(x) + g(x)\}$.

أعط مثالا يبين أنه لا يمكن بصفة عامة تعويض $\leq$ بِـ $=$.

٣) إذا كان $g(x) = \lambda$ مهما كان $x \in A$ فإن:

$\sup\limits_{x\in A}\{f(x) + \lambda\} = \sup\limits_{x\in A} f(x) + \lambda$ وأن $\inf\limits_{x\in A}\{f(x) + \lambda\} = \inf\limits_{x\in A} f(x) + \lambda$.

٤) $\sup_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leq \sup_{x\in A}\{f(x)+g(x)\}$.

أعط مثالا يبين أنه لا يمكن بصفة عامة تعويض $\leq$ بـ $=$.

13.2 ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$ وليكن f وَ g تطبيقين لـ A في $\mathbb{R}$ محدودين وموجبين. بين أنـ(ـه):

١) $\sup_{x\in A}\{f(x)\cdot g(x)\} \leq [\sup_{x\in A} f(x)]\cdot \sup_{x\in A} g(x)$

وأن $[\inf_{x\in A}\{f(x)]\cdot \inf_{x\in A} g(x) \leq \inf_{x\in A}[f(x)\cdot g(x)]$.

أعط مثالين يبينان أن المساوتين غير ممكنتين بصفة عامة.

٢) إذا كان $g(x)=\lambda>0$ مهما كان $x \ni A$ فإن:

$$\sup_{x\in A}\{\lambda f(x)\} = \lambda \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{وَ} \quad \inf_{x\in A}\{\lambda f(x)\} = \lambda \inf_{x\in A} f(x) .$$

٣) ماذا يحدث لهاتين العلاقتين في حالة $\lambda<0$ ؟

14.2 ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$ وليكن f تطبيقا لـ A في $\mathbb{R}$ محدودا. لفرض أن: $f(x)>0$ مهما كان x من A . أثبت أن:

$$\sup_{x\in A}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} = \frac{1}{\inf_{x\in A} f(x)}.$$

6.2 ترميز واصطلاحات

نستخدم في كلي ما يلي الرمز $\overline{\mathbb{R}}$ للاشارة إلى حقل الاعداد الحقيقية المكتمل، أي إلى المجموعة المحصل عليها بإضافة العنصرين $+\infty$ وَ $-\infty$ إلى حقل الاعداد الحقيقية حيث لدينا $-\infty < x < +\infty$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ ونزوده بالجمع والضرب العاديين ونصطلح على أنّ

$$\begin{array}{rcl} (\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty) & = & (\pm\infty)+x=(\pm\infty), \quad \forall x\in\mathbb{R}; \\ (\pm\infty)\times(\pm\infty)=+\infty, & & (\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty; \\ x\times(\pm\infty)=(\pm\infty)\times x & = & \pm\infty, \quad x>0 \\ & = & 0, \quad x=0 \\ & = & \mp\infty, \quad x<0. \end{array}$$

مع عدم إعطاء معنى لِـ $(\pm\infty)+(\mp\infty)$.

7.2 النهايات السفلى والعليا

في حالة الأعداد

1.7.2 **تعريف •** لِتكن $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية من $\mathbb{R}$. نعرف **النهاية السفلى** لهذه المتتالية بأن

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \doteq \sup_{n\geq 0}\{\inf_{k\geq n} x_k\}$$

ونعرف **النهاية العليا** للمتتالية ذاتها بأن

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \doteq \inf_{n\geq 0}\{\sup_{k\geq n} x_k\}.$$

في حالة المجموعات

2.7.2 **تعريف •** لتكن X مجموعة وَ $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية من أجزائها. نعرف **النهاية السفلى والنهاية العليا** لهذه المتتالية بأن

$$\liminf_n A_n \doteq \bigcup_{n\geq 0}\Big\{\bigcap_{k\geq n} A_k\Big\} \doteq \sup_{n\geq 0}\Big\{\inf_{k\geq n} A_k\Big\}$$

وَ

$$\limsup_n A_n \doteq \bigcap_{n\geq 0}\Big\{\bigcup_{k\geq n} A_k\Big\} \doteq \inf_{n\geq 0}\Big\{\sup_{k\geq n} A_k\Big\}.$$

يجب بطبيعة الحال أخذ الحدين السفلي والعلوي نسبة إلى علاقة الترتيب الجزئي المتمثلة في الاحتواء $\subset$ بين أجزاء X .

نقول عن متتالية أجزاء من X إنها **متقاربة** إذا كانتا نهايتاها السفلى والعليا متساويتين ونشير إلى قيمتهما المشتركة بِـ $\lim_{\infty} A_n$.

تأكد من أن كل متتالية رتيبة من أجزاء X متقاربة.

في حالة التوابع ليكن (X,d) فضاء متريا وَ x_0 عنصرا من X وَ $\rho > 0$ عددا حقيقيا. نشير بِـ $B^\star(x_0,\rho)$ إلى **الجلة المخروزة** ذات المركز x_0 ونصف القطر ρ ، أي أن

$$B^\star(x_0,\rho) = \{x \in X \mid 0 < d(x_0,x) < \rho\}.$$

ليكن f تطبيقا لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ ولتكن a نقطة تراكم للجزء D . لنضع

$$M(a,\rho) = \sup\{f(x) \mid x \in B^\star(x_0,\rho) \cap D\}$$

وَ

$$m(a,\rho) = \inf\{f(x) \mid x \in B^\star(x_0,\rho) \cap D\}.$$

تأكد من أن $m(a,\rho)$ متناقصة وان $M(a,\rho)$ متزايدة نسبة إلى ρ .

3.7.2 **تعريف** ← نعرف **النهاية السفلى** للتّابع f عند النقطة a بأن
$$\underline{\lim}_a f \doteq \lim_{\rho \downarrow 0} m(a,\rho) = \sup_{\rho > 0} m(a,\rho)$$

ونعرف النهاية العليا للتّابع f عند النقطة a بان

$$\overline{\lim}_a f \doteq \lim_{\rho \downarrow 0} M(a,\rho) = \inf_{\rho > 0} M(a,\rho).$$

4.7.2 **تعريف** ← ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f تطبيقا لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ $a \in D$. نقول إن f **نصف مستمر سفليا** عند النقطة a إذا كانت
$$\underline{\lim}_a f \geq f(a)$$

ونقول إنه **نصف مستمر علويا** عند النقطة a إذا كان
$$\overline{\lim}_a f \leq f(a).$$

وإذا كان f نصف مستمرا سفليا (علويا على التوالي) عند كل نقطة من D قلنا إنه نصف مستمر سفليا (علويا على التوالي) على D .

تأكد من أن الدالة المميزة للاعداد الناطقة المحصورة بين 0 وَ 1 نصف مستمرة سفليا عند كل نقطة ناطقة ومستمرة علويا عند كل نقطة صماء.

5.7.2 **تعريف** ← ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f تطبيقا لجزء D من X في $\mathbb{R}$ وَ $a \in D$. نقول إن f **مستمر** عند النقطة a إذا كان، في الوقت نفسه، نصف مستمرا سفليا ونصف مستمرا علويا عند النقطة a.

6.7.2 **تعريف** ← ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f تطبيقا لجزء D من X في $\mathbb{R}$. نقول إن f **مستمر بانتظام** على D إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث يكون لدينا

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ مهما كان x وَ y من D مع $\rho \geq d(x,y)$.

7.7.2 **مبرهنة [هَين]** ← كل تابع حقيقي f مستمر على جزء متراص من فضاء متري (X,d) مستمر بانتظام على هذا الجزء.

8.7.2 **تعريف** • لتكن $\{f_i\}_{i\in I}$ جماعة توابع حقيقية معرفة على جزء D من فضاء متري. نسمي **الغلاف السفلي**
(**العلوي** على التوالي) لهذه الجماعة التابع $\inf\limits_{i\in I} f_i$ ($\sup\limits_{i\in I} f_i$ على التوالي) المعرف بأن
$\left(\inf\limits_{i\in I} f_i\right)(x) = \inf\limits_{i\in I} f(x)$ $\left(\left(\sup\limits_{i\in I} f_i\right)(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)\right.$ على التوالي $\left.\right)$، مهما كان $x \in D$.

9.7.2 التوابع اللّيبشيتزية والتوابع الهولدارية •

1.9.7.2 **تعريف** • نقول عن تابع حقيقي g معرف على جزء D من $\mathbb{R}$ إنه **يحقق شرط ليبشيتز** (أو إنه **ليبشيتزي**) إذا وجد ثابت $C > 0$ (يدعى بثابت ليبشيتز) يحقق

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in D.$$

وإذا وجد ثابت $C > 0$ وعدد $\alpha \in]0, 1[$ بحيث

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in D$$

فنقول إن g يحقق **شرط هولدار** (أو إنه **هولداري**) على D بثابت يساوي C وبأس يساوي α.

تأكد من أن التابع $x \mapsto \operatorname{Arctg} x$ يحقق شرط ليبشيتز على $\mathbb{R}$ وان التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ يحقق شرط هولدار على $\mathbb{R}_+$ بأس يساوي $\frac{1}{2}$.

10.7.2 تذبذبات وتقلّبات التوابع •

1.10.7.2 **تعريف** • f تابع حقيقي معرف على جزء D من $\mathbb{R}$. إذا كان f محدودا على جزء A من ميدان تعريفه فإن العدد الموجب $\Omega_A f = \sup\limits_A f - \inf\limits_A f$ يدعى **بتذبذب** التابع f على A.

لتكن c نقطة من D ولنفرض أن f محدود على $A_{\rho_0} \doteq D \cap I(c, \rho_0)$ ، حيث $I(c, \rho_0)$ هو المجال المفتوح الذي مركزه c ونصف قطره ρ_0 . نسمي **تقلّب** f عند النقطة c العدد $\omega_c f$ المعرف بأن $\omega_c f \doteq \inf\limits_{0<\rho\leq\rho_0} \Omega_{A_\rho} f$.

تأكد من أن $\omega_c f = \lim\limits_{\rho\downarrow 0} \Omega_{A_\rho} f$. وكذلك من أن $|\lim_{c+} f - \lim_{c-} f| \leq \omega_c f$.

8.2 الاستمرار المتساوي

1.8.2 **تعريف** • نقول عن متتالية توابع $\{f_n\}$ معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$ إنها **متساوية الاستمرار** على D إذا أمكن رفق كل عدد $\varepsilon > 0$ بعدد $\delta > 0$ صيفته أن:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in D, \ |x - y| \leq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

9.2 التقاربان البسيط والمنتظم

1.9.2 **تعريف** • نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة X إنها **متقاربة ببساطة** نحو تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $x \in X$ ومهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

2.9.2 **تعريف** • نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة X إنها **متقاربة بانتظام** نحو تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

تمارين

15.2 ا) تأكد من أن النهايتين السفلى والعليا موجودتان في $\mathbb{R}$ من أجل كل متتالية حقيقية $\{x_n\}$.

ب) أحسب النهايتين السفلى والعليا للمتتاليات المعطاة بحدها العام :

$$1.\quad a_n = (-1)^n, \qquad 2.\quad b_n = \left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad 3.\quad c_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$
$$4.\quad d_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad 5.\quad e_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

16.2 $\{x_n\}$ وَ $\{y_n\}$ متتاليتان حقيقيتان. أثبت أنه إذا كان $x_n \le y_n$ ، مهما كان n ، كانت

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

17.2 أثبت، من أجل كل متتاليتين حقيقيتين محدودتين $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ ، أن

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n &\le \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \\
&\le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \\
&\le \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

أعط أمثلة تبين أنه يمكن للمتباينات السابقة أن تكون تامة.

18.2 $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ متتاليتان حقيقيتان. بيّن، بفرض $\{a_n\}$ متقاربة، أن

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

19.2 بين أن $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}\{-a_n\}$.

20.2 $\{a_n\}$ وَ $\{b_n\}$ متتاليتان عناصرهما من $\mathbb{R}_+$. بين، مفترضا أن $\overline{\lim}\, x_n \neq 0$ أو $\overline{\lim}\, y_n \neq \infty$ ، أن $\overline{\lim}\, x_n y_n \le \left(\overline{\lim}\, x_n\right) \overline{\lim}\, y_n$.

21.2 أثبت أنه حتى تتقارب المتتالية الحقيقية $\{x_n\}$ نحو ℓ يلزم ويكفي أن يكون لدينا $\limsup x_n = \liminf x_n = \ell$.

22.2 لتكن $\{a_n\}$ متتالية حقيقية وَ $p : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ تطبيقا متزايدا تماما. بين أن

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} a_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} a_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

استنستج أنه إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة فإن كل متتالية مستخرجة منها متقاربة وتتقارب نحو نفس النهاية.

23.2 $\{A_n\}$ متتالية من أجزاء مجموعة X. تأكد من أن نهايتها العليا $\overline{\lim\limits_{\infty}} A_n$ هي المجموعة المكونة من عناصر X التي تنتمي إلى مالانهاية من الاجزاء A_n وأن نهايتها السفلى $\underline{\lim\limits_{\infty}} A_n$ هي المجموعة المكوّنة من عناصر X التي تنتمي إلى كل الأجزاء A_n عدا عدد منته منها.

24.2 لتكن X مجموعة وَ A وَ B جزئين منها. عين النهايتين السفلى والعليا للمتتالية $\{A_n\}$ المعرفة بـ $A_{2n} = A$ وَ $A_{2n+1} = B$ ، $n \in \mathbb{N}$.

25.2 عين النهايتين السفلى والعليا لِتتاليات أجزاء $\mathbb{R}$ التالية:

ا) $A_{2n} = [0,1]$ وَ $A_{2n+1} = [1,2]$ ، $n \in \mathbb{N}$. ب) $B_n = [0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}]$.

جـ) $A_{2n} = [-1, 2 + \frac{1}{n}[$ وَ $A_{2n+1} =]-2 - \frac{1}{n}, 1]$ ، $n \in \mathbb{N}$.

د) A_n هو المجال المغلق الذي طرفاه 0 وَ a_n حيث $\{a_n\}$ متتالية حقيقية متقاربة نحو نهاية $a > 0$. ناقش الحالات الممكنة.

26.2 لتكن $\{A_n\}$ متتالية من أجزاء مجمواعة X. أثبت أن:

ا) $\underline{\lim\limits_{\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{\infty}} A_n$.

ب) $\underline{\lim\limits_{\infty}}\, {}^cA_n = {}^c(\overline{\lim\limits_{\infty}} A_n)$ ، حيث ${}^cA_n$ ، مثلا، يشير إلى متممة A_n نسبة إلى X.

جـ) $\overline{\lim\limits_{\infty}}\, {}^cA_n = {}^c(\underline{\lim\limits_{\infty}} A_n)$.

27.2 لتكن X مجموعة وَ $\{E_n\}$ وَ $\{F_n\}$ متتاليتين من أجزائها. أثبت أن

$$\begin{aligned}(\underline{\lim} E_n) \cup \underline{\lim} F_n \subset \underline{\lim}(E_n \cup F_n) &\subset (\underline{\lim} E_n) \cup \overline{\lim} F_n \\ &\subset \overline{\lim}(E_n \cup F_n) = \big(\overline{\lim} E_n\big) \cup \overline{\lim} F_n.\end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned}(\underline{\lim} E_n) \cap \underline{\lim} F_n = \underline{\lim}(E_n \cap F_n) &\subset (\underline{\lim} E_n) \cap \overline{\lim} F_n \\ &\subset \overline{\lim}(E_n \cap F_n) \subset \big(\overline{\lim} E_n\big) \cap \overline{\lim} F_n.\end{aligned}$$

استنتج أنه إذا كانت $\{E_n\}$ متقاربة نحو E وكانت $\{F_n\}$ متقاربة نحو F كانت $\{E_n \cap F_n\}$ متقاربة نحو $E \cap F$ وكانت $\{E_n \cup F_n\}$ متقاربة نحو $E \cup F$.

28.2 لتكن X مجموعة و B جزءا منها وَ $\{A_n\}$ متتالية من أجزائها. بين أن

ا) $B \setminus \limsup\limits_n A_n = \liminf\limits_n (B \setminus A_n)$ ؛

ب) $B \setminus \liminf\limits_n A_n = \limsup\limits_n (B \setminus A_n)$.

جـ) أثبت أن $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \,\Delta\, A_{n+1}) = \Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap {}^c\Big[\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big]$.

حيث $A_n \Delta A_{n+1} = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_n)$ الذي يدعى **بالفرق التناظري** بين المجموعتين المعتبرتين. استنتج أن

$$\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n = \limsup_n \,(A_n \Delta A_{n+1}).$$

29.2 لتكن $\{A_n\}$ متتالية عناصرها أجزاء من مجموعة X وَ $p : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ تطبيقا متزايدا تماما. بين أن

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \le \liminf_{n\to\infty} A_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} A_{p(n)} \le \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

استنستج أنه إذا كانت المتتالية المجموعاتية $\{A_n\}$ متقاربة فإن كل متتالية مستخرجة منها متقاربة وتتقارب نحو نفس النهاية.

30.2 لتكن Ψ الدالة المميزة للاعداد الناطقة الموجودة بين 0 وَ 1 ؛ أي أن $\Psi(x) = 1$ إذا كان $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ وَ $\Psi(x) = 0$ إذا كان $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$. أوجد النهايتين السفلى والعليا للتابع Ψ عند نقطة $a \in [0,1]$.

نفس السؤال، عند النقطة $a = 0$ ، بالنسبة إلى التابع f المعرف بان $f(x) = \frac{1}{x}$ إذا كان $x > 0$ وَ $f(x) = 0$ إذا كان $x \le 0$.

نفس السؤال كذلك، عند النقطة $a \in \mathbb{R}$ ، بالنسبة إلى التابع g المعرف بان $g(x) = \frac{1}{q}$ إذا كان $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ في شكله المختزل مع $q > 0$ وَ 0 إذا كان $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

31.2 ليكن (X,d) فضاء متريا وَ f وَ g تطبيقين لجزء D من X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ a نقطة تراكم لهذا الجزء. أثبت

ا) أنه إذا كان f محدودا فإن $\overline{\lim}_a f$ وَ $\underline{\lim}_a f$ عددان متهيان .

ب) أن $\underline{\lim}_a f \le \overline{\lim}_a f$.

أعط مثالا حيث تكون هذه المتباينة تامة.

ج) أنه إذا كان $f \le g$ على D كان

$$\overline{\lim_a} f \le \overline{\lim_a} g, \qquad \underline{\lim_a} f \le \underline{\lim_a} g.$$

د) أن $\overline{\lim}_a f = -\underline{\lim}_a(-f)$.

هـ) أن

$$\underline{\lim_a} f + \underline{\lim_a} g \le \underline{\lim_a}(f+g) \le \underline{\lim_a} f + \overline{\lim_a} g \le \overline{\lim_a} f + \overline{\lim_a} g \le \overline{\lim_a}(f+g).$$

و) أنه حتى تكون $\lim_a f$ موجودة يلزم ويكفي أن تكون $\overline{\lim}_a f = \underline{\lim}_a g$.

أثبت كذلك أنه إذا كانت $\lim_a f$ موجودة كانت $\lim_a f = \overline{\lim}_a f = \underline{\lim}_a f$.

32.2 ليكن n عددا طبيعيا وَ f التابع المعرف بان $f(0) = 0$ وَ $f(x) = x^{-n}$ من أجل $x \ne 0$.

أدرس نصف استمرار التابع f السفلي والعلوي عند النقطة $a = 0$.

33.2 f تطبيق لجزء D من فضاء متري X في $\overline{\mathbb{R}}$ وَ $a \in D$.

ا) بين أنه حتى يكن f نصف مستمرا سفليا عند a يلزم وَ يكفي أنه، من أجل كل عدد $\lambda < f(a)$ ، يوجد عدد $\rho > 0$ بحيث $f(B(a,\rho)) > \lambda$ ؛ هنا $f(B(a,\rho))$ هي صورة الجلة المفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ وفق التابع f .

ب) أثبت أنه بعكس كل المتباينات نحصل على قضية صحيحة نسبة إلى نصف الاستمرار العلوي.

ج) أثبت أنه حتى يكون f مستمرا سفليا عند a يلزم ويكفي أن يكون

$$f(a) = \underline{\lim_a} f.$$

د) أثبت أنه حتى يكون f مستمرا علويا عند a يلزم ويكفي أن يكون

$$f(a) = \overline{\lim_a} f.$$

34.2 عين الغلافين السفلي والعلوي للتوابع الحقيقية المعرفة على $\mathbb{R}$ بأن

1. $$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = |x|, \quad f_4(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0,\ f_4(0) = -1.$$

2. $$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = x^3.$$

35.2 f تابع حقيقي معرف على جزء A من $\mathbb{R}$. بين أن تذبذب التابع f على A يعطى بِـ

$$\Omega_A f = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)|.$$

36.2 أثبت أنه حتى يكون التابع الحقيقي f مستمرا عند نقطة c من ميدان تعريفه D يلزم ويكفي أن يكون تقلّبه عند هذه النقطة معدوما.

37.2 ليكون f تابعا حقيقيا معرفا على مجال $[a,b]$ ولتكن، من أجل كل عدد طبيعي n ، المجموعة $\mathcal{T}_n = \{x \in [a,b] \mid \omega_x f \geq \frac{1}{n}\}$. بين أن المجموعة $\mathcal{T}_n$ مغلقة.

38.2 f تابع حقيقي محدود على $[a,b]$ ولتكن c نقطة داخلية في هذا المجال حيث $0 < \omega_c f$. أثبت أن تذبذب f على أحد المجالين $[a,c]$ أو $[c,b]$ يفوق $\frac{1}{2}\omega_c f$.

39.2 أثبت أن الغلاف العلوي لكل جماعة $\{f_i\}_{i\in I}$ من التوابع الحقيقية النصف مستمرة علويا على فضاء متري أو جزء منه نصف مستمر علويا على ميدان تعريفه وان الغلاف السفلي لجماعة متهية من التوابع الحقيقية النصف مستمرة سفليا مستمر سفليا على ميدان تعريفه.

40.2 أثبت **مبرهنة الانتشار**: إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية توابع متساوية الإستمرار على جزء متراص D من $\mathbb{R}$ وكانت متقاربة ببساطة على جزء كثيف من D فإن هذه المتتالية متقاربة بإنتظام على D.

41.2 أثبت **مبرهنة التراص**: إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية محدودة بإنتظام عناصرها توابع متساوية الإستمرار على جزء متراص D من $\mathbb{R}$ فيمكن إستخراج منها متتالية جزئية $\{f_\nu\}$ متقاربة بانتظام على D.

الفصل 3

تكامل ريمان

1.3 تعريف تكامل ريمان

1.1.3 **تقسيمات مجال** • ليكن $[a,b]$ مجالا مغلقا ومحدودا. نسمي **تقسيما** لِـ $[a,b]$ كل مجموعة متهية من الأعداد الحقيقية

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad \textbf{بحيث} \quad b = x_n > \ldots > x_1 > x_0 = a.$$

ونسمي المجالات $[x_0, x_1]$ ، ... ، $[x_{n-1}, x_n]$ ، المعينة بواسطة التقسيم P ، **بقطع** هذا التقسيم، عدد القطع يساوي n. سنكتب $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ، $i = 1$ ، ... ، n ونسمي العدد الموجب تماما δx_i **بطول القطعة** $[x_{i-1}, x_i]$. نرمز بِـ δP إلى طول أطول قطعة في التقسيم P ، أي أن

$$\delta P = \max\{\delta x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

ونسمي δP **بوسيط** أو **نظيم** التقسيم P. نقول عن التقسيم P' إنه **أدق** من التقسيم P إذا كان $P' \supset P$ ، أي إذا كانت كل نقطة مستخدمة في P مستخدمة كذلك في P'. واضح عندئذ أن $\delta P \geq \delta P'$.

نرمز بِـ $\mathcal{P}_{a,b}$ إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$. إن عناصر $\mathcal{P}_{a,b}$ هي إذن مجموعات متهية من نقاط $[a,b]$ مرتبة تماما وتنطبق نقطة اليسار مع a ونقطة اليمين مع b.

2.1.3 **مجاميع ريمان** • ليكن f تابعا معرفا ومحدودا على $[a,b]$ ولنشير بِـ m وَ M إلى حديه الأدنى والأعلى، على التوالي على $[a,b]$:

$$m = \inf_{[a,b]} f, \qquad M = \sup_{[a,b]} f.$$

واضح أنه إذا كان P تقسيما ما للمجال $[a,b]$ فإن f محدود على كل قطعة $[x_{i-1}, x_i]$ من قطع P. لنرمز عندئذ بِـ $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ وبِـ $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ إلى الحدين الأدنى والأعلى للتّابع f على $[x_{i-1}, x_i]$ ، على التوالي، وهذا من أجل $i = 1$ ، ... ، n. لنشكل المجموعين:

$$\underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta x_i \quad \text{و} \quad \overline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i.$$

يدعى الأول **بمجموع ريمان السفلي** أمّا الثاني فيدعى **بمجموع ريمان العلوي** للتابع f الموافقين للتقسيم P. واضح أن:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(يتغير طبعا العدد n من تقسيم إلى آخر) بضرب المتباينات أعلاه بِـ δx_i وبالجمع نجد:

$$m(b-a) \leq \underline{R}(f,P) \leq \overline{R}(f,P) \leq M(b-a),\ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}. \tag{1.3}$$

3.1.3 **مبرهنة ● ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$ وليكن P وَ P' تقسيمين للمجال $[a,b]$. إذا كان P' أدق من P كان:**

$$\underline{R}(f,P) \leq \underline{R}(f,P') \quad \text{وَ} \quad \overline{R}(f,P') \leq \overline{R}(f,P).$$

الإثبات

ليكن التقسيم $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ولفرض أن التقسيم P' مكون من نقط P ومن نقطة إضافية وحيدة x'. يوجد حتما دليل $j \in \{1, \ldots, n\}$ بحيث $x_{j-1} < x' < x_j$. ليكن m_j ولنرمز بِـ m' وَ m'' إلى الحد الأدنى للتابع f على $[x_{j-1}, x']$ وإلى الحد الأدنى للتابع f على $[x', x_j]$ على التوالي. إنه واضح أن $m_j \leq m'$ وَ $m_j \leq m''$. لنكتب الآن مجموعي ريمان السفلين الموافقين لِـ P وَ P' ، لدينا $\underline{R}(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \delta x_i$ وَ

$$\underline{R}(f,P') = \sum_{i=1}^{j-1} m_i \delta x_i + m'(x' - x_{j-1}) + m''(x_j - x') + \sum_{i=j+1}^{n} m_i \delta x_i$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \underline{R}(f,P') - \underline{R}(f,P) &= m'(x' - x_{j-1}) + m''(x_j - x') - m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= (m' - m_j)(x' - x_{j-1}) + (m'' - m_j)(x_j - x'). \end{aligned}$$

هذا يبين أن $\underline{R}(f,P') - \underline{R}(f,P) \geq 0$ ، أي أن $\underline{R}(f,P') \geq \underline{R}(f,P)$.

ولإثبات أن $\overline{R}(f,P') \leq \overline{R}(f,P)$ نلجأ إلى الأسلوب نفسه (دائما في حالة P' مختلف عن P بنقطة وحيدة): ليكن M_j ولنرمز بِـ M' وَ M'' إلى الحد الأعلى للتابع f على $[x_{j-1}, x']$ وإلى الحد الأعلى للتابع f على $[x', x_j]$ على التوالي. نلاحظ أن $M_j \geq M'$ وَ $M_j \geq M''$ ثمّ نكتب $\overline{R}(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \delta x_i$ وَ

$$\underline{R}(f,P') = \sum_{i=1}^{j-1} M_i \delta x_i + M'(x' - x_{j-1}) + M''(x_j - x') + \sum_{i=j+1}^{n} M_i \delta x_i$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \overline{R}(f,P) - \overline{R}(f,P') &= M_j(x_j - x_{j-1}) - M'(x' - x_{j-1}) - M''(x_j - x') \\ &= (M_j - M')(x' - x_{j-1}) + (M_j - M'')(x_j - x') \geq 0. \end{aligned}$$

هذا يبين أن $\underline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P') \geq 0$ ، أي أن $\underline{R}(f,P') \leq \underline{R}(f,P)$.

لنفرض الآن أن P' يرمز إلى أي تقسيم للمجال $[a,b]$ أدق من P. يمكن عندئذ إنشاء تقسيمات متتابعة P_0 ، P_1 ، ... ، P_k بحيث $P_0 = P$ وَ $P_k = P'$ وبحيث لا يكون كل تقسيم مختلفا عن سابقه إلا بنقطة إضافية وحيدة فقط. ولدينا، إستنادا إلى ما سبق:

$$\underline{R}(f,P) \leq \underline{R}(f,P_1) \leq \cdots \leq \underline{R}(f,P')$$

وَ

$$\overline{R}(f,P) \geq \overline{R}(f,P_1) \geq \cdots \geq \overline{R}(f,P')$$

ومنه المطلوب. هذا يعني أن تعويض تقسيم بتقسيم ما أدق يؤدي إلى تزايد مجموع ريمان السفلي وإلى تناقص مجموع ريمان العلوي.

4.1.3 **مبرهنة ● ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$. عندئذ مهما كان تقسيمان P_1 وَ P_2 للمجال $[a,b]$ ، كان لدينا:**

$$\underline{R}(f,P_1)\le \overline{R}(f,P_2).$$

الإثبات

ليكن P_1 وَ P_2 تقسيمين للمجال $[a,b]$ ولنعتبر التقسيم $P=P_1\cup P_2$. بما أن P أدق في آن واحد من P_1 وَ P_2 فينتج من المبرهنة ٣.١.٣ أن:

$$\underline{R}(f,P_1)\le \underline{R}(f,P) \quad \text{وَ} \quad \overline{R}(f,P)\le \overline{R}(f,P_2).$$

لكن، حسب (1.3) ، لدينا $\underline{R}(f,P)\le \overline{R}(f,P)$. ينتج من كل المتباينات السابقة أن:

$$\underline{R}(f,P_1)\le \overline{R}(f,P_2).$$

5.1.3 **تكاملا ريمان السفلي والعلوي** • ليكن f تابعا محدودا على المجال $[a,b]$ ولنعتبر مجموعة كل الأعداد $\underline{R}(f,P)$ مع $P\in\mathcal{P}_{a,b}$. ينتج من العلاقة (1.3) أن $\underline{R}(f,P)\le M(b-a)$ مهما كان التقسيم P من $\mathcal{P}_{a,b}$ ، أي أن المجموعة $\{\underline{R}(f,P)\mid P\in\mathcal{P}_{a,b}\}$ مكبورة وبالتالي إنها تتمتع بحد أعلى.

ودائما حسب العلاقة (1.3) لدينا $m(b-a)\le \overline{R}(f,P)$ مهما كان التقسيم P من $\mathcal{P}_{a,b}$ ، أي أن المجموعة $\{\overline{R}(f,P)\mid P\in\mathcal{P}_{a,b}\}$ مصغورة وبالتالي إنها تتمتع بحد أدنى. نستطيع إذن إعطاء الـ:

6.1.3 **تعريف** • ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$. نشير إلى تكامل ريمان السفلي للتابع f على المجال $[a,b]$ بـ $\underline{\int_a^b} f$ ونشير إلى تكامل ريمان العلوي للتابع f على المجال $[a,b]$ بـ $\overline{\int_a^b} f$ وهما العددان الحقيقيان المتهيان المعرفان بأن:

$$\underline{\int_a^b} f \doteq \sup_{P\in\mathcal{P}_{a,b}} \underline{R}(f,P) \quad \wedge \quad \overline{\int_a^b} f \doteq \inf_{P\in\mathcal{P}_{a,b}} \overline{R}(f,P).$$

7.1.3 **مثال** • لتكن Ψ الدالة المميزة[1] للأعدد الناطقة المحصورة بين a وَ b ، أي $\Psi(x)=1$ إذا كان x عددا ناطقا ينتمي إلى $[a,b]$ وَ $\Psi(x)=0$ إذا كان أصم ومن نفس المجال. ليكن $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ ولتكن $[x_{i-1},x_i]$ قطعة من قطع هذا التقسيم. بما أن المجال $[x_{i-1},x_i]$ يحتوي على أعداد ناطقة وعلى أعداد صماء فإن $m_i=0$ وَ $M_i=1$ مهما كان $i=1$ ، ... ، n. ومنه:

$$\overline{R}(P,\Psi)=b-a \quad \text{وَ} \quad \underline{R}(P,\Psi)=0.$$

وبما أن P تقسيم كيفي من $\mathcal{P}_{a,b}$ فإن:

$$\underline{\int_a^b}\Psi=0 \quad \wedge \quad \overline{\int_a^b}\Psi=b-a.$$

8.1.3 **مثال** • لنعتبر التابع الثابت f المعرف على $[a,b]$ بأن $f(x)=\lambda$ مهما كان x من $[a,b]$ ، حيث λ عدد حقيقي. من أجل كل تقسيم $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ للمجال $[a,b]$ لدينا $m_i=\lambda$ وَ $M_i=\lambda$ مهما كان $i=1$ ، ... ، n. وبالتالي:

$$\underline{R}(P,f)=\lambda(b-a)=\overline{R}(P,f)$$

ومنه:

$$\underline{\int_a^b} f=\lambda(b-a)=\overline{\int_a^b} f.$$

[1] يسمى التابع Ψ بتابع ديرخلت

يتضح من المثالين السابقين أن تكاملي ريمان السفلي والعلوي لتابع محدود على مجال متراص يمكن أن يكونا متساويين كما يمكن أن يكونا مختلفين. لكن لدينا دائما:

9.1.3 قضية ◄ من أجل كل تابع f محدود على $[a,b]$ لدينا:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{2.3}$$

الإثبات

لكي نتأكد من هذا نلاحظ أنه، من أجل كل تقسيمين P_1 وَ P_2 للمجال $[a,b]$ ، لدينا، وفقا للمبرهنة ٤.١.٣، $\underline{R}(f,P_1) \leq \overline{R}(f,P_2)$. بتثبيت P_2 وجعل P_1 يتغير في $\mathcal{P}_{a,b}$ نرى أن $\overline{R}(f,P_2)$ كابر للمجموعة $\{\underline{R}(f,P_1) \mid P_1 \in \mathcal{P}_{a,b}\}$ وبالتالي:

$$\sup_{P_1\in\mathcal{P}_{a,b}} \underline{R}(f,P_1) = \underline{\int_a^b} f \leq \overline{R}(f,P_2).$$

وبما أن P_2 كيفي من $\mathcal{P}_{a,b}$ فإن المتباينة السابقة تعني أن العدد $\underline{\int_a^b} f$ صاغر للمجموعة $\{\overline{R}(f,P_1) \mid P_1 \in \mathcal{P}_{a,b}\}$ وبالتالي:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \inf_{P_2\in\mathcal{P}_{a,b}} \overline{R}(f,P_2) = \overline{\int_a^b} f.$$

ومنه، مهما كان التابع المحدود f على $[a,b]$:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

نستطيع الآن إعطاء تعريف تكامل ريمان.

10.1.3 تكامل ريمان، تعريف ◄ نقول عن تابع محدود $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ إنه **ريمان كمول** أو **قابل للمكاملة حسب ريمان** على $[a,b]$ إذا كان:

$$\underline{\int_a^b} f \doteq \sup_{P\in\mathcal{P}_{a,b}} \underline{R}(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}_{a,b}} \overline{R}(f,P) \doteq \overline{\int_a^b} f$$

ونسمي القيمة المشتركة للحدين الأسفل والأعلى السابقين بتكامل ريمان للتابع f على $[a,b]$ ونشير إليها تقليديا بـ $\int_a^b f$ أو $\int_a^b f(x)\,dx$.

التابع Ψ الوارد في المثال ٧.١.٣ أعلاه غير ريمان كمول إذ إن $\overline{\int_a^b}\Psi = 1 > 0 = \underline{\int_a^b}\Psi$.

أمّا التابع الثابت على المجال $[a,b]$ المعطى بـ $f(x) = \lambda$ فهو ريمان كامول على هذا المجال إذ إنه لدينا $\overline{\int_a^b} f = \lambda(b-a) = \underline{\int_a^b} f$ ، كما رأينا في المثال أعلاه.

إننا حتى اللّحظة نعرف، فقط، أن التوابع القابلة للمكاملة حسب ريمان هي التوابع الثابتة، ولإثراء مجموعة التوابع القابلة للكاملة حسب ريمان، نقدم حالا شرطا لازما وكافيا للقابلية للمكاملة حسب ريمان:

11.1.3 مبرهنة ◄ حتي يكون التابع المحدود f على المجال $[a,b]$ ريمان كمول على هذا المجال يلزم ويكفي أن يوجد، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، تقسيم P للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \leq \varepsilon.$$

الإثبات

لزوم الشرط. ليكن $\varepsilon > 0$. باستخدام الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى والأعلى نرى أنه يوجد تقسيمان P_1 وَ P_2 للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \le \underline{R}(f,P_1) \quad \wedge \quad \overline{R}(f,P_1) \le \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

لنعتبر التقسيم $P = P_1 \cup P_2$. بما أن P أدق من P_1 ومن P_2 لدينا $\underline{R}(f,P_1) \le \underline{R}(f,P)$ ومنه:

$$\underline{\int_a^b} f - \tfrac{\varepsilon}{2} \le \underline{R}(f,P).$$

ولدينا $\overline{R}(f,P) \le \overline{R}(f,P_1)$ ومنه:

$$\overline{R}(f,P) \le \overline{\int_a^b} f + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

بالجمع وبتحويل الحدود من طرف إلى آخر نحصل على:

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

وبفرض f ريمان كمول لدينا $\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \le \varepsilon$.

كفاية الشرط. لنفرض أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد تقسيم P للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \le \varepsilon.$$

عندئذ، من أجل $\varepsilon > 0$ كيفي مثبت، يوجد تقسيم يحقق المتباينة السابقة. بما أن $\overline{\int_a^b} f \le \overline{R}(f,P)$ وَ $\underline{R}(f,P) \le \underline{\int_a^b} f$ فبالجمع نحصل على:

$$\overline{\int_a^b} f + \underline{R}(f,P) \le \underline{\int_a^b} f + \overline{R}(f,P)$$

ومنه:

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \le \varepsilon.$$

وإذا أخذنا بعين الإعتبار أن ε كيفي نرى أن $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$، أي أن f ريمان كمول على المجال $[a,b]$.
■

تقدم المبرهنة الموالية صفا مهما من التوابع الكمولة حسب ريمان.

12.1.3 مبرهنة ← كل تابع مستمر على مجال متراص $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ ريمان كمول على هذا المجال.

الإثبات

ليكن f تابعا مستمرا على المجال المتراص $[a,b]$. إنه إذن وفقا للمبرهنة معروفة (مبرهنة هاين) مستمر بإنتظام على هذا المجال. وبالتالي، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى وَ γ عدد حقيقي موجب تماما، نأجل تحديده إلى وقت لاحق، يوجد $\alpha > 0$ بحيث:

$$|f(x) - f(x')| \le \gamma\varepsilon, \ \forall x, x' \in [a,b] \ \wedge \ |x - x'| \le \alpha.$$

ليكن عندها P تقسيما للمجال $[a,b]$ وسيطه $\delta P \le \alpha$ ولنعتبر قطعة $[x_{i-1}, x_i]$ من قطع P. بما أن f مستمر على هذه القطعة فإنه يدرك حديه الأدنى m_i والأعلى M_i على هذه القطعة؛ أي أنه يوجد عددان ξ_i وَ η_i من $[x_{i-1}, x_i]$ بحيث $m_i = f(\xi_i)$ وَ $M_i = f(\eta_i)$ وبما أن $|\xi_i - \eta_i| \le \alpha$ فلدينا $M_i - m_i \le \gamma\varepsilon$ وهذا صحيح من أجل كل $i = 1$، ...، n وبالتالي:

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\delta x_i \le \gamma\varepsilon.$$

وإذا أخذنا $\gamma = \frac{1}{b-a}$ فيصبح لدينا:

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \le \varepsilon.$$

وهذا يثبت قابلة f للمكاملة حسب ريمان، وفقا للمبرهنة ١١٠١٠٣ . ■

13.1.3 **ملاحظة** • لكي نثبت أن تابع ما ريمان كمول ولحسب تكامله يمكن ويستحسن استخدام، فقط، جزء معين قابل للعد أو منته من المجموعة $\mathcal{P}_{a,b}$ لجميع تقسيمات $[a,b]$. وحتى نتبين هذا الأمر نأخذ $\mathcal{P}'_{a,b}$ جزءا من $\mathcal{P}_{a,b}$ قابلا للعد أو منتهيا وبحيث:

$$\sup_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \underline{R}(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \overline{R}(f,P).$$

عندئذ، ينتج من خواص الحد الأدنى والحد الأعلى أن ومن المتباينة ٢.٣ أن:

$$\sup_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \underline{R}(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \inf_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \overline{R}(f,P)$$

ومنه $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ ، أي أن التابع f قابل للمكاملة حسب ريمان وأن تكامل ريمان للتابع f على المجال $[a,b]$ هو القيمة المشتركة لـ $\sup_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \underline{R}(f,P)$ وَ $\inf_{P\in\mathcal{P}'_{a,b}} \overline{R}(f,P)$.

14.1.3 **مثال** • التابع f المعرف على $[0,b]$ $(0<b)$ بأن $f(x)=x^2$ مستمر على $[0,b]$. إنه إذن قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال. يمكننا استخدام الملاحظة ١٣.١.٣ للبرهان مباشرة على أن f قابل للمكاملة ولحساب تكامله. لنعتبر إذن التقسيمات من الشكل:

$$P_n = \{0, \tfrac{b}{n}, \tfrac{2b}{n}, \ldots, \tfrac{bn}{n}\} \quad \text{مع} \quad \mathbb{N}^\star \ni n$$

ولنكتب مجاميع ريمان الموافقة لها:

$$\begin{aligned}\underline{R}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\Big((i-1)\frac{b}{n}\Big)^2 &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\\ &= \frac{b^3}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{2n}\Big) \leq \underline{\int_0^b} f.\end{aligned}$$

وبما أن هذه المتباينة صحيحة من أجل كل $\mathbb{N}^\star \ni n$ فلدينا، بجعل n يؤول نحو $+\infty$:

$$\frac{b^3}{3} \leq \underline{\int_0^b} f = \underline{\int_0^b} x^2.$$

ويمكن بالطريقة نفسها الحصول على:

$$\begin{aligned}\overline{R}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\Big(i\frac{b}{n}\Big)^2 &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{1}{2n}\Big) \geq \overline{\int_0^b} f.\end{aligned}$$

ومنه $\frac{b^3}{3} \geq \overline{\int_0^b} x^2$. وبما أن $\underline{\int_0^b} x^2 \leq \overline{\int_0^b} x^2$ فلدينا:

$$\tfrac{b^3}{3} \leq \underline{\int_0^b} x^2 \leq \overline{\int_0^b} x^2 \leq \tfrac{b^3}{3}\,.$$

هذا يثبت أن $\underline{\int_0^b} x^2 = \overline{\int_0^b} x^2 = \frac{b^3}{3}$ ، أي أن التابع $f(x)=x^2$ ريمان كمول على $[0,b]$ وتكامله على هذا المجال يساوي $\frac{b^3}{3}$.

15.1.3 **مثال** • لنعتبر التابع g ، المتقطع عند النقطة $x=1$ ، والمعرف بأن $g(x)=1$ من أجل $1 \geq x \geq 0$ وَ $g(x)=2$ من أجل $2 \geq x > 1$. هدفنا هو البرهان على أن التابع g ريمان كمول على $[0,2]$. لهذا الغرض نأخذ ν عددا حقيقيا مع $1 > \nu > 0$ ونعتبر التقسيم $P_\nu = \{0, 1-\nu, 1+\nu, 2\}$

الذي قطعه هي إذن $I_1 = [0, 1-\nu]$ ، $I_2 = [1-\nu, 1+\nu]$ ، $I_3 = [1+\nu, 2]$. لدينا $m_1 = 1$ ، $M_1 = 1$ ؛ $m_2 = 1$ ، $M_2 = 2$ ؛ $m_3 = 2$ ، $M_3 = 2$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}\underline{R}(g, P_\nu) &= 1(1-\nu) + 1(1+\nu-1+\nu) + 2(2-1-\nu) = 3-\nu,\\ \overline{R}(g, P_\nu) &= (1-\nu) + 2(2\nu) + 2(1-\nu) = 3+\nu.\end{aligned}$$

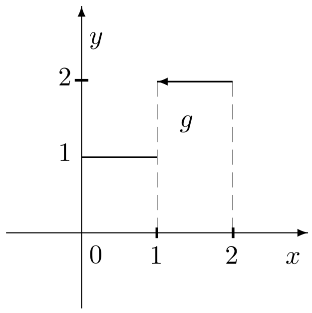
ومنه $\overline{R}(g, P_\nu) - \underline{R}(g, P_\nu) = 2\nu$. ليكن الآن $\varepsilon > 0$. ينتج مما سبق أنه إذا أخذنا ν بحيث $0 < \nu < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ يكون لدينا $\overline{R}(g, P_\nu) - \underline{R}(g, P_\nu) \le \varepsilon$ ، أي أن التابع g قابل للمكاملة حسب ريمان. علاوة على هذا، لدينا:

$$\underline{R}(g, P_\nu) = 3-\nu \le \underline{\int_0^2} g \le \overline{\int_0^2} g \le \overline{R}(g, P_\nu) = 3+\nu.$$

وبما أن ν كيفي من $]0, 1[$ فلدنيا:

$$3 \le \underline{\int_0^2} g \le \overline{\int_0^2} g \le 3.$$

ومنه $\int_0^2 g = 3$. وَ 3 هي القيمة العددية لمجموع مساحتي المستطيلين الظاهرين في الشكل.



16.1.3 **ملاحظة** • ترى ماذا يحدث لو تستبدل قيمة التابع g عند النقطة $x = 1$ بقيمة أخرى، 10 مثلا؟ لنشير إلى التابع الجديد بِـ $\tilde{g}$. عندئذ التابع $\tilde{g}$ يساوي g عند كل نقطة من المجال $[0, 2]$ عدا عند $x = 1$ حيث $\tilde{g}(1) = 10$ باعتبار نفس التقسيم نرى أن كل شيء يبقى كما هو ماعدا M_2 فيصبح يساوي 10 وبالتالي $\underline{R}(\tilde{g}, P_\nu) = 3-\nu$. أمّا $\overline{R}(\tilde{g}, \nu)$ فيعطى بأن:

$$\overline{R}(\tilde{g}, P_\nu) = 1-\nu + 10(2\nu) + 2(1-\nu) = 17\nu.$$

إذن $\overline{R}(\tilde{g}, P_\nu) - \underline{R}(\tilde{g}, P_\nu) = 18\nu$. يكفي إذن، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، أن نأخذ $0 < \nu < \min\{1, \frac{\varepsilon}{18}\}$ لكي يكون لدينا $\overline{R}(\tilde{g}, P_\nu) - \underline{R}(\tilde{g}, P_\nu) \le \varepsilon$. أي أن التابع الجديد $\tilde{g}$ ريمان كمول أيضا على $[0, 2]$ وبما أن:

$$3-\nu \le \underline{\int_0^2} \tilde{g} \le \overline{\int_0^2} \tilde{g} \le 3+17\nu$$

من أجل $\nu \in]0, 1[$ كيفي فإن:

$$3 \le \underline{\int_0^2} \tilde{g} \le \overline{\int_0^2} \tilde{g} \le 3$$

إذن $\underline{\int_0^2} \tilde{g} = \overline{\int_0^2} \tilde{g} = 3.$

أي أن تكامل ريمان لا يتغيّر بتغيُّر قيمة التابع g عند 1 (وبصفة عامة عند أي نقطة من $[0, 2]$ ، أو عند عدد منته من نقط هذا المجال).

17.1.3 **تعريف** • نقول عن تابع حقيقي f إنه **درجي** على المجال $[a,b]$ إذا وجد تقسيم $P=\{x_0,\ldots,x_k\}$ لِـ $[a,b]$ (نقول إنه تقسيم مرفق بِـ f) بحيث يكون التابع f ثابتا على المجالات المفتوحة $]x_{i-1},x_i[$ من أجل $i=1$ ، ... ، k . أمّا القيم التي يأخذها التابع عند النقط x_0 ، ... ، x_k فيمكن أن تكون كيفية تماما؛ إذ إنها غير مهمة بالنسبة إلى تكامل f على $[a,b]$.

18.1.3 **ملاحظة** ← ليكن f تابعا درجيا على $[a,b]$ وليكن $P=\{x_0,\ldots,x_k\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ مرفقا بالتابع f. يمكن عندئذ إثبات النتيجة التالية:

التابع الدرجي f ريمان كمول على $[a,b]$ وإذا أشرنا بـ λ_i إلى قيمة f في المجال $]x_{i-1},x_i[$ فلدينا:

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^k \lambda_i(x_i-x_{i-1})$$

وهو مجموع مساحات المستطيلات المحدودة ببيان f ومحور الفواصل والمستقيمات العمودية المارة بالنقط x_0 ، … ، x_k.

2.3 خطية التكامل

1.2.3 **مبرهنة** ← **إذا كان التابع f ريمان كمولا على المجال $[a,b]$ وكان λ عددا حقيقيا ثابتا فإن λf ريمان كمول على $[a,b]$ ولدينا**

$$\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f.$$

الإثبات

ليكن $\varepsilon>0$. ينتج من كون f ريمان كمولا وجود تقسيم P للمجال $[a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f-\varepsilon\le \underline{R}(f,P)\quad\wedge\quad \overline{R}(f,P)\le\int_a^b f+\varepsilon$$

وينتج، من جهة أخرى، مباشرة من تعريفي المجاميع العليا والسفلى ومن خواص الحد الأعلى والحد الأدنى أنه، إذا كان λ موجبا، لدينا، من أجل كل تقسيم P :

$$\underline{R}(\lambda f,P)=\lambda\underline{R}(f,P)\quad\wedge\quad \overline{R}(\lambda f,P)=\lambda\overline{R}(f,P).$$

ومنه، من أجل التقسيم P أعلاه:

$$\lambda\int_a^b f-\lambda\varepsilon\le\underline{R}(\lambda f,P)\le\underline{\int_a^b}\lambda f\quad\wedge\quad\overline{\int_a^b}\lambda f\le\overline{R}(\lambda f,P)\le\lambda\int_a^b f+\lambda\varepsilon$$

وعليه:

$$\lambda\int_a^b f-\lambda\varepsilon\le\underline{\int_a^b}\lambda f\le\overline{\int_a^b}\lambda f\le\lambda\int_a^b f+\lambda\varepsilon.$$

وبما أن $\varepsilon>0$ كيفي فإن:

$$\lambda\int_a^b f\le\underline{\int_a^b}\lambda f\le\overline{\int_a^b}\lambda f\le\lambda\int_a^b f\tag{3.3}$$

أي أن $\lambda\int_a^b f=\underline{\int_a^b}\lambda f=\overline{\int_a^b}\lambda f=\lambda\int_a^b f$ وهي النتيجة المرجوة في حالة λ موجب. أمّا في حالة λ سالب فلدينا:

$$\underline{R}(\lambda f,P)=\lambda\overline{R}(f,P)\quad\wedge\quad\overline{R}(\lambda f,P)=\lambda\underline{R}(f,P).$$

ومنه $\lambda\int_a^b f+\lambda\varepsilon\le\lambda\overline{R}(f,P)=\underline{R}(\lambda f,P)\le\underline{\int_a^b}\lambda f$ وَ

$$\overline{\int_a^b}\lambda f\le\overline{R}(\lambda f,P)=\underline{R}(f,P)\le\lambda\int_a^b f-\lambda\varepsilon$$

وعليه:

$$\lambda\int_a^b f+\lambda\varepsilon\le\underline{\int_a^b}\lambda f\le\overline{\int_a^b}\lambda f\le\lambda\int_a^b f-\lambda\varepsilon.$$

وبجعل $\varepsilon > 0$ يؤول إلى الصفر نحصل أيضا على العلاقة (3.3) أي النتيجة المراد برهانها في حالة λ سالب.

وأخيرا في حالة $\lambda = 0$ ، ينتج من المثال أن $\int_a^b 0f = \int_a^b 0 = 0 \cdot (b-a) = 0$ ومنه النتيجة.

2.2.3 **مبرهنة • ليكن** f_1 **وَ** f_2 **تابعين ريمان كمولين على المجال** $[a,b]$. **عندئذ يكون التابع** $f_1 + f_2$ **ريمان كمولا على** $[a,b]$ **ولدينا**

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

الإثبات

بما أن f_1 وَ f_2 محدودين فإن $f_1 + f_2$ محدود. إنه إذن يتمتع بتكامل ريمان علوي وتكامل ريمان سفلي ولدينا:

$$\underline{\int_a^b}(f_1 + f_2) \le \overline{\int_a^b}(f_1 + f_2).$$

لنثبت أن التكامل العلوي يساوي تكامل ريمان السفلي. ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن f_1 ريمان كمول على $[a,b]$ فيوجد تقسيم P_1' بحيث

$$\int_a^b f_1 - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{R}(f_1, P_1')$$

ويوجد تقسيم P_1'' بحيث

$$\overline{R}(f_1, P_1'') < \int_a^b f_1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

من أجل التقسيم $P_1 = P_1' \cup P_1''$ لدينا في آن واحد

$$\int_a^b f_1 - \frac{1}{2}\varepsilon \le \underline{R}(f_1, P_1) \quad \wedge \quad \overline{R}(f_1, P_1) \le \int_a^b f_1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

وكذلك ينتج من قابلية f_2 للمكاملة وجود تقسيم P_2 بحيث:

$$\int_a^b f_2 - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{R}(f_2, P_2) \quad \wedge \quad \overline{R}(f_2, P_2) < \int_a^b f_2 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

عندئذ، من أجل التقسيم $P = P_1 \cup P_2$ ، لدينا في نفس الوقت:

$$\int_a^b f_1 - \frac{1}{2}\varepsilon \le \underline{R}(f_1, P) \quad \wedge \quad \overline{R}(f_1, P) \le \int_a^b f_1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

وَ

$$\int_a^b f_2 - \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{R}(f_2, P) \quad \wedge \quad \overline{R}(f_2, P) < \int_a^b f_2 + \frac{1}{2}\varepsilon$$

وبالجمع نجد:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 - \varepsilon \le \underline{R}(f_1, P) + \underline{R}(f_2, P) &\le \overline{R}(f_1, P) + \overline{R}(f_2, P) \\ &\le \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.3}$$

ليكن الآن $I_i \doteq [x_{i-1}, x_i]$ مجالا من التقسيم P ولنورد الرموز:

$$m_i' = \inf_{I_i} f_1, \quad M_i' = \sup_{I_i} f_1, \quad m_i'' = \inf_{I_i} f_2, \quad M_i'' = \sup_{I_i} f_2.$$

بما أن $m_i' + m_i'' \le f_1(x) + f_2(x)$ وَ $f_1(x) + f_2(x) \le M_i' + M_i''$ مهما كان $I_i \ni x$ فلدينا:

$$\underline{R}(f_1, P) + \underline{R}(f_2, P) \le \underline{R}(f_1 + f_2, P) \le \overline{R}(f_1 + f_2, P) \le \overline{R}(f_1, P) + \overline{R}(f_2, P).$$

ينتج من هذا ومن المتباينات (4.3) أن:

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 - \varepsilon \le \underline{R}(f_1 + f_2, P) &\le \underline{\int_a^b}(f_1 + f_2) \\ &\le \overline{\int_a^b}(f_1 + f_2) \\ &\le \overline{R}(f_1 + f_2, P) \le \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \varepsilon\end{aligned}$$

وهذا مهما كان $\varepsilon > 0$. إذن $f_1 + f_2$ ريمان كمول على $[a, b]$ ولدينا:

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

3.2.3 **ملاحظة ●** تعني المبرهنتان ١٫٢٫٣ وَ ٢٫٢٫٣ أن مجموعة التوابع المحدودة والقابلة للمكاملة حسبة ريمان على $[a, b]$ ، المزودة بجمع تابعين وبضرب تابع بعدد حقيقي، تشكل فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي الحقيقي لجميع التوابع الحقيقية المعرفة على $[a, b]$ وأن تكامل ريمان تطبيق خطي لهذا الفضاء الجزئي في $\mathbb{R}$.

3.3 مجال المكاملة

1.3.3 **مبرهنة ● إذا كان التابع f ريمان كمولا على المجال $[a, b]$ وكان c عددا حقيقيا بحيث $b > c > a$ فإن f ريمان كمول على $[a, c]$ وَ $[c, b]$ ولدينا**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

الإثبات

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد تقسيم P للمجال $[a, b]$ بحيث

$$\int_a^b f - \varepsilon < \underline{R}(f, P) \quad \wedge \quad \overline{R}(f, P) < \int_a^b f + \varepsilon. \tag{5.3}$$

ثمّ إننا لا نفقد أي شيء من عمومية البرهان بفرض c نقطة من التقسيم P ذلك لأن (5.3) تبقى صحيحة إذا عوضنا P بتقسيم أدق منه هو $P \cup \{c\}$. لنعتبر بعدئذ المجالين $[a, c]$ وَ $[c, b]$ مع التقسيمين P_1 وَ P_2 المعرفين بأن $P_1 = P \cap [a, c]$ وَ $P_2 = P \cap [c, b]$. ولنشير بِـ $\underline{R}_1(f, P_1)$ وَ $\overline{R}_1(f, P_1)$ إلى مجموعي ريمان الأسفل والأعلى للتابع f الموافقين لِـ P_1 ونفعل كذلك نسبة إلى P_2.

ينتج من طريقة إنشاء P_1 وَ P_2 أن:

$$\underline{R}(f, P) = \underline{R}_1(f, P_1) + \underline{R}_2(f, P_2) \quad \wedge \quad \overline{R}(f, P) = \overline{R}_1(f, P_1) + \overline{R}_2(f, P_2)$$

باستخدام هاتين المساواتين والمتباينتين (5.3) نحصل على:

$$\int_a^b f - \varepsilon \le \underline{R}_1(f, P_1) + \underline{R}_2(f, P_2) \le \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

وَ

$$\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \le \overline{R}_1(f,P_1) + \overline{R}_2(f,P_2) < \int_a^b f + \varepsilon.$$

وبما أن ε كيفي فإن

$$\int_a^b f \le \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \le \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \le \int_a^b f,$$

إذن

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

وبما أن $\underline{\int_a^c} f \le \overline{\int_a^c} f$ ، وكذا $\underline{\int_c^b} f \le \overline{\int_c^b} f$ ، فإن المساواة السابقة تستلزم أن $\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f$ وَ $\underline{\int_c^b} f = \overline{\int_c^b} f$ ، أي أن f ريمان كمول على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ ، ثمّ إن $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

2.3.3 **لازمة • إذا كان التابع f ريمان كمولا على $[a,b]$ فإنه ريمان كمول على أية قطعة** $[a,b] \supset [c,d]$.

وعكس للمبرهنة ١.٣.٣ نعطي النتيجة التالية:

3.3.3 **مبرهنة • ليكن $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ مجالا مغلقا ومحدودا ولتكن c نقطة من المجال المفتوح** $]a,b[$.
إذا كان التابع f ، المعرف على $[a,b]$ ، ريمان كمولا على $[a,c]$ وعلى $[c,b]$ فهو ريمان كمول على $[a,b]$.

الإثبات

ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد تقسيم P_1 للمجال $[a,c]$ وتقسيم P_2 للمجال $[c,b]$ بحيث

$$\int_a^c f - \varepsilon < \underline{R}_1(f,P_1) \quad \wedge \quad \overline{R}_1(f,P_1) < \int_a^c f + \varepsilon \tag{6.3}$$

وَ

$$\int_c^b f - \varepsilon < \underline{R}_2(f,P_2) \quad \wedge \quad \overline{R}_2(f,P_2) < \int_c^b f + \varepsilon. \tag{7.3}$$

يدل الدليل 1 على القطعة $[a,c]$ والدليل 2 على القطعة $[c,b]$. لنعتبر حينئذ التقسيم $P \doteq P_1 \cup P_2$ للمجال $[a,b]$. لدينا (كما هو الحال في البرهان أعلاه):

$$\underline{R}(f,P) = \underline{R}_1(f,P_1) + \underline{R}_2(f,P_2) \quad \wedge \quad \overline{R}(f,P) = \overline{R}_1(f,P_1) + \overline{R}_2(f,P_2)$$

ومنه ومن (6.3) وَ (7.3) :

$$\int_a^c f + \int_c^b f - 2\varepsilon \le \underline{\int_a^b} f \quad \text{وَ} \quad \overline{\int_a^b} f \le \overline{R}(f,P) \le \int_a^c f + \int_c^b f + 2\varepsilon.$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فينتج لدينا

$$\int_a^c f + \int_c^b f \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \int_a^c f + \int_c^b f.$$

ومنه المطلوب.

4.3.3 **ملاحظة** • لقد اعتبرنا في كل ما سبع أن $b > a$ ؛ وقد يكون مفيدا اعتبار الحالة حيث $b < a$ ، فنضع عندها تعريفا:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f = \int_b^a (-f),$$

أي أن العدد $\int_a^b f$ (في حالة $b < a$) هو تعريفا تكامل $(-f)$ على المجال $[b, a]$. إذا كان $a = b$ لدينا $\int_a^b f = -\int_b^a f$ ، أي أن $2\int_a^b f = 0$ ومنه $\int_a^a f = 0$.

5.3.3 إيجابية تكامل ريمان • نقدم فيما يلي بعض خواص تكامل ريمان تتعلق بالقيود التي تخدع لها التوابع قيد المكاملة.

6.3.3 مبرهنة • إذا كان التبع f ريمان كمولا على المجال $[a,b]$ مع $b > a$ وكان $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $0 \leq \int_a^b f$.

الإثبات

بما أن $f \geq 0$ فإن $0 \leq \underline{R}(f,P_0)$ من أجل كل تقسيم P_0 للمجال $[a,b]$ وبالتالي:

$$0 \leq \underline{R}(f,P_0) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} \underline{R}(f,P) = \int_a^b f.$$

7.3.3 لازمة • إذا كان التابع f ريمان كمولا على $[a,b]$ وكان $f \geq 0$ على هذا المجال فإنه لدينا:

$$\int_c^d f \leq \int_a^b f \qquad \text{مهما كان } c \text{ وَ } d \text{ مع } b > d > c > a \text{ .}$$

الإثبات

إعتمادا على المبرهنة ١.٣.٣ يمكننا أن نكتب

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f$$

وبما أن $f \geq 0$ فإن التكاملين $\int_a^c f$ وَ $\int_d^b f$ غير سالبين، وفقا للمبرهنة ٦.٣.٣ ، ومنه المتباينة الواردة في اللّازمة.

8.3.3 لازمة • إذا كان f وَ g تابعين ريمان كمولين على $[a,b]$ وكان $g \leq f$ على هذا المجال فإنه لدينا:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

الإثبات

تنتج هذه اللّازمة مباشرة من تطبيق المبرهنة ٦.٣.٣ على التابع $h = g - f$ ومن خطية تكامل ريمان.

9.3.3 لازمة • لنفرض أن f وَ g تابعان معرفان على $[a,b]$ وبحيث يكون g وَ fg ريمان كمولين على $[a,b]$. لنفرض أيضا أنه يوجد ثابتان m وَ M بحيث $m \leq f \leq M$ وأن $g \geq 0$. عندئذ لدينا:

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

واذا كان f مستمرا على $[a,b]$ فيوجد عدد $c \in [a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g \qquad \text{(دستور المتوسط الأول).}$$

الإثبات

يمكن إثبات هذه المتباينات بتطبيق اللّازمة ٧.٣.٣ على المتباينات $fg \leq Mg$ وَ $mg \leq fg$.

في حالة f مستمر على $[a,b]$ ، يمكننا أخذ m يساوي حضيض f وَ M ذروته على $[a,b]$ ثمّ نطبق مبرهنة القيم الوسطى لإيجاد نقطة تحقق الدستور الوارد في المبرهنة.

4.3 تكامل تابع مركب

1.4.3 مبرهنة ● ليكن f تابعا حقيقيا محدودا على المجال $[a,b]$ بالعددين m وَ M مع $M > m$ وقابلا للمكاملة على $[a,b]$. عندئذ من أجل كل تابع g مستمر على $[m,M]$ يكون التابع $h = g \circ f$ معرفا وريمان كمولا على $[a,b]$.

الإثبات

واضح أن h معرف ومحدود على $[a,b]$ لأن g محدود على $[m,M]$. لنثبت أنه ريمان كمول على $[a,b]$. بما أن g مستمر بانتظام على $[m,M]$ فيوجد عدد $0 < \alpha$ بحيث

$\alpha \geq \varepsilon$ وَ $|g(s)-g(t)| \leq \varepsilon$ مهما كان s ، $t \ni [m,M]$ مع $|s-t| \leq \alpha$.

وبما أن f ريمان كمول على $[a,b]$ فيوجد تقسيم $P = \{x_1,\ldots,x_n\}$ لهذا المجال بحيث

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) \leq \alpha^2.$$

لنرمز بِـ m_i وَ M_i (بِـ m'_i وَ M'_i على التوالي) إلى حدي f (h على التوالي) الأدنى والأعلى على القطعة $[x_{i-1},x_i]$ من قطع P. ولنقسم الأعداد الطبيعية 1 ، ... ، n إلى فئتين A وَ B : يكون i منتميا إلى A إذا كان $M_i - m_i \leq \alpha$ ويكون منتميا إلى B إذا كان $M_i - m_i > \alpha$. ليكن الآن $\varepsilon_1 > 0$. ينتج من الخاصيتين المميزتين للحدين الأعلى والدنى وجود عددين x'_i وَ x''_i من $[x_{i-1},x_i]$ بحيث

$$h(x''_i) < m'_i + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \text{ وَ } M'_i - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 < h(x'_i)$$

ومنه

$$M'_i - m'_i < h(x'_i) - h(x''_i) + \varepsilon_1.$$

لكن، من أجل $i \in A$ ، لدينا $|f(x'_i) - f(x''_i)| \leq M_i - m_i \leq \alpha$ وبالتالي

$$M'_i - m'_i \leq h(x'_i) - h(x''_i) + \varepsilon_1 = g(f(x'_i)) - g(f(x''_i)) + \varepsilon_1 \leq \varepsilon + \varepsilon_1.$$

وبما أن ε_1 كيفي فلدينا $M'_i - m'_i \leq \varepsilon$ مهما كان $i \in A$.

أمّا من أجل $i \ni B$ فلدينا $M'_i - m'_i \leq 2K$ ، حيث K هي ذروة $|g|$ على $[m,M]$ ثمّ إن

$$\alpha \sum_{i\in B} \delta x_i < \sum_{i\in B}(M_i - m_i)\delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\delta x_i \leq \alpha^2$$

إذن $\sum_{i\in B} \delta x_i \leq \alpha$ وعندئذ

$$\begin{aligned}
\overline{R}(h,P) - \underline{R}(h,P) &= \sum_{i\in A}(M'_i - m'_i)\delta x_i + \sum_{i\in B}(M'_i - m'_i)\delta x_i \\
&\leq \varepsilon(b-a) + 2K\sum_{i\in B}\delta x_i \leq \varepsilon(b-a) + 2K\alpha \\
&\leq \varepsilon(b-a+K)
\end{aligned}$$

وذلك لأننا اخترنا $\alpha \leq \varepsilon$. هذا يثبت قابلية h للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

2.4.3 لازمة ● ليكن f وَ g تابعين معرفين وريمان كمولين على $[a,b]$. عندئذ تكون التوابع f^n (قوة f n) مع $n \in \mathbb{N}^\star$ ، $|f|$ ، fg ريمان كمولة على $[a,b]$ ، ثمّ إن

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|.$$

الإثبات

بما أن التابعين $g_1(x) = x^n$ وَ $g_2(x) = |x|$ مستمران على $\mathbb{R}$ بأكمله فتنتج من المبرهنة ١.٤.٣ قابلية f^n وَ $|f|$ للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

لدينا العلاقة $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ وبما أن $f+g$ ريمان كمول حسب المبرهنة ٢.٢.٣ فإن التوابع $(f+g)^2$ وَ f^2 وَ g^2 ريمان كمولة، حسب ما سبق من أجل $n=2$ ، وحسب المبرهنة ٢.٢.٣ مرة أخرى يكون التابع fg ريمان كمولا على $[a,b]$. وأخيرا ينتج من $-|f| \le f \le |f|$ ومن اللّازمة ٨.٣.٣أن

$$\int_a^b (-|f|) = -\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f| \qquad \text{ومنه} \qquad \Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f| \; .$$

إذا كان $|f| \le M$ على $[a,b]$ فيصبح لدينا $\int_a^b |f| \le M(b-a)$.

5.3 المبرهنة الرئيسية

نبرهن في هذا المقطع العلاقة الشهيرة ـ دستور نيوتن وليبنيتز ـ الذي يربط مفهومي الإشتقاق وتكامل ريمان.

1.5.3 **تعريف** • ليكن f تابعا معرفا على مجال I من $\mathbb{R}$. نقول عن تابع F إنه **تابع أصلي** للتابع f على I إذا كان F معرفا وقابلا للإشتقاق على I ولدينا $F'(x) = f(x)$ مهما كان $x \in I$.

2.5.3 **أمثلة** • 1. لدينا $(x^2)' = 2x$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ وبالتالي $F(x) = x^2$ تابع أصلي للتابع $f(x) = 2x$ على $\mathbb{R}$.

2. لدينا $(\operatorname{Arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ ولذا فالتابع $\Phi(x) = \operatorname{Arctg} x$ تابع أصلي للتابع $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ على $\mathbb{R}$.

3. في $\mathbb{R}_+^\star$ لدينا $(\operatorname{Log})'(x) = \frac{1}{x}$ وعليه فالتابع $\Psi(x) = \operatorname{Log} x$ تابع أصلي للتابع $\psi(x) = \frac{1}{x}$ في $\mathbb{R}_+^\star$.

3.5.3 **ملاحظات** • 1. واضح أنه إذا كان F تابعا أصليا لتابع f على مجال I فإن F مستمر، إذ إنه قابل للإشتقاق على هذا المجال.

2. ليكن F تابعا أصليا لتابع f على مجال I وليكن λ عددا ثابتا معطى. لدينا

$$(F+\lambda)' = F' + \lambda' = F'$$

وبالتالي $F+\lambda$ أيضا تابع أصلي للتابع f على I. إذن، إذا كان F تابعا أصليا لِـ f على I فإن جميع التوابع التي لا تختلف عن F إلا بعدد ثابت هي أيضا توابع أصلية للّتابع f على I.

3. العكس: إذا كان F_1 وَ F_2 تابعين أصليين لتابع f على مجال I فيكون لدينا

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

أي أن $F_1 = F_2 + \lambda$ ، مع λ ثابت حقيقي كيفي.

لنذكر أنه يمكن أن يكون مشتق تابع ما متقطعا ولذا يمكن للتوابع المتقطعة أن تقبل توابع أصلية. إليك العلاقة التي تربط الإشتقاق بتكامل ريمان.

4.5.3 **مبرهنة** • **ليكن** f **تابعا حقيقيا ريمان كمولا على المجال** $[a,b]$. **إذا كان يتمتع بتابع أصلي** F **على** $[a,b]$ **فإنه لدينا:**

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

الإثبات

ليكن $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$. بتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية على التابع F على القطع $[x_{i-1}, x_i]$ مع $i = 1$ ، ... ، n نحصل على

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\delta x_i = f(\xi_i)\delta x_i$$

حيث ξ_i نقطة من المجال المفتوح $]x_i, x_{x-1}[$. وبالتالي

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\{F(x_i) - F(x_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i.$$

وبما أن

$$\underline{R}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i \leq \overline{R}(f,P)$$

فإنه لدينا، مهما كان التقسيم P للمجال $[a,b]$:

$$\underline{R}(f,P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{R}(f,P).$$

إذن $\underline{\int}_a^b f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int}_a^b f$ وبما أن f ريمان كمول فرضا فلدينا

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

5.5.3 **لازمة ‐● إذا كان للتابع f مشتق f' ريمان كمولا على $[a,b]$ كان:**

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

6.5.3 **ملاحظة ‐●** لقد اشترطنا في المبرهنة السابقة ٤.٥.٣ أن التابع f ريمان كامل ويتمتع بتابع أصلي. إن هذا الشرط خال من كل فائض إذ إنها توجد توابع قابلة للمكاملة حسب ريمان لكنها لا تتمتع بتوابع أصلية وتوجد أيضا توابع تتمتع بتوابع أصلية لكنها غير ريمان كمولة. ولكي تتأكد من هذا فعليك بدراسة المثالين التاليين:

7.5.3 **مثالان ‐●** .1 التابع ψ المعرف بأن $\psi(x) = \frac{1}{q}$ إذا كان x يكتب على الشكل $x = \frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما وَ $q > p > 0$ أما من أجل x أصم فإن $\psi(x) = 0$ ثمّ إن $\psi(0) = 0$ وَ $\psi(1) = 1$. لكي نثبت أن ψ ريمان كمول على $[0,1]$ نلاحظ أولا أنه، من أجل كل تقسيم P للمجال $[0,1]$ ، لدينا $\underline{R}(\psi,P) = 0$ وبالتالي $\underline{\int}_0^1 \psi = 0$. ثمّ نأخذ $\varepsilon > 0$ ونلاحظ أن مجموعة الأعداد الناطقة $x = \frac{p}{q}$ (مع p وَ q أوليين فيما بينهما وَ $q > 0$) بحيث $\varepsilon < \psi(x)$ مجموعة متهية إذ إنه حتى يكون $\frac{p}{q}$ منتميا إلى $]0,1[$ يجب أن يكون p أصغر تماما من q ثمّ إن $\psi(x) = \frac{1}{q} > \varepsilon$ يعني أن $0 < q < \frac{1}{\varepsilon}$ ومنه $0 < p < q < \varepsilon^{-1}$. وعدد ثنائيات الأعداد الطبيعية (p,q) التي تحقق المتباينات السابقة منته. لنشير بِـ N إلى عدد الأعداد الناطقة التي تنتمي إلى $[0,1]$ ولتي تحقق $\varepsilon < \psi(x)$. ولنعتبر الآن تقسيمات المجال $[0,1]$ من الشكل $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ مع $N \leq n$. إذا كان M_i هو الحد الأعلى للتابع ψ على القطعة $[x_{i-1}, x_i]$ من قطع P فيكون لدينا $\varepsilon \leq M_i$ من أجل N قيمة للدليل i على الأكثر ولدينا $M_i \leq 1$ من أجل كل $i \in \{1, \dots, n\}$ ومنه:

$$\overline{R}(\psi,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{n} \leq \frac{1}{n}[N + (n-N)\varepsilon] = \varepsilon + \frac{N}{n}(1-\varepsilon)$$

وبما أن هذا صحيح من أجل كل $N < n$ فينتج لدينا:

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} \overline{R}(\psi,P) \le \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فهذا يستلزم أن $\sup_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} \overline{R}(\psi,P) = 0$. أي أن $\overline{\int}_0^1 \psi = 0$ ، إذن التابع ψ ريمان كمول على $[0,1]$ ولدينا $\int_0^1 \psi = 0$.

ليكن الآن $x \in [0,1]$. ينتج من المبرهنة ٣.٣.١ أن التابع ψ ريمان كمول على $[0,x]$ وينتج من اللّازمة ٣.٣.٧ أن $0 \le \int_0^x \psi \le \int_0^1 \psi = 0$ لأن ψ موجب. إذن $\int_0^x \psi = 0$ مهما كان $x \in [0,1]$. لو كان للتابع ψ تابع أصلي Ψ لنتج من المبرهنة الأساسية أن $\Psi(x) - \Psi(0) = 0$ مهما كان x ، أي أن للتابع الأصلي قيمة ثابتة $\Psi(0)$ على $[0,1]$. هذا يؤدي إلى أن $\psi(x) = \Psi'(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0,1]$ وهذا غير معقول. يبرهن التناقض المحصل عليه أنه لا يمكن للتابع ψ أن يتمتع بتابع أصلي بالرغم من أنه قابل للمكاملة.

2. من أجل التابع F المعرف بأن $F(x) = x^{4/3}\sin\frac{1}{x}$ من أجل $x \neq 0$ وَ $F(0) = 0$ نستطيع أن نثبت أن

$$F'(x) = \tfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\sin\tfrac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}}\cos\tfrac{1}{x} \quad \text{من أجل} \quad x \neq 0 \text{ وَ } F'(0) = 0$$

لكن $F'(\frac{1}{2n\pi}) = -(2n\pi)^{\frac{2}{3}}$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم. هذا يعني أن F' غير محدود وبالتالي هو غير ريمان كمول على كل مجال يحتوي على الصفر بالرغم من أن للتابع F' تابع أصلي هو F.

6.3 التوابع المعرفة بواسطة تكامل ريمان

ليكن f تابعا قابلا للمكامة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ ولتكن $x_0 \in [a,b]$ نقطة مثبتة. لنأخذ x عنصرا من $[a,b]$. عندئذ يكون التابع f ريمان كمولا على المجال الذي طرفاه x_0 وَ x ؛ هذا يعرف تطبيقا F للمجال $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ بأن

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f.$$

يدعى أحيانا التابع F بتكامل ريمان غير المحدد للتابع f .

1.6.3 **مبرهنة ● ليكن f تابعا حقيقيا ريمان كمولا على المجال $[a,b]$. عندئذ يكون التابع F المعرف على $[a,b]$ بأن $F(x) = \int_{x_0}^{x} f$ ، مع x_0 نقطة من $[a,b]$ ، مستمرا على المجال $[a,b]$.**

الإثبات

بما أن f ريمان كمول على $[a,b]$ فإنه محدود على هذا المجال، أي أنه يوجد عدد موجب M بحيث $|f(x)| \le M$ مهما كان x من $[a,b]$. لنأخذ الآن x وَ y عنصرين من $[a,b]$ ولنكتب

$$F(x) - F(y) = \int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{y} f = \int_{x_0}^{y} f + \int_{y}^{x} f - \int_{x_0}^{y} f = \int_{y}^{x} f$$

ومنه ومن اللّازمة ٣.٤.٢ :

$$|F(x) - F(y)| = \Big|\int_{y}^{x} f\Big| \le \Big|\int_{y}^{x} |f|\Big| \le M|x-y|.$$

هذا يعني أن التابع F يحقق شرط ليبشيتز على $[a,b]$ ، إنه إذن مستمر بانتظام، وبالتالي مستمر، على $[a,b]$.

هل يمكن أن نستنتج من قابلية f للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$ أن التابع $F(x)=\int_a^x f$ ، المستمر على $[a,b]$ ، قابل للإشتقاق على هذا المجال؟ الجواب هو لا كما يبينه المثال الموالي.

2.6.3 **مثال مضاد** • ليكن التابع g (أنظر المثال ٣.١.٥١) المعرف على $[0,2]$ بأن $g(x)=1$ من أجل $0\leq x\leq 1$ وَ $g(x)=2$ من أجل $1<x\leq 2$. ولنضع $G(x)=\int_0^x g$ ، $x\in[0,1]$. لدينا

$G(x)=x$ من أجل $x\in[0,1]$ وَ $G(x)=2x-1$ من أجل $x\in]1,2]$.

نلاحظ هنا أن G مستمر عند النقطة $x=1$ لكنّه غير قابل للإشتقاق عند هذه النقطة. لاحظ أن g متقطع عند النقطة 1.

وبصفة عامة، يجب أيضا أن نلاحظ أنه اذا كان التابع $F(x)=\int_{x_0}^x f$ قابلا للإشتقاق على $[a,b]$ فليس من الضروري أن يساوي مشتقه التابع f عند كل نقطة من $[a,b]$. وعلى سبيل المثال، من أجل التابع ψ الوارد في ٣.٥.٧ ، لدينا $\Psi(x)=\int_0^x\psi=0$ ولذا فمشتقه يساوي دائما 0 وهو لا يساوي ψ على $[0,1]$.

ترى ماذا يحدث إذا اعتبرنا فقط النقاط حيث يكون f ، التابع قيد المكاملة، مستمر؟ إليك الجواب.

3.6.3 **مبرهنة • ليكن f تابعا حقيقيا ريمان كمولا على المجال $[a,b]$. إذا كان التابع f مستمرا عند نقطة c من $[a,b]$ كان التابع $F(x)=\displaystyle\int_{x_0}^x f$ ، مع x_0 نقطة من $[a,b]$ ، قابلا للإشتقاق عند النقطة c ولدينا:**

$$F'(c)=f(c).$$

الإثبات

ليكن $\varepsilon>0$ عددا حقيقيا معطى. لنفرض أولا أن $c\in]a,b[$ ولنأخذ t عددا حقيقيا غير معدوم وبحيث يكون $c+|t|$ وَ $c-|t|$ منتميين إلى $[a,b]$. لدينا

$$\Big|\frac{F(c+t)-F(c)}{t}-f(c)\Big|=\Big|\frac{1}{t}\int_c^{c+t} f-f(c)\Big|=\Big|\frac{1}{t}\Big\{\int_c^{c+t} f-tf(c)\Big\}\Big|$$

وبما أن $tf(c)=f(c)\int_c^{c+t}1=\int_c^{c+t}f(c)$ فلدينا

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(c+t)-F(c)}{t}-f(c)\Big| &= \Big|\frac{1}{t}\int_c^{c+t}[f(x)-f(c)]\,dx\Big|\\ &\le \frac{1}{t}\int_{c-|t|}^{c+|t|}|f(x)-f(c)|\,dx.\end{aligned}$$

ينتج من استمرار f عند النقطة c وجود عدد $\alpha>0$ بحيث $|f(x)-f(c)|\le\varepsilon$ من أجل $x\in[a,b]$ مع $|x-c|\le\alpha$. عندئذ، إذا أخذنا $|t|\le\alpha$ ، يكون لدينا

$$\Big|\frac{F(c+t)-F(c)}{t}-f(c)\Big|\le\Big|\frac{1}{t}\int_c^{c+t}\varepsilon\,dx\Big|=\varepsilon.$$

الأمر الذي يعني أن F قابل للإشتقاق عند النقطة الداخلية $c\in]a,b[$ وأن مشتقه يساوي $f(c)$.

إذا كان c يساوي a أو b فنفس البرهان يعمل، يجب فقط الاقتصار على t موجب في حالة $c=a$ وَ t سالب في حالة $c=b$.

4.6.3 **لازمة ← إذا كان التابع f مستمرا على المجال المتراص $[a,b]$ فهو يتمتع بتابع أصلي على $[a,b]$ وهو، مثلا،** $F(x)=\int_a^x f$ **مع** $x\in[a,b]$.

هذا يعني، حسب ما ورد في ٣.٥.٣ أن جميع التوابع الأصلية للتابع f هي كلها من الشكل $F_1=F+\lambda$ حيث λ ثابت حقيقي كيفي.

وكمثال، إذا أخذنا التابع $s\mapsto s^{-1}$ على مجال طرفاه 1 وَ $x>0$ فنحصل على التابع اللّوغاريتمي:

$$\operatorname{Log}x=\int_1^x\frac{1}{s}\,ds,\ \ x>0.$$

7.3 المكاملة بالتجزئة وتبديل المتغير

إليك مبرهنتان مهمتان تستخدمان عادة لاختصار حساب تكامل ريمان.

1.7.3 **مبرهنة [المكامل بالتجزئة] ← ليكن f وَ g تابعين حقيقيين قابلين للإشتقاق على المجال $[a,b]$. إذا كان التابعان f' وَ g' ريمان كمولين على $[a,b]$ كان لدينا:**

$$\int_a^b fg'=fg\Big|_a^b-\int_a^b f'g$$

حيث $(fg)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$.

الإثبات

بما أن f' وَ g' موجودان على $[a,b]$ فإن f وَ g مستمران على هذا المجال وهما لذلك ريمان كمولان على المجال نفسه. ينتج من هذا ومن فرض f' وَ g' ريمان كمولين أن fg' وَ $f'g$ ريمان كمولان أيضا. وبما أن $(fg)'=f'g+fg'$ فإن $(fg)'$ ريمان كمول ولدينا

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

لكن $\int_a^b (fg)' = (fg)(b) - (fg)(a) \doteq (fg)\Big|_a^b$ ومنه العلاقة المطلوبة:

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

2.7.3 **مثال** • حساب $\int_0^\pi x\cos x$. بوضع $f(x) = x$ وَ $g'(x) = \cos x$ نرى أن $g(x) = \sin x$ ومنه

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos x\,dx &= x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x)'\sin x\,dx \\
&= -\int_0^\pi \sin x\,dx \\
&= \int_0^\pi (-\sin x)\,dx = \int_0^\pi (\cos x)'\,dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2.
\end{aligned}$$

نلجىء خاصة إلى المكاملة بالتجزئة إذا كان التابع قيد المكاملة جداء تابعين من طبيعتين مختلفتين كأن يكون أحدهما كثير حدود والآخر تابعا أسيا أو تابعا لوغريتميا. يمكنك مثلا، بالتجزئة، حساب التكاملين $\int_0^1 xe^x\,dx$ وَ $\int_0^1 x\mathrm{Log}\,x$ ؛ في التكامل الأخير نعتبر أن التابع $x\mathrm{Log}\,x$ يساوي صفر عند النقطة $a = 0$.

3.7.3 **مبرهنة [تبديل المتغير] • ليكن h تابعا حقيقيا يتمتع بمشتق h' ريمان كمول على المجال $[a_1, b_1]$ وليكن f تابعا معرفا ومستمرا على مجال I يحتوي على مجموعة قيم h. عندئذ:**

$$\int_a^b f = \int_{a_1}^{b_1} (f\circ h)h'$$

حيث $a = h(a_1)$ **وَ** $b = h(b_1)$.

الإثبات

بما أن f مستمر على I فإن التابع $F(x) = \int_a^x f$ ، حيث $a = h(a_1)$ ، تابع أصلي للتابع f ، أي أن $F'(x) = f(x)$ مهما كان $x \in I$. لنعتبر عندئذ التابع g المعرف على $[a_1, b_1]$ بأن $g = F\circ h$. التابع g قابل للاشتقاق كتركيب تابعين قابلين للاشتقاق ولدينا $g' = (F'\circ h)h' = (f\circ h)h'$. بما أن التابعين f وَ h مستمران فرضا فإن $f\circ h$ مستمر ومن ثمّ ريمان كمول على المجال $[a_1, b_1]$ ؛ وبما أن h' ريمان كمول فإن $(f\circ h)h'$ ريمان كمول. هذا يعني أن g' ريمان كمول على $[a_1, b_1]$ ولدينا:

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{b_1} g' = g(b_1) - g(a_1) &= (F\circ h)(b_1) - (F\circ h)(a_1) \\
&= F(h(b_1)) - F(h(a_1)) \\
&= \int_a^{h(b_1)} f - \int_a^{h(a_1)} f = \int_{h(a_1)}^{h(b_1)} f
\end{aligned}$$

أي أن $\int_a^b f = \int_{a_1}^{b_1} (f\circ h)h'$.

4.7.3 **ملاحظة** • عند الاستخدام العملي لدستور تبديل المتغير السابق من المفيد ابراز المتغيرين في $[a, b]$ وفي $[a_1, b_1]$ ولذا نكتب تقليديا التكامل على الشقل $\int_a^b f(x)\,dx$ والدستور على الشكل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f(h(t))h'(t)\,dt$$

وهذا إذا أشرنا إلى المتغير في $[a, b]$ بـ x وإلى المتغير في $[a_1, b_1]$ بـ t.

5.7.3 **مثال** • حساب التكامل $T = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

نكتب T على الشكل $T = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \frac{dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ ثمّ نضع $x = h(t) = 2\operatorname{Arctg} t$ ، ومنه $h'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. لابد من أن يكون لدينا $\frac{\pi}{3} = h(a_1) = 2\operatorname{Arctg} a_1$ وَ $\frac{\pi}{2} = h(b_1) = 2\operatorname{Arctg} b_1$ ومنه $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وَ $b_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. ولذا:

$$\begin{aligned} T = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{Arctg} t)\} \frac{1}{2 \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} t)} \frac{2dt}{1+t^2} &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \{1+t^2\} \frac{1}{t} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \operatorname{Log} t \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 3. \end{aligned}$$

6.7.3 **ملاحظة** • إننا لم نفرض في المبرهنة ٤.٧.٣ أن التابع h رتيب تماما. إلا أننا عمليا نختار دائما h رتيب تماما لكي يتمتع بتابع عكسي. وعلى سبيل المثال، استخدمنا في المثال السابق التابع العكسي لقوس الظل لتعين a_1 وَ b_1. إن a وَ b معطيان عمليا ولابد من إيجاد تابع h معرف على مجال $[a_1, b_1]$ ، حيث نعين a_1 وَ b_1 باستخدام التابع العكسي لِـ h.

تمارين حول تكامل ريمان

1.3 أحسب، مستخدما تعريف تكامل ريمان بواسطة المجاميع السفلى والعليا، التكاملات التالية:

$$1.\quad \int_a^b x, \qquad 2.\quad \int_a^b x^m \quad (\text{حيث } m \text{ عدد طبيعي موجب}),$$
$$3.\quad \int_a^b e^x, \qquad 4.\quad \int_a^b \sin x, \qquad 5.\quad \int_a^b \frac{1}{x^2},\ 0 < a < b.$$

2.3 ا) استخدم تعريف التكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ بواسطة المجاميع لتحسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\{\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n+2}+\cdots+\tfrac{1}{2n}\}.$$

ب) أحسب، مستعملا تكامل تابع ملائم، النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\{\tfrac{n}{n^2+1^2}+\tfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\tfrac{n}{2n^2}\}.$$

3.3 أثبت أن كل تابع رتيب على مجال متراص $[a,b]$ قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال.

4.3 a وَ b عددان حقيقيان مع $b > a$ وَ f تابع حقيقي موجب وقابل للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$. أثبت أن $\sqrt{f}$ قابل للمكاملة حسب ريمان على $[a,b]$.

5.3 أثبت أنه إذا كان f تابعا ريمان كمولا على $[a,b]$ واذا وجد عددان m وَ M بحيث $0 < m \leq f \leq M$ على $[a,b]$ فان التكامل $\int_a^b \frac{1}{f}$ موجود.

6.3 ليكن التابع ϕ المعرف على $[0,1]$ بأن $\phi(0) = 0$ وَ $\phi(x) = \frac{1}{q}$ إذا كان $x = \frac{p}{q}$ مع p وَ q عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما وَ $\phi(x) = 0$ إذا كان $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. بين أن ϕ ريمان كمول على $[0,1]$ مع $\int_0^1 \phi = 0$. هل يمكن للتابع ϕ أن يتمتع بتابع أصلي؟

7.3 أثبت أن اتحاد كل فئة عدودة من المجموعات الصفرية هو مجموعة صفرية.

8.3 أثبت أنه إذا كان f تابعا محدودا وريمان كمولا على مجال متراص فان مجموعة نقط تقطعه مجموعة صفرية.

9.3 أثبت أنه إذا كانت مجموعة نقط تقطع تابع f صفرية على $[a,b]$ فان هذا التابع قابل للمكاملة حسب ريمان على المجال $[a,b]$.

10.3 أثبت أن المتتالية التابعية $\{nx(1-x)^n\}$ كمولة عنصر بعنصر على $[0,1]$. هل هي متقاربة بانتظام على هذا المجال؟

11.3 أثبت أن كل متتالية توابع ريمان كمولة على $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام على هذا المجال كمولة عنصر بعنصر على $[a,b]$.

12.3 لتكن $\{f_n\}$ متتالية محدودة بانتظام عناصرها توابع مستمرة على $[a,b]$ ولفرض وجود تابع f معرف على هذا المجال بحيث تؤول المتتالية $\{f_n\}$ بانتظام نحوه على $[a,c]$ مهما كان $c \in]a,b[$.
أثبت أن $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

13.3 لتكن المتتالية التابعية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بأن $f(x) = \frac{1}{n}$ إذا كان $x \in [0,n]$ والا $f(x) = 0$.
أثبت أن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}_+$ نحو التابع المعدوم إلا أن $\lim_n \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$.

14.3 أثبت مبرهنة **أرزلا** Arzela $(1847 - 1912)$: إذا تقاربت ببساطة متتالية، محدودة بانتظام، $\{f_n\}$ عناصرها توابع ريمان كمولة نحو تابع f ريمان كمول على $[a,b]$ فان

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

الفصل 4

التوابع ذات التغيّر المحدود والتوابع المستمرة مطلقا

1.4 التغيّر المحدود

1.1.4 **تعريف** • ليكن f تابعا معرفا علي مجال $[a,b]$ وَ $P=\{x_0,...,x_n\}$ تقسيما لهذا المجال. نسمي العدد الموجب $V_f(P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ **بتغيُّر** f الموافق للتقسيم P .

واضح أنه إذا كان P' تقسيما أدق من P ، بمعنى أن $P\subset P'$ ، كان $V_f(P)\leq V_f(P')$.

لنعتبر مجموعة تغيُّرات f الموافقة لكل تقسيمات المجال $[a,b]$. إذا كانت محدودة قلنا إن f **ذو تغيُّر محدود على** $[a,b]$. ونسمي العدد $V_a^b(f)=\sup\{V_f(P)|P\in\mathcal{P}_{a,b}\}$ **بالتغيُّر الكلي للتابع** f **على** $[a,b]$. لنذكِّر بأن $\mathcal{P}_{a,b}$ يشير إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$.

2.1.4 **مثال** • إذا كان f رتيبا على $[a,b]$ فمن أجل كل تقسيم P لهذا المجال لدينا $V_f(P)=|f(b)-f(a)|$. وبالتالي f محدود التغيّر مع $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

3.1.4 **مثال** • لتكن ψ الدالة المميزة للأعداد الناطقة المحصورة بين 0 وَ 1 وليكن، من أجل $n\in\mathbb{N}^\star$ ، التقسيم $P=\{x_0,...,x_{2n}\}$ للمجال $[0,1]$ حيث

$$x_{2i}=\frac{i}{n}\ ،\ i=0\ ،\ ...\ ،\ n \qquad \text{وَ} \qquad x_{2i+1}=\frac{i}{n}+\frac{\sqrt{2}}{2n}\ ،\ i=0\ ،\ ...\ ،\ n-1\ .$$

بما أن كل نقطة x_{2i} ناطقة وكل نقطة x_{2i+1} صماء وهذه النقط تقع بالتناوب: الناطقة ثمّ الصماء، فالناطقة ثمّ الصماء، ... إلخ، فإنه لدينا $V_\psi(P)=\sum_{j=1}^{2n}|\psi(x_j)-\psi(x_{j-1})|=2n$.

وواضح عندها أن تغيُّر ψ على $[0,1]$ غير محدود.

4.1.4 **مثال** • ليكن التابع f المعرف على $[0,1]$ بأن $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ إذا كان $x\neq0$ وَ $f(0)=0$. من أجل التقسيم $P_n=\left\{0,\frac{2}{2n\pi},\frac{2}{(2n-1)\pi},...,\frac{2}{3\pi},\frac{2}{2\pi},1\right\}$ التي تكتب نقطه على الشكل

$$\begin{cases} x_0=0\\ x_i=\frac{2}{(2n+1-i)\pi}\ ,\ i=1,\dots,2n-1\\ x_{2n}=1,\end{cases}$$

لدينا (لاحظ أن f معدوم عند النقط x_i بحيث $\frac{1}{x_i}$ من مضاعفات π):

$$\begin{aligned} V_f(P_n) &\geq \sum_{i=2}^{2n-1} \left| f\Big(\frac{2}{(2n+1-i)\pi}\Big) - f\Big(\frac{2}{(2n+2-i)\pi}\Big) \right| \\ &= \sum_{i=2,\, i\in 2\mathbb{N}}^{2n-1} \left| f\Big(\frac{2}{(2n+1-i)\pi}\Big) \right| + \sum_{i=2,\, i\notin 2\mathbb{N}}^{2n-1} \left| f\Big(\frac{2}{(2n+2-i)\pi}\Big) \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2(n-p)+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2(n-p)+1}. \end{aligned}$$

إذن

$$V_f(P_n) \geq \frac{4}{\pi} \Big\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \Big\} \doteq \frac{4}{\pi} S_n.$$

بما أن $\{S_n\}$ متزايدة وغير محدودة (لأنها ليست لكوشي) فإن تغيّر التابع المعتبر غير محدود.

يتبين لنا من المثالين 2.1.4 وَ 4.1.4 أن الاستمرار لا هو شرط لازم و لا هو كاف لكي يكون تابع ما ذا تغيّر محدود. ثم إن محدودية تابع لا تضمن أن يكون ذا تغيّر محدود، إلا أنه من الواضح أن التوابع المحدودة هي الوحيدة التي يمكنها أن تتمتع بهذه الخاصية. هل يمكنك إعطاء البرهان؟

يمكن إجراء بعض العمليات على التوابع ذات تغيّر محدود؛ إن المبرهنة الموالية تتضمن البسيطة منها.

5.1.4 **مبرهنة ← إذا كان f وَ g تابعين يتمتعان بتغيّرين محدودين على المجال $[a,b]$ فإن التوابع:**

$f+g$ ، $f-g$ ، $|f|$ ، fg ، kf مع k ثابت

تتمتع بالخاصية نفسها. ثمّ إذا وجد عدد m صفته أن $|f| \geq m > 0$ على $[a,b]$ فيكون $\frac{1}{f}$ محدود التغيّر على نفس المجال.

الإثبات يترك للقاريء كتمرين.

6.1.4 **مثال ←** ليكن f تابعا كمولا على $[a,b]$ وَ ليكن التابع F المعرف بأن $F(x) = \int_a^x f$. بما أن f محدود فيوجد m بحيث $m \leq f$. إذا كان $m \leq 0$ كان $0 \leq f$ ويصبح F متزايدا ولذا فهو محدود التغيّر على $[a,b]$. أما إذا كان $m > 0$ فبكتابة $F(x) = \displaystyle\int_a^x (f-m) + \int_a^x m$ نرى أن هذا التابع مجموع تابعين أحدهما متزايد والآخر متناقص وبالتالي فهو محدود التغيّر.

تقدم المبرهنتان التاليتان علاقات بين مفاهيم الإشتقاق وتكامل ريمان والتغيّر المحدود. تقدم الثانية صيغة لحساب التغيّر الكلي.

7.1.4 **مبرهنة ← إذا كان f قابلا للإشتقاق وكان $|f'| \leq M$ على $[a,b]$ فإنه محدود التغيّر على هذا المجال، ثم إن تغيّره أقل من $M(b-a)$.**

الإثبات ينتج من مبرهنة القيم الوسطى أنه ، من أجل كل قسم P للمجال $[a,b]$ ، لدينا:

$$V_f(P) = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)||x_i - x_{i-1}|$$

حيث $x_{i-1} < \xi_1 < x_i$ من أجل $i = 1$ ، ... ، n . و منه $V_f(P) \leq M(b-a)$.

8.1.4 مبرهنة • إذا كان f قابلا للإشتقاق على $[a,b]$ وكان $|f'|$ ر ـ كمولا على هذا المجال فإن f محدود التغيّر ولدينا:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'|.$$

الإثبات بما أن $|f'|$ ريمان كمولا فإنه محدود ولذا فالتابع f محدود التغيّر وفقا للمبرهنة 7.1.4 . إذن، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، يوجد تقسيم P_1 لِـ $[a,b]$ صفته أن

$$|V_a^b(f) - V_f(P_1)| \leq \varepsilon. \tag{1.4}$$

وبما أن $|f'|$ ريمان كمول فيوجد $\rho > 0$ بحيث

$$\left|R(|f'|, P_2, Q) - \int_a^b |f'|\right| \leq \varepsilon,\ \forall P_2 \in \mathcal{P}_{a,b},\ \delta P_2 \leq \rho,\ \forall Q \in \mathcal{W}(P_2). \tag{2.4}$$

ليكن P تقسيما أدق من P_1 مع $\delta P \leq \rho$. تكون عندئذ (1.4) وَ (2.4) محققتين إذا عوضت P_1 وَ P_2 على التوالي بالتقسيم P. ثمّ إنه ينتج من مبرهنة القيم الوسطى وجود تقسيم $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ، وسط نسبة إلى P ، بحيث

$$V_f(P) = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)|\delta x_i = R(|f'|, P, Q).$$

ينتج من هذا أن $V_a^b(f) = \int_a^b |f'|$.

9.1.4 مثال • لنعتبر التابع $\sin x$ على المجال $[0,b]$. بما أن $|(\sin x)'| = |\cos x|$ ريمان كمول على $[0,b]$ مهما كان b ، فإن $\sin x$ محدود التغيّر على $[0,b]$ ولدينا:

$$\begin{array}{lcr}
V_0^b(\sin) = \sin b & \text{إذا كان} & \frac{\pi}{2} \geq b \geq 0 \\
V_0^b(\sin) = 2 - \sin b & \text{إذا كان} & \frac{3\pi}{2} \geq b > \frac{\pi}{2} \\
V_0^b(\sin) = 4 + \sin b & \text{إذا كان} & \frac{5\pi}{2} \geq b > \frac{3\pi}{2} \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

إن التغيّر على مجال مرتبط بكيفية بسيطة جدا بالتغيّر على المجالات الجزئية. لنفرض أن f معرف على $[a,b]$ ولنأخذ نقطة c بحيث $a < c < b$. إذا كان P_1 وَ P_2 تقسيمين للمجالين $[a,c]$ وَ $[c,b]$ على التوالي فمن التعريف نرى أن

$$V_f(P_1) + V_f(P_2) = V_f(P_1 \cup P_2).$$

وواضح أنه إذا كان f محدود التغيّر على $[a,c]$ وَ $[c,b]$ فهو كذلك على $[a,b]$ ولدينا:

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f).$$

يمكن التعميم إلى أي تجزئة عدد قطعها منته: إذا كان f محدود التغيّر على كل قطعة من القطع المتهية العدد $\{[a,a_1],[a_1,a_2],\ldots,[a_{n-1},b]\}$ فهو محدود التغيّر على $[a,b]$ والعكس بالعكس ولدينا

$$V_a^b(f) = \sum_{i=1}^{n} V_{a_{i-1}}^{a_i}(f) \qquad \text{مع} \quad a_0 = a \quad \text{و} \quad a_n = b \ .$$

وعلى ضوء هذه النتيجة ، نرى أنه إذا كان التابع f رتيبا بالقطع على المجال $[a,b]$ ، بمعنى أن التابع رتيب على كل قطعة من قطع المجموعة المتهية $\{[a,a_1],[a_1,a_2],\ldots,[a_{n-1},b]\}$ فهو محدود التغيّر على $[a,b]$. وعلى سبيل المثال بما أن التابع $x \mapsto \cos x$ رتيب بالقطع على أي مجال محدود فهو محدود التغيّر على كل مجال محدود.

2.4 تفكيك التوابع ذات تغيّر محدود

ليكن f تابعا محدود التغيّر على $[a,b]$. عندئذ ، من أجل x من $]a,b]$ ، يكون التغيّر الكلي $V_a^x(f)$ موجودا. لنرمز إليه بـ $T_f(x)$ ونضع $T_f(a)=0$. نسمي التابع T_f ، المعرف على $[a,b]$ ، **بتابع التغيّر الكلي** للتابع f. واضح أن T_f متزايد على $[a,b]$ ثم إنه محدود، إذ إن

$$T_f(x) \leq V_a^b(f),\ \forall x \in [a,b].$$

نسمي التابع R_f المعطى بأن $R_f = T_f - f$ **بالتابع المترسب** من f على $[a,b]$. إن هذا التابع متزايد كذلك على $[a,b]$. لأنه ، من أجل x_1 وَ x_2 من $[a,b]$ مع $x_2 > x_1$ فلا يمكن للفرق $f(x_2)-f(x_1)$ أن يكون أكبر من التغيّر للتابع f على $[x_1,x_2]$. إذن

$$f(x_2)-f(x_1) \leq V_{x_1}^{x_2}(f) = V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = T_f(x_2) - T_f(x_1)$$

أي أن

$$R_f(x_1) = T_f(x_1) - f(x_1) \leq T_f(x_2) - f(x_2) = R_f(x_2).$$

يُمكّن تزايد تابع التغيّر الكلي والتابع المترسب من اكتشاف تمييز بسيط للتوابع ذات التغيّر المحدود.

1.2.4 مبرهنة ● حتى يكون التابع f محدود التغيّر على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون فرق تابعين متزايدين.

الإثبات لقد سبق أن لاحظنا أن الفرق بين تابعين متزايدين تابع محدود التغيّر. أما العكس فنحصل عليه من الملاحظة أن كل تابع محدود التغيّر يساوي الفرق بين تابعي تغيّره الكلي والمترسب منه، أي أن $f = T_f - R_f$.

إن تمثيل تابع محدود التغيّر كفرق بين تابعين متزايدين غير وحيد بالطبع ، لأن

$$f = T_f - R_f = (T_f + g) - (R_f + g)$$

تمثيلات مختلفة لنفس التابع وهذا مهما كان التابع المتزايد g .

بما أن التوابع الرتيبة تتمتع، على الأكثر، بمجموعة تقطعات قابلة للعد وهي كلها من الصنف الاول فينتج من المبرهنة 1.2.4 أن هذا صحيح كذلك بالنسبة إلى التوابع ذات التغيّر المحدود. ينتج من هذا أن التوابع ذات التغيّر المحدود على $[a,b]$ ريمان كمولة على هذا المجال. إن العكس غير صحيح إذ إننا نعلم ان الاستمرار ذاته لا يضمن محدودية التغيّر.

نلقي فيما يلي المزيد من الضوء على العلاقة بين الإستمرار ومحدودية التغيّر.

2.2.4 مبرهنة ● ليكن f تابعا تغيّره محدود على $[a,b]$. حتى يكون f مستمرا عند نقطة c من $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون تابع تغيّره الكلي T_f مستمرا عند c.

الإثبات لنفرض أن T_f مستمر عند نقطة c من $[a,b]$. ينتج عندها من المتباينة

$$|f(x)-f(c)| \leq |T_f(x) - T_f(c)|,\ \forall x \in [a,b]$$

أن f مستمر عند النقطة c .

لنفرض الآن أن f مستمر عند نقطة c من $[a,b[$. بما أن التابع T_f يتمتع بنهاية من اليمين عند النقطة c ، نرمز إليها بـ $T_f(c+)$ ، فمن أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ صفته أن

$$|f(x)-f(c)|\le\varepsilon,\ \ |T_f(x)-T_f(c+)|\le\varepsilon,\ \ \forall x\in[a,b]\cap]c,c+\rho[.$$

لنرمز، من أجل كل x من $]a,b[\cap]c,c+\rho[$ ، بـ $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ إلى تقسيم كيفي للمجال $[c,x]$. عندئذ، لدينا:

$$V_f(P)=|f(x_1)-f(c)|+\sum_{i=2}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f(x_1)-f(c)|+V_f(P'),$$

حيث $P'=\{x_1,\ldots,x_n\}$ تقسيم للمجال $[x_1,x]$. لاحظ الآن أن $V_f(P')$ أقل من التغيّر الكلي $T_f(x)-T_f(x_1)$ على $[x_1,x]$. وكذلك، بما أن T_f متزايد فإن

$$T_f(x)-T_f(x_1)\le T_f(x)-T_f(c+).$$

يؤدي مزج مناسب للمتباينات السابقة إلى أن $V_f(P)\le 2\varepsilon$. وهذا وارد من أجل كل تقسيم P للمجال $[c,x]$ وبالتالي $T_f(x)-T_f(c)=V_c^x(f)\le 2\varepsilon$.

هذا يعني أن T_f مستمر من اليمين عند c . وتؤدي حجة مماثلة إلى إستمرار T_f من اليسار عند كل نقطة c من $]a,b]$.

3.2.4 **لازمة • حتى يكون تابع مستمر f محدود التغيّر على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يكون الفرق بين تابعين متزايدين مستمرين.**

إن المفهوم الهندسي للتغيّر المحدود مرتبط إرتباطا وثيقا بمفهوم طول منحن: ليكن $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ منحنيا وسيطيا مستويا معطى بـ:

$$\Gamma(t)=\big(\varphi(t),\psi(t)\big),\ \ t\in[a,b].$$

لاحظ أنه يمكن للمنحني أن يقطع نفسه وأن يكون غير مستمر أو غير محدود. ليكن $P=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$. إذا ربطنا النقطة $N_0=(\varphi(t_0),\psi(t_0))$ بالنقطة $N_1=(\varphi(t_1),\psi(t_1))$ بقطعة مستقيمة وواصلنا إلى أن يتم ربط النقطة $N_{n-1}=(\varphi(t_{n-1}),\psi(t_{n-1}))$ بالنقطة $N_n=(\varphi(t_n),\psi(t_n))$ فنحصل على تقريب لطول Γ بتشكيل العبارة:

$$L(\Gamma,P)=\sum_{i=1}^n\Big[\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big)^2+\big(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\big)^2\Big]^{1/2}. \tag{3.4}$$

إن الخطوة الموالية هي إعتبار تقسيمات آخذةً في التدقيق وندرك أنه كلّما كان التقسيم أدق كان التقريب أفضل. هذا يحثنا على تعريف طول منحن كالتالي:

4.2.4 **تعريف •** ليكن $\Gamma=(\varphi,\psi):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ منحنيا وسيطيا مستويا. يدعى العدد:

$$L(\Gamma)=\sup_{P\in\mathcal{P}_{a,b}}L(\Gamma,P)$$

بطول المنحني Γ. إذا كان $L(\Gamma)$ منتهيا قلنا إن Γ **قَيُوم** .

1.4.2.4 **مبرهنة • حتى يكون المنحني $\Gamma=(\varphi,\psi):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ قيوما يلزم ويكفي أن يكون φ وَ ψ محدودي التغيّر.**

الإثبات يعتمد الإثبات على المتباينات:

$$|\alpha|,|\beta|\le\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}\le|\alpha|+|\beta|,\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ويترك كتمرين للقاريء.

يمكن طبعا تعميم مفهوم الطول إلى المنحنيات الفضائية وبصفة عامة إلى المنحنيات الوسيطية في $\mathbb{R}^N$ ، $(\mathbb{N}^\star \ni N)$. وفي هذه الحالة لدينا طبعا مبرهنة مماثلة للمبرهنة السابقة.

3.4 الإستمرار المطلق

1.3.4 **تعريف •** نقول عن تابع حقيقي f معرف على مجال متراص $[a,b]$ إنه مستمر مطلقا على هذا المجال إذا أمكن رفق كل $\varepsilon > 0$ بعدد $\rho > 0$ بحيث، مهما كانت الجماعة المتهية من المجالات غير المتقاطعة $\{]a_1,b_1[,]a_2,b_2[,\dots,]a_n,b_n[\}$ ذات اتحاد محتوى في $[a,b]$ والطول الكلي $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \le \rho$ لدينا:

$$\textstyle\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \le \varepsilon.$$

واضح من التعريف أن مفهوم الاستمرار المطلق أكثر صرامة من مفهوم الاستمرار. بأخذ $n = 1$ في التعريف نرى أن الإستمرار المطلق يستلزم الإستمرار المنتظم. نقدم فيما يلي الخواص الأساسية للاستمرار المطلق.

1.1.3.4 **مبرهنة • إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا على $[a,b]$ فتكون التوابع التالية**

$$f+g \text{ ، } fg \text{ ، } kf \quad \text{مع } k \text{ ثابت}$$

مستمرة مطلقا. وكذلك، إذا كان $f \ge m > 0$ فيكون $\frac{1}{f}$ مستمرا مطلقا.

الإثبات يترك كتمرين للقاريء.

2.1.3.4 **مبرهنة • إذا كان f مستمرا مطلقا على $[a,b]$ فهو محدود التغيّر على هذا المجال.**

الإثبات بما أن f مستمر مطلقا فمن أجل $\varepsilon = 1$ يوجد $\rho > 0$ بحيث، مهما كانت الجماعة المتهية من المجالات غير المتقاطعة $\{]a_1,b_1[,\dots,]a_k,b_k[\}$ ذات إتحاد محتوي في $[a,b]$ مع $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) \le \rho$ يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| \le 1.$$

ليكن عندئذ $P = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ مع $\rho \ge \delta P$. فمن أجل كل تقسيم $P_i = \{a_0,a_1,\dots,a_m\}$ للقطعة $[x_{i-1},x_i]$ من قطع P مع $i = 1$ ، ... ، n. لدينا

$$\sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(a_{i-1})| \le 1.$$

عندئذ يأبى تغيّر f أن يربو الواحد على كل قطعة من قطع P . إذن، يكون تغيّر التابع f على $[a,b]$ أقل من n ؛ إذن f محدود التغيّر.

يبين المثال الموالي أن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح: يمكن لتابع أن يكون مستمرا ومحدود التغيّر دون أن يكون مستمرا مطلقا.

3.1.3.4 **مثال •** لنقدم **مجموعة كانتور** K ، إنها مجموعة جزئية من $[0,1]$ نحصل عليها كالتالي:
نرمز بـ K_0 إلى المجال $[0,1]$ ونحذف منه المجال المفتوح $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ فنحصل على

$$K_1 = \left[0,\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},1\right].$$

ولنحذف الآن الثلثين الأوسطين $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ وَ $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$ من مركبتي K_1 فنحصل على

$$K_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right].$$

ومن جديد، نحذف الثلث الأوسط من المجالات الأربعة التي تكوِن K_2 فينتج لدينا:

$$K_3 = [0, \tfrac{1}{27}] \cup [\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}] \cup [\tfrac{8}{27}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{19}{27}] \cup [\tfrac{20}{27}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}] \cup \left[\tfrac{26}{27}, 1\right],$$

ونستمر على هذا المنوال فنولّد متتالية مجموعات $\{K_n\}$ حيث نحصل على K_{n+1} بحذف الثلث (المفتوح) الأوسط من كل مجال مغلق يكوّن K_n ، يمكنك أن تتأكد من أن عدد مجالات K_n هو 2^n وطول كل مجال هو 3^{-n}. إننا نعرف مجموعة كانتور K بأنها مجموعة النقط التي تنتمي إلى كل المجموعات المغلقة K_n :

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

إن كل مجموعة K_n مغلقة ومحدودة. ومن كيفية إنشاء هذه المجموعات لدينا $K_{n+1} \subset K_n$ ، مهما كان $1 \leq n$. تحقق إذن المتتالية $\{K_n\}$ شروط مبرهنة المجموعات المغلقة والمتداخلة لكانتور ولهذا فتقاطعها، K ، غير خال. إن عدم خلاء K ينتج كذلك من الملاحظة بأن طرفي كل مجال من المجالات غير المتقاطعة التي تشكل K_n لا تحذفان في أية مرحلة كانت من الانشاء وهما لذلك عنصران من K .

لنثبت أن المجموعة K صفرية. ليكن $\varepsilon > 0$ وليكن n عددا طبيعيا بحيث $\frac{\varepsilon}{2} \geq (\frac{2}{3})^n$ ولتكن $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{2^n}$ المجالات المغلقة التي تكوّن K_n. ولنعوض كل مجال $[a_i, b_i]$ بالمجال المفتوح $]a_i - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$. لدينا:

$$K \subset K_n \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} \left]a_i - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

مع

$$\sum_{i=1}^{2^n} \left(b_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - a_i + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = \sum_{i=1}^{2^n} (b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

هذا يبين أن المجموعة K صفرية.

لندخل الآن تابعا مرفقا لمجموعة كانتور. ليكن $L_n = [0,1] \setminus K_n$ ؛ إذن يتكون L_n من $2^n - 1$ مجالا، نشير إليها بـ I_n^j (مرتبة من اليسار إلى اليمين) وهي التي حذفت في المراحل الـ n الأولى من إنشاء مجموعة كانتور، ليكن f_n التابع المستمر على $[0,1]$ الذي يحقق ($1 \leq n$) :

$$f_n(0) = 0, \;\; f_n(1) = 1, \;\; f_n(x) = j2^{-n}, \;\; x \in I_n^j, \;\; j = 1, \ldots, 2^n - 1$$

وهو تآلفي على كل مجال من K_n.

لكي تأخذ فكرة عن هذه التوابع يستحسن أن تنشيء بياني f_1 وَ f_2.

وللمزيد من الإيضاح نقدم عبارات f_n وَ f_{n+1} على ثلاثة مجالات متتابعة I_n^{j-1} وَ F_n^j وَ I_n^j ، حيث $F_n^j = [\alpha, \beta]$ هي القطعة ذات الرتبة j في K_n (يتم الترقيم من اليسار إلى اليمين). لدينا:

$$f_n(x) = \frac{x - \alpha}{2^n(\beta - \alpha)} + \frac{j - 1}{2^n}, \;\; x \in F_n^j.$$

وبما أن $\beta - \alpha = \frac{1}{3^n}$ فإن ميل f_n على كل قطعة من قطع K_n هو $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ولذا فكل القطع المائلة من بيان f_n متوازية.

ولكي نعرف بيان f_{n+1} على القطع نفسها نلاحظ أن كل مجال I_n^k من L_n يبقى في L_{n+1} ويصبح رقمه $2k$ أي أن $I_{n+1}^{2k} = I_n^k$ ؛ ومنه:

$$f_n(x) = f_{n+1}(x),\ \forall x \in I_n^{j-1} \cup I_n^j = I_{n+1}^{2(j-1)} \cup I_{n+1}^{2j}.$$

وللحصول على بيان f_{n+1} على F_n^j فنقسم هذا المجال إلى ثلاث مجالات متساوية ونحذف المجال $]\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha+2\beta}{3}[$ لنلحقهُ بِـ L_{n+1} برقم يساوي $2(j-1)+1$ ، أي أن $I_{n+1}^{2j-1} =]\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha+2\beta}{3}[$. ولذا:

$$f_{n+1}(x) = \tfrac{2j-1}{2^{n+1}},\ x \in I_{n+1}^{2j-1}$$

ثمّ، ولمعرفة الوضع النسبي لبياني f_n وَ f_{n+1} ، نقدر:

$$f_{n+1}\Big(\frac{2\alpha+\beta}{3}\Big) - f_n\Big(\frac{2\alpha+\beta}{3}\Big) = \frac{1}{3\times 2^n} = f_n\Big(\frac{\alpha+2\beta}{3}\Big) - f_{n+1}\Big(\frac{\alpha+2\beta}{3}\Big).$$

وبوصل $(\alpha, \frac{j-1}{2^n})$ وَ $(\frac{2\alpha+\beta}{3}, \frac{2j-1}{2^{n+1}})$ بقطعة مستقيمة وكذا $(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \frac{2j-1}{2^{n+1}})$ وَ $(\beta, \frac{j}{2^n})$ نكمل بيان f_{n+1} على F_n^j. ومن الحساب السابق نرى أن بيان f_{n+1} يقع فوق بيان f_n على $[\alpha, \frac{2\alpha+\beta}{3}]$ وتحته على $[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta]$.

واضح من طريقة الإنشاء أن كل تابع f_n متزايد وأن

$f_{n+1} = f_n$ على I_n^j ، $j = 1$ ، ... ، $2^n - 1$ وَ $|f_n - f_{n+1}| < 2^{-n}$

إذن السلسلة $\sum_n (f_n - f_{n+1})$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$ وبالتالي تتقارب المتتالية $\{f_n\}$ بانتظام على $[0,1]$. ليكن $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. عندئذ $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ وَ f متزايد ومستمر على $[0,1]$ ثم إن f ثابت على كل مجال حذف أثناء إنشاء K . يدعى f **بتابع كانتور ولوبيغ** . بما أن f رتيب على $[0,1]$ فهو محدود التغيّر على هذا المجال. بما أن مجموعة كانتور K مجموعة صفرية (أو مهملة) فمن أجل كل $\rho > 0$ توجد جماعة عدودة $\{I_\nu | \nu = 1,2,\ldots\}$ من المجالات المفتوحة بحيث $K \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ مع $\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta I \le \rho$. ثمّ، بما أن K متراص، فيمكن تغطيته بعدد منته من هذه المجالات. إذا عوضنا المجالات المتقاطعة من هذه الجماعة المتهية بالمجال الذي تعرّفه (وهو اتحادها) فنحصل على جماعة من المجالات غير المتقاطعة (مرقمة ترقيما متزايدا تماما) $\{]a_1,b_1[,]a_2,b_2[, \ldots,]a_r,b_r[\}$ تغطي K (إذن $a_1 < 0$ وَ $b_r > 1$) وبحيث

$$\sum_{\nu=1}^{r} (b_\nu - a_\nu) \le \rho. \tag{4.4}$$

إذا إفترضنا أن $b_\nu < a_{\nu+1}$ من أجل $\nu = 1$ ، ... ، $r-1$ فبما أن هذه المجالات تغطي K فينتج أنه من أجل كل ν يقع b_ν وَ $a_{\nu+1}$ في نفس المجال المفتوح I_n^j. إذن $f(b_\nu) = f(a_{\nu+1})$. لنمدد f بِـ 0 على $[-1,0]$ وبِـ 1 على $[1,2]$ ونحتفظ له بنفس الرمز. ينتج مما سبق أن

$$\sum_{\nu=1}^{r} |f(b_\nu) - f(a_\nu)| = 1. \tag{5.4}$$

إعتمادا على (4.4) وَ (5.4) وبما أن $\rho > 0$ كيفي، فإننا نستنتج أن تابع كانتور ولوبيغ **غير مستمر مطلقا** .

نلاحظ، عرضا، طبيعة أخرى مهمة لتابع كانتور ولوبيغ، فبما أن f ثابت على كل مجال مفتوح I_n^j فمشتقه معدوم عند كل نقطة من $[0,1] \setminus K$. إنه، إذن مثال لتابع يتمتع بمشتق معدوم شبه كليا على $[0,1]$ ، أي عدا عند مجموعة صفرية (هي مجموعة كانتور) وهو غير ثابت على المجال $[0,1]$.

4.4 التغيّر المحدود والاستمرار المطلق على المجالات غير المحدودة

1.4.4 **تعريف** • نقول عن تابع معرف على $\mathbb{R}$ إنه ذو تغيّر محدود على $\mathbb{R}$ إذا كان محدود التغيّر على كل مجال متراص من $\mathbb{R}$.

يمكنك أن تثبت أن كل تابع رتيب على $\mathbb{R}$ محدود التغيّر على $\mathbb{R}$. ينتج من هذا أن الفرق بين تابعين رتيبين على $\mathbb{R}$ تابع محدود التغيّر على $\mathbb{R}$.

2.4.4 **مبرهنة • إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على مجال كيفي كان $f+g$ وَ fg كذلك. وإذا كان f مصغورا (مكبورا على التوالي) بعدد موجب (سالب على التوالي) تماما فإن $\frac{1}{f}$ محدود التغيّر.**

الإثبات يترك كتمرين للقاريء.

ينبغي أن نذكر أن محدودية التغيّر على مجال $[a,b]$ تؤدي إلى المحدودية على هذا المجال إلا أن هذا غير وارد على مجال غير محدود، كما يتبين من مثال التابع $f(x)=x$ على $\mathbb{R}$ ؛ إنه محدود التغيّر على $\mathbb{R}$ دون أن يكون محدودا.

في حالة $\mathbb{R}$ يعرف تابع التغيّر الكلي للتابع f بأنه:

$$T_f(x)=\begin{cases} -V_x^0(f), & x<0 \\ V_0^x(f), & x\geq 0 \end{cases}$$

ويعرف التغيّر الكلي للتابع f على $\mathbb{R}$ بأنه العدد $\lim\limits_{\infty} T_f - \lim\limits_{-\infty} T_f$ الذي يمكن أن يكون غير منته.

يعرف التابع R_f المترسّب من f بأن $R_f = T_f - f$. كل من T_f وَ R_f تابع متزايد على $\mathbb{R}$ ولذا يمكن كتابة كل تابع محدود التغيّر على $\mathbb{R}$ كفرق بين تابعين متزايدين.

3.4.4 **تعريف •** نقول عن تابع معرف على $\mathbb{R}$ بأنه مستمر مطلقا على $\mathbb{R}$ إذا كان مستمرا مطلقا على كل مجال محدود من $\mathbb{R}$.

4.4.4 **مبرهنة • إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا على $\mathbb{R}$ كانت التوابع $f+g$ ، fg ، kf ، مع k ثابت، كذلك.**

ثم إذا كان f مستمرا مطلقا على $\mathbb{R}$ كان محدود التغيّر على $\mathbb{R}$.

الإثبات يترك للقاريء.

يمكن طبعا إعطاء تعاريف ونتائج مماثلة للتغيّر المحدود وللاستمرار المطلق بالنسبة إلى مجالات من النوع $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$. يمكن للقاريء إحضار التفاصيل.

تمارين حول التوابع ذات التغيّر المحدود والتوابع المستمرة مطلقا

1.4 أثبت أن كل تابع محدود التغيُّر على مجال $[a,b]$ قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال.

2.4 أثبت أنه إذا كان f وَ g تابعين يتمتعان بتغيّرين محدودين على المجال $[a,b]$ فان التوابع

$f+g$ ، $f-g$ ، fg ، $|f|$ ، kf مع k ثابت

تتمتع بالخاصية نفسها. ثم، إذا وجد عدد m صفته أن $|f| \geq m > 0$ على $[a,b]$ فيكون $\frac{1}{f}$ محدود التغيّر على المجال نفسه.

3.4 أثبت أن كون تابع محدود التغيّر على مجال يستلزم أن هذا التابع محدود على هذا المجال.

4.4 إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على مجال $[a,b]$ فبين أن

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

هل المساواة واردة بصفة عامة؟

5.4 بين أنه إذا كان f وَ g محدودي التغيّر على $[a,b]$ وكان $|f|$ وَ $|g|$ مكبورين على التوالي بِـ A وَ B كان $V_a^b(fg) \leq AV_a^b(g) + BV_a^b(f)$.

6.4 بين أنه إذا كان f محدود التغيّر على $[a,b]$ وكان $|f| \geq m > 0$ فان

$$V_a^b\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m^2} V_a^b(f).$$

7.4 أثبت أن التابع f المعرف على $[-1,1]$ بأن

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^p \sin \frac{1}{x^q} & x \neq 0 \text{ إذا كان } \\ 0 & x = 0 \text{ إذا كان } \end{array} \right.$$

محدود التغيّر إذا كان $p > q > 0$ لكنّه ليس كذلك إذا كان $q \geq p > 0$.

8.4 أثبت أن كل حدودية ذات تغيّر محدود على أي مجال متراص.

9.4 أثبت أن $V_f(P) = M_f(P) + S_f(P)$ مهما كان P من $\mathcal{P}_{a,b}$.

بين أنه إذا كان f محدود التغيّر فان $M_a^b(f)$ وَ $S_a^b(f)$ متنهيان. $M_a^b(f)$ هو التغيّر الكلي الموجب وَ $S_a^b(f)$ هو التغيّر الكلي السالب للتابع f.

10.4 أثبت أنه إذا كان f محدود التغيّر فإن $V_a^b(f) = P_a^b(f) + N_a^b(f)$.

11.4 أثبت أن كل تابع حقيقي ليبشيتزي على مجال $[a,b]$ مستمر مطلقا على هذا المجال.

12.4 ليكن g تابعًا ريمان كمولًا على مجال متراص $[a,b]$ وليكن التابع G المعرف على $[a,b]$ بأن $G(x) = \int_a^x g$. بين أن G مستمر مطلقًا على $[a,b]$.

13.4 أثبت المبرهنة 1.1.3.4 ، أي أثبت أنه إذا كان f وَ g تابعين مستمرين مطلقا على مجال متراص فتكون التوابع

$f+g$ وَ fg وَ kf مع k ثابت

مستمرة مطلقا. وكذلك، إذا كان $f \geq m > 0$ فيكون $\frac{1}{f}$ مستمر مطلقا على المجال نفسه.

14.4 أثبت أن مفهوم الاستمرار المطلق يبقى بدون تغيير إذا استبدلت الفئة المتهية من المجالات غير المتقاطعة الواردة في التعريف بفئة عدودة غير متهية من المجالات غير المتقاطعة واستبدل المجموع المتهي المرفق بها بمجموع غير منته.

15.4 أثبت أنه يمكن تعويض المتباينة $\Sigma_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)| \leq \varepsilon$ الواردة في تعريف الاستمرار المطلق بالمتباينة الاضعف منها $|\Sigma_{i=1}^{n}[f(b_i)-f(a_i)]| \leq \varepsilon$ وهذا دون تغيير معنى التعريف.

16.4 أدرس الاستمرار المطلق على $[a,1]$ مع $0 < a$ للتابع $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$.

17.4 ليكن f وَ g التابعين المعرفين على $]0,1]$ بأن $f(x)=\sqrt{x}$ وَ $g(x)=x^2|\sin\frac{1}{x}|$. بين أن f ، g ، $g \circ f$ مستمرة مطلقا إلا أن $f \circ g$ غير مستمر مطلقا.

18.4 ليكن g تابعا معرفا على $[a,b]$ وصورته هي المجال $[c,d]$ وليكن f تابعا معرفا على $[c,d]$. أثبت أنه إذا كان f وَ g مستمرين مطلقا وكان g رتيبا فان $f \circ g$ مستمر مطلقا.

19.4 ليكن g تابعا معرفا على $[a,b]$ وصورته هي المجال $[c,d]$ وليكن f تابعا معرفا على $[c,d]$. أثبت أنه إذا كان g ليبشيتزيا على $[a,b]$ وكان f مستمرا مطلقا على $[c,d]$ فان $f \circ g$ مستمر مطلقا على $[a,b]$.

الفصل 5

تكامل ستيلجس

1.5 تعميم تكامل ريمان

يعتبر تكامل ريمان المرحلة الأولى في تطور ما يسمى بمفهوم المكاملة. نشرع هنا في المرحلة الثانية وهي تعميم لتكامل ريمان يعود إلى توماس إيان ستيلجس (1856 – 1894 ، هولندي) . يمكن النظر إلى هذا التعميم على أنه طبيعي جدا إذ إنه يعترف بالدور المركزي الذي يلعبه تابع خطي بسيط في تكامل ريمان؛ إنه يقترح استبدال هذا التابع بتابع أعم.

تعتمد التعاريف المختلفة لتكامل ريمان $\int_a^b f$ على مجاميع متهية من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \delta x_i \quad ، \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i \quad \text{أو} \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i$$

حيث $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$ يظهر كمعامل في حدود المجاميع. إذا أدخل في المجاميع السابقة $\delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ بدل δx_i ، حيث g تابع كيفي إلى حد ما فإننا نحصل على تعميم لإنشاء ريمان، وهو يعطي تكامل ريمان في الحالة الخاصة حيث $g(x) = x$.

2.5 تكامل ستيلجس

ليكن f وَ g تابعين حقيقيين معرفين على مجال $I = [a, b]$. وليكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما للمجال I وَ $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ تقسيما وسطا نسبة إلى P ، أي أن:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

نعرف **مجموع ستيلجس** للتابع f نسبة إلى g على I الموافق للتقسيم P وللتقسيم الوسط Q بأنه العدد:

$$S(f, g, P, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i, \quad \delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1}).$$

لاحظ التشابه بين $S(f, g, P, Q)$ وَ مجموع ريمان $R(f, P, Q)$ في التعريف الثاني لتكامل ريمان.

1.2.5 **تعريف** • نقول عن عدد S إنه تكامل ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على $I = [a, b]$ ونقول عن f إنه **ستيلجس كمول نسبة إلى** g **على** I إذا أمكن مرافقة كل $\varepsilon > 0$ بعدد $\rho > 0$ صفته أن

$$|S(f, g, P, Q) - S| \le \varepsilon, \;\; \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}, \;\; \delta P \le \rho, \;\; \forall \in \mathcal{W}(P).$$

يمكن البرهان على أن S ، إن وجد، وحيد؛ فيرمز إليه بـ $\int_a^b f\, dg$ أو $(S)\int_a^b f\, dg$.

يمكن النظر إلى تكامل ستيلجس بأنه «نهاية» مجاميع ستيلجس عندما يؤول δP ، وسيط التقسيم P ، إلى صفر. ونكتب رمزيا:

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{\delta P\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i.$$

ونكمل العريف بأن نضع $\int_b^a f\,dg = -\int_a^b f\,dg$ إذا كان $b>a$ وَ $\int_a^a f\,dg = 0$. نسمي التابع f **بالتابع المكمَل** ونسمي التابع g **بالتابع المكامِل**.

2.2.5 **مثال** • ليكن f تابعا حقيقيا كيفيا وَ $g=k$ تابعا ثابتا على $[a,b]$. عندئذ، من أجل كل تقسيم P وكل تقسيم وسط نسبة إلى P ، لدينا $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1}]=0$. وبالتالي $\int_a^b f\,dg=0$. إذن، كل تابع f ستيلجس كمول على $[a,b]$ نسبة إلى كل تابع مكامِل ثابت وتكامله لستيلجس معدوم.

3.2.5 **مثال** • ليكن $f=k$ تابعا ثابتا على $[a,b]$ وَ g تابعا كيفيا على هذا المجال. عندئذ، من أجل كل تقسيم P وأي تقسيم وسط نسبة إليه، لدينا $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta g_i = k\sum\limits_{i=1}^{n}[g(x_i)-g(x_{i-1}]$. وبتالي $\int_a^b k\,dg = k[g(b)-g(a)]$. وبصفة خاصة، من أجل $k=1$ فبكتابة $1dg=dg$ ، نرى أن $\int_a^b dg = g(b)-g(a)$ ولدينا العلاقة $\int_a^b k\,dg = k\int_a^b dg$.

4.2.5 **تعريف** • ليكن f وَ g تابعين معرفين على $[a,b]$. نقول عن مجموعة كل مجاميع ستيلجس $S(f,g,P,Q)$ ، الموافقة لكل زوج من التقسيمات والتقسيمات الوسطى نسبة إليها، إنا لكوشي إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0,\ |S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')|\le\varepsilon,$$
$$\forall P',\ \forall P''\in\mathcal{P}_{a,b},\delta P'\le\rho,\delta P''\le\rho,\ \forall Q'\in\mathcal{W}(P'),\ \forall Q''\in\mathcal{W}(P'').$$

5.2.5 **مبرهنة** • حتى يكون التابع f ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع g على مجال $[a,b]$ يلزم ويكفي أن تكون مجموعة مجاميع ستيلجس $S(f,g,P,Q)$ لكوشي.

6.2.5 **الإثبات** • من السهل البرهان على أن القابلية للمكاملة حسب ستيلجس تستلزم أن مجموعة مجاميع ستيلجس لكوشي. ولإثبات العكس نفرض أن مجموعة مجاميع ستيلجس لكوشي ونأخذ التقسيمات P_n ، $n=1$ ، 2 ، ... ، المعطاة عناصرها بأن $x_i = a+\frac{i(b-a)}{n}$ والتقسيمات الوسطى نسبة إليها $Q_n=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ حيث $\xi_i=x_i$ من أجل $i=1$ ، ... ، n. واضح عندئذ أن متتالية مجاميع ستيلجس $\{S_n\}\doteq\{S(f,g,P_n,Q_n)\}$ لكوشي في $\mathbb{R}$ وهي لهذا تتمتع بنهاية L. ليكن $\varepsilon>0$. يوجد عندئذ عدد طبيعي n_0 بحيث

$$|S_n-L| = |S(f,g,P_n,Q_n)-L|\le\frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall n\ge n_0. \tag{1.5}$$

وبما أن مجموعة مجاميع ستيلجس لكوشي فمن أجل العدد ε المثبت آنفا، يوجد $\rho>0$ بحيث:

$$|S(f,g,P',Q')-S(f,g,P'',Q'')|\le\frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall P',P''\in\mathcal{P}_{a,b},$$
$$\delta P'\le\rho,\delta P''\le\rho,\forall Q'\in\mathcal{W}(P'),\ \forall Q''\in\mathcal{W}(P'').$$

ليكن الآن n_1 عددا طبيعيا أكبر من n_0 وبحيث $\rho\ge\frac{b-a}{n_1}$. عندئذ، من أجل $n\le n_1$ ، يحقق التقسيمان P_n وَ Q_n المتباينة (1.5) وكذلك $\rho\ge\frac{b-a}{n}=\delta P_n$. عندها، إذا كان P تقسيما ما للمجال $[a,b]$ ، وسيطه $\rho>\delta P$ ، وكان Q تقسيما وسطا نسبة إليه، فمن أجل $n\le n_1$ يكون لدينا:

$$|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P_n,Q_n)|\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ومنه، بأخذ (1.5) بعين الإعتبار مع $n_1\leq n$:

$$\begin{aligned}|S(f,g,P,Q)-L| &= |S(f,g,P,Q)-S_n+S_n-L|\\ &\leq \varepsilon,\ \forall P\in\mathcal{P}_{a,b}, \delta P\leq\rho,\ \forall Q\in\mathcal{W}(P).\end{aligned}$$

3.5 بعض الشروط الكافية للقابلية للمكاملة حسب ستيلجس

1.3.5 **مبرهنة** • إذا كان f مستمرا على $[a,b]$ وكان g متزايدا على المجال نفسه فإن التابع f ستيلجس كمول على $[a,b]$ نسبة إلى g .

2.3.5 **الإثبات** • ليكن $\varepsilon>0$. بما أن استمرار f يقتضي استمراره المنتظم على $[a,b]$ فيوجد $\rho>0$ بحيث:

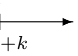
$$|f(\xi')-f(\xi'')|\leq\varepsilon,\ \forall\xi',\ \forall\xi''\in[a,b],\ |\xi'-\xi''|\leq\rho.$$

ليكن $P'=\{x'_0,x'_1,\ldots,x'_l\}$ وَ $P''=\{x''_0,x''_1,\ldots,x''_m\}$ تقسيمين للمجال $[a,b]$ بحيث $\rho\geq\delta P'$ وَ $\rho\geq\delta P'$ وليكن $Q'=\{\xi'_1,\ldots,\xi'_l\}$ وَ $Q''=\{\xi''_1,\ldots,\xi''_m\}$ تقسيمين وسطين نسبة إليهما. إذا كان $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ هو التقسيم $P'\cup P''$ وكان $Q=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ تقسيما وسطا نسبة إلى P فيمكننا تقدير العبارة $|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P',Q')|$ كالتالي: لننظر إلى القطعة $[x'_{i-1}-x'_i]$ من قطع التقسيم P'. إذا كانت هذه القطعة لا تحتوي بداخلها على أية نقطة من التقسيم P فهي تشكل قطعة $[x_{j-1},x_j]$ (j يختلف على العموم عن i) من التقسيم P وعلى هذه القطعة لدينا:

$$\begin{aligned}&|f(\xi_j)[g(x_j)-g(x_{j-1})]-f(\xi'_j)[g(x'_i)-g(x'_{i-1})]|\\ &\qquad=|f(\xi_j)-f(\xi'_j)||[g(x'_i)-g(x'_{i-1})]\\ &\qquad\leq\varepsilon[g(x'_i)-g(x'_{i-1})].\end{aligned}$$

وهذا لأن $|\xi_j-\xi'_i|\leq\delta P'\leq\rho$.

أمّا إذا كانت القطعة $[x'_{i-1},x'_i]$ تحتوي بداخلها على نقط x_j ، ... ، x_{j+k-1} من P (أنظر الشكل) فعلى هذه القطعة لدينا:



$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{p=1}^{k}f(\xi_{j+p})[g(x_{j+p})-g(x_{j+p-1})]-f(\xi'_j)[g(x'_i)-g(x'_{i-1})]\Big|\\ &=\Big|\sum_{p=0}^{k}f(\xi_{j+p})[g(x_{j+p})-g(x_{j+p-1})]-f(\xi'_i)\sum_{p=0}^{k}[g(x_{j+p})-g(x_{j+p-1})]\Big|\\ &=\sum_{p=0}^{k}|f(\xi_{j+p})-f(\xi'_i)|[g(x_{j+p})-g(x_{j+p-1})]\\ &\leq\varepsilon\sum_{p=0}^{k}[g(x_{j+p})-g(x_{j+p-1})]\leq\varepsilon[g(x'_i)-g(x'_{i-1})]\end{aligned}$$

وهذا لأن $|\xi_{j+p}-\xi'_i|\leq\delta P'\leq\rho$ من أجل $p=0$ ، ... ، $p=k$.

ويمكننا بالطريقة نفسها تقدير العبارة $|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P'',Q'')|$. هذا يؤدي إلى أن كلا من $|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P',Q')|$ وَ $|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P'',Q'')|$ أقل من $\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\delta g_i=\varepsilon[g(b)-g(a)]$. إذن:

$$|S(f,g,P'',Q'')-S(f,g,P',Q')| \le 2\varepsilon[g(b)-g(a)].$$

الأمر الذي يبين أن مجموعة مجاميع ستيلجس لكوشي.

3.3.5 **تمرين •** أثبت النتيجة نفسها من أجل f مستمر وَ g محدود التغيّر.

4.3.5 **مثال •** بما أن x مستمر وَ x^2 متزايد على $[0,1]$ فان التكامل $\int_0^1 x\,dx^2$ موجود. لتعيين قيمته، نعتبر التقسيم $P_n=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ حيث $x_i=\frac{i}{n}$ مع $i=0$ ، 1 ، ... ، n والتقسيم الوسط $Q_n=\{x_1,\ldots,x_n\}$. لدينا:

$$\begin{aligned} S(x,x^2,P_n,Q_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i[x_i^2-x_{i-1}^2] = \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i[i^2-(i-1)^2] \\ &= \tfrac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}[2i^2-i] = \tfrac{1}{n^3}\left[2\tfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)-\tfrac{n(n+1)}{2}\right] \\ &= \tfrac{(n+1)}{6n^2}(4n-1) \end{aligned}$$

ومنه

$$\int_0^1 x\,dx^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2}=\frac{2}{3}.$$

إننا نعرف بأن كل تابع مستمر على مجال متراص ريمان كمول على هذا المجال. وبما أن تكامل ريمان هو بكل بساطة تكامل ستيلجس من أجل $g(x)=x$ فقد نميل إلى التعميم ونخمن أن كل تابع مستمر يتمتع بتكامل لستيلجس نسبة إلى أي تابع مكامِل. إلا أنه من المدهش أن هذا غير صحيح. إن استمرار التابع المكمَل والتابع المكامِل غير كافيين لضمان وجود تكامل ستيلجس كما يبينه المثال التالي:

5.3.5 **مثال •** ليكن f وَ g التابعين المعرفين على $[0,1]$ بأن:

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{إذا كان } x\in\,]0,1] \\ 0 & \text{إذا كان } x=0 \end{cases}$$

ولعتبر، من أجل كل n ، التقسيمين

$$P_1=\left\{0,\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\right\} \quad \text{و} \quad Q_1=\left\{\frac{1}{2n\pi},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,1\right\}$$

واضح أن $\delta P_1=\frac{1}{n}$ وبما أن $g(\frac{1}{2n\pi})=g(0)$ فإن:

$$S(f,g,P_1,Q_1)=\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big)\Big[g\Big(\frac{i}{n}\Big)-g\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big].$$

لنعتبر الآن التقسيم P_2 والتقسيم الوسط نسبة إليه Q_2 المعطيين بأن:

$$P_2=\left\{0,\tfrac{2}{(8n+1)\pi},\tfrac{2}{8n\pi},\tfrac{2}{(8n-1)\pi},\cdots,\tfrac{2}{(4n+1)\pi},\tfrac{2}{4n\pi},\tfrac{1}{2n\pi},\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n},\ldots,1\right\}$$

وَ

$$Q_2=\left\{\tfrac{2}{(8n+1)\pi},\tfrac{2}{8n\pi},\tfrac{2}{(8n-1)\pi},\cdots,\tfrac{2}{(4n+1)\pi},\tfrac{2}{4n\pi},\tfrac{1}{2n\pi},\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n},\ldots,1\right\}.$$

وبما أن $g(0)=g\Big(\frac{2}{4n\pi}\Big)=g\Big(\frac{2}{(8n+2)\pi}\Big)=0$ فإن

$$\left.\begin{aligned} &S(f,g,P_2,Q_2)-S(f,g,P_1,Q_1) \\ &\quad=\textstyle\sum_{i=0}^{4n+1} f\Big(\frac{2}{(4n+i)\pi}\Big)\Big[g\Big(\frac{2}{(4n+i)\pi}\Big)-g\Big(\frac{2}{(4n+i+1)\pi}\Big)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

لاحظ أن المساهمة تأتي فقط من القطعة الأولى من التقسيم P_1 ، كل الحدود المتبقاة تختصر.

يمكن بسهولة اختصار وتقدير الطرف الأيمن من (2.5) . بما أن $f\big(\frac{2}{2p\pi}\big)=g\big(\frac{2}{2p\pi}\big)=0$ مهما كان العدد الطبيعي p وبما أن، تعريفا، $g(x)=f(x)$ مهما كان x فإن

$$\begin{aligned} S(f,g,P_2,Q_2)-S(f,g,P_1,Q_1) &= \sum_{p=0}^{2n}\left[f\left(\tfrac{2}{(4n+2p+1)\pi}\right)\right]^2 \\ &= \tfrac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{2n}\tfrac{1}{4n+2p+1} \\ &\geq \tfrac{2}{\pi}\tfrac{2n+1}{4n+4n+1} > \tfrac{1}{2\pi},\ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

هذا يعني أن مجموعة مجاميع ستيلجس ليست لكوشي ولهذا فالتكامل $\int_0^1 f\,dg$ غير موجود.

تحت شروط معينة، توجد علاقة بسيطة بين تكاملي ريمان وستيلجس، غير العلاقة المتمثلة في أن تكامل ريمان حالة خاصة لتكامل ستيلجس.

6.3.5 **مبرهنة** • إذا كان f ريمان كمولا على $[a,b]$ وكان g يتمتع بمشتق g' مستمر على المجال نفسه فإن $\int_a^b fg'$ وَ $\int_a^b f\,dg$ موجودان وهما متساويان.

7.3.5 **الإثبات** • ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن g' مستمر بانتظام على $[a,b]$ وبما أن fg' ريمان كمول فيوجد عدد $\rho > 0$ بحيث

$$|g'(\xi)-g(\xi')| \leq \varepsilon, \quad |R(fg',P,Q)-\textstyle\int_a^b fg'| \leq \varepsilon$$
$$\forall \xi,\ \forall \xi' \in [a,b], |\xi-\xi'| \leq \rho,\ \forall P \in \mathcal{P}_{a,b}, \delta P \leq \rho,\ \forall Q \in \mathcal{W}(P).$$

لنعتبر عندئذ مجموع ستيلجس الموافق للتقسيم $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ مع $\delta P \leq \rho$ وتقسيم وسط نسبة إليه $Q=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. بما أن g قابل للإشتقاق على كل قطعة $[x_{i-1},x_i]$ من قطع P فتوجد مجموعة أعداد $Q=\{\xi_1^\star,\xi_1^\star,\ldots,\xi_n^\star\}$ بحيث

$$\delta g_i = g'(\xi_i^\star)\delta x_i, \qquad x_{i-1} < \xi_i^\star < x_i,\ \forall n=1,2,\ldots,n.$$

ينتج عندئذ أن

$$|R(fg',P,Q)-S(f,g,P,Q)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g'(\xi_i)-g(\xi_i^\star)]\delta x_i\right| \leq M(b-a)\varepsilon$$

حيث يشير M إلى كابر لِـ $|f|$. هذا يستلزم بسهولة وجود $\int_a^b f\,dg$ وتساويه مع $\int_a^b fg'$.

8.3.5 **مثال** • تأتي قيمة تكامل المثال 4.3.5 مباشرة من النتيجة السابقة. لدينا:

$$\int_0^1 x\,dx^2 = \frac{2}{3}.$$

4.5 ثنائية خطية تكامل ستيلجس

1.4.5 **مبرهنة** • إذا كان f_1 وَ f_2 تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى تابع g على $[a,b]$ فإن التابع

$k_1f_1+k_2f_2$ حيث k_1 وَ k_2 ثابتان

ستيلجس كمول نسبة إلى g ولدينا:

$$\int_a^b (k_1f_1+k_2f_2)\,dg = k_1\int_a^b f_1\,dg + k_2\int_a^b f_2\,dg.$$

2.4.5 **الإثبات** • يترك للقاريء كتمرين.

3.4.5 **مبرهنة ←** إذا كان التابع f ستيلجس كمولا نسبة إلى g_1 وَ g_2 على $[a,b]$ فانه ستيلجس كمول نسبة إلى $k_1g_1 + k_2g_2$ على نفس المجال ولدينا:

$$\int_a^b f\,d(k_1g_1 + k_2g_2) = k_1\int_a^b f\,dg_1 + k_2\int_a^b f\,dg_2.$$

4.4.5 **الإثبات ←** ينتج مباشرة من تعريف تكامل ستيلجس ومن العلاقة الواضحة:

$$S(f, k_1g_1 + k_2g_2, P, Q) = k_1S(f, g_1, P, Q) + k_2S(f, g_2, P, Q).$$

5.4.5 **ملاحظة ←** لنذكّر أنه إذا كان g محدود التغيّر على $[a,b]$ فيمكن كتابته على الشكل $g = g_1 - g_2$ مع g_1 وَ g_2 تابعين متزايدين. بما أن $\int_a^b f\,dg_1$ وَ $\int_a^b f\,dg_2$ موجودين، من أجل f مستمر، وهذا وفقا للمبرهنة 1.3.5 ، فينتج من المبرهنة 1.4.5 أن f ستيلجس كمول نسبة إلى $g_1 - g_2$ ، أي أن $\int_a^b f\,dg$ موجود إذا كان f مستمرا وكان g محدود التغيّر.

6.4.5 **مجال المكاملة ←** إن العلاقة البسيطة التي تربط تكاملات ريمان على مجالات متجاورة مع تكامل ريمان على اتحاد هذه المجالات لا تعمّ إلا جزئيا إلى تكامل ستيلجس.

7.4.5 **مبرهنة ←** إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ وكان c بحيث $b > c > a$ فإنّ f ستيلجس كمول نسبة إلى نفس التابع على $[a,c]$ وَ $[c,b]$. ولدينا:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg. \tag{3.5}$$

8.4.5 **الإثبات ←** ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد $\rho > 0$ بحيث:

$$\left.\begin{aligned} &|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P^\star,Q^\star)|\le\varepsilon,\ \forall P,P^\star\in\mathcal{P}_{a,b},\\ &\delta P\le\rho,\delta P^\star\le\rho,\ \forall Q\in\mathcal{W}(P),\ \forall Q^\star\in\mathcal{W}(P^\star).\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

ليكن P_1 وَ $P_1^\star$ تقسيمين للمجال $[a,c]$ مع $\rho>\delta P_1$ وَ $\rho>\delta P^\star$ وَ Q_1 وَ $Q_1^\star$ تقسيمين وسطين نسبة إليهما على التوالي. وليكن كذلك P_2 تقسيما للمجال $[c,b]$ بحيث $\delta P_1>\delta P_2$ وَ $\delta P_1^\star>\delta P_2$ وَ Q_2 تقسيما وسطا نسبة إليه. واضح أن $P=P_1\cup P_2$ وَ $P^\star=P_1^\star\cup P_2$ تقسيمين لِـ $[a,b]$ مع $\delta P_1=\delta P$ وَ $\delta P_1^\star=\delta P^\star$. ثمّ إن $Q=Q_1\cup Q_2$ وَ $Q^\star=Q_1^\star\cup Q_2$ تقسيمين وسطين نسبة إلى P وَ إلى $P^\star$ على التوالي. من السهل التأكد من أن:

$$\left.\begin{aligned} &S(f,g,P,Q)=S(f,g,P_1,Q_1)+S(f,g,P_2,Q_2)\\ &S(f,g,P^\star,Q^\star)=S(f,g,P_1^\star,Q_1^\star)+S(f,g,P_2,Q_2).\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

ومنه

$$S(f,g,P,Q)-S(f,g,P^\star,Q^\star)=S(f,g,P_1,Q_1)-S(f,g,P_1^\star,Q_1^\star)$$

وبما أن $\rho>\delta P$ وَ $\rho>\delta P^\star$ فإن الطرف الايسر يحقق (4.5). إذن:

$$|S(f,g,P,Q)-S(f,g,P^\star,Q^\star)|\le\varepsilon.$$

هذا يعني أن مجموعة مجاميع ستيلجس للتابع f نسبة إلى g على $[a,c]$ تحقق شرط كوشي. إذن $\int_a^c f\,dg$ موجود. وبكيفية مماثلة تتحقق من وجود $\int_c^b f\,dg$. أما المعادلة (3.5) فتنتج ببساطة من (5.5).

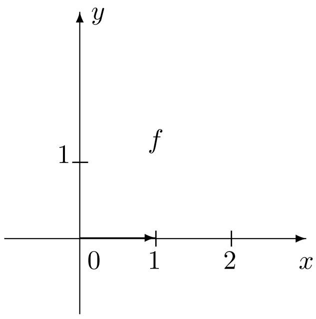
9.4.5 **لازمة** • إذا كان $\int_a^b f\,dg$ موجودا وكان $[c,d]\subset[a,b]$ فإن $\int_c^d f\,dg$ موجود.

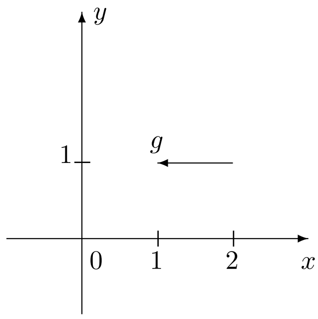
ومن الغريب جدا أنه لا يمكن اتنباط من وجود التكاملين $\int_a^c f\,dg$ وَ $\int_c^b f\,dg$ أن التابع f ستيلجس كمول نسبة إلى g على $[a,b]$ باكمله. لدينا إذن إنحراف عن حالة تكامل ريمان. يبين المثال التالي هذه النقطة.

10.4.5 **مثال** • ليكن f وَ g التابعين المعرفين على المجال $[0,2]$ بأن:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\le 2\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{لما } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{لما } 1<x\le 2.\end{array}\right.$$

وبياناهما كالتالي:





بما أن g ثابت على $[0,1]$ فينتج من المثال 2.2.5 أن التكامل $\int_0^1 f\,dg$ موجود ويساوي 0. وبما أن التابع f ثابت على $[1,2]$ فيبين المثال 3.2.5 أن التكامل $\int_1^2 f\,dg$ موجود وقيمته هي $g(2)-g(1)=1$.

لدراسة قابلية التابع f للمكاملة حسب ستيلجس نسة إلى g على $[0,2]$ ، نأخذ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما كيفيا للمجال $[0,2]$ لا يشمل النقطة 1. عندئذ، يوجد دليل j بحيث $x_j > 1 > x_{j-1}$ وبالتالي $\delta g_j = 1$ وَ $\delta g_i = 0$ من أجل $j \neq i$.

ليكن $Q = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ التقسيم الوسط نسبة إلى P المعطى بأن $\xi_i = x_{i-1}$ من أجل $i = 1$ ، 2 ، ... ، n . ولدينا، بصفة خاصة، $\xi_j < 1$ وَ $f(\xi_j) = 0$. الأمر الذي يعني أن مجموع ستيلجس الموافق لِـ P وَ Q معدوم: $S(f,g,P,Q) = 0$.

لنعتبر الآن التقسيم $Q^\star = \{\xi_1^\star, \xi_2^\star, \ldots, \xi_n^\star\}$ الوسط نسبة إلى P المعطى بأن $\xi_i^\star = x_i$ من أجل $i = 1$ ، 2 ، ... ، n . إذن $\xi_j^\star > 1$ ولدينا $f(\xi_j^\star) = 1$. وبالتالي $S(f,g,P,Q^\star) = 1$.

ينتج من هذا أنه، مهما كان صغرُ δP ، وسيط P ، فإن الإنشاء السابق يعطي

$$|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P,Q^\star)| = 1.$$

هذا يعني أن مجموعة مجاميع ستيلجس غير كوشية. إذن $\int_0^2 f\,dg$ غير موجود.

إن ما يكّمِن ظاهريا، وعلى العموم، وراء عدم وجود التكامل هو تمتع التابعان f وَ g بنقطة تقطع مشتركة.

5.5 المكاملة بالتجزئة

1.5.5 **مبرهنة** • إذا كان f ستلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فإن g ستيلجس كمول نسبة إلى f ولدينا العلاقة:

$$\int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df. \tag{6.5}$$

ليكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تقسيما للمجال $[a,b]$ وَ $Q = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ تقسيما وسطا نسبة إلى P. وليكن التقسيم $Q^\star = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$ المحصل عليه بإضافة النقطين $\xi_0 = a$ وَ $\xi_{n+1} = b$ إلى Q. لاحظ أنه يمكن لنقطتين متتالتين من $Q^\star$ أن تتساويا ولذا فإن $Q^\star$ ليس بتقسيم بالمعنى التقني للكلمة؛ يمكن طبعا في هذه الحالة حذف التكرارات ويمكن للقاريء أن يتأكد من أن بقية البرهان لا تـتأثر بهذا التصحيح. بما أن P تقسيم وسط نسبة إلى $Q^\star$ فواضح أن $2\delta P \geq \delta Q^\star$.

يمكنك أن تتأكد من أن مجموع ستيجس للتّابع f نسبة إلى g الموافق للتقسيم $Q^\star$ وللتقسيم P الوسط نسبة إليه، يحقق:

$$S(f,g,Q^\star,P) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(f,g,P,Q).$$

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $\int_a^b f\,dg$ معرف فيوجد $\rho > 0$ بحيث، من أجل $\rho \geq \delta P$ ، يكون:

$$|S(f,g,P,Q) - \textstyle\int_a^b f\,dg| \leq \varepsilon, \;\; \forall Q \in \mathcal{W}(P).$$

لنفرض أن P يحقق $\frac{1}{2}\rho \geq \delta P$. عندئذ $\rho \geq \delta Q^\star$ ولذا:

$$\left|S(g,f,Q^\star,P) - [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f\,dg\right| \leq \varepsilon.$$

وهذا يثبت بالمرّة وجود التكامل $\int_a^b g\,df$ والعلاقة (6.5) .

يمكن، باستخدام العلاقة (6.5) ، ردّ حساب تكامل ستيلجس للتابع x نسبة إلى تابع مكامِل g إلى حساب تكامل ريمان.

2.5.5 **مثال** • لدينا

$$\int_1^2 x\,de^x = 2e^2 - \int_1^2 e^x\,dx = e^2 + e.$$

3.5.5 **ملاحظة** • تقدم صيغة المكاملة بالتجزئة كيفية لاستنباط بعض الشروط على f وَ g تضمن القابلية للمكاملة وهذا من شروط أخرى. وعلى سبيل المثال، لقد رأينا أنه إذا كان f مستمرا وكان g محدود التغيّر على $[a,b]$ فإن f ستيلجس كمول نسبة إلى g علي المجال نفسه. نستنتج من (6.5) أن $\int_a^b f\,dg$ موجود إذا كان f محدود التغيّر وَ g مستمر.

6.5 تبديل المتغير

1.6.5 **مبرهنة** • ليكن f تابعا ستلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ وليكن h تابعا متزايدا تماما ومستمرا على مجال $[p,q]$ بحيث $h(p)=a$ وَ $h(q)=b$. لنعتبر التابعين F وَ G المعرفين بـ $F=f\circ h$ وَ $G=g\circ h$. عندئذ يكون التابع F ستيلجس كمولا نسبة إلى G على $[p,q]$ ولدينا

$$\int_p^q F\,dG=\int_a^b f\,dg.$$

2.6.5 **الإثبات** • ينتج من الفرضيات الموضوعة على h أن تابعه العكسي موجود وهو تقابل بين $[a,b]$ وَ $[p,q]$. إذا كان $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ تقسيما للمجال $[p,q]$ كان $P'=\{x'_0,x'_1,\ldots,x'_n\}$ مع $x'_i=h(x_i)$ ، $i=0$ ، ... ، n تقسيما للمجال $[a,b]$. وبالعكس، يوافق التقسيم P' للمجال $[a,b]$ التقسيم P للمجال $[p,q]$ تبعا للصّيغة $x_i=h^{-1}(x'_i)$. ليكن $\varepsilon>0$. ينتج من وجود التكامل $\int_a^b f\,dg$ أنه يوجد عدد $\rho'>0$ صفته أن

$$|S(f,g,P',Q')-\int_a^b f\,dg|\le\varepsilon,\ \forall P'\in\mathcal{P}'_{a,b},\ \delta P'\le\rho',\ \forall Q'\in\mathcal{W}(P'). \tag{7.5}$$

وبما أن h مستمر بانتظام على المجال $[p,q]$ فيوجد $\rho>0$ بحيث

$$|h(u)-h(v)|\le\rho',\ \forall u,v\in[p,q],\ |u-v|\le\rho.$$

إذن، إذا كان P تقسيما للمجال $[p,q]$ مع $\delta P\le\rho$ فان التقسيم P' للمجال $[a,b]$ الموافق له يحقق $\delta P'\le\rho'$.

يكتب مجموع ستيلجس لِـ F نسبة إلى G الموافق للتقسيم P والتقسيم Q الوسط نسبة إليه:

$$\begin{aligned} S(F,G,P,Q) &= \sum_{i=1}^n F(\xi_i)[G(x_i)-G(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi'_i)[g(x'_i)-g(x'_{i-1})]=S(f,g,P',Q') \end{aligned}$$

حيث $x'_i=h(x_i)$ وَ $\xi'_i=h(\xi_i)$. ينتج عندئذ من (7.5) أن

$$\left|S(F,G,P,Q)-\int_a^b f\,dg\right|\le\varepsilon \quad \text{إذا كان} \quad \delta P\le\rho \quad \text{و} \quad Q\in\mathcal{W}(P).$$

إذا كان التابع h الوارد في المبرهنة 1.5.5 متقطعا عند نقطة c من $[a,b]$ ، فمن الممكن أن يكونا F وَ G متقطعين عند النقطة c وفي هذه الحالة يتعذر وجود التكامل $\int_a^b F\,dG$. فلا يمكن إذن التخلي عن شرط استمرار التابع h في فرضيات المبرهنة 1.5.5 .

تمارين حول تكامل ستيلجس

1.5 g تابع متزايد على $[a,b]$. أثبت أنه حتى يكون f س ـ كمولا نسبة إلى g يلزم ويكفي أن يتحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\rho > 0$ بحيث $|S(f,g,P,Q) - S(f,g,P,Q^\star)| \leq \varepsilon$ من أجل كل تقسيم P وسيطه $\delta P \leq \rho$ وكل تقسيمين Q وَ $Q^\star$ وسطين نسبة إلى P.

2.5 أوجد قيمة التكامل $\int_0^3 f\,dg$ حيث f تابع مستمر على $[0,3]$ وَ g التابع المعرف بأن $g(x) = 0$ إذا كان $0 \leq x < 2$ وَ $g(2) = k$ وَ $g(x) = 1$ إذا كان $2 < x \leq 3$.

3.5 أثبت، من أجل f مستمر، أن $\int_0^n f\,d[x] = \sum_{i=1}^n f(i)$ ، حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح للعدد x ؛ إنه العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق $x - 1 < [x] \leq x$.

4.5 أحسب التكاملات التالية:

$$1.\ \int_0^4 e^{2x}\,d[x], \quad 2.\ \int_0^3 x^2\,d([x]-x), \quad 3.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\cos x, \quad 4.\ \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,d|\sin x|.$$

5.5 لتكن Ψ الدالة المميزة للاعداد الناطقة التي تنتمي إلى المجال $[a,b]$ وليكن g تابعا بحيث $g(a) \neq g(b)$. أثبت أن التابع Ψ غير ستيلجس كمول على $[a,b]$ نسبة إلى g.

6.5 أثبت أنه إذا كان f مستمرا وَ g محدود التغيُّر على $[a,b]$ فإن

$|\int_a^b f\,dg| \leq MV_a^b(g)$

حيث M كابر لِـ $|f|$ وَ $V_a^b(g)$ التغيُّر الكلي للتابع g على $[a,b]$.

7.5 أثبت أنه إذا كان f يتمتع بتكامل لِستيلجس نسبة إلى كل تابع متزايد g على $[a,b]$ فإنه مستمر على هذا المجال.

8.5 أثبت أنه إذا كان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وكان f تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$ فإن $0 \leq \int_a^b f\,dg$.

9.5 أثبت أنه إذا كان g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وكان f وَ h تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$ وكان $f \leq h$ فإن $\int_a^b f\,dg \leq \int_a^b h\,dg$.

10.5 ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه إذا كان $a \leq c \leq d \leq b$ كان $\int_c^d f\,dg \leq \int_a^b f\,dg$.

11.5 ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f وَ h تابعين ستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أن $|f|$ ، f^2 ، fh توابع كمولة نسبة إلى g علي $[a,b]$ وأن $|\int_a^b f\,dg| \leq \int_a^b |f|\,dg$.

12.5 ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f وَ h تابعين يحققان $m \leq f \leq M$ وَ $0 \leq h$ وستيلجس كمولين نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أن:

1) $m\int_a^b h\,dg \leq \int_a^b fh\,dg \leq M\int_a^b h\,dg$ ؛

2) يوجد $\eta \in [m,M]$ بحيث $\int_a^b fh\,dg = \eta\int_a^b h\,dg$.

13.5 أثبت **مبرهنة القيم الوسطى الأولى:** ليكن g تابعا متزايدا على $[a,b]$ وَ f تابعا مستمرا وَ h تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه يوجد ξ من $[a,b]$ بحيث $\int_a^b fh\,dg = f(\xi)\int_a^b h\,dg$.

14.5 أثبت أنه إذا كان g متزايدا وَ f مستمرا على $[a,b]$ فيوجد $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi)[g(b)-g(a)].$$

15.5 أثبت **مبرهنة القيم الوسطى الثانية:** ليكن g وَ f تابعين مستمرين ومتزايدين على $[a,b]$ وَ h تابعا موجبا وستيلجس كمولا نسبة إلى g على $[a,b]$. أثبت أنه يوجد ξ من $[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b fh\,dg = f(a)\int_a^{\xi} h\,dg + f(b)\int_{\xi}^b h\,dg.$$

16.5 أثبت أنه إذا كان f وَ g متزايدين ومستمرين على $[a,b]$ فيوجد $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f\,dg = f(a)[g(\xi)-g(a)] + f(b)[g(b)-g(\xi)].$$

17.5 بين أنه يمكن لتابع f أن يكون كمولا نسبة إلى تابع g محدود التغيّر دون أن يكون كمولا نسبة إلى g_1 وَ g_2 حيث g_1 وَ g_2 تابعين متزايدين بحيث $g = g_1 - g_2$.
(إرشاد: اعتبر التوابع $f(x) = 0$ على المجال $[-1,0[$ وَ $f(x) = 1$ على $]0,1]$ ؛ $g(x) = 1$ على المجال $[-1,1]$ ؛ $g_1(x) = -1$ على المجال $[-1,0[$ وَ $g_1(x) = 1$ على $]0,1]$ ؛ $g_2 = g_1 - g$.)

18.5 أثبت أنه إذا كان f ستيلجس كمولا نسبة إلى تابع محدود التغيّر على $[a,b]$ فإن f ستيلجس كمول نسبة لكل من تابع التغيّره الكلي T_g وَ التابع الراسب R_g من g على $[a,b]$. ثمّ إن

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dT_g - \int_a^b f\,dR_g.$$

19.5 لنفرض أن $\int_a^b h\,dg$ موجود حيث g محدود ومتزايد وَ h محدود على $[a,b]$. وليكن φ التابع المعرف بـ $\varphi(x) = \int_a^x h\,dg$ من أجل $x \in [a,b]$. أثبت أنه إذا كان f مستمرا على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f\,d\varphi = \int_a^b fh\,dg$.

20.5 ليكن $I = [0,1]$ وَ f تابعا حقيقيا محدود التغيّر على I . لنعتبر h التابع المعرف على I بأن $h(0) = 0$ وَ $h(x) = f(x+0) - f(0)$ من أجل $0 < x < 1$ وَ $h(1) = f(1) - f(0)$. بين أن h محدود التغيّر على I ومن أجل كل تابع g مستمر على I يكون لدينا

$$\int_0^1 g\,df = \int_0^1 g\,dh.$$

21.5 أثبت **متباينة شوارتز** : إذا كان f وَ h مستمرين وَ g متزايدا على $[a,b]$ فان

$$\Big|\int_a^b fh\,dg\Big|^2 \le \Big(\int_a^b f^2\,dg\Big)\int_a^b h^2\,dg.$$

الفصل 6

الجبور والعشائر

1.6 جبر المجموعات

1.1.6 **تعريف •** لتكن X مجموعة وَ $\mathcal{A}$ فئة غير خالية من أجزاء X. نقول عن $\mathcal{A}$ إنها **جبر مجموعات** أو **جبر بوولي**[1] على X إذا حققت ما يلي:

١ - مهما كان A وَ B من $\mathcal{A}$ لدينا $A \cup B \in \mathcal{A}$ ،

٢ - مهما كان A من $\mathcal{A}$ لدينا ${}^cA \in \mathcal{A}$.

يشير الرمز ${}^cA$ إلى متممة A نسبة إلى X. يمكن في التعريف السابق إستبدال الشرط (1) بالشرط:
١ ′ مهما كان A وَ B من $\mathcal{A}$ لدينا $A \cap B \in \mathcal{A}$.

يمكنك أن تتأكد بسهولة من أنه إذا كان $\mathcal{A}$ جبر مجموعات على X فإن (ـه):

١. $\emptyset$ وَ X ينتميان إلى $\mathcal{A}$ ؛

٢. ينتج من كون A_1 ، A_2 ، ... ، A_n تنتمي إلى $\mathcal{A}$ أن $\bigcup_1^n A_i \in \mathcal{A}$ ؛

٣. ينتج من كون A_1 ، A_2 ، ... ، A_n تنتمي إلى $\mathcal{A}$ أن $\bigcap_1^n A_i \in \mathcal{A}$ ؛

٤. إذا كان A وَ B عنصرين من $\mathcal{A}$ كان $A \setminus B \in \mathcal{A}$ ، حيث

$$A \setminus B = A \cap {}^cB = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

2.1.6 **أمثلة •** ا) لتكن X مجموعة غير خالية. تشكل الفئة $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ جبر مجموعات على X .

ب) لتكن المجموعة $\mathbb{R}(\infty) \doteq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. نقول عن جزء من $\mathbb{R}(\infty)$ إنه نصف مغلق من اليمين إذا كان خاليا أو من الشكل $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}(\infty) \mid a < x \leq b\}$ حيث a وَ b عنصران من $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ مع $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. عندئذ تشكل الفئة $\mathcal{A}$ المكونة من الاتحادات المتهية للمجالات نصف المغلقة من اليمين جبر مجموعات على $\mathbb{R}$.

ج) لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية وَ $\mathcal{M}$ مجموعة كل المجالات المفتوحة. إن $\mathcal{M}$ لا تشكل جبر مجموعات على $\mathbb{R}$ لأنها غير مستقرة نسبة إلى عملية الإتمام.

3.1.6 **قضية •** لتكن $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء مجموعة X. يوجد جبر أصغري $\mathcal{A}$ يحتوي على $\mathcal{C}$ (بمعنى أنه إذا كان $\mathcal{B}$ جبرا يحتوي $\mathcal{C}$ فأن $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$).

[1] جورج بوول (1815 – 1864) رياضياتي إنجليزي

الإثبات

لتكن F جماعة كل الجبور $\mathcal{B}$ ، المكونة من أجزاء X ، التي تحتوي على $\mathcal{C}$. إن F غير خالية إذ إنها تشمل $\mathcal{P}(X)$ ، مجموعة أجزاء X. لنضع $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B}\in F} \mathcal{B}$. لدينا $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ ثمّ إن $\mathcal{A}$ يشكل جبرا. وذلك لأنه إذا كان $A \in \mathcal{A}$ وَ $B \in \mathcal{A}$ فإن $A \in \mathcal{B}$ وَ $B \in \mathcal{B}$ مهما كان $\mathcal{B} \in F$ وبما أن $\mathcal{B}$ جبر فلدينا $A \cup B \in \mathcal{B}$ ولذا $A \cup B \in \mathcal{A}$. وكذلك، إذ كان $A \in \mathcal{A}$ كان $A \in \mathcal{B}$ مهما كان $\mathcal{B} \in F$ ولذا $^cA \in \mathcal{B}$ ومنه $^cA \in \mathcal{A}$.

ومن تعريف $\mathcal{A}$ نفسه نرى أنه إذا كان $\mathcal{B}$ جبرا يحتوي على $\mathcal{C}$ فإن $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ إذ إن $\mathcal{B} \in F$.

يدعى الجبر الأصغري الذي يحتوي $\mathcal{C}$ **بالجبر المولد من** $\mathcal{C}$.

4.1.6 **قضية •** ليكن $\mathcal{A}$ جبر مجموعات وَ $\{A_n\}$ متتالية عناصر من $\mathcal{A}$. توجد متتالية $\{B_n\}$ من عناصر $\mathcal{A}$ غير متقاطعة مثنى مثنى وبحيث

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{مع} \quad B_n \subset A_n \quad \text{مهما كان} \quad n \geq 1.$$

(لاحظ أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ لا ينتمي بالضرورة إلى $\mathcal{A}$.)

الإثبات

القضية واضحة إذا كانت المتتالية $\{A_n\}$ منتهية. لنفرض إذن أن المتتالية $\{A_n\}$ غير منتهية. ولتكن المتتالية $\{B_n\}$ المعرفة بالتدريج على النحو:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap {}^c\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right), \ n \geq 2. \end{cases}$$

ينتمي، من أجل كل n ، B_n إلى $\mathcal{A}$ وَ $B_n \subset A_n$ ثمّ إن المجموعات B_n غير متقاطعة. وذلك لأنه من أجل B_n وَ B_m مع $m < n$ لدينا:

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap A_n \cap {}^cA_{n-1} \cap \ldots \cap {}^cA_m \cap \ldots = \emptyset.$$

لدينا طبعا $\bigcup_n B_n \subset \bigcup_n A_n$ إذ إن $B_n \subset A_n$. ليكن الآن $x \in \bigcup_n A_n$. يوجد عندها دليل $n \in \mathbb{N}$ على الأقل بحيث $x \in A_n$. ليكن n_0 أصغر عدد طبيعي بحيث $x \in A_{n_0}$. يمكننا عندئذ أن نكتب

$$x \notin A_{n_0-1} \text{ ، } x \notin A_{n_0-2} \text{ ، } \ldots \text{ ، } x \notin A_1 \text{ ، }$$

ولذا $x \in B_{n_0} = A_{n_0} \cap {}^cA_{n_0-1} \cap \ldots \cap {}^cA_1$. إذن $x \in \bigcup_n B_n$.

2.6 السيغما (σ) جبور أو العشائر

1.2.6 **تعريف •** لتكن X مجموعة. نسمي سيغما (σ) **جبرا** أو **عشيرة** على X كل جبر مجموعات $\mathcal{A}$ على X يتمتع بخاصية **الجمعية العدودة** التي تعني أن اتحاد كل جماعة عدودة من عناصر $\mathcal{A}$ عنصر من $\mathcal{A}$.

ينتج من التعريف السابق أنه إذا كانت $\mathcal{A}$ عشيرة فمن أجل كل متتالية $\{A_n\}$ من عناصرها يكون التقاطع $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ منتميا إلى $\mathcal{A}$.

أمثلة

١. الفئة $\mathcal{P}(X)$ عشيرة على X.

٢. ليكن $X = \mathbb{N}$. تشكل المجموعة

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,3,5,7,\ldots\}, \{2,4,6,8,\ldots\}\}$$

عشيرة على $\mathbb{N}$.

٣. ليكن X فضاء توبولوجيا. لا تشكل الفئة τ لكل أجزاء X المفتوحة عشيرة ولا حتى جبر مجموعات على X إذ إن متممة جزء مفتوح ليس دائما مفتوح.

2.2.6 **ملاحظة** • لتكن $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء مجموعة X. يمكن البرهان على وجود سيغما جبر أصغري $\mathcal{A}$ يحتوي على $\mathcal{C}$.

يدعى هذا السيغما جبر **بالسيغما جبر المولد من** $\mathcal{C}$.

3.6 العشيرة البورلية $\mathcal{B}_\tau(X)$

1.3.6 **تعريف** • ليكن (X,τ) فضاء توبولوجيا. نسمي **العشيرة البوريلية**[2] على X نسبة إلى τ ونرمز لها بِـ $\mathcal{B}_\tau(X)$ العشيرة المولدة من الفئة τ لأجزاء X المفتوحة. ونسمي عناصر هذه العشيرة **بالمجموعات البوريلية**.

2.3.6 **قضية** • إن العشيرة $\mathcal{B}_\tau(X)$ تنطبق مع العشيرة المولدة من $\mathcal{F}$ فئة أجزاء X المغلقة.

الإثبات

لتكن $\mathcal{F}^\star$ العشيرة المولدة من $\mathcal{F}$. إن العشيرة $\mathcal{F}^\star$ تحتوي على τ (إذ إن الفتوحات هي متممات المغلقات) ولذا $\mathcal{F}^\star \supset \mathcal{B}_\tau(X)$. بما أن $\mathcal{B}(X)$ عشيرة تحتوي على $\mathcal{F}$ فإن $\mathcal{B}_\tau(X) \supset \mathcal{F}^\star$. ينتج من هذا أن $\mathcal{F}^\star = \mathcal{B}_\tau(X)$.

4.6 المجموعات G_δ و F_σ

ليكن X فضاء توبولوجيا. نقول عن جزء E من X إنه من نوع G_δ إذا كان $E = \bigcap_1^\infty V_n$ مع V_n أجزاء مفتوحة من X. ونقول عنه إنه من نوع F_σ إذا كان $E = \bigcup_1^\infty F_n$ مع F_n أجزاء مغلقة من X. ترجع هذه المصطلحات إلى هوزدورف (Hausdorff)[3].

لاحظ أن المجموعات من نوعي G_δ وَ F_σ مجموعات بوريلية. وأن متممة جزء من نوع F_σ هو جزء من نوع G_δ والعكس بالعكس.

لاحظ كذلك أن كل جزء مفتوح من نوع G_δ وأن كل جزء مغلق من نوع F_σ.

يمكنك أن تتأكد من أن $F_{\sigma\delta}$ تتكون من التقاطعات العدودة لعناصر من F_σ وأن $G_{\delta\sigma}$ تتكون من الإتحادات العدودة من عناصر G_δ ، وَ $F_{\sigma\delta\sigma}$ تتكون من ... وأن كل المجموعات من هذا النوع بوريلية.

[2] **إميل بوريل** (1871 – 1956) ، **رياضياتي فرنسي**

[3] فليكس هوزدورف (1868 – 1942) ، رياضياتي ألماني

1.4.6 **مثالان** ● ١. ليكن $\mathbb{R}$ مزود بالتوبولوجيا العادية. كل أجزائه المفتوحة من نوع G_δ وكل أجزائه المغلقة من نوع F_σ.

ثمّ إن المجال $]a,b]$ من نوع F_σ إذ إن $]a,b[=\bigcup_1^\infty[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$ ؛ المجال $[a,b[$ من نوع F_σ إذ إن $[a,b[=]a,b[\cup\{a\}$ ؛ المجال $]a,b[$ من نوع G_δ كذلك، إذ إن $[a,b[=\bigcap_1^\infty]a-\frac{1}{n},b[$ ؛ $[a,b]$ من نوع G_δ كذلك إذ إن $[a,b]=\bigcap_1^\infty]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}[$.

٢. ليكن $\mathbb{R}$ مزود بالتوبولوجيا العادية وَ $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الناطقة. واضح أن $\mathbb{Q}$ من نوع F_σ. يمكن البرهان على أنه ليس من نوع G_δ بالاعتماد على مبرهنة **النوع لبار** (Baire)[4] التي تنص على أنه لا يمكن كتابة فضاء متري تام كاتحاد عدود لأجزاء تكون داخليات ملاصقاتها خالية. وفي الحقيقة، إذا أشرنا بـ E^o إلى داخلية مجموعة E ، وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في E ، وإذا إفترضنا أن $\mathbb{Q}$ من نوع G_δ ، أي أنه يكتب $\mathbb{Q}=\bigcap_1^\infty V_i$ مع V_i مفتوحات من $\mathbb{R}$ فلدينا $^c\mathbb{Q}=\bigcup_1^\infty {}^cV_i$. لكن ^cV_i جزء مغلق لا يحتوي على أي عدد ناطق. وبالتالي $({}^cV_i)^o=\emptyset$. عندئذ يكون لدينا $\mathbb{R}=\{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}\}\cup\{\bigcup_1^\infty {}^cV_i\}$ وهو إتحاد عدود لمجموعات مغلقة داخلياتها خالية؛ وهذا تناقض لأن $\mathbb{R}$ فضاء متري تام.

5.6 الفئات الرتيبة

1.5.6 **تعريف** ● لتكن $\{A_n\}$ متتالية **متزايدة** من أجزاء X. نسمي **نهاية** هذه المتتالية **اتحاد** الأجزاء A_n. إننا نضع:

$$A_\infty=\lim_\uparrow A_n=\bigcup_n A_n \text{ حيث } A_{n+1}\supset A_n.$$

وكذلك، إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية **متناقصة** من أجزاء X فنسمي **نهاية** هذه التتالية **تقاطع** الأجزاء B_n :

$$B_\infty=\lim_\downarrow B_n=\bigcap_n B_n \text{ حيث } B_{n+1}\subset B_n.$$

نقول عن متتالية مجموعات إنها **رتيبة** إذا كانت إما **متناقصة أو متزايدة**.

2.5.6 **تعريف** ● نسمي **فئة رتيبة** كل فئة $\mathcal{M}$ ، من أجزاء X ، تشمل على نهايات كل متتالياتها الرتيبة. أي أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية رتيبة عناصرها من $\mathcal{M}$ فنهايتها تنتمي إلى $\mathcal{M}$.

3.5.6 **قضية** ● كل عشيرة فئة رتيبة.

الإثبات

لتكن $\mathcal{A}$ عشيرة وَ $\{A_n\}$ متتالية متزايدة من عناصرها. بما أن $\mathcal{A}$ تتمتع بخاصية الجمعية العدودة فإن

$$\lim\uparrow A_n=\bigcup A_n\in\mathcal{A}.$$

أما حالة المتتاليات المتناقصة فتعالج باستخدام كون العشيتة مغلقة بالنسبة إلى التقاطعات العدودة.

4.5.6 **قضية** ● **هو فئة رتيبة كل تقاطع فئات رتيبة.**

[4] روني ل. بار (1874 – 1932) ، رياضياتي فرنسي

الإثبات

واضح.

ينتج من هذا أنه من أجل كل فئة $\mathcal{Z}$ من المجموعات الجزئية من X ، توجد فئة رتيبة أصغرية $\mathcal{M}_0$ تحتوي على $\mathcal{Z}$. نقول عن $\mathcal{M}_0$ بأنها الفئة الرتيبة **المولدة** من $\mathcal{Z}$.

5.5.6 **مبرهنة ●** ليكن $\mathcal{J}$ جبرا من أجزاء X ولنشير بِـ $\mathcal{M}$ إلى الفئة الرتيبة المولدة من $\mathcal{J}$. عندئذ، إذا كان $\mathcal{B}$ يشير إلى العشيرة الولدة من $\mathcal{J}$ ، يكون $\mathcal{B} = \mathcal{M}$.

الإثبات

بما أن $\mathcal{B}$ عشيرا فهي فئة رتيبة، وفقا لِـ 4.1.10 ، وبما أنها تحتوي على $\mathcal{J}$ فهي تحتوي على أصغر فئة رتيبة تحتوي $\mathcal{J}$ ، إذن $\mathcal{B} \supset \mathcal{M}$. لإثبات العكس نعتبر، من أجل كل $A \in \mathcal{P}(X)$ ، الفئة:

$$\Phi(A) = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid A \cup B,\ A - B.\ B - A \in \mathcal{M}\}. \tag{1.6}$$

يمكنك أن تلاحظ بسهولة أن $B \in \Phi(A)$ إذا وفقط إذا كان $A \in \Phi(B)$.

لنثبت A ولنبرهن على أن $\Phi(A)$ فئة رتيبة. وفي حقيقة الأمر، إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية متزايدة من عناصر $\Phi(A)$ تكون:

$$\left.\begin{array}{ll}\{A \cup B_n\} & \text{متتالية متزايدة من عناصر } \mathcal{M}\\ \{B_n - A\} & \text{متتالية متزايدة من عناصر } \mathcal{M}\\ \{A - B_n\} & \text{متتالية متناقصة من عناصر } \mathcal{M}\end{array}\right\}$$

فتنتمي إذن نهاياتها إلى $\mathcal{M}$ ، أي أن

$\mathcal{M} \ni \lim_{\uparrow}(A \cup B_n) = A \cup \lim_{\uparrow} B_n$ ، $\mathcal{M} \ni \lim_{\uparrow}(B_n - A) = \lim_{\uparrow} B_n - A$ ،

$\mathcal{M} \ni \lim_{\downarrow}(A - B_n) = A - \lim_{\uparrow} B_n$ ،

إذن $\Phi(A) \ni \lim_{\uparrow} B_n$. يمكنك أن تتأكد بنفس الأسلوب من أن $\Phi(A)$ يحتوي كذلك نهايات متتالياته المتناقصة.

إذا كان $A_0 \in \mathcal{J}$ كان $B_0 \in \Phi(A_0)$ مهما كان $B_0 \in \mathcal{J}$. إذن $\Phi(A_0)$ فئة رتيبة تحتوي $\mathcal{J}$ وبالتالي $\Phi(A_0) \supset \mathcal{M}$. وبعبارة أخرى $B \in \Phi(A_0)$ مهما كان $A_0 \in \mathcal{J}$ ومهما كان $B \in \mathcal{M}$.

ينتج عندئذ من التكافؤ الذي ذكر آنفا أن $A_0 \in \Phi(B)$ مهما كان $B \in \mathcal{M}$ ومهما كان $A_0 \in \mathcal{J}$. هذا يعني أنه من أجل $B \in \mathcal{M}$ مثبت لدينا $\Phi(B) \supset \mathcal{J}$. وبما أن $\Phi(B)$ فئة رتيبة فإن $\Phi(B) \supset \mathcal{M}$. برهنّا إذن على:

$$\text{مهما كان } B \text{ و } B' \text{ من } \mathcal{M} \text{ كان } B \cup B' \text{ ، } B' - B \text{ ، } \mathcal{M} \ni B - B'. \tag{2.6}$$

عندئذ بأخذ $B' = X$ نحصل على أن $\mathcal{M} \ni {}^cB$ من أجل $\mathcal{M} \ni B$. وكذلك $\mathcal{M} \ni B_1 \cup B_2$ من أجل B_1 وَ B_2 من $\mathcal{M}$. هذا يثبت أن $\mathcal{M}$ جبر مجموعات أو جبر لبوول.

ينتج من التوطئة 7.1.10 الموالية أن $\mathcal{M}$ عشيرة. إنها تحتوي إذن على العشيرة $\mathcal{B}$ المولدة من $\mathcal{J}$. إذن $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

6.5.6 **توطئة ● ليكن A جبرا لبوول. إذا كان مغلقا نسبة إلى النهايات المتزايدة (بمعنى أنه من أجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ عناصرها من A تكون النهاية $\lim_{\uparrow} A_n$ منتمية إلى A) فإنه عشيرة.**

الإثبات

لتكن $\{B_n\}$ متتالية كيفية من عناصر $\mathcal{A}$. بوضع $A_n = \bigcup_{1\le p\le n} B_p$ نرى أن هذه المتتالية متزايدة وبالتالي:

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n = \lim_{\uparrow} A_n \in \mathcal{A}.$$

الأمر الذي يبين أن $\mathcal{A}$ عشيرة.

6.6 عشائر الجداء

لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين مزودتين بعشيرتين $\mathcal{A}_1$ وَ $\mathcal{A}_2$. نرمز بِـ X إلى الجداء الدكارتي لِـ X_1 وَ X_2 .

1.6.6 تعريف • نسمي **مستطيلا** كل جزء R من X من الشكل

$$R = A_1 \times A_2 \quad \text{مع} \quad A_i \in \mathcal{A}_i \text{ ، } i = 1 \text{ ، } 2.$$

نشير بِـ $\mathcal{R}$ إلى مجموعة كل المستطيلات.

2.6.6 تعريف • نسمي **عشيرة جداء** العشيرة التي يشار إليها بِـ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ والمولدة من $\mathcal{R}$.

3.6.6 تعريف • نسمي **مجموعة أساسية** كل إتحاد منته من المستطيلات **غير المتقاطعة**.

يرمز بِـ $\mathcal{E}$ إلى فئة المجموعات الأساسية.

4.6.6 قضية • تشكل فئة المجموعات الأساسية جبرا بووليا (جبر مجموعات).

الإثبات

لنلاحظ أولا أن إتحاد عدد منته من المجموعات الأساسية غير المتقاطعة مجموعة أساسية.

ليكن $R = A_1 \times A_2$ وَ $R' = A'_1 \times A'_2$ مستطيلين. عندئذ:

$${}^cR = ({}^cA_1 \times X_2) \cap (X_1 \times {}^cA_2)$$

ومنه $R' - R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ حيث

$$R_1 = ({}^cA_1 \cap A'_1) \times (A_2 \cap A'_2), \qquad R_2 = ({}^cA_1 \cap A'_1) \times ({}^cA_2 \cap A'_2),$$
$$R_3 = ({}^cA_1 \cap A'_1) \times ({}^cA_2 \cap A'_2),$$

وبالتالي

$$R' - R \quad \text{مجموعة أساسية.} \tag{3.6}$$

لتكن $E = R \cup R_4$ مجموعة أساسية، اتحاد مستطيلين غير متقاطعين. لدينا:

$$R' - E = (R' - R) - R_4 = (R_1 \cup R_2 \cup R_3) - R_4 = (R_1 - R_4) \cup (R_2 - R_4).$$

بتطبيق (1.10) نحصل على أن:

$$R' - E \quad \text{مجموعة أساسية إذا كان } E \in \mathcal{E} \text{ و } R' \in \mathcal{R}. \tag{4.6}$$

ليكن $\mathcal{E} \ni E'$. عندئذ $E' = \bigcup R_i$ (مع المجموعات R_i غير متقاطعة). إذن:

$$\mathcal{E} \ni (E' - E) \quad \text{مهما كان } E \text{ و } E' \text{ من } \mathcal{E}. \tag{5.6}$$

بأخذ $E' = X_1 \times X_2$ ، نحصل على أن $\mathcal{E}$ مغلقة نسبة إلى الإتمام. ثمّ، بما أن

$$(A_1 \times A_2) \cap (A'_1 \times A'_2) = (A_1 \cap A'_1) \times (A_2 \times A'_2),$$

فنرى أن تقاطع مستطيلين مستطيل؛ وبصفة أعم:

$$\text{إذا كان } \mathcal{E} \ni E \text{ وكان } \mathcal{E} \ni E' \text{ كان } \mathcal{E} \ni E \cap E'. \tag{6.6}$$

وفي الحقيقة، إذا كان $E = \cup R_j$ وَ $E' = \cup R'_k$ كان $E \cap E' = \bigcup_{j,k} (R_j \cap R'_k)$ (مع R_j وَ R'_k غير متقاطعين).

وأخيرا:

$$E \cup E' = (E - E') \cup (E' - E) \cup (E \cap E'). \tag{7.6}$$

إن المجموعات الموجودة في الطرف اليسر مجموعات أساسية وهذا وفقا للعلاقتين (2.10) وَ (4.6) وهما غير متقاطعين. إذن $\mathcal{E} \ni E \cup E'$ ، أي أن $\mathcal{E}$ مغلق نسبة إلى الإتحاد.

5.6.6 **لازمة ● إن العشيرة $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ هي الفئة الرتيبة المولدة من المجموعات الأساسية.**

الإثبات

ينتج مباشرة من المبرهنة 6.1.10 ومن القضية 4.6.6.

7.6 الفضاءات القيوسة

1.7.6 **الصورة العكسية لعشيرة ●** لتكن X وَ X' مجموعتين كيفيتين غير خاليتين وَ f تطبيقا من X في X'. ولتكن $\mathcal{F}'$ فئة من أجزاء X' ؛ إننا نضع:

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = f^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{F}'\}.$$

تدعى الفئة $f^{-1}(\mathcal{F}')$ بالصورة العكسية للفئة $\mathcal{F}'$ وفق التطبيق f .

2.7.6 **قضية ● لتكن $\mathcal{A}'$ عشيرة على X'. عندئذ تكون $f^{-1}(\mathcal{A}')$ عشيرة على X ، تدعى عشيرة الصورة العكسية لِ $\mathcal{A}'$ وفق f ؛ يشار إليها بـ** $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{A}')$.

الإثبات

الصورة العكسية للمجموعة الكلية X' هي المجموعة الكلية X. ثمّ، إنه لدينا:

$$\bigcup_n f^{-1}(A'_n) = f^{-1}\Big(\bigcup_n A'_n\Big) \quad \text{وَ} \quad {}^c[f^{-1}(A')] = f^{-1}({}^cA') \text{ ،}$$

هذا يثبت أن $\mathcal{A}$ عشيرة إذ إنها غير خالية ومغلقة نسبة إلى الإتحادات العدودة والإتمام.

3.7.6 **قضية ● تحافظ الصورة العكسية على الإحتواءات بين العشائر. أي أنه:**

$$\textbf{إذا كان } \mathcal{A}'_1 \supset \mathcal{A}'_2 \quad \textbf{كان} \quad f^{-1}(\mathcal{A}'_1) \supset f^{-1}(\mathcal{A}'_2).$$

4.7.6 **مثال** ● ليكن Y جزءا من المجموعة X' · لنرمز بِـ i إلى الحقن القانوني لِـ Y في X' ولتكن $\mathcal{A}'$ عشيرة على X'. عندئذ:

$$\begin{aligned} i^{-1}(\mathcal{A}') &= \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid i(B) \in \mathcal{A}'\} \\ &= \{B \in \mathcal{P}(Y) \mid \exists A' \in \mathcal{A}',\ A' \cap Y = B\}\cdot \end{aligned}$$

في الحالة الخاصة هذه، تدعى $i^{-1}(\mathcal{A}')$ بعشيرة أثر العشيرة $\mathcal{A}'$ على الجزء Y. وبما أن Y جزء من X' فإن كل جزء من Y ينطبق مع جزء من X'. يمكن التأكد بسهولة من أن:

$\mathcal{A}' \supset i^{-1}(\mathcal{A}')$ إذا وفقط إذا كان $\mathcal{A}' \ni Y$.

5.7.6 **تعدي الصور العكسية** ● لتكن X ، X' ، X'' ثلاث مجموعات كيفية وَ $X \xleftarrow{f} X' \xleftarrow{g} X''$ تطبيقين وَ $\mathcal{F}''$ فئة من أجزاء X''. عندئذ:

$$f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{F}'')\big) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{F}'').$$

6.7.6 إستقرار العشيرة المولدة نسبة إلى الصورة العكسية ●

1.6.7.6 **مبرهنة ● لتكن X وَ X' مجموعتين وَ f تطبيقا من X في X' وَ $\mathcal{F}'$ فئة من أجزاء X'. إذا كانت $\mathcal{A}'$ هي العشيرة المولدة من $\mathcal{F}'$ فإن $f^{-1}(\mathcal{A}')$ هي العشيرة المولدة من $f^{-1}(\mathcal{F}')$.**

الإثبات

لنرمز بِـ $\mathcal{B}$ إلى العشيرة المولدة من $f^{-1}(\mathcal{F}')$

بما أن $f^{-1}(\mathcal{A}') \supset f^{-1}(\mathcal{F}')$ فإن $f^{-1}(\mathcal{A}') \supset \mathcal{B}$.

لنثبت أولا تساوي العشيرتين في حالة:

١. f غامر؛ ٢. f متباين.

الحالة ١.

لتكن $\mathcal{A}$ عشيرة وسطى على X بحيث $f^{-1}(\mathcal{A}') \supset \mathcal{A} \supset f^{-1}(\mathcal{F}')$. هدفنا هو البرهان على أن $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{A}')$. هذا يقتضي أن $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{A}')$. لتكن $\mathcal{B}'$ فئة اجزاء X' المحصل عليها كصور مباشرة لأجزاء $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B}' = \{B' \in \mathcal{P}(X') \mid B' = f(A),\ A \in \mathcal{A}\}\cdot$$

عندئذ بما أن $f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$ فإن $\mathcal{B}'$ مغلقة نسبة إلى الإتحادات العدودة.

بما أن f غامر وَ $\mathcal{A}$ يحتوي على X فإن X' ينتمي إلى $\mathcal{B}'$.

ليكن $B' = f(A)$ مع $\mathcal{A} \ni A$. بما أن $A \in f^{-1}(\mathcal{A}')$ فيوجد $A' \in \mathcal{A}'$ بحيث $A = f^{-1}(A')$ وبالتالي:

(8.6) كل $\mathcal{B}' \ni B'$ يكتب على الشكل $B' = f(f^{-1}(A'))$ مع $\mathcal{A}' \ni A'$.

ينتج من هذا أن $^cB' = f\big(f^{-1}(^cA')\big)$ وبما أن:

$$f^{-1}(^cA') = {}^cf^{-1}(A') = {}^cA \in \mathcal{A}$$

فإن $^cB' = f(Z)$ مع $\mathcal{A} \ni Z = {}^cA$.

إذن $\mathcal{B}'$ مغلقة نسبة إلى عملية أخذ المتممة. هذا ينهي الإثبات على أن $\mathcal{B}'$ عشيرة.

ثمّ إنه لدينا $\mathcal{A}' \supset \mathcal{B}' \supset \mathcal{F}'$. عندئذ، بما أن $\mathcal{A}'$ هي العشيرة المولدة من $\mathcal{F}'$ ، ينتج لدينا:

$$\mathcal{B}' = \mathcal{A}'.$$

ليكن $Y \in \mathcal{A}'$. عندئذ $Y \in \mathcal{B}'$ ولذا يوجد $Z \in \mathcal{A}$ بحيث $f(Z) = Y$. وبما أن 8.6 محققة فإن $Z = f^{-1}(Y)$ ، أي أن $Z \in \mathcal{A}$ من أجل كل $Y \in \mathcal{A}'$ ، إذن $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$.

الحالة ٢.

بما أن f متباين فيمكن مطابقة X مع جزء من X' وَ f نفسه مع الحقن القانوني لِـ X في X'. لتكن $\mathcal{A}$ عشيرة وسطى تحقق $f^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{A}')$. لنضع $\tilde{\mathcal{A}}' = \{B \in \mathcal{P}(X') \mid B \cap X \in \mathcal{A}\}$. عندئذ $\tilde{\mathcal{A}}'$ عشيرة وَ $\mathcal{F}' \subset \tilde{\mathcal{A}}'$ وبالتالي يحتوي $\tilde{\mathcal{A}}'$ على العشيرة المولدة من $\mathcal{F}'$ وهي $\mathcal{A}'$ ، أي $\mathcal{A}' \subset \tilde{\mathcal{A}}'$ ومنه $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset f^{-1}(\tilde{\mathcal{A}}')$ يمكن التأكد من أن $f^{-1}(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$ منه $f^{-1}(\tilde{\mathcal{A}}') \subset \mathcal{A}$. بما أن الحتواء العكسي ينتج من التعريف فينتهي البرهان في هذه الحالة.

الحالة العامة

ليكن $f : X \to X'$. لنضع $Y = f(X')$ وليكن f_1 التطبيق لِـ X في Y المعرف بِـ f وليكن f_2 الحقن القنوني لِـ Y في X'. يمكننا أن نكتب $f = f_1 \circ f_2$ مع f_1 غامر وَ f_2 متباين. إننا عندها نحصل على النتجة باستخدام خاصية تعدي الصورة العكسية.

7.7.6 **تعريف ●** نسمي **فضاء قيوسا** كل ثنائية $(X, \mathcal{A})$ مكونة من **مجموعة** X ومن عشيرة $\mathcal{A}$ من أجزاء X. ونقول عن عناصر $\mathcal{A}$ بأنها **مجموعات قيوسة.**

8.7.6 **تعريف ●** ليكن $(X, \mathcal{A})$ وَ $(X_1, \mathcal{A}_1)$ فضائين قيوسين. نقول عن **تطبيق** f من X في X_1 إنه **قيوس** إذا كان $f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}$.

إذا كانت E **مجموعة** قيوسة من $(X, \mathcal{A})$ فنقول عن تابع f من E في X_1 إنه **قيوس على** E إذا كان $f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap E \subset \mathcal{A}$.

نشير بِـ $\mathcal{M}\big((X, \mathcal{A}); (X_1, \mathcal{A}_1)\big)$ إلى **مجموعة** التطبيقات القيوسة من $(X, \mathcal{A})$ إلى $(X_1, \mathcal{A}_1)$.

9.7.6 **قضية ● هو قيوس تركيب كل تطبيقين قيوسين.**

الإثبات

ليكن $f \in \mathcal{M}\big((X, \mathcal{A}); (X_1, \mathcal{A}_1)\big)$ وَ $g \in \mathcal{M}\big((X_1, \mathcal{A}_1); (X_2, \mathcal{A}_2)\big)$. عندئذ، اعتمادا على تعدي الصورة العكسية وعلى محافظتها على الاحتواات، يحقق التابع $h = g \circ f$ ، العلاقة

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{A}_2) = f^{-1}\big(g(\mathcal{A}_2)\big) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}$$

إذن $g \circ f$ قويس.

10.7.6 **قضية [معيار القابلية للقياس] ● ليكن** $(X, \mathcal{A})$ **وَ** $(X_1, \mathcal{A}_1)$ **فضائين قيوسين وليكن** $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{A}_1$ **جزءا مولدا لِـ** $\mathcal{A}_1$. **عندئذ:**

1. $f \in \mathcal{M}\big((X, \mathcal{A}); (X_1, \mathcal{A}_1)\big)$ **إذا وفقط إذا كان**
2. $f^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{A}$.

الإثبات

لتكن $\mathcal{B}$ العشيرة المولدة من $f^{-1}(\mathcal{C}_1)$. عندئذ (2) يكافيء $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. لكن، وفقا للمبرهنة 1.6.7.6 ، $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{A}_1)$. إذن، (2) يكافيء (1).

11.7.6 **التوابع القيوسة على مجموعة الجداء** • لتكن $(X,\mathcal{A})$ ، $(Y_1,\mathcal{B}_1)$ ، $(Y_2,\mathcal{B}_2)$ ثلاثة فضاءات قيوسة. لنزود $Y_1 \times Y_2$ بعشيرة الجداء $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ المعرف في 2.6.6. ليكن π_i ، ($i = 1$ ، 2) الإسقاط القانوني لِـ $Y_1 \times Y_2$ على Y_i.

12.7.6 **توطئة** • لدينا $\pi \in \mathcal{M}\big((Y_1 \times Y_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2); (Y_1,\mathcal{B}_1)\big)$.

الإثبات

علينا بدراسة $\pi_1^{-1}(B_1)$ مع $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ؛ لكن $\pi_1^{-1}(B_1) = B_1 \times Y_2$ مستطيل، إنه ينتمي إذن ألى $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

13.7.6 **قضية [معيار القابلية للقياس لتطبيق في فضاء الجداء]** • ليكن f تطبيقا لِ X في $Y_1 \times Y_2$. عندئذ يكون f قيوسا اذا وفقط إذا كانتا مركباتاه $f_i = \pi_i \circ f$ قيوستين.

الإثبات

إذا كان f قيوسا كان $\pi_1 \circ f$ ، وفقا للتوطئة السابقة، تركيبَ تابعين قيوسين، ولذا فهو قيوس. وإذا كان f_1 وَ f_2 قيوسين فمن أجل كل مستطيل $R = B_1 \times B_2$ يكون لدينا $f^{-1}(R) = f_1^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ وبما أن $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ فينتج من معيار القابلية للقياس 10.7.6 أن f قيوس.

14.7.6 **قابليتا الفصل والقياس** •

1.14.7.6 **تعريف [قابلية الفضاءات التبولوجية للفصل]** • ليكن Y فضاءا توبولوجيا منفصلا. نقول إنه يحقق:

بديهية الفصل الأولى إذا كان يحتوي على جزء D قابلا للعد وكثيف حيثما كان، أي أن ملاصقة D تساوي Y.

بديهية الفصل الثانية إذا وجدت جماعة عدودة من أجزاء Y المفتوحة H_i بحيث يكتب كل جزء مفتوح من Y كاتحاد الأجزاء H_i التي يحتويها. ونقول عندها إن الجماعة H_i تشكل أساسا لمفتوحات Y .

2.14.7.6 **مثال** • لنأخذ $Y = \mathbb{R}$ وَ $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الناطقة. لنضع $H_{r,s} =]r,s[$ مع r وَ s ناطقين. إننا نحصل على جماعة عدودة من المجالات. عندها يكتب كل مجال $]x_1,x_2[$ كاتحاد للمجالات $]r,s[$ التي يحتويها. وبما أن فكل جزء مفتوح من $\mathbb{R}$ يكتب كاتحاد عدود للمجالات مفتوحة فإنه يكتب كاتحاد عديد لمجال من نوع $H_{r,s}$.

15.7.6 **قضية** • **إن كل فضاء متري** (Y,d) **يحقق بديهية الفصل الأولى يحقق بديهية الفصل الثانية.**

الإثبات

لتكن $\{y_n\}_n$ متتالية عناصرها من Y وكثيفة في هذا الفضاء. لنضع $H_{i,m} = \{y \in Y \mid d(y,y_i) < 1/m\}$ ، حيث d هي المسافة المعتبرة على Y.

16.7.6 **قضية [معيار القابلية للقياس] • ليكن $(X, \mathcal{A})$ فداءا قيوسا وَ Y فضاءا توبولوجيا يحقق بديهية القابلية للفصل الثانية وليكن H_i أساسا للمفتوحات Y. يكون عندئذ التطبيق f من X في Y قيوسا إذا وفقط إذا كان**

$$f^{-1}(H_i) \in \mathcal{A},\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

الإثبات

17.7.6 **جداء العشائر البوريليةا •**

18.7.6 **قضية • ليكن X_1 وَ X_2 فضاءين متريين قابلين للفصل وليكن $Y = X_1 \times X_2$ جداءهما. لنزود Y بتوبولوجيا الجداء ولنرمز بـ $\mathcal{B}(X_1)$ وَ $\mathcal{B}(X_2)$ وَ $\mathcal{B}(Y)$ ألى العشائر البوريلية المرفقة. عندئذ** $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$.

19.7.6 **القابلية للقياس والإستمرار • ليكن X وَ X' فضائين توبولوجيين. نحصل بتزويدهما بعشيرتيهما لبوريل $\mathcal{B}(X)$ وَ $\mathcal{B}(X')$ على فضائين قيوسين $(X, \mathcal{B}(X))$ وَ $(X', \mathcal{B}(X))$.**

20.7.6 **قضية • كل تطبيق مستمر f من X في X' تطبيق قيوس من $(X, \mathcal{B}(X))$ في** $(X', \mathcal{B}(X'))$.

الإثبات

نستخدم معيار القابلية للقياس 9.7.6. يجب الإثبات أن $\mathcal{B}(X) \supset f^{-1}(\mathcal{O}_{X'})$. لكن إستمرار f يقتضي أن تكون الصورة العكسية لكل جزء مفتوح في X' جزء مفتوح في X، وبالتالي $\mathcal{O}_X \supset f^{-1}(\mathcal{O}_{X'})$. ومنه النتيجة لأن $\mathcal{B}(X) \supset \mathcal{O}_X$.

21.7.6 **العمليات الجبرية على التوابع القيوسة •** يزود حقل الأعداد الحقيقية بالعشيرته البوريلية. ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاءا قيوسا. نشير بـ $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$ إلى مجموعة **التطبيقات القيوسة من** $(X, \mathcal{A})$ **في** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. إننا نطلق تسمية **تابع قيوس** على كل عنصر من تسمية $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$.

22.7.6 **قضية •**
1. **القيمة المطلقة لتابع قيوس تابع قيوس.**
2. **مجموع تابعين قيوسين تابع قيوس.**
3. **جداء تابعين قيوسين تابع قيوس.**
4. **مقلوب تابع قيوس لا ينعدم أبدا تابع قيوس.**

الإثبات

لتكن f وَ f_1 وَ f_2 توابع من X في $\mathbb{R}$ قيوسة.

ليكن u تابع القيمة المطلقة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$: $u(\zeta) = |\zeta|$. بما أن u مستمر فهو قيوس ولذا يكون، وفقا لـ 9.7.6، التابع $|f| = u \circ f$ قيوسا.

ليكن $\Phi : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^2$ التابع المستمر المعرف بـ $\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1 + \zeta_2$. وكذا التابع Ψ المعطى بـ $\Psi(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1 \zeta_2$.

ليكن الآن التابع $F : X \leftarrow \mathbb{R}^2$ التابع المعرف بأن $F(x) = \big((f_1(x), f_2(x)\big)$. عندئذ، وفقا لـ 12.7.6 :

$$F \in \mathcal{M}\big((X, \mathcal{A}), (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big).$$

لدينا حسب 18.7.6 :

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ وَ منه $F \in \mathcal{M}\big((X,\mathcal{A});(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))\big)$.

وبا أن Φ مستمر فإن $\Phi \in \mathcal{M}\big((\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}));(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\big)$ وبالتالي، إعتمادا على 9.7.6 :

$$\Phi \circ F \in \mathcal{M}\big((X,\mathcal{A});(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\big) = \mathcal{L}^0(X,\mathcal{A}).$$

لكن $(\Phi \circ F)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

وكذالك، $\Psi \circ F \in \mathcal{L}^0\big((X,\mathcal{A})\big)$ وَ $(\Psi \circ F)(x) = f_1(x)f_2(x)$.

ليكن $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$ وَ i التابع من $\mathbb{R}^\star$ في $\mathbb{R}^\star$ المعرف بأن $i(\zeta) = \zeta^{-1}$. لنأخذ f من $\mathcal{L}^0(X,\mathcal{A})$ مع $f(x) \neq 0$ من أجل كل $x \in X$. ليكن الآن O مفتوحا من $\mathbb{R}$. يكون عندئذ $O' = O \cap \mathbb{R}^\star$ مفتوحا من $\mathbb{R}^\star$. لنضع $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. عندئذ $g^{-1}(O) = g^{-1}(O') = f^{-1}\big(i^{-1}(O')\big)$ وهو مفتوح من $\mathbb{R}^\star$ ومن $\mathbb{R}$ كذلك لأن $\mathbb{R}^\star$ مفتوح من $\mathbb{R}$. وبالتالي $f^{-1}\big((i^{-1}(O')\big) \in \mathcal{A}$ ، إذ إن f قيوس.

8.6 التقارب البسيط للتوابع القيوسة

يشر في هذا المقطع $(X,\mathcal{A})$ إلى فضاء قيوس وَ Y إلى فضاء متري وَ $\mathcal{B}(Y)$ إلى عشيرته لبوريل.

تذكير: نقول عن متتالية تطبيقات $f_n : X \hookrightarrow Y$ إنّها **متقاربة ببساطة نحو** تطبيق f إذا كان $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ ، مهما كان $x \in X$.

1.8.6 **مبرهنة • لتكون $\{f_n\}$ متتالية تطبيقات قيوسة من $(X,\mathcal{A})$ في $(Y,\mathcal{B}(Y))$ متقاربة ببساطة نحو تابع f. عندئذ يكون التابع f قيوسا.**

2.8.6 **ملاحظة •** من المعروف جدا أن النهاية البسيطة لمتتالية توابع مستمرة غير مستمرة بالضرورة. إن هذا المبرهنة تبين الإستقرار الكبير لساصية القابلية للقياس.

يعتمد إثبات المبرهنة 1.8.6 على النتيجة المهمة الموالية.

3.8.6 **توطئة [التوطئة الأساسية] • لتكون $\{f_n\}$ متتالية تطبيقات من X في فضاء متري (Y,d) متقاربة ببساطة نحو تابع f. عندئذ من أجل كل مفتوح $\mathcal{U}$ من Y لدينا**

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{k,m}\Big[\bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(\mathcal{O}_k)\Big] \quad \text{حيث} \quad \mathcal{O}_k = \Big\{y \in \mathcal{O} \mid \mathrm{d}\,(y,\,{}^c\mathcal{O}) > \frac{1}{k}\Big\}.$$

إثبات التوطئة 3.8.6

d هي المترية المعتبرة في Y. ليكن $\mathcal{O}$ جزء مفتوحا من Y وكما ورد في نص التوطئة، نضع، من أجل كل عدد طبيعي k :

$$\mathcal{O}_k = \Big\{y \in \mathcal{O} \mid \mathrm{d}\,(y,{}^c\mathcal{O}) > \frac{1}{k}\Big\}$$

حيث $\mathrm{d}\,(y,{}^c\mathcal{O}) = \inf_{t\in{}^c\mathcal{O}} \mathrm{d}\,(y,t)$ هي المسافة بين العنصر y والجزء ${}^c\mathcal{O}$ ، متممة $\mathcal{O}$. بما أن التابع $\mathrm{d}\,(\cdot,{}^c\mathcal{O})$ ليبشتزي من Y في $\mathbb{R}_+$ فإن $\mathcal{O}_k$ مفتوح في $\mathcal{O}$ ثمّ إنه واضح أن المتتالية $\{\mathcal{O}_k\}$ متزايدة ولدينا $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$. وإذا كان $\overline{\mathcal{O}}_k$ يشير إلى ملاصقة $\mathcal{O}$ فإنه لدينا كذلك $\overline{\mathcal{O}}_k \subset \mathcal{O}_{k+1}$.

ليكن الآن $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. إذن $y = f(x) \in \mathcal{O}$ ؛ يوجد عندئذ عدد طبيعي $k_0 > 2$ بحيث $y \in \mathcal{O}_{k_0-1}$. لنضع $r = d(y, {}^c\mathcal{O}_{k_0})$. واضح أن $r > 0$ وبما أن $\mathrm{d}\left(f(x), f_n(x)\right) \to 0$ ، فيوجد عدد طبيعي m_0 بحيث ينيمي $f_n(x)$ إلى الكرة المفتوحة $B(y,r)$ مهما كان $n \geq m_0$. ينتج من هذا أن $f_n(x) \in \mathcal{O}_{k_0}$ مهما كان $n \geq m_0$. إذن $x \in f_n^{-1}(\mathcal{O}_{k_0})$ من أجل $n \geq m_0$. هذا يعني أن:

$$x \in \bigcap_{n\geq m_0} f_n^{-1}(\mathcal{O}_{k_0}) \subset \bigcup_{k,m=1}^{\infty}\left[\bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(\mathcal{O}_k)\right] .$$

ليكن الآن $x \in \bigcup_{k,m=1}^{\infty}\left[\bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(\mathcal{O}_k)\right]$. يوجد دليلان k_0 وَ m_0 بحيث $x \in \bigcap_{n\geq m_0} f_n^{-1}(\mathcal{O}_{k_0})$ ولذا يكون $f_n(x) \in \mathcal{O}_{k_0}$ مهما كان $n \geq m_0$ وبجعل n يؤول نحو $+\infty$ نحصل على

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathcal{O}}_{k_0} \subset \mathcal{O}_{k_0+1} \subset \mathcal{O}$$

ومنه $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$.

إثبات المبرهنة 1.8.6

ليكن $\mathcal{O}$ جزءا مفتوحا من Y . ولنعتبر، من أجل $k \in \mathbb{N}^\star$ ، الجزء المفتوح $\mathcal{O}_k$ ، المعرف في التوطئة 3.8.6 . بما أن f_n قيوس مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ فإن $f_n^{-1}(\mathcal{O}_k) \in \mathcal{A}$. إذن، من أجل كل $n \geq m$ ، حيث m عدد طبيع كيفي، ينتج من استقرار العشائر نسبة إلى التقاطعات العدودة أن $\bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(\mathcal{O}_k) \in \mathcal{A}$ ومنه $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{A}$ لأنه، وفقا للتوطئة 3.8.6 ، اتحاد عدود لأجزاء قيوسة.

9.6 الحد الأعلى لمتتالية توابع قيوسة

1.9.6 **قضية** • لتكن $\{f_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}\big((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$. عندئذ ينتمي التابع $\varphi \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ إلى $\mathcal{M}\big((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$.

الإثبات

بما أن $\{+\infty\}$ جزء مغلق من $\overline{\mathbb{R}}$ فإن $f_n^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$. لضع $G = \bigcup_n f_n^{-1}(\{+\infty\})$. عندئذ $G \in \mathcal{A}$ وَ $\varphi(x) = +\infty$ من أجل $x \in G$.

ليكن $X' = {}^cG$ ولزوده بالأثر $\mathcal{A}'$ للعشيرة $\mathcal{A}$ ولنشير بـ f'_n إلى إقتصار f_n على X . عندئذ:
$f'_n \in \mathcal{M}\big((X',\mathcal{A}'));(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\big) \doteq \mathcal{L}^0(X',\mathcal{A}')$.

إنه، وفقا لِـ 22.7.6 ، $\sup_{\{} f'_n, f'_2\} \in \mathcal{L}^0(X',\mathcal{A}')$.
وبصفة عامة، إذا عرفنّا المتتالية $\{g_k\}$ بالتدريج بأن نضع:

$$g_1 = f'_1, \ \ldots, \ g_k = \sup\{f'_k, g_k\}$$

نرى، بالتدريج، أن $g_k \in \mathcal{L}^0(X,\mathcal{A}')$ ثمّ إن $g_k \leq g_{k+1}$. أي أن المتتالية $\{g_k\}$ متزايدة. إنها لكذلك م متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$. لنضع $\varphi_1(x') = \lim g_k(x')$ ، $x' \in X'$. ينتج عندئذ من 1.8.6 ، أن $\varphi \in \mathcal{M}\big((X',\mathcal{A}');(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. لكن $\varphi(x) = \varphi(x)$ إذا كان $x \in X'$ وَ $\varphi(x) = +\infty$ إذا كان $x \notin X$.
ليكن عندئذ K جزءا مغلقا من $\mathbb{R}$. لدينا $\varphi^{-1}(K) = \varphi_1^{-1}(K)$ إذا كان $+\infty \notin K$ وَ $\varphi^{-1}(K) = \varphi_1^{-1}(K) \cup G$ إذا كان $+\infty \in K$. وبما أن $\varphi_1^{-1}(K) = X' \cap A$ مع $A \in \mathcal{A}$ وَ $X' \in \mathcal{A}$ فإن $\varphi_1^{-1}(K) \in \mathcal{A}$.

2.9.6 **لازمة ←** لتكن $\{f_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{M}\big((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$. عندئذ ينتمي التابع $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ إلى $\mathcal{M}\big((X,\mathcal{M});(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big)$.

الإثبات

ليكن $\varphi_n = \sup\limits_{p\geq n} f_p$. عندئذ يكون φ_n قوسا وتكون المتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ متناقصة في $\mathbb{R}$. إنها إذن متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$ ومنه النتيجة، إعتمادا على المبرهنة 1.8.6.

نقدم الآن نتيجين نحتاج إليهما عند دراسة المكاملة.

3.9.6 **لازمة ← لتكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تابعا حقيقيا بسيطا معفا على X ، أي أن $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\chi_{E_k}(x)$ حيث c_k $k = 1$ ، ... ، n ثوابت حقيقية وَ E_k أجزاء تشكل تجزئة قيوسة لِـ X . عندئذ f قيوس.**

4.9.6 **مبرهنة ← ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تابعا حقيقيا مكتملا معرفا على X . توجد عندئذ متتالية من التوابع الحقيقية البسيطة معرفة على X ، إي**

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} c_i\chi_{E_i}(x)$$ **،** c_i **حقيقي،** E_i **غير متقاطعة مثنى مثنى،**

بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ، $x \in X$.

ثمّ إنه إذا كان:

١. f قيوسا كانت التوابع f_n قيوسة كذلك.

٢. f موجبا كانت المتتالية $\{f_n\}$ متزايدة ولدينا:

$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ **مهما كان** $x \in X$ ، $n = 1$ ، 2 ، ...

٣. f محدودا، إي، يوجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث $|f(x)| \leq M$ مهما كان $x \in X$ ، فإن المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب بإنتظام نحو f .

الإثبات

تعرف التوابع f_n بالإعتماد الوثيق على مجموعات سوية f . لنفرض أولا أن f موجب. لنثبت n من $\mathbb{N}^\star$ ولننظر إلى المجالات غير المتقاطعة الجزئية من $[0,n[$ ، التي عدتها $n2^n$ والمعطاة بِـ:

$$\left[\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n}\right[,\ 1 \leq k \leq n2^n\ .$$

ولنضع الآن:

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k-1}{2^n} & \text{إذا كان } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \text{ ، } 1 \leq k \leq n2^n \\ n & \text{في الحالات المتبقية} \end{array} \right.$$

واضح أن $f_n(x) \leq f(x)$ مهما كان $x \in X$ وَ $n = 1$ ، 2 ، ... ثمّ إن كل تابع f_n لا يأخذ إلا عدد منته من القيم. وبعبارة أدق، إذا كان:

$$A_{n,k} = \left\{x \in X \mid \tfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{k}{2^n}\right\} \quad \text{وَ} \quad A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\} \text{ ،}$$

فإن:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{A_{n,k}}(x) + n\chi_{A_n}(x). \tag{9.6}$$

لاحظ أننا نحصل على $f_{n+1}(x)$ إنطلاقا من $f_n(x)$ بتقسيم كل مجال $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$ إلى شطرين تمّ نرفع $f_n(x)$ إلى $f_{n+1}(x)$ وذلك فقط عند قيم x حيث يتوجب تغير $f_n(x)$. هذا يثبت (٢) .

نحن ندعي أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in X. \tag{10.6}$$

وفي الحقيقة، إذا كان $f(x)=\infty$ كان $f_n(x)=n$ من أجل كل n ولذا $f_n\to\infty$. أمّا إذا كان $f(x)$ متهيا فينتج مباشرة من تعريف $f_n(x)$ أن:

$$f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n},\ \forall n > f(x), \tag{11.6}$$

ومنه (10.6) . ضف إلى ذلك أنه إذا كان f قيوسا فتكون الأجزاء $A_{n,k}$ قيوسة وكذلك الأجزاء A_n . إذن f_n تابع بسيط وقيوس، هذا يبين صدق (١) .

إذا كان f محدودا فتكون (11.6) محققة مهما كان $n > M$ وهذا بإنتظام نسبة إلى x في X . إذن التقارب منتظم ومنه (٣) .

حصلنا إذن عمّا كننا نريده لكن في حالة f موجب. ولإتمام الإثبات نتذكر أن كل تابع f يكتب كفرق تابعين موجبين: $f = f^+ - f^-$ ثمّ نطبق ما تقدم من إثبات على f^+ وعلى f^- على حدى. لاحظ أن في هذه الحالة كذلك تحقق التوابع f_n الخاصية:

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|,\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

تمارين حول الجبور والعشائر والتوابع القيوسة

1.6 أثبت أن عدد عناصر كل جبر منته هو دائما من قوى 2.

2.6 لتكن $\mathcal{C}$ فئة من أجزاء مجموعة X. أثبت وجود عشيرة (سيغما جبر) أصغرية $\mathcal{A}$ تحتوي على $\mathcal{C}$.

تدعى هذه العشيرة **بالعشيرة المولدة من** $\mathcal{C}$.

3.6 ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. بين أن المجموعة C المكونة من نقط إستمرار f من نوع G_δ.

إرشاد: ليكن $x_0 \in C$ وليكن $\varepsilon = \frac{1}{n}$ مع n عدد طبيعي. يوجد جوار مفتوح $\mathcal{U}_n(x_0)$ لِـ x_0 بحيث يكون

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathcal{U}(x_0).$$

بوضع $V_n = \bigcup\limits_{x_0 \in C} \mathcal{U}_n(x_0)$ وبإثبات أن $C = \bigcap\limits_1^\infty V_n$ ترى أن C من نوع G_δ.

هل يمكنك تعميم هذه النتيجة على حالة f تطبيق لفضاء توبولوجي في فضاء متري؟

استنتج مما سبق أنه لا توجد توابع مستمرة على الأعداد الناطقة فقط (إذ إن $\mathbb{Q}$ ليس من نوع G_δ).

4.6 أثبت أن التابع f المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{على الأعداد الصماء} \\ \frac{1}{q} & \text{على الأعداد الناطقة } \frac{p}{q} \text{ في شكلها المختصر مع } q \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$$

متقطع عند الأعداد الناطقة ومستمر عند الأعداد الصماء. استنتج أن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ من نوع G_δ وَ $\mathbb{Q}$ من نوع F_σ.

5.6 لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع مستمرة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$. أثبت أن المجموعة S المكونة من النقط حيث تتقارب المتتالية نقطيا هي من نوع $F_{\sigma\delta}$.

إرشاد: يمكنك أن تبرهن على أن

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big\{ \bigcap_{i,j=0}^{\infty} \{|f_{m+i}(x) - f_{m+j}(x)| \leq \frac{1}{n}\} \Big\} \right\}.$$

6.6 لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مزودة بالتوبولوجيا المألوفة.

١. أثبت أن كل مفتوح من $\mathbb{R}$ هو إتحاد عدود لمجالات مفتوحة وغير متقاطعة مثنى مثنى.

٢. لتكن جماعات المجموعات التالية:

- $\mathcal{I}$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ ؛
- $\mathcal{I}_{co}$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ المفتوحة من اليمين ومغلقة من اليسار؛
- $\mathcal{I}_o$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ المفتوحة؛
- $\mathcal{I}_\infty$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ التي من الشكل $]-\infty, x[$ مع $x \in \mathbb{R}$ ؛
- $\mathcal{I}_q$ مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ ذات طرفين ناطقين؛
- $\mathcal{C}$ مجموعة أجزاء $\mathbb{R}$ المتراصة.

أثبت أن كل جماعة من هذه الجماعات تولّد عشيرة بوريل في $\mathbb{R}$.

7.6 ١. ليكن $(X,\mathcal{F})$ فضاء قيوسا وَ $A \subset X$ ولنعتبر الجماعة $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$.
بين أن $\mathcal{F}_A$ عشيرة على A. تسمى **عشيرة أثر** $\mathcal{F}$ **على** A.
عين $\mathcal{F}_A$ عندما يكون $A \in \mathcal{F}$.
٢. ليكن E جزءا من X وَ $\mathcal{A}$ مجموعة من أجزاء X.
لنضع $\mathcal{A} \cap E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$ (وهي أثر $\mathcal{A}$ على E).
أثبت أن $\sigma(\mathcal{A} \cap E) = \sigma(\mathcal{A}) \cap E$، حيث يشير $\sigma(\mathcal{A})$ إلى العشيرة المولدة من $\mathcal{A}$.

8.6 لتكن X مجموعة غير خالية وَ $\mathcal{S}$ مجموعة من أجزاء X. نقول عن $\mathcal{S}$ إنها **نصف جبر بوولي على** X إذا كان:
نج 1) $\emptyset$ وَ $X \in \mathcal{S}$؛
نج 2) $A \cap B \in \mathcal{S}$ من أجل كل A وَ B من $\mathcal{S}$؛
نج 3) كل $A \in \mathcal{S}$ هو بحيث ${}^cA = \bigcup_{i=1}^n S_i$ مع $S_i \in \mathcal{S}$، $i = 1$، ...، n أجزاء من X غير متقاطعة مثنى مثنى.
١. بين أن الجبر المولد من $\mathcal{S}$ هو الجبر $\mathcal{A}$ الذي يحقق

$$\mathcal{A} = \{A \mid A = \sum_{i=1}^n A_i,\ A_i \in \mathcal{S},\ i = 1, \ldots, n\}$$

حيث $\sum$ يشير إلى اتحاد عناصره غير متقاطعة مثنى مثنى.
٢. ليكن $(X_1,\mathcal{F}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{F}_2)$ فضائين قيوسين. نضع
$\mathcal{S} = \{A \subset X_1 \times X_2 \mid A = A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2\}$.
بين أن $\mathcal{S}$ نصف جبر بوولي على $X_1 \times X_2$.
٣. بين أن مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ هي نصف جبر بوولي على $\mathbb{R}$.
٤. ليكن $\mathcal{S}_1$ وَ $\mathcal{S}_2$ نصف جبرين بووليين من أجزاء مجموعة X. لنعتبر الجماعة:
$\mathcal{S} = \{S_1 \cap S_2 \mid S_1 \in \mathcal{S}_1,\ S_2 \in \mathcal{S}_2\}$.
أثبت أن الجبر المولد من $\mathcal{S}$ ينطبق مع الجبر المولد من $\mathcal{S}_1$ وَ $\mathcal{S}_2$.

9.6 لتكن X مجموعة غير منتهية. ولتكن الجماعتين $\mathcal{D}$ وَ $\mathcal{F}$ المعرفتين بأن:
$\mathcal{D}$ هي مجموعة أجزاء X العدودة أو ذات متممة ${}^cA$ عدودة؛
$\mathcal{F}$ هي مجموعة أجزاء X المتهية أو ذات متممة ${}^cA$ متهية.
١. أثبت أن $\mathcal{D}$ عشيرة. إنها العشيرة المولدة من النقط، أي $\mathcal{D} = \{\{x\} \mid x \in X\}$.
٢. أثبت أن $\mathcal{F}$ جبر وأن $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.
أعط مثالا يبن أن $\mathcal{F}$ ليست عشيرة.
٣. نعرف على $\mathcal{F}$ تابع للمجموعات μ بأن
$\mu(E) = 1$ إذا كانت ${}^cE$ متهية وَ $\mu(E) = 0$ إذا كان E متهيا.
أثبت أن μ جمعي على $\mathcal{F}$.
أثبت أن μ سيغما جمعي على $\mathcal{F}$ إذا وفقط إذا كان X غير عدود.

10.6 لتكن X مجموعة وَ Σ جماعة من أجزاء X. نقول عن Σ إنها سيغما جمعية إذا كان
ا) $\emptyset$ وَ $X \in \Sigma$؛
ب) وإذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من Σ كان $\bigcup_n A_n \in \Sigma$؛
ج) ومن أجل كل A وَ B من Σ ينتج:

من $A \subset B$ أن $B - A \in \Sigma$ ومن $A \cap B = \emptyset$ أن $A \cup B \in \Sigma$.

١. بين أن كل عشيرة جماعة سيغما جمعية.

٢. ليكن μ وَ λ قياسين موجبين (أنظر التعريف في الباب الموالي) على فضاء قيوس $(X, \mathcal{F})$ بحيث $\mu(X) = \lambda(X) < +\infty$.

بين أن الجماعة $\Sigma = \{F \in \mathcal{F} \mid \mu(F) = \lambda(F)\}$ سيغما جمعية.

٣. لتكن $\mathcal{C}$ جماعة من أجزاء X. بين أنها توجد جماعة أصغرية من أجزاء X سيغما جمعية وتحتوي $\mathcal{C}$ (نسميها الجماعة السيغما جمعية المولدة من $\mathcal{C}$).

٤. إذا كانت $\mathcal{C}$ جماعة مغلقة نسبة إلى التقاطعات المتهية فبين أن العشيرة المولدة من $\mathcal{C}$ تنطبق مع الجماعة السيغما جمعية المولدة من $\mathcal{C}$.

11.6 بين أن كل تطبيق ثابت، من فضاء قيوس في آخر قيوس، قيوس.

12.6 ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تطبيقا من X في مجموعة كيفية Y . بين أن المجموعة $\mathcal{J} = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ عشيرة على Y.

13.6 ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ (Y, τ) فضاء توبولوجيا وَ $\mathcal{B}_\tau(Y)$ العشيرة البوريلية على Y وَ f تطبيقا من X في Y بحيث $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ مهما كان $V \in \tau$. بين أن التطبيق f قيوس.

14.6 لتكن $\{E_n\}$ متتالية مجموعات قيوسة من فضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ ولنضع $E = \bigcup\limits_1^\infty E_n$. بين أنه حتى يكون تابعا حقيقيا $f : X \to \mathbb{R}$ قيوسا على E يلزم ويكفي أن يكون إقتصاره $f_{|E_n}$ على E_n قيوسا مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

15.6 ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f تطبيقا من X في $\overline{\mathbb{R}}$ مزود بالعشيرة البوريلية.

1. أثبت أن القضايا التاليا متكافئة:
   ١. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٢. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٣. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
   ٤. المجموعة $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\mathbb{R}$.
2. يزود $\overline{\mathbb{R}}$ بعشيرة بوريل بالنسبة إلى التوبولوجيا العادية. إذا تحققت إحدى القضايا السابقة فأثبت أن f قيوس.
3. إذا كان f قيوسا فبين أن المجموعة $\{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ قيوسة مهما كان α من $\overline{\mathbb{R}}$.

16.6 ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. أثبت أن $\{x \ni X \mid f(x) \geq r\} \in \mathcal{A}$ من أجل كل $r \in \mathbb{Q}$ إذا وفقط إذا كان $\{x \ni X \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$.

17.6 ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ f وَ g تطبيقين قيوسين من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت قابلية المجموعات التالية للقياس:

$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ وَ $\{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$ وَ $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

18.6 لتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت أن التوابع:

$$\psi = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{وَ} \quad \varphi = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{وَ} \quad f = \liminf_{n \to \infty} f_n \quad \text{وَ} \quad g = \limsup_{n \to \infty} f_n$$

قيوسة.

19.6 لتكن X مجموعة وَ E جزءا منها. يسمى التابع الحقيقي χ_E المعرف بأن $\chi_E(x) = 1$ إذا

كان $x \in E$ وَ $\chi_E(x) = 0$ إذا كان $x \in X \setminus E$ بالدالة المميزة للجزء E ·

١· ليكن A وَ B جزئين من X · بين العلاقات:

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B \quad ، \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B \quad ، \quad \chi_{^cA} = 1 - \chi_A \cdot$$

٢· ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ E جزءا من X. بين أن $E \in \mathcal{A}$ إذا وفقط إذا كانت دالته المميزة χ_E قيوسة·

20.6 ليكن f تابعا قيوسا من X في $\overline{\mathbb{R}}$. أثبت وجود متتالية $\{f_n\}$ من التوابع الدرجية بحيث $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \ldots \leq |f|$ وَ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ·

الفصل 7

القياسات الموجبة والخارجية

1.7 القياسات الموجبة

1.1.7 **تعريف •** ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا. نقول عن تطبيق μ لِـ $\mathcal{A}$ في $[0, +\infty]$ إنّه **قياس موجب** إذا كان ينعدم عند الجزء الخالي ويتمتع **بخاصية الجمعية العدودة (أو الـ σ جمعية)** أي إذا كان:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{و} \quad \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \\ \text{من أجل كل متتالية } \{E_n\} \text{ عناصرها من } \mathcal{A} \text{ وغير متقاطعة مثنى مثنى.} \end{array} \right.$$

عندئذ نقول عن الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ إنه **فضاء مُقاس.**

اشترطنا إنعدام μ عند $\emptyset$ لكي نتجنب إمكانية تطابق مجموعة قيم μ مع ∞. قبل إعطاء أمثلة بسيطة للقياسات، نقدم الخاصية التالية:

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا وليكن A وَ B عنصرين من $\mathcal{A}$. لدينا:

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B). \tag{1.7}$$

لكي نتأكد من هذا نأخذ المتتالية $\{E_n\}$ المعرفة بأن:

$$E_1 = A \setminus B,\ E_2 = A \cap B,\ E_n = \emptyset,\ n = 3, 4, \ldots$$

بما أن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$ وهي غير متقاطعة مثنى مثنى فينتج من الجمعية العدودة لِـ μ أن:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

ومنه العلاقة (1.7) المراد إثباتها، لأن $\mu(\emptyset) = 0$.

ينتج من (1.7) أن القياسات الوجبة **متزايدة.** بمعنى أنه:

إذا كان $A \supset B$ كان $\mu(A) \geq \mu(B)$.

2.1.7 **تعريف •** نقول عن قياس μ إنه منته إذا كان $\mu(X) < \infty$. عندئذ إذا كان E جزءا قيوسا من X كان $\mu(E) \leq \mu(X)$ ، أي أن μ لا يئخذ إلا قيما متهية. عندما يكون μ متهيا فيمكننا " طيه " بمعنى يمكننا إعتبار، بدله، القياس $\mu_1(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}$ مع $E \in \mathcal{A}$ ولذا يمكننا فرض $\mu(X) = 1$ ونقول عن هذه القياسات إنها **قياسات إحتمالاتية.**

نقول عن فضاء مُقاس إنه **سيغما منته** إذا أمكن كتابته كإتحاد عدود لأجزاء قيوسة كل منها متهي القياس.

3.1.7 **مثال** • لتكن $X=\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية وَ $\{a_n\}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة ولتكن $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ولنعرف μ بأن:

$$\mu(E)=\sum_{n\in E} a_n \quad \text{من أجل كل} \quad E \in \mathcal{A}.$$

عندئذ، الثلاثية $(\mathbb{N},\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاس. نقول عنه إنه **الفضاء المقاس المتقطع** المشيد على $\mathbb{N}$.

4.1.7 **مثال** • لتكن X مجموعة غير خالية وَ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(X)$ عشيرة أجزائها. وليكن $f: X \to [0,\infty]$. من أجل كل $E\in\mathcal{A}$ نضع:

$$\mu(E)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \mid \{x_1,\dots,x_n\}\subset E\Big\}$$

حيث يؤخذ المجموع بالنسبة إلى كل أجزاء E المتهية.

لكي نتأكد من أن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاس النقطة الوحيدة التي تنطوي على بعض الصعوبة هي الـ σ جمعية. إليك برهانها:

لتكن $\{E_n\}_1^\infty$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$ وغير متقاطعة مثنى مثنى و لنشير بِـ E إلى إتحادها. ليكن $\{x_1,\dots,x_n\}$ جزءا كيفيا متهيا من E. يمكننا أن نفرض أن:

$$\{x_1,\dots,x_n\}\subset\bigcup_1^m E_{k_i}, \qquad m\le n$$

ثمّ نلاحظ أن:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\le\sum_{i=1}^{m}\mu(E_{k_i})\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k). \tag{2.7}$$

وعندئذ بأخذ الحد الأعلى للطرف الأيسر لِـ (2.7) نسبة إلى كل أجزاء E المتهية، نحصل على:

$$\mu(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k). \tag{3.7}$$

لنثبت الآن المتباينة العكسية. إذا كان $\mu(E_k)=\infty$ من أجل قيمة على الأقل للدليل k فبما أن:

$$\mu(E)=\mu(E\setminus E_k)+\mu(E_k)\ge\mu(E_k)$$

يكون $\mu(E)$ غير منته كذلك ولا يوجد ما يحتاج إلى برهان. لنفرض أننا لسنا في الحالة السابقة ولنأخذ $\varepsilon>0$. ينتج من خاصية الحد الأعلى أنه، من أجل كل k ، يمكن إيجاد جزء منته $\{x_1^k,\dots,x_{n(k)}^k\}$ من E_k بحيث:

$$\mu(E_k)\le\sum_{i=1}^{n(k)} f(x_i^k)+\varepsilon 2^{-k}, \quad k=1,2,\dots \tag{4.7}$$

من أجل كل عدد طبيعي m يكون

$$\{x_1^1,\dots,x_{n(1)},\dots,x_1^m,\dots,x_{n(m)}^m\}$$

جزءا منتهيا من E ووفقا لِـ (4.7) ، لدينا:

$$\sum_{k=1}^{m}\mu(E_k)\le\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n(k)} f(x_i^k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}2^{-k}\le\mu(E)+\varepsilon. \tag{5.7}$$

ثمّ، بما أن الطرف الأيمن لِـ (5.7) لا يتعلق بِـ m فيمكن جعل m يؤول نحو ∞ في الطرف الأيسر للعلاقة نفسها لكي نحصل على:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\le\mu(E)+\varepsilon.$$

وأخيرا، بما أن ε كيفي فتنتج صحة المتباينة العكسية للمتباينة (3.7). إذن μ سيغما جمعي.

توجد ثلاث حالات للمثال السابق ذات أهمية:

١. إذا كان $\sum\limits_{x\in X} f(x)=1$ نقول إن μ **قياس إحتمالاتي**.

٢. إذا كان $f(x)=1$ من أجل كل $x \in X$ نقول عن μ إنه قياس تعدادي. إن قياس التعداد منته إذا كان X نفسه متهيا وهو σ - منته إذا كان X عدودا.

٣. إذا كان $f(a)=1$ من أجل عنصر ما $a\in X$ وكان $f(x)=0$ من أجل كل $x\in X$ ، $(x\neq a)$ ، فيسمى μ **بقياس ديراك**[1] المركز عند النقطة a ويشار إليه بـ δ_a. واضح أن $\delta_a(E)=1$ إذا كان $a\in E$ وَ $\delta_a(E)=0$ إذا كان $a\notin E$.

2.7 خواص القياسات الموجبة

ما هو سلوك القياسات إزاء العمليات المألوفة على المجموعات وما سلوكها إزاء المرور إلى النهاية؟ إليك بعض الخواص الأساسية للقياسات الموجبة:

1.2.7 **مبرهنة • ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مُقاسا. عندئذ لدينا:**

1. **(الرتابة) إذا كان** E **وَ** F **جزئين قيوسين وكان** $E\subset F$ **كان** $\mu(E)\leq\mu(F)$. **ثمّ، إذا كان** $\mu(E)$ **متهيا فإن:**

$$\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E). \tag{6.7}$$

2. (السيغما تحتجمعية) إذا كانت $\{E_n\}$ متتالية من أجزاء قيوسة كان:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n). \tag{7.7}$$

3. (الإستمرار من الأسفل) إذا كانت $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_n\subset\ldots$ متتالية متزايدة من أجزاء قيوسة كان:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n). \tag{8.7}$$

4. (الإستمرار من الأعلى) إذا كانت $E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_n\supset\ldots$ متتالية متناقصة من أجزاء قيوسة وإذا وجد دليل k بحيث $\mu(E_k)<\infty$ كان:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n). \tag{9.7}$$

الإثبات

أمّا الرتابة فإننا بينّاها عندما أثبتنا العلاقة (1.7).

أمّا السيغما تحتجمعية فتنتج من الرتابة والجمعية. إذ إنها توجد، وفقا للقضية 4.1.6 ، متتالية من الأجزاء، غير المتقاطعة مثنى مثنى، القيوسة $\{F_n\}$ بحيث:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n \quad \text{مع} \quad F_n\subset E_n \quad \text{مهما كان} \quad n\geq 1 \text{ ،}$$

وبالتالي:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

وهي العلاقة (7.7).

[1] بوترس أندريان موريس، رياضياتي وفيزيائي إنجليزي ولد ببريسطول سنة ١٩٠٢.

أمّا فيما يخص الإستمرار من الأسفل فإننا نلاحظ أولا أن تزايد المتتالية $\{E_n\}$ يقتضي أن $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_n E_n$ ولذا:

$$\mu\Big(\bigcup_n E_n\Big) = \mu(\lim_n E_n)\,.$$

إذا وجد دليل k بحيث $\mu(E_k)=\infty$ فمن رتابة μ نرى أن $\mu(E_n)=\infty$ مهما كان $k \le n$ ومنه $\mu\Big(\bigcup_n E_n\Big)=\infty$ وليس هناك ما يحتاج إلى إثبات في هذه الحالة. إذا كننا في غير هذه الحالة فنضع $E_0=\emptyset$ ونلاحظ أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \setminus E_{n-1})$ مع المتتالية $\{E_n \setminus E_{n-1}\}$ ذات عناصر غير متقاطعة. ولذا:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n \setminus E_{n-1})\,.$$

لكن، وفقا للعلاقة (1.7) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n \setminus E_{n-1}) &= \sum_{n=1}^{k}\big(\mu(E_n)-\mu(E_{n-1})\big)\\ &= \mu(E_n)-\mu(E_0)=\mu(E_n),\end{aligned}$$

ومنه العلاقة (8.7).

وأخيرا، الفكرة لإثبات الإستمرار من الأعلى هي ردّ المسألة إلى الإستمرار من الأسفل ثمّ إستخدام العلاقة (8.7).

يمكننا، معوضين، عند الحاجة، E_n بـ $E_n \cap E_k$ ، أن نفرض أن $\mu(E_1)<\infty$. بما أن المتتالية $\{E_n\}$ متناقصة فإن المتتالية $\{E_1 \setminus E_n\}$ متزايدة وبالتالي، وفقا لِـ (8.7) ، لدينا:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_1 \setminus E_n)\,. \tag{10.7}$$

وبما أن $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ وبما أنه ينتج من (5.7) أن $\mu(E_1 \setminus E_n)=\mu(E_1)-\mu(E_n)$ وكذلك

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_n)\Big) = \mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_k\Big)$$

فإن (12.11) تستلزم

$$\mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\,.$$

ثمّ، بما أن $\mu(E_1)<\infty$ ، فإنه يمكن شطب هذا المقدار من المساواة السابقة لنحصل على (12.11) وبهذا ينتهي الإثبات.

2.2.7 **ملاحظة** • لا يمكن الإستغناء عن فرض μ منتهيا عند أحد الأجزاء المعتبرة. وعلي سبيل المثال إذا أخذ على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ القياس μ المعطى بأن $\mu(E)=$ عدد عناصر E في حالة E منتهيا والا $\mu(E)=\infty$ فمن أجل $A_n=\{n,n+1,\ldots\}$ يكون لدينا $\mu(A_n)=\infty$ مهما كان n لكن $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=\mu(\emptyset)=0$.

3.2.7 **مبرهنة** • [توطئة بوريل وكانتلي] ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وَ $\{E_n\}_{n\ge 1}$ متتالية من الأجزاء القيوسة. إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$ كان

$$\mu\Big(\limsup_{n\to\infty} E_n\Big)=0. \tag{11.7}$$

الإثبات

أولا، بما أن μ سيغما تحت جمعي فإن

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

ثانيا، بما أن المتتالية ذات الحد العام $F_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n$ ، $1 \leq m$ متناقصة وعناصرها قيوسة وَ $\mu(F_1) < \infty$ فإن تعريف $\limsup E_n$ والعلاقة (11.11) يقتضيان أن:

$$\mu\Big(\limsup_{n\to\infty} E_n\Big) = \mu\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu(F_m). \tag{12.7}$$

ثالثا، بما أن $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) \geq \mu(F_m)$ وهو باقي سلسلة متقاربة، إنه يؤول إذن إلى الصفر، فإن $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(F_m) = 0$ ومنه العلاقة (13.11).

4.2.7 **مبرهنة** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن الفئة $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}$ ولتكن $\mathcal{A}_1 = \{A \cup F \mid A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})\}$. عندئذ يوجد تمديد وحيد μ_1 للقياس μ إلى $(X, \mathcal{A}_1)$ بحيث يكون الفضاء المقاس $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ تاما.

3.7 القياسات الخارجية

1.3.7 **تعريف** • ليكن X مجموعة غير خالية. نقول عن تطبيق $\mu^\star$ لِـ $\mathcal{P}(X)$ في $[0, +\infty]$ إنهّ **قياس خارجي** إذا كان:

1. **رتيبا**، أي أنه ينتج من كون $E \subset F \subset X$ أن $\mu^\star(E) \leq \mu^\star(F)$.
2. **وسيغما تحتجمعيا**، أي أن

$$\left.\begin{array}{l} \mu^\star\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n) \\ \text{من أجل كل متتالية } \{E_n\} \text{ عناصرها من } \mathcal{P}(X) \end{array}\right\}$$

3. وَ $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

2.3.7 **مثالان** • لتكن X مجموعة غير خالية.

1. كل قياس موجب على $\mathcal{P}(X)$ قياس خارجي.
2. لنضع $\mu^\star() = 0$ وَ $\mu^\star(E) = 1$ من أجل $\emptyset \neq E \subset X$. عندئذ $\mu^\star$ قياس خارجي على X وهو ليس بقياس إذا كانت المجموعة X تحتوي على أكثر من عنصر؛ السيغما جمعية متعذرة.

تمارين حول القياسات الموجبة

كل القياسات المعتبرة في ما يلي قياسات موجبة.

1.7 لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الاعداد الطبيعية مزودة بعشيرة أجزائها $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. نعرف التابع $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ بأن:

$$\begin{cases} \mu(\emptyset)=0 \quad \text{و} \quad \mu(E)=+\infty \quad \text{إذا كان} \quad \operatorname{card}E=+\infty \\ \text{و} \quad \mu(E)=\sum\limits_{n\in E}\frac{1}{n^2} \quad \text{إذا كان} \quad \operatorname{card}E \quad \text{متهيا.} \end{cases}$$

بين أن μ ليس بقياس على $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2.7 لتكن X مجموعة غير متهية مزودة بعشيرة أجزائها $\mathcal{P}(X)$ ولتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}$ متتالية عناصرها مختلفة من X وَ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة. نضع

$\lambda_n(E)=1$ إذا كان $x_n \in E$ وَ $\lambda_n(E)=0$ إذا كان $x_n \in {}^cE$.

ونعرف التابع $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ بأن $\mu(E)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n(E)$. بين أن μ قياس موجب على $(X, \mathcal{P}(X))$.

(لاحظ أنك تحصل على التعداد المألوف كحالة خاصة بأخذ $X=\mathbb{N}$ ، $a_n=1$ ، $x_n=n$ ، من أجل $n=1$ ، 2 ، ...)

3.7 ليكن $(X, \mathcal{F}, \mu)$ فضاء مُقاسا وليكن $E \in \mathcal{F}$ بحيث $\mu(E) < \infty +$. نفرض أن $\mathcal{F}$ تحتوي على جماعة من الأجزاء غير المتقاطعة مثنى مثنى نرمز إليها بـ $\mathcal{D}$.

١. أثبت أن $\mu(E\cap D)\neq 0$ من أجل عدد عدود على أكثر من الأجزاء $D \in \mathcal{D}$.

٢. ليكن E جزءا من $\mathcal{F}$ بحيث

$E=\sum\limits_{n\geq 1}E_n$ (اتحاد غير متقاطع) حيث $E_n \in \mathcal{F}$ وَ $\mu(E_n) < +\infty$ ، $n \geq 1$

(نقول إن E ذو قياس سيغما منته).

بين أن إدعاء السؤال (١) صادق من أجل مثل هذه الأجزاء.

إرشاد: يمكن إعتبار الجماعة $\mathcal{D}_n=\{D\in\mathcal{D} \mid \mu(E\cap D)\geq \frac{1}{n}\}$.

4.7 ليكن f تابعا من مجموعة X في $[0,+\infty]$ وليكن μ القياس المعرف على $(X, \mathcal{P}(X))$ بأن $\mu(E)=\sum\limits_{x\in E}f(x)$. أوجد الشروط الكافية واللّازمة، بدلالة f ، التي تجعل μ منتهيا أو σ - متهيا.

5.7 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$.

أثبت أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right) < \infty$ وكان $\mu(E_n)\geq \eta > 0$ من أجل عدد غير منته من قيم الدليل n كان $\mu(\limsup_n E_n) > 0$.

أعط مثالا يبين أنه لا يمكن الاستغناء عن الشرط $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right) < \infty$.

6.7 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$.

١. أثبت أن $\mu(\liminf_n E_n) \leq \liminf_n \mu(E_n)$.

٢. أثبت أنه إذا كان $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right) < \infty$ فإن

$$\limsup_n \mu(E_n) \leq \mu(\limsup_n E_n).$$

أعط أمثلة تبين أنه يمكن للمتباينات السابقة أن تكون تامة.

7.7 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا إحتمالاتيا. ولتكن $\{A_n\}$ وَ $\{B_n\}$ متتاليتين عناصرهما من $\mathcal{A}$.
أثبت أنه إذا كان $\mu(\limsup_n A_n)=1$ وَ $\mu(\liminf_n B_n)=1$ كان

$\mu\big(\limsup_n (A_n\cap B_n)\big)=1$.

ماذا يحدث إذا إفترضنا، عوض الشرط الثاني، أن $\mu(\limsup_n B_n)=1$ ؟

8.7 لتكن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$ وليكن μ قياسا موجبا على $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ صفته أن $\mu(I)<\infty$ من أجل كل مجال محدود I من $\mathbb{R}$ وليكن $a\in\mathbb{R}$. لنعتبر التابع φ_a المعرف بأن:

$$\varphi_a(x)=\begin{cases}\mu(]a,x]) & \text{إذا كان } a<x\\ 0 & \text{إذا كان } a=x\\ -\mu(]x,a]) & \text{إذا كان } a>x\,.\end{cases}$$

١. أثبت أن φ_a تابع متزايد.

٢. أثبت أن φ_a مستمر من اليمين عند كل نقطة من $\mathbb{R}$.
نقول عن φ_a إنه **تابع توزيع** ناتج من القياس μ.

9.7 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن T تطبيقا غامرا للمجموعة X على مجموعة Y ولنضع $\mathcal{B}=\{B\subset Y \mid T^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$. ولنعتبر التابع المجموعاتي ν العرف على $\mathcal{B}$ بأن $\nu(B)=\mu(T^{-1}(B))$. أثبت أن $\mathcal{B}$ عشيرة على Y وأن $(Y,\mathcal{B},\nu)$ فضاء مُقاس.

لتكن X مجموعة غير خالية وَ A وَ B جزئين منها. إننا نضع:

$$A\Delta B \doteq (A\setminus B)\cup B\setminus A=(A\cap {}^cB)\cup({}^cA\cap B)$$

ونسمي هذه المجموعة بالفرق التناظري بين A وَ B .

10.7

١. بين أن:

$A\Delta C\subset(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$ مهما كانت الأجزاء A ، B ، C من X .

٢. ليكن هنا $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا. نعرف على $\mathcal{A}$ العلاقة $\mathcal{N}$ بأن

$A\mathcal{N}B$ إذا وفقط إذا كان $\mu(A\Delta B)=0$.

أثبت أن $\mathcal{N}$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{A}$.
نرمز إلى مجموعة صفوف تكافؤ $\mathcal{N}$ على $\mathcal{A}$ بـ $\mathcal{C}$ ، أي أن $\mathcal{C}\doteq\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

٣. لنضع من أجل صفين للتكافؤ $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$:

$$d(\overline{A},\overline{B})=\mu(A\Delta B)\,.$$

بين أن d معرفة جيدا، بمعنى أنه إذا كان A_1 ممثلا آخر للصف $\overline{A}$ وكان B_1 ممثلا آخر للّصف $\overline{B}$ كان $\mu(A\Delta B)=\mu(A_1\Delta B_1)$ ، وأن d مسافة على $\mathcal{C}=\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

11.7

١. لتكن A_1 ، A_2 ، B_1 ، B_2 أجزاء من المجموعة X. أثبت أن:
ا) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$ ؛
ب) $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$.

$\mathcal{C}$ هي مجموعة صفوف التكافؤ المعرفة في التمرين السابق وَ d المسافة المعرفة عليها. وليكن الجداء الديكارتي $\mathcal{C}^2=\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ المزود بالمسافة d_1 المعطاة بأن:

$$d_1((\overline{A}_1, \overline{A}_2), (\overline{B}_1, \overline{B}_2)) = d(\overline{A}_1, \overline{B}_1) + d(\overline{A}_2, \overline{B}_2)$$

٢. بين أن التابع $\overline{\bigcup} : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$ المعرف بأن:

$$\overline{\bigcup}(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A \cup B}$$

معرف جيدا وأنه مستمر.

٣. بين أن التابع $\overline{\bigcap} : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$ المعرف بأن:

$$\overline{\bigcap}(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A \cap B}$$

معرف جيدا وأنه مستمر.

٤. أثبت أن الفضاء المتري $(\mathcal{C}, d)$ فضاء متري تام.

12.7 ليكن (X, d) فضاء متريا وليكن $\alpha > 0$ وَ $\varepsilon > 0$ عددين حقيقيين. من أجل كل جزء A من X نشير بِـ $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$ إلى مجموعة كل التغطيات العدودة $\{B_k\}_{k\geq 1}$ للجزء A بواسطة كرات B_k قطرها أقل من ε . لنرمز بِـ $q(B_k)$ إلى قطر الكرة B_k ولنضع:

$$\mu_\alpha^\varepsilon(A) \doteq \inf_{\mathcal{B}_\varepsilon(A)} \Big\{ \sum_{k\geq 1} [q(B_k)]^\alpha \Big\}.$$

١. أثبت أن التابع $\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ متناقص على $\mathbb{R}_+^\star$.

٢. أثبت أن التطبيق μ_α^ε قياس خارجي على X .

٣. استنتج أن $\mu_\alpha \doteq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_\alpha^\varepsilon$ قياس خارجي على X يدعى **قياس هوزدورف الخارجي** .

٤. أثبت أنه من أجل كل جزء A من X يكون التابع $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ متناقص على $\mathbb{R}_+^\star$ وكذلك التابع $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha}\mu_\alpha^\varepsilon(A)$ من أجل كل $\varepsilon > 0$.

الفصل 8

قياس لوبيغ

1.8 قياس لوبيغ الخارجي في $\mathbb{R}^N$

1.1.8 تعريف • نسمي **بلاطة مغلقة** في $\mathbb{R}^N$ كل جزء محدود R من $\mathbb{R}^N$ من الشكل:

$$R = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ 1 \leq k \leq N\}$$

حيث $b_k \geq a_k$ مع $k = 1$ ، ... ، N أعداد حقيقية منتهية.

إذا كان $a_j = b_j$ من أجل دليل ما j من $\{1,\dots,N\}$ فإن R هي «سطح» في $\mathbb{R}^N$.

إذا عوضت المتباينات الواسعة الواردة في تعريف R بمتباينات تامة فنحصل على **بلاطة مفتوحة** :

$$\overset{o}{R} = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid a_k < x_k < b_k,\ 1 \leq k \leq N\}.$$

إذا كان $a_j = b_j$ من أجل دليل ما j من $\{1,\dots,N\}$ فإن $\overset{o}{R}$ هي المجموعة الخالية.

العدد

$$\prod_{k=1}^{N}(b_k - a_k) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N)$$

هو تعريفا **حجم** البلاطة المغلقة R وكذا المفتوحة $\overset{o}{R}$.

يشار إلى حجم البلاطة R ($\overset{o}{R}$ على التوالي) بـ $v(R)$ ($v(\overset{o}{R})$ على التوالي) أو بـ $|R|$ ($|\overset{o}{R}|$ على التوالي).

في $\mathbb{R}^3$ ، مثلا، البلاطة $R = [0,1]^3$ هي المكعب المغلق الذي ضلعه 1 ويقع في الثمن الأول وأحد رؤوسه هي نقطة الأصل. $R_0 = [0,1]^2 \times \{0\}$ هو أثر هذا المكعب على «الأرضية». أمّا $R_1 = [0,1] \times \{0\} \times \{0\}$ فهي القطعة المستقيمة التي تمثل تقاطع المكعب مع المستويين $x0y$ وَ $x0z$.

2.1.8 ملاحظة • لتكن $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ بلاطة مغلقة. إذا قسمنا أحد أضلاعها، وليكن $[a_k, b_k]$ ، إلى n_k قطعة مغلقة، داخلياتها غير متقاطعة فإن هذا يقسم R إلى n_k بلاطة مغلقة $\left\{R_{ki_k}\right\}_{i_k=1}^{n_k}$ ويمكنك أن تتأكد من أن:

$$|R| = \sum_{i_k=1}^{n_k} |R_{ki_k}|.$$

إننا ندرك عندها أن تقسيم الضلع $[a_1, b_1]$ إلى n_1 قطعة مغلقة والضلع $[a_2, b_2]$ إلى n_2 قطعة مغلقة وَ ... والضلع $[a_N, b_N]$ إلى n_N قطعة مغلقة داخليات كلها غير متقاطعة يقسم R إلى $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_N$ بلاطة مغلقة داخلاتها غير متقاطعة ويكون حجم البلاطة R مساويا إلى مجموع كل البلاطات المغلقة المكونة لهذا التقسيم.

إصطلاح:

إننا نصطلح على أن نقول عن بلاطين مغلقتين R_1 وَ R_2 إنهما **مترادفتان** إذا كان تقاطعهما غير خال وتقاطع داخليتيهما خال، أي أن $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ وَ $\overset{o}{R}_1 \cap \overset{o}{R}_2 = \emptyset$.

ترميز:

ليكن E جزءا من $\mathbb{R}^N$. نرمز بـ $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{ء}}(E)$ إلى مجموعة كل الجماعات $\{R_n\}_n$ المتهية أو العدودة التي عناصرها بلاطات مغلقة من $\mathbb{R}^N$ والتي يغطي إتحادها المجموعة E ، أي أن $E \subset \bigcup_n R_n$. حيث (إصطلاحا) يشير الرمز $\bigcup_n R_n$ إلى الإتحاد $\bigcup_{n=1}^{k} R_n$ إذا كانت الجماعة $\{R_n\}$ مكونة من k بلاطة مغلقة وإلى $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ إذا كانت عدودة (غير متهية).

3.1.8 **تعريف ● نسمي قياس لوبيغ الخارجي للجزء E من $\mathbb{R}^N$** العدد الموجب المكتمل (أي من $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\mu^\star(E) \doteq \inf_{\{R_n\} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\text{ء}}(E)} \sum_n |R_n|$$

حيث يشير $|R_n|$ إلى حجم البلاطة المغلقة R_n والرمز $\sum_n$ إلى مجموع منته أو عدود حسب كون الجماعة $\{R_n\}$ متهية أو عدودة.

لاحظ أن $\mu^\star$ معرف على كل أجزاء $\mathbb{R}^N$ ولا يأخذ إلا قيما موجبة.
يتمتع قياس لوبيغ الخارجي بالخواص التالية:

4.1.8 **مبرهنة ●** 1. $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

2. $\mu^\star(\{a\}) = 0$ **(حيث** a **نقطة من** $\mathbb{R}^N$ **).**

3. **(الرتابة) إذا كان** $E \subset F \subset \mathbb{R}^N$ **كان** $\mu^\star(E) \leq \mu^\star(F)$.

4. **(التحتجمعية العدودة) إذا كانت** $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية من أجزاء** $\mathbb{R}^N$ **كان:**

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n)\,. \tag{1.8}$$

5. **(** $\mu^\star$ **يمدد الحجم)**
.١ إذا كانت R **بلاطة مغلقة كان** $\mu^\star(R) = |R| = v(R)$.
.٢ وكذلك، إذا كانت $\overset{o}{R}$ **بلاطة مفتوحة كان** $\mu^\star(\overset{o}{R}) = |\overset{o}{R}| = v(\overset{o}{R})$.

6. **(خاصية اللّتغيُّر نسبة إلى الإنسحابات)**
ليكن E **جزءا من** $\mathbb{R}^N$ **. عندئذ، مهما كان الشعاع** $v \in \mathbb{R}^N$ **، لدينا:**

$$\mu^\star(E + v) = \mu^\star(E)$$

حيث:

$$E + v = \{y \in \mathbb{R}^N \mid y = x + v,\ x \in E\} .$$

الإثبات

1. بما أن المجموعة الخالية محتواة في كل بلاطة مغلقة فقياسها الخارجي للوبيغ معدوم.

2. لتكن $a=(a_1,\dots,a_N)$ نقطة من $\mathbb{R}^N$. بما أن:

$$[a_1,a_1]\times\cdots\times[a_N,a_N]\ \supset\{a\}$$

فإن $\mu^\star(\{a\})=0$.

3. بما أن $E\subset F$ فإن $\mathcal{R}_\text{ع}(E)\supset\mathcal{R}_\text{ع}(F)$ ومنه الرتابة، لأن عملية أخذ الحد الأدنى متناقصة نسبة إلى إحتوى المجموعات.

4. لتكن $\{E_n\}_{n\geq1}$ متتالية من أجزاء $\mathbb{R}^N$. إذا كان $\boldsymbol{S}\doteq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu^\star(E_n)=\infty$ فليس هناك ما يحتاج إلى برهان. لنفرض إذن أن $\boldsymbol{S}<\infty$ وليكن $\varepsilon>0$. من أجل كل $n\in\mathbb{N}^\star$ توجد تغطية $\{R_n^m\}_m$ متهية أو عدودة للجزء E_n بحيث:

$$\sum_m|R_n^m|\leq\mu^\star(E_n)+\tfrac{\varepsilon}{2^n}\cdot$$

يمكننا فرض التغطية $\{R_n^m\}$ عدودة إذ إننا، وإذا إقتضى الأمر، نستطيع إضافة إليها بلاطات مغلقة تقتصر على نقاط. واضح عندئذ أن $\left\{R_n^m\right\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ تغطية عدودة ببلاطات مغلقة للمجموعة $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leq\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}|R_n^m| &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}|R_n^m|\Big)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(E_n)+\varepsilon\end{aligned}$$

ومنه النتيجة إذ إن ε كيفي تماما.

5. ١. بما أن البلاطة المغلقة تغطي نفسها فإن $|R|\geq\mu^\star(R)$.

بما أن $\mu^\star(R)<\infty$ فمن أجل كل $\varepsilon>0$ توجد تغطية عدودة لِـ R بواسطة بلاطات مغلقة $\{R_n\}_n$ بحيث:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\leq\mu^\star(R)+\varepsilon.$$

ليكن الآن $\varepsilon'>0$. من أجل كل n يمكن تمديد كل أضلاع R_n من الطرفين بمقدار $\varepsilon'_n>0$ للحصول على بلاطة مفتوحة $\overset{o}{R}{}_n^{\varepsilon'_n}$ يحيث:

$$|\overset{o}{R}{}_n^{\varepsilon'_n}|\leq(1+\varepsilon')|R_n|$$

إن البلاطات المفتوحة $\{\overset{o}{R}{}_n^{\varepsilon'_n}\}$ تشكل إذن تغطية مفتوحة للمتراص R. نستطيع عندئذ إستخراج منها تغطية متهية $\{\overset{o}{R}{}_{n_i}^{\varepsilon'_{n_i}}\}_{i=1}^{k}$. من الممكن التأكد (بعد جهد لا بأس به) من أن $|R|\leq\sum\limits_{i=1}^{k}|\overset{o}{R}{}_{n_i}^{\varepsilon'_{n_i}}|$ ولذا:

$$|R|\leq\sum_{i=1}^{k}(1+\varepsilon')|R_{n_i}|\leq(1+\varepsilon')\sum_n|R_n|\leq(1+\varepsilon')(\mu^\star(R)+\varepsilon).$$

ومنه $|R|\leq\mu^\star(R)$ إذ إن ε' وَ ε كيفان تماما. إذن $\mu^\star(R)=|R|$.

5. ٢. لتكن البلاطة المفتوحة $\overset{o}{R}=]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_N,b_N[$. إذا كانت خالية فقياسها الخارجي معدوم ويساوي حجمها. إذا كانت غير خالية فيكون عندئذ العدد $0<m=\min\{b_i-a_i\mid1\leq i\leq N\}$ وبأخذ $\alpha\in]0,m[$ تكون البلاطة المغلقة

$$R_\alpha = [a_1 + \tfrac{\alpha}{2}, b_1 - \tfrac{\alpha}{2}] \times [a_2 + \tfrac{\alpha}{2}, b_2 - \tfrac{\alpha}{2}] \times \ldots \times [a_N + \tfrac{\alpha}{2}, b_N - \tfrac{\alpha}{2}]$$
محتواة في $\overset{o}{R}$ ولدينا:

$$\begin{aligned} \mu^\star(R_\alpha) = |R_\alpha| &= \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i - \alpha) \\ &\leq \mu^\star(\overset{o}{R}) \leq \mu^\star(R) = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \end{aligned}$$

ومنه، بجعل α يوؤل إلى الصفر، $\mu^\star(\overset{o}{R}) = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i) = |\overset{o}{R}|$.

إثبات 6. ليكن $v = (v_1, \ldots, v_N)$ شعاعا من $\mathbb{R}^N$. إذا كان $R = E$ بلاطة مغلقة من $\mathbb{R}^N$ أي: $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ كان

$$R + v = [a_1 + v_1, b_1 + v_1] \times \ldots \times [a_N + v_N, b_N + v_N]$$
وبالتالي $|R + v| = |R|$.

أمّا في حالة جزء كيفي E من $\mathbb{R}^N$ فمن أجل كل $\{R_n\} \in \mathcal{R}_{ء}(E)$ (أي تغطية لِـ E بواسطة بلاطات مغلقة) فأن $\{R_n + v\} \in \mathcal{R}_{ء}(E + v)$ وبالتالي:

$$\mu^\star(E + v) \leq \sum_n |R_n + v| = \sum_n |R_n|$$
ومنه $\mu^\star(E + v) \leq \mu^\star(E)$.

واذا كانت $\{\widetilde{R}_n\}_n$ تغطية للجزء $E + v$ كانت $\{\widetilde{R}_n - v\}$ تغطية للجزء E ولذا يكون لدينا:

$$\mu^\star(E) \leq \sum_n |\widetilde{R}_n - v| = \sum_n |\widetilde{R}_n|$$
وعليه $\mu^\star(E) \leq \mu^\star(E + v)$. وبتقريب النتيجتين، لدينا $\mu^\star(E + v) = \mu^\star(E)$.

5.1.8 **ملاحظة** • يجب أن نذكر هنا أنه، وبخلاف ما يحدث في حالة القياسات، من الممكن أن تكون المتباينة (1.8) تامة حتى في حالة الأجزاء $\{E_n\}$ غير متقاطعة. لكن ليس من السهل إعطاء مثال مضاد. إلا أنه لدينا ما يلي:

6.1.8 **مبرهنة** • **ليكن** A **وَ** B **جزئين من** $\mathbb{R}^N$. **إذا كان:**

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| \mid x \in A,\ y \in B\} > 0$$
كان:

$$\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B).$$
وبصفة خاصة، هذا وارد إذا كان A **وَ** B **جزئين متراصين وغير متقاطعين.**

الإثبات

إذا كان $\mu^\star(A)$ أو $\mu^\star(B)$ غير منته فيكون $\mu^\star(A \cup B)$ كذلك بسبب الرتابة. لنفرض إذن كلا القياسين الخارجيين منته. إنّ التحتجمعية تقتضي في هذه الحالة أن $\mu^\star(A \cup B)$ منته ويكفي، أن نثبت أن:

$$\mu^\star(A) + \mu^\star(B) \leq \mu^\star(A \cup B).$$
ليكن عندئذ $\varepsilon > 0$. توجد تغطية عدودة بواسطة بلاطات مغلقة $\{R_n\}$ للإتحاد $A \cup B$ بحيث:

$$\sum_n |R_n| \leq \mu^\star(A \cup B) + \varepsilon.$$
يُمكننا تصنيف هذه البلاطات على النحو التالي:

١. الصنف الأول وهو مكون من البلاطات R_n التي تتقاطع مع A ولا تتقاطع مع B ونشير إليها بِـ R_n^A ؛
٢. الصنف الثاني وهو مكون من البلاطات R_n التي لا تتقاطع مع A وتتقاطع مع B ونشير إليها بِـ R_n^B ؛
٣. الصنف الثالث وهو مكون من البلاطات R_n التي تتقاطع مع A وَ B معاً ونشير إليها بِـ R_n^{AB} .

يمكننا تقسيم كل بلاطة من الصنف الثالث إلى بلاطات جزئية مترادفة قطرها أقل من $d(A,B)$. تنتمي عندئذ كل بلاطة جزئية المحصل عليها إمّا إلى الصنف الأول وإمّا إلى الصنف الثاني أو لا تتقاطع مع $A \cup B$ ويمكن حذف مثل هذه البلاطات. وخلاصة القول، يمكن تصنيف البلاطات R_n إلى تغطية لِـ A وإلى تغطية لِـ B وحذف البقية. لدينا، وفقا لتعريف القياس الخارجي وكذا الملاحظة 2.1.8 ، التقدير:

$$\mu^\star(A) + \mu^\star(B) \leq \sum_n |R_n^A| + \sum_n |R_n^B| \leq \sum_n |R_n| \leq \mu^\star(A \cup B) + \varepsilon,$$

الذي يستلزم أن $\mu^\star(A) + \mu^\star(B) \leq \mu^\star(A \cup B)$ إذ إن ε كيفي تماما.

2.8 أجزاء $\mathbb{R}^N$ القيوسة حسب لوبيغ

1.2.8 **تعريف** • نقول عن جزء E من $\mathbb{R}^N$ إنه **قيوس حسب لوبيغ** أو **(لوبيغ قيوس)** إذا تحقق ما يلي:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE), \ \forall A \subset \mathbb{R}^N .$$

ترميز: نشير بـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ إلى مجموعة كل أجزاء $\mathbb{R}^N$ القابلة للقياس حسب لوبيغ.

2.2.8 **مثال** • كل جزء S من $\mathbb{R}^N$ قياسه الخارجي معدوم لوبيغ قايوس. إذ إنه لدينا، من أجل $\mathbb{R} \supset A$:

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap (S \cup {}^cS)) &= \mu^\star((A \cap S) \cup (A\, {}^cS))\\ &= \mu^\star(A \cap S) + \mu^\star(A\, {}^cS) \leq \mu^\star(S) + \mu^\star(A) = \mu^\star(A)\end{aligned}$$

وهذا اعتمادا على التحتجمعية وتزايد القياس الخارجي $\mu^\star$ على $\mathbb{R}^N$.

3.2.8 **مبرهنة** • $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ **عشيرة على** $\mathbb{R}^N$ **تحتوي العشيرة البوريلية** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

الإثبات

ويتم في خمس مراحل:

ا) **إذا كان** E **لوبيغ قيوسا كان** ${}^cE$ **لوبيغ قيوس**، إذ إن:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE) = \mu^\star(A \cap {}^cE) + \mu^\star(A \cap {}^c({}^cE))$$

لأن ${}^c({}^cE) = E$.

ب) **إذا كان** E **وَ** F **جزئين لوبيغ قيوسين كان** $E \cup F$ **لوبيغ قيوسا كذلك.**

يعتمد البرهان على العلاقة المجموعاتية ـ التي يمكن البرهان عليها بكل يسر ـ:

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F \cap {}^cE), \ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) .$$

ليكن عندئذ A جزءا من $\mathbb{R}^N$. لدينا، إعتمادا على الرتابة:

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &= \mu^\star\big(A \cap [(E \cup F) \cup {}^c(E \cup F)]\big)\\ &= \mu^\star\big(\{A \cap (E \cup F)\} \cup \{A \cap {}^c(E \cup F)\}\big)\\ &\leq \mu^\star\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^\star\big(A \cap {}^c(E \cup F)\big)\\ &\leq \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star\big((A \cap {}^cE) \cap F\big) + \mu^\star\big((A \cap^c E) \cap {}^cF\big)\\ &= \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap {}^cE)\end{aligned}$$

إذ إن F لوبيغ قيوس حيث نأخذ $A \cap {}^cE$ عوض الجزء الكيفي

$$= \mu^\star(A) \quad \text{لأن } E \text{ جزء قيوس}$$

هذا يبرهن على أن:

$$\mu^\star(A) = \mu^\star\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^\star\big(A \cap {}^c(E \cup F)\big), \ \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$$

أي أن $E \cup F$ لوبيغ قيوس.

جـ) **من أجل كل جماعة من** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ **متهية** $\{E_i\}_{i=1}^n$ **وغير متقاطعة ومن أجل كل جزء** A **من** $\mathbb{R}^N$ **، لدينا:**

$$\mu^\star\Big(A\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\Big)\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i)\,.$$

نقدم برهان هذه العلاقة بالتدريج : ـ من أجل $n=1$ العلاقة واضحة.

ـ لنفرض أنها صحيحة حتى الرتبة $n-1$ ولتكن $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)\supset\{E_i\}_{i=1}^{n}$ جماعة غير متقاطعة. لدينا (لا تنس أن $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)\ni E_n$):

$$\begin{aligned}\mu^\star\Big(A\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i)\Big) &= \mu^\star\Big[\{A\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i)\}\cap E_n\Big]+\mu^\star\Big[\{A\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i)\}\cap{}^cE_n\Big]\\ &= \mu^\star\Big[A\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i\cap E_n)\Big]+\mu^\star\Big[A\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i\cap{}^cE_n)\Big]\\ &= \mu^\star(A\cap E_n)+\mu^\star\big[A\cap(\cup_{i=1}^{n-1}E_i)\big]\end{aligned}$$

إذ إن $E_i\supset{}^cE_n$ من أجل $i=1$ ، ... ، $n-1$ وبإستخدام فرض التدريج ، نحصل على المطلوب:

$$\mu^\star\Big(A\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\Big)\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i)\,.$$

وبأخذ $A=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ في العلاقة السابقة، نجد:

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(E_i)\qquad \text{مهما كان}\qquad \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)\supset\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\qquad \text{غير متقاطعة.}$$

د) **$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ مغلق نسبة إلى الإتحادات العدودة غير المتقاطعة ولدينا:**

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(E_n)\quad \textbf{مهما كان}\quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)\supset\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\quad \textbf{غير متقاطعة.}$$

لإثبات (د) نأخذ $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ إتحاد عدود لأجزاء غير متقاطعة من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ونضع $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$. هذه المجموعة لوبيغ قيوسة كإتحاد منته من الأجزاء اللّوبيغ قيوسة وهذا وفقا للنقطة (ب). لدينا، من أجل A جزء من $\mathbb{R}^N$:

$$\mu^\star(A)=\mu^\star(A\cap F_n)+\mu^\star(A\cap{}^cF_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i)+\mu^\star(A\cap{}^cF_n)\,.$$

وبما أن $E\supset F_n$ فإن ${}^cE\subset{}^cF_n$ وبالتالي $\mu^\star(A\cap{}^cE)\le\mu^\star(A\cap{}^cF_n)$. إذن:

$$\mu^\star(A)\ge\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i)+\mu^\star(A\cap{}^cE)$$

ومنه

$$\mu^\star(A)\ge\sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(A\cap E_n)+\mu^\star(A\cap{}^cE)\,.\tag{$\star$}$$

ومن التحتجمعية $\mu^\star$ المطبقة على $A\cap[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n]$ نرى أن ($\star$) تستلزم أن:

$$\mu^\star(A)\ge\mu^\star(A\cap E)+\mu^\star(A\cap{}^cE)$$

إذن $\mu^\star(A)=\mu^\star(A\cap E)+\mu^\star(A\cap{}^cE)$ ، أي أن $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ لوبيغ قيوس.

وبأخذ $A=\bigcup_{1}^{\infty}E_n$ في ($\star$) فنحصل على $\mu^\star(\bigcup_{1}^{\infty}E_n)\ge\sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(E_n)+0$ ومنه المساواة $\mu^\star(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(E_n)$.

هـ) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ **مغلق نسبة إلى الإتحادات العدودة الكيفية.**

هذا ينتج من (د) ومن القضية 4.1.6 ، إذ من أجل $\{E_n\}$ متتالية كيفية عناصرها من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ توجد متتالية $\{F_n\}$ من عناصر $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ غير متقاطعة مثنى مثنى وبحيث

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n .$$

هذا ينهي البرهان على أن $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ عشيرة.

ويبقى لإتمام إثبات المبرهنة 3.2.8 أن نتأكد من أن $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ تحتوي على العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. إن هذا ينتج من المبرهنة الموالية التي تعني على وجه الخصوص أن العشيرة $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ثرية جدا.

4.2.8 **مبرهنة ● كل جزء مغلق من** $\mathbb{R}^N$ **لوبيغ قيوس.**

الإثبات

ليكن F جزءا مغلقا من $\mathbb{R}^N$ وَ A جزءا كيفيا من $\mathbb{R}^N$. بما أن قياس لوبيغ الخارجي تحت جمعي فيكفي أن نثبت أن:

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A\cap F) + \mu^\star(A\cap {}^cF). \tag{2.8}$$

إذا كان $A \subset F$ أو $A \subset {}^cF$ أو كان $\mu^\star(A) = +\infty$ فالمتباينة (2.8) واضحة. لنفرض إذن أن قياس A الخارجي منته وأن $A\cap F \neq \emptyset$ وَ $A\cap {}^cF \neq \emptyset$ ولنعتبر، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، المجموعة $F_n = \{x\in\mathbb{R}^N \mid d(x,F) \leq \frac{1}{n}\}$. لاحظ أن:

$$d(A\cap {}^cF_n, A\cap F) \geq d({}^cF_n, F) \geq \frac{1}{n} > 0$$

إذ إن $(A\cap {}^cF_n)\times(A\cap F) \subset {}^cF_n \times F$ ، ومن تعريف F_n ، إذا كان $x \in {}^cF_n$ وَ $y \in F$ كان $d(x,y) \geq \frac{1}{n}$. ينتج عندئذ من المبرهنة 6.1.8 أن:

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &= \mu^\star(\{A\cap F_n\}\cup\{A\cap {}^cF_n\})\\ &\geq \mu^\star((A\cap {}^cF_n)\cup(A\cap F)) \geq \mu^\star(A\cap {}^cF_n) + \mu^\star(A\cap F).\end{aligned}$$

إننا نتم إثبات (2.8) بالبرهان على أن $\lim_{n\to\infty}\mu^\star(A\cap {}^cF_n) = \mu^\star(A\cap {}^cF)$. لتكن الأجزاء:

$$E_i = A\cap\Big\{x\in\mathbb{R}^N \mid \frac{1}{i+1} < d(x,F) \leq \frac{1}{i}\Big\},\ i\in\mathbb{N}^\star. \tag{3.8}$$

بما أن F مغلق فإنه لدينا، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، العلاقة

$$A\cap {}^cF = (A\cap {}^cF_n)\cup\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\Big) \tag{4.8}$$

إذ إنه لدينا، أيا كان الجزء F ، الإحتواء $A\cap {}^cF \supset (A\cap {}^cF_n)\cup\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right)$. ثم، إذا كان $x \in A\cap {}^cF$ كان $0 < \rho = d(x,F)$ ، لأن F مغلق. إذا كان $\rho > \frac{1}{n}$ فيكون $x \in {}^cF_n$ ، وإذا كان $\rho \leq \frac{1}{n}$ فيمكن إيجاد $j \geq n$ بحيث $\frac{1}{j+1} < \rho = d(x,F) \leq \frac{1}{j}$ ، إذن $x \in E_j$. هذا يثبت (4.8) .

ينتج من العلاقة (4.8) أنه لدينا:

$$\mu^\star(A\cap {}^cF_n)\mu^\star(A\cap {}^cF) \leq \mu^\star(A\cap {}^cF) \leq \mu^\star(A\cap {}^cF_n) + \sum_{i=n}^{\infty}\mu^\star(E_i). \tag{5.8}$$

إن المطلوب إثباته يتحقق لو نستطيع أن نبين أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(E_i) < \infty. \tag{6.8}$$

ولتبيان ذلك نلاحظ أن $0 < d(E_i, E_j)$ إذا كان $2 \leq |i-j|$. ينتج عندئذ من المبرهة 6.1.8 أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم m يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{m} E_{2i}\Big) &= \sum_{i=1}^{m} \mu^\star(E_{2i}) \leq \mu^\star(A) < \infty, \\ \mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{m} E_{2i-1}\Big) &= \sum_{i=1}^{m} \mu^\star(E_{2i-1}) \leq \mu^\star(A) < \infty. \end{aligned}$$

هذا يثبت (6.8) وينتهي عندئذ البرهان.

لقد رأينا في إثبات المبرهنة 3.2.8 أن إقتصار القياس الخارجي للوبيغ على $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ يشكل قياسا موجبا. ومنه التعريف التالي:

5.2.8 **تعريف** • نسمي **قياس لوبيغ** على $\mathbb{R}^N$ إقتصار قياس لوبيغ الخارجي على $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$، أي القياس μ المعرب بأن:

$$\mu(E) = \mu^\star(E), \ \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N).$$

6.2.8 **أمثلة** • 1. ينتج من خواص قياس لوبيغ الخارجي أن قياس لوبيغ للجزء الخالي أو لنقطة من $\mathbb{R}$ أو من $\mathbb{R}^N$ معدوم وكذلك الحال بالنسبة إلى عدد منته أو عدود من نقاط $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}^N$.

2. قياس لوبيغ لكل مجال محدود من $\mathbb{R}$ هو طوله، أي

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu(]a,b]) = \mu([a,b[) = b-a.$$

قياس لوبيغ لكل بلاطة محدودة (مهما كانت طبيعتها التوبولوجية) هو حجمها.

3. قياس لوبيغ لمجموعة كانتور المعرفة في المثال 3.1.3.4 معدوم إذ إننا نعرف إنها مهملة.

تمارين حول قياس لوبيغ

1.8 ا) إذا كان E جزء من $\mathbb{R}^N$ لوبيغ قيوسا مع $\mu(E) < \infty$ فمن أجل كل $E \subset F$ يكون $\mu^\star(F \setminus E) = \mu^\star(F) - \mu(E)$ ·

ب) إذا كان القياس الخارجي لجزء E متهيا واذا وجد جزء لوبيغ قيوسا $\underline{E} \subset E$ مع $\mu^\star(E) = \mu(\underline{E})$ فإن E قيوس (يدعى أحيانا $\underline{E}$ بنواة E المتساوية القياس).

جـ) ليكن E جزء كيفيا من $\mathbb{R}^N$ · بين أنه، من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد مفتوح $\mathcal{G}$ صفته أن $E \subset \mathcal{G}$ وَ $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$.

بين كذلك وجود جزء $\widetilde{E}$ (وهو في حقيقة الأمر من نوع G_δ) بحيث:

$$\widetilde{E} \supset E \quad \text{وَ} \quad \mu(\widetilde{E}) = \mu^\star(E).$$

د) ليكن M جزء لوبيغ قيوسا مع $\mu(M) < \infty$. بين أنه حتى يكون جزء ما $E \subset M$ قيوسا يلزم ويكفي أن يكون $\mu(M) = \mu^\star(E) + \mu^\star(M \setminus E)$ ·

2.8 لنعرف على $[0,\infty]$ التابع h بأن:
$h(t) = 1 - e^{-t}$ إذا كان $0 \leq t < \infty$ وَ $h(\infty) = \infty$.

لتكن $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ عشيرة أجزاء $\mathbb{R}$ القابلة للقياس حسب لوبيغ· لنضع

$$d(A,B) = h(\mu(A \Delta B)) ،$$

حيث μ يشير إلى قياس لوبيغ وَ $A \Delta B$ إلى الفرق التناظري، أي $A \Delta B = (A \setminus B) \cup B \setminus A$ ، ونصطلح على أن نطابق بين جزئين A وَ B إذا كان $\mu(A \Delta B) = 0$.

ا) أثبت أن $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), d)$ فضاء متري تام·

ب) بين إستمرار التطبيقات لِـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ التالية:

- $(A,B) \to A \cup B$
- $(A,B) \to A \Delta B$
- $(A,B) \to A \cap B$.

وكذا إستمرار التطبيق لِـ $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ في $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ التالي:

- $A \to \mathbb{R} \setminus A$.

3.8 أثبت، من أجل كل جزء E من $\mathbb{R}$ ، تكافؤ القضايا التالية:

ت) E لوبيغ قيوس؛

ت 2) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد جزء مفتوح $\mathcal{G}$ من $\mathbb{R}$ بحيث

$$\mathcal{G} \supset E \quad \text{مع} \quad \mu^\star(\mathcal{G} \setminus E) \leq \varepsilon \text{ ؛}$$

ت 3) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد جزء مغلق $\mathcal{F}$ من $\mathbb{R}$ بحيث

$$E \supset \mathcal{F} \quad \text{مع} \quad \mu^\star(E \setminus \mathcal{F}) \leq \varepsilon \text{ ؛}$$

ت 4) يوجد جزء $\mathcal{W}$ من نوع G_δ من $\mathbb{R}$ بحيث

$$\mathcal{W} \supset E \quad \text{مع} \quad \mu^\star(\mathcal{G} \setminus E) = 0 \text{ ؛}$$

ت 5) يوجد جزء $\mathcal{K}$ من نوع F_δ من $\mathbb{R}$ بحيث

$$E \supset \mathcal{K} \quad \text{مع} \quad \mu^\star(E \setminus \mathcal{K}) = 0 \text{ ·}$$

ثمّ، إذا كان $\mu^\star(E)$ متهيا، فالقضايا السابقة تكافيء القضية التالية:

ت 6) من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد إتحاد منته $\mathcal{I}$ من المجالات المفتوحة من $\mathbb{R}$ بحيث

$\mu^\star(\mathcal{I}\setminus E)\leq\varepsilon$ حيث $\mathcal{I}\Delta E=(\mathcal{I}\setminus E)\cup E\setminus\mathcal{I}$.

تمارين حول التقاربات

نزود فيما يلي $\mathbb{R}$ بعشيرتها البوريلية ومن أجل كل فضاء $(X,\mathcal{A})$ قيوس، عندما نقول تابع قيوس من X في $\mathbb{R}$ فإننا نقصد القابلية للقياس نسبة إلى العشرة $\mathcal{A}$ في الإنطلاق والعشيرة البوريلية في الوصول.

لنذكر بمفاهيم التقاربات التالية:

التقاربان البسيط والمنتظم

نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة X إنها:

- **متقاربة ببساطة** نحو تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $x\in X$ ومهما كان $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall n\geq n_0.$$

- **متقاربة بإنتظام** نحو تابع حقيقي f على X إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث:

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall n\geq n_0.$$

التقاربان البسيط والمنتظم الشبه الكليين

نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة جزئية E من فضاء مقاس $(X,\mathcal{A},\mu)$ إنها:

- **متقاربة ببساطة شبه كليا** نحو تابع حقيقي f معرف على E إذا وجد جزء N من E بحيث $\mu(N)=0$ وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ ببساطة نحو f على $E\setminus N$.

- **متقاربة بإنتظام شبه كليا** نحو تابع حقيقي f معرف على E إذا وجد جزء N من E بحيث $\mu(N)=0$ وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ بإنتظام نحو f على $E\setminus N$.

التقارب الشبه المنتظم

نقول عن متتالية توابع حقيقية $\{f_n\}$ معرفة على مجموعة جزئية E من فضاء مقاس $(X,\mathcal{A},\mu)$ إنها **متقاربة شبه إنتظاميا** نحو تابع حقيقي f معرف على E إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon>0$ يوجد جزء A من E بحيث $\mu(A)\leq\varepsilon$
وتتقارب المتتالية $\{f_n\}$ بإنتظام نحو f على $E\setminus A$.

التقارب بالقياس

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا. نقول عن متتالية توابع حقيقية قيوسة $\{f_n\}$ إنها **متقاربة بالقياس** نحو تابع حقيقي قيوس f على X إذا تحقق ما يلي:

$$\forall\alpha>0,\quad \lim_{n\to\infty}\mu\Big(\{x\in X\mid |f_n(x)-f(x)|\geq\alpha\}\Big)=0.$$

4.8 لتكن المتتاليات التابعية الحقيقية المعرفة على أجزاء $\mathbb{R}$ المذكورة:

١. $f_n(x)=\frac{2x}{1+n^2x^2}$ ، $0\leq x$ ؛
٢. $g_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ، $0\leq x$ ؛
٣. $h_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^2x^2}$ ، $0\leq x$ ؛
٤. $l_n(x)=\frac{x}{1+nx}$ ، $0\leq x\leq 1$ ؛
٥. $p_n(x)=nxe^{-nx}$ ، $0\leq x\leq 1$ ؛
٦. $q_n(x)=nx(1-x)$ ، $0\leq x\leq 1$ ؛
٧. $r_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^3x^2}$ ، $0\leq x\leq 1$ ؛
٨. $s_n(x)=xe^{-nx}$ ، $0\leq x$ ؛

٩. $u_n(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}$ ، $x \in \mathbb{R}$ ؛ ١٠. $v_n(x) = x^n$ ، $x \in [0,1]$ ؛

١١. $w_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2 \sin^2 x}$ ، $x \in [0,\pi]$ ؛

١٢. $z_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ إذا كان $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ وَ $z_n(x) = (-1)^n$ إذا كان $x \in \mathbb{N}$.

افحص تقارباتها البسيطة والمنتظمة.

في التمارين الموالية، نزود $\mathbb{R}$ بقياس لوبيغ.

5.8 افحص التقاربين البسيط والمنتظم الشبه الكليين لكل من متتاليات التمرين السابق.

6.8 افحص التقارب الشبه المنتظم لكل من متتاليات التمرين السابق.

7.8 افحص التقارب بالقياس لكل من متتاليات التمرين السابق.

8.8 ليكن $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ تعدادا للأعداد الناطقة الموجودة في $I = [0,1]$ ولنكتب العدد r_n ذي المرتبة n على شكل كسر غير قابل للإختزال $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ ولتكن المتتالية التابعية:

$$f_n(x) = \exp\{-(p_n - xq_n)^2\}.$$

أثبت أن $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو التابع الصفري على $[0,1]$ لكنّها لا تتقارب ببساطة عند كل نقطة من المجال نفسه.

9.8 استخرج من متتالية التمرين السابق متتالية جزئية متقاربية ببساطة نحو التابع الصفري شبه كليا (شك) على $[0,1]$.

10.8 أثبت أن التقارب الشبه المنتظم يستلزم التقارب بالقياس.

11.8 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$. ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة متقاربة ببسيطة شبه كليا على X نحو تابع f . أثبت أن هذه المتتالية تتقارب بالقياس نحو f على X .

12.8 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية قيوسة متقاربة بالقياس نحو f على X . أثبت أنه يمكن إستخراج منها متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ متقاربة ببسيطة شبه كليا نحو f على X .

13.8 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا. أثبت أنه إذا كانت المتتالية التابعية الحقيقية $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو f على X وكان g تابعا حقيقيا بحيث $f = g$ ، μ ـ شك، كانت هذه المتتالية متقاربة بالقياس نحو g على X .

14.8 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مُقاسا. أثبت أنه إذا كانت المتتالية التابعية الحقيقية $\{f_n\}$ متقاربة بالقياس نحو f على X وكانت كذلك متقاربة بالقياس نحو تابع g كان $f = g$ ، μ ـ شك.

إرشاد: يمكنك، في حل التمارين النظرية السابقة، الإستعانة من تمارين موجودة في هذه المطبوعة ومن المرجعين [٢] وَ [11] .

الفصل 9

تكامل لوبيغ

نقدم في هذا الفصل التكامل وخواصه الأساسية منها المرور إلى النهاية تحت إشارة التكامل.
في كل ما يلي، تزود $\mathbb{R}$ (وَ كذا $\overline{\mathbb{R}}$) بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$).

1.9 تكامل التوابع الموجبة

1.1.9 **تعريف** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولكون φ **تابعا بسيطا موجبا** معرفا على X وعلى وجه التحديد:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \qquad x \in X$$

حيث $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ تجزئة للمجموعة X عناصرها من $\mathcal{A}$ (غير متقاطعة) وَ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ متتالية حقيقية متهية حدودها موجبة. يشار إلى تكامل التابع φ على X نسبة إلى القياس الموجب μ بِـ $\int_X \varphi \, d\mu$ وهو تعريفا العدد الحقيقي الموجب المكتمل:

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \tag{1.9}$$

حيث نعمل بالإصطلاح $0\infty = 0$.

ينتج من الإصطلاح السابق أن $\int_X \varphi \, d\mu = 0$ من أجل $\varphi = 0$ ، μ ـ شبه كليا (شك) على X ، أنظر المبهنة 4.1.9 ، جـ) المولية.

لنذكر أن $\varphi = 0$ ، μ ـ شك على X يعني أن المجموعة $A = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}$ قيوسة ولدينا $\mu(A) = 0$.

2.1.9 **مثال** • ليكن الفضاء المقاس $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta)$ ، حيث δ هو قياس ديراك المركز عند النقطة 0 (أنظر نهاية المثال الرئيسي 4.1.7). عندها، من أجل كل تابع بسيط لدينا $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\delta = \varphi(0)$.

وعلة ذلك أن φ يكتب $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ ، حيث $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ تجزئة للمجموعة $\mathbb{R}$ عناصرها من $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (غير متقاطعة) وَ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ متتالية حقيقية. يوجد إذن دليل وحيد j بحيث $0 \in A_j$ ولذا فإن $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta(A_i) = a_j = \varphi(0)$.

3.1.9 **مثال** • ليكن الفضاء المقاس $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ، حيث μ هو قياس التعداد (أنظر نهاية المثال الرئيسي 4.1.7). وليكن التابع $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \chi_{A_1} + \sqrt{3} \cdot \chi_{A_2} + 0 \cdot \chi_{A_3}$ ، حيث $A_1 = \{0, 1, 2\}$ ، $A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 8\}$. لدنا هنا $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \frac{3}{2} + 5\sqrt{3}$.

4.1.9 **مبرهنة** • إن التكامل المعطي بالعبارة (1.9) عدد موجب أو $+\infty$ وهو يتمتع بالخواص التالية:

ا) التكامل معرف جيدا، أي أنه إذا كان $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ كان:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

ب) إنه **موجب التجانس**، بمعنى أنه، إذا كان φ وَ ψ تابعين بسيطين موجبين وكان $\lambda > 0$ كان:

$$\int_X (\varphi + \lambda\psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \lambda \int_X \psi\, d\mu. \tag{2.9}$$

جـ) **إذا كان** φ **وَ** ψ **تابعين بسيطين موجبين وكان** $\varphi = \psi$ ، μ **ـ شك كان:**

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu. \tag{3.9}$$

د) **إنه رتيب، أي أنه إذا كان** $0 \le \varphi \le \psi$ **تابعين بسيطين كان:**

$$\textstyle\int_X \varphi\, d\mu \le \int_X \psi\, d\mu.$$

هـ) **من أجل كل تابع بسيط موجب** φ **، يشكل التابع المجموعاتي** ν **المعرف بأن:**

$$\nu(E) = \textstyle\int_E \varphi\, d\mu \doteq \int_X \varphi \chi_E\, d\mu, \;\; E \in \mathcal{A},$$

حيث يشير الرمز χ_E **إلى الدالة المميزة للجزء** E **، قياسا موجبا على** $(X, \mathcal{A})$.

الإثبات

ا) لتكن الكتابان للتابع البسيط الموجب φ :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{A_k} = \sum_{l=1}^{n} b_l \chi_{B_l}$$

حيث $\{A_k\}$ وَ $\{B_l\}$ تجزئتان للمجموعة X عناصرها من $\mathcal{A}$. ولنعتبر الأجزاء $\{A_k \cap B_l\}_{(k,l)\in K\times L}$ حيث $K = \{1, \ldots, m\}$ وَ $L = \{1, \ldots, n\}$. إنها تشكل تجزئة للمجموعة X عناصرها من $\mathcal{A}$. ثمّ إنه، إدى كان التقاطع $A_k \cap B_l$ غير خال فلدينا $a_k = b_l \doteq c_{kl}$. وإذا كان المجوع S التالي منتهيا فيمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{(k,l)\in K\times L} c_{kl}\mu(A_k \cap B_l) = \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{n} c_{kl}\mu(A_k \cap B_l)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k \Big(\sum_{l=1}^{n} \mu(A_k \cap B_l)\Big) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n}(A_k \cap B_l)\Big)
\end{aligned}$$

لأن μ قياس و $\{A_k \cap B_l\}$ غير متقاطعة

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \mu\Big(A_k \cap \bigcup_{l=1}^{n} B_l\Big) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu(A_k).$$

وكذلك

$$\begin{aligned}
S = \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m} c_{kl}\mu(A_k \cap B_l)\Big) &= \sum_{l=1}^{n} b_l \mu\Big(\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k \cap B_l)\Big)\\
&= \sum_{l=1}^{n} b_l \mu(B_l).
\end{aligned}$$

هذا يبين تساوي المجموعين: $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mu(A_k) = \sum\limits_{l=1}^{n} b_l \mu(B_l)$ ولذا فإن العلاقة (1.9) تعرف عددا واحدا هو تعريفا تكامل φ على X نسبة إلى القياس μ وهذا في حالة $S < \infty$.

أمّا إذا كان $S=\infty$ فيوجد دليلان k_0 وَ l_0 بحيث:

$$a_{k_0}=b_{l_0}=c_{k_0l_0}>0 \qquad \text{وَ} \qquad \mu(A_{k_0}\cap B_{l_0})=\infty\,.$$

وعندئذ $\infty=\mu(A_{k_0}\cap B_{l_0})\leq\mu(A_{k_0})$ وكذلك $\infty=\mu(A_{k_0}\cap B_{l_0})\leq\mu(B_{l_0})$ وعندئذ يساوي كل من المجموعين ∞ ؛ إنهما إذن متساويان.

ب) ليكن التابعان البسيطان الموجبان:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{m}a_k\chi_{A_k} \qquad \text{وَ} \qquad \psi=\sum_{l=1}^{n}b_l\chi_{B_l}\,\cdot$$

التابع $\varphi+\lambda\psi$ بسيط ويأخذ القيمة $a_k+\lambda b_l$ على التقاطع $\mathcal{A}\ni A_k\cap B_l$. من تعريف التكامل، لدينا:

$$\int_X(\varphi+\lambda\psi)=\sum_{\substack{k=1,\ldots,m\\ l=1,\ldots,n}}(a_k+\lambda b_l)\mu(A_k\cap B_l). \tag{4.9}$$

إذا كانت قيمة الجموع (4.9) غير متهية، فيوجد دليلان k_0 وَ l_0 بحيث:

$$a_{k_0}+\lambda b_{l_0}>0 \qquad \text{وَ} \qquad \mu(A_{k_0}\cap B_{l_0})=\infty\,.$$

إذن $a_{k_0}\mu(A_{k_0}=\infty$ أو $b_{l_0}\mu(B_{l_0})=\infty$. وفي الحالة الأولى يكون $\int_X\varphi\,d\mu=\infty$ ويكون في الحالة الثانية $\int_X\psi\,d\mu=\infty$ وتكون العلاقة (2.9) محققة.

أمّا إذا كانت قيمة المجموع (4.9) متهية، يمكننا ترتيب حدودها بكل حرية ونجد أنها تساوي:

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\sum_{l=1}^{n}\mu(A_k\cap B_l)+\lambda\sum_{l=1}^{n}b_l\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k\cap B_l),$$

وبإستخدام جمعية القياس μ فنرى أن هذا المجموع يساوي:

$$\int_X\varphi\,d\mu+\lambda\int_X\psi\,d\mu$$

ومنه (2.9) .

جـ) ليكن التابعان البسيطان الموجبان:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{m}a_k\chi_{A_k} \qquad \text{وَ} \qquad \psi=\sum_{l=1}^{n}b_l\chi_{B_l}\,\cdot$$

يوجد، فرضا، جزء قيوس N من X بحيث $\mu(N)=0$ وَ $\psi=\varphi$ على $X\setminus N$. لتكن عندها التوابع:

$$\xi=\left\{\begin{array}{ll}\varphi=\psi & \text{على } X\setminus N\\ 0 & \text{على } N\text{ ،}\end{array}\right.$$

$$\text{و}\quad \varphi_0=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{على } X\setminus N\\ \varphi & \text{على } N\end{array}\right. \qquad \text{و} \qquad \psi_0=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{على } X\setminus N\\ \psi & \text{على } N\,.\end{array}\right.$$

واضح عندها أن $\varphi=\xi+\varphi_0$ وَ $\psi=\xi+\psi_0$. ثمّ، بإعتبار التجزئات القيوسة $\{N,A_k\cap(X\setminus N),k=1,\ldots,m\}$ وَ $\{X\setminus N,A_k\cap N,k=1,\ldots,m\}$ وَ $\{X\setminus N,B_l\cap N,l=1,\ldots,n\}$ ، على التوالي، نرى أن التوابع ψ وَ φ_0 وَ ψ_0 بسيطة وموجبة ولدينا، على سبيل المثال:

$$\int_X\varphi_0\,d\mu=0.\mu(X\setminus N)+\textstyle\sum_{k=1}^{m}a_k\mu(A_k\cap N)=0$$

إذ إن الحد الذي يشمل 0 معدوم إصطلاحا وَ μ موجب ورتيب وَ $\mu(N)=0$. من الواضح بعدئذ أن $\int_X\psi_0\,d\mu=0$. ينتج عندها من العلاقة (2.9) أن:

$$\int_X\varphi\,d\mu=\int_X\xi\,d\mu=\int_X\psi\,d\mu.$$

د) ليكن التابعان البسيطان الموجبان:

$$\cdot\ \psi=\sum_{l=1}^{n} b_l\chi_{B_l} \qquad \text{وَ} \qquad \varphi=\sum_{k=1}^{m} a_k\chi_{A_k}$$

إذا كان $\mu(A_k\cap B_l)\neq 0$ كان $a_k\leq b_l$ وبما أن $\bigcup_{k,l}(A_k\cap B_l)=X$ فإن:

$$\int_X \varphi\, d\mu=\sum_{k,l} a_k\mu(A_k\cap B_l)\leq \sum_{k,l} b_l\mu(A_k\cap B_l)=\int_X \psi\, d\mu$$

هـ) واضح أن ν لا يأخذ إلا قيما موجبة ثمّ إنه إذا كان $E\in\mathcal{A}$ كان $\varphi\chi_E$ تابعا بسيطا وموجبا ولدينا:

$$\nu(E)=\int_X \varphi\chi_E\, d\mu=\sum_k a_k\mu(A_k\cap E).$$

لنثبت أن ν سيغما جمعي. لتكن $\{E_n\}$ متتالية عناصرها من $\mathcal{A}$ وغير متقاطعة. بما أن μ قياس فإن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_k a_k\mu(A_k\cap E_n)=\sum_k a_k\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_k\cap E_n)\\ &= \sum_k a_k\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_k\cap E_n)\Big)=\sum_k a_k\mu\Big(A_k\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\Big)\\ &= \sum_k a_k\mu(A_k\cap E)=\nu(E).\end{aligned}$$

كيف يمكن تعريف تكامل تابع كيفي قيوس وموجب؟ إن هذه التوابع، وفقا للمبرهنة 4.9.6 ، هي نهاية متتالية متزايدة من التوابع البسيطة وهذا يوحي بكيفة لتعريف تكاملاتها.

5.1.9 **تعريف** • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ f تابعا موجبا وقيوسا معرفا على X ولنشير بِـ $\mathcal{F}_f$ إلى مجموعة التوابع البسيطة φ بحيث $0\leq\varphi\leq f$.

يشار إلى تكامل f على X نسبة إلى μ بِـ $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ أو، إختصارا، $\int_X f\,d\mu$ وهو العدد المكتمل المعرف بِـ

$$\int_X f\, d\mu=\sup\left\{\int_X \varphi\, d\mu \mid \varphi\in\mathcal{F}_f\right\}. \tag{5.9}$$

إن المبرهنة 4.9.6 تضمن أن $\mathcal{F}\neq\emptyset$ وبالتالي يكون التكامل $\int_X f\,d\mu$ معرفا جيدا وهو عدد حقيقي أو $+\infty$.

إن التعريف 5.1.9 يشبه تعريف تكامل ريمان السفلي لتابع موجب f . إلا أن هناك فرق جوهري هنا وهو أننا بدل إعتبار ـ في حالة تكامل ريمان ـ تقسيمات «ميدان المكاملة» X فنستخدم هنا تقسيمات لـ «صورة» f بكيفة تلائم التابع f ذاته. وبعبارة أدق، تحتوي المجموعة $\mathcal{F}_f$ على التوابع φ المشيدة في إثبات المبرهنة 4.9.6 وهذه التوابع لها علاقة وثيقة بمجموعات سوية التابع f .

وقبل المضي إلى الأمام، علينا أن نتأكد من أنه إذا كان f بسيطا فإن (1.9) وَ (5.9) ينطبقان. وفي الحقيقة، إذا كان $\int_X f\,d\mu$ يشير إلى المقدار المعطى بِـ (1.9) فبما أن $f\in\mathcal{F}_f$ لدينا طبعا:

$$\int_X f\, d\mu\leq \sup_{\mathcal{F}_f}\int_X \varphi\, d\mu. \tag{6.9}$$

ثمّ إنه، إذا كان $\varphi\in\mathcal{F}_f$ ، ينتج من (3.9) أن

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu, \ \forall \in \mathcal{F}_f,$$

الأمر الذي يؤدي إلى تحقيق المتباينة العكسية للمتباينة (6.9) . هذا يعني تطاق التعريفين المعطيين بواسطة (1.9) وَ (5.9) في حالة تابع بسيط.

إننا الآن على أستعداد لتقديم البعض من الخواص الأساسية للتكامل.

6.1.9 **مبرهنة** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا وَ f وَ g تابعين موجبين قيوسين معرفين على X . عندئذ

ا) إذا كان $f = g$ ، μ - شك كان $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

ب) لدينا:

$$\int_X (f+g) \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu \tag{7.9}$$

جـ) **إذا كان** $f \leq g$ **كان** $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

د) **إذا كان** A **وَ** B **قيوسين مع** $A \subset B$ **كان:**

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu. \tag{8.9}$$

الإثبات

لإثبات (ا) نلاحظ أنه، من أجل كل $\varphi \in \mathcal{F}_f$ ، يوجد $\psi \in \mathcal{F}_g$ بحيث $\psi = \varphi$ ، μ - شك ولذا، وفقا للخاصية (ا) من المبرهنة 4.1.9 ، يكون تكاملي φ وَ ψ على X نسبة إلى μ متساويين.

ولإثبات (ب) نلاحظ أنه إذا كان $\varphi \in \mathcal{F}_f$ وكان $\psi \in \mathcal{F}_g$ كان $\varphi + \psi \in \mathcal{F}_{f+g}$ وينتج من (2.9) أن:

$$\int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu = \int_X (\varphi + \psi) \, d\mu \leq \int_X (f+g) \, d\mu.$$

وبأخذ الحد الأعلى لطرف اليسر للمتباينة السابقة نسبة إلى $\varphi \in \mathcal{F}_f$ والى $\psi \in \mathcal{F}_g$ نحصل على (7.9) ومنه (ب).

أمّا إثبات (جـ) فيعتمد على الملاحظة بأن $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{F}_g$ وبالتالي:

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu, \ \forall \varphi \in \mathcal{F}_f.$$

وبأخذ الحد الأعلى نسبة إلى φ نحصل على (جـ).

وأمّا لتأكد من (8.9) فيكفي التفطن إلى أنه لدينا، في هذه الحالة، $\mathcal{F}_{f\chi_A} \subset \mathcal{F}_{f\chi_B}$. ولذا (د) محققة.

إنه لمن المهم أن نعرف متى تتحقق المساواة في (7.9) . لبحث هذه المسألة ودراسة سلوك التكامل نسبة إلى المرور إلى النهاية نقدم ما يلي:

7.1.9 **مبرهنة [بيبو لفي]** • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية متزايدة من التوابع الموجبة والقيوسة المعرفة على X والمتهية μ - شك.

عندئذ، تكون النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ موجودة حيثما كان في X ويكون f موجبا وقيوسا ولدينا:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \left(= \sup_n \int_X f_n \, d\mu \right) . \tag{9.9}$$

الإثبات

واضح أن f موجب وقيوس. ينتج من الرتابة أن المتتالية العددية $\{\int_X f_n\,d\mu\}_{n\geq 1}$ متزايدة ولذلك فلها نهاية نرمز إليها بـ L . ودائما، إعتمادا على الرتابة، لدينا $\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ وكذلك

$$L = \sup_n \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu. \tag{10.9}$$

إذا كان $L = \infty$ كان الطرف الأيمن من (10.9) مساويا لِـ ∞ وتكون (9.9) محققة في هذه الحالة.

لنفرض إذن أن $L < \infty$. وليكن $0 < \eta < 1$ وَ $\varphi \in \mathcal{F}_f$ ولنضع

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) > \eta\varphi(x)\}.$$

تشكل $\{E_n\}$ متتالية من أجزاء X قيوسة وبما أن $\{f_n\}$ متزايدة وَ $\varphi \leq f$ فنرى بسهولة أن $E_n \subset E_{n+1}$ من أجل كل n وأن $\lim_n E_n = X$.

لنعتبر الآن القياس $\nu(E) = \int_E \varphi\,d\mu$ ، $E \in \mathcal{A}$ ولنلاحظ أن الرتابة تقتضي أن:

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} \eta\varphi\,d\mu = \eta\nu(E_n). \tag{11.9}$$

إستنادا إلى (10.9) وَ (هـ) من المبرهنة 4.1.9 نرى ان كل اطراف (11.9) تتمتع بنهاية منتهية من أجل $n \to \infty$. إذن بالمرور إلى النهاية نحصل على:

$$L \geq \lim_{n\to\infty} \eta\nu(E_n) = \eta\nu(X) = \eta \int_X \varphi\,d\mu. \tag{12.9}$$

ولآن وبما أن (12.9) محققة من أجل كل $\varphi \in \mathcal{F}_f$ فبأخذ الحد الأعلى على $\mathcal{F}_f$ لنحصل على:

$$\eta \int_X f\,d\mu \leq L. \tag{13.9}$$

وبما أن $\eta < 1$ كيفي فمن الواضح أن (13.9) محققة أيضا من أجل $\eta = 1$ ولذا فالمتباينة العكسية للمتباينة (10.9) محققة.

تعرف كذلك نتيجة بيبو لفي[1] السابقة بإسم **مبرهنة التقارب الرتيب**. تتمتع هذه المبرهنة بتطبيقات شتى، وقبل التطرق إلى بعضها نقدم تعميما بسيطا لها، يتمتع هو الآخر بتطبيقات عديدة.

8.1.9 **لازمة ● ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية μ - شك متزايدة من التوابع الموجبة والقيوسة المعرفة على X والمتهية μ - شك.**

عندئذ، تكون النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ موجودة μ - شك في X ويكون f موجبا وقيوسا ولدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

الإثبات

ليكن N جزء X حيث $\{f_n\}$ غير متزايدة. لنضع $g_n = f_n$ على $X \setminus N$ وَ $g_n = 0$ على N كما نضع $g = f$ على $X \setminus N$ وَ $g = 0$ على N .

الجدير بالملاحظة الآن هو أن $\{g_n\}$ تتقارب نحو g حيثما كان على X ولدينا التطابق على مستوى التكاملات. وبعبارة أدق لدينا، إعتمادا على المبرهنة 6.1.9 (ا) :

[1] (1875–1961) رياضياتي إيتالي.

$$\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu \quad \text{وَ} \quad \int_X f_n\,d\mu = \int_X g_n\,d\mu \quad \text{مهما كان } n\text{،}$$

ولذا:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu = \int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

كتطبيق لمبرهنة التقارب الرتيب، نقدم أولا σ ـ جمعية التكامل. ولتحضير هذه النتيجة نبدء بالجمعية:

9.1.9 **قضية ـ•** ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وليكن f وَ g تابعين حقيقين مكتملين موجبين وقيوسين معرفين على X . عندئذ:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{14.9}$$

الإثبات

لتكن $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{F}_f$ وَ $\{\psi_n\}\subset\mathcal{F}_g$ متتاليتين، من التوابع البسيطة، متزايدتان نحو f وَ g على التوالي. يمكن، مثلا، أخذ المتتالية المشيدة في إثبات المبرهنة 4.9.6 . لاحظ أن $\{\varphi_n+\psi_n\}\subset\mathcal{F}_{f+g}$ وهذه المتتالية تتزايد نحو $f+g$. ينتج عندئذ من (2.9) أن:

$$\int_X (\varphi_n+\psi_n)\,d\mu = \int_X \varphi_n\,d\mu + \int_X \psi_n\,d\mu,\ \forall n\ge 1. \tag{15.9}$$

وحسب مبرهنة التقارب الرتيب، يؤول الطرف الأيسر من (15.9) نحو $\int_X (f+g)\,d\mu$ عندما يؤول n نحو ∞ ، وحسب المبرهنة نفسها، يؤول الطرف الأيمن من (15.9) نحو $\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$ عندما يؤول n نحو ∞ . هذا يثبت (14.9) .

بإمكاننا الآن إثبات السيغما جمعية:

10.1.9 **مبرهنة ـ• ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة الموجبة والقيوسة المعرفة على X وليكن $f=\sum_n f_n$.**
عندئذ، يكون التابع الحقيقي المكتمل f موجبا وقيوسا ولدينا:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_n \int_X f_n\,d\mu. \tag{16.9}$$

الإثبات

ليكن $s_k=\sum_{n=1}^{k}$ ، $k=1$ ، 2 ، ... . لاحظ أن $\{s_k\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة الموجبة والقيوسة المعرفة على X . ثمّ إن $\lim_{k\to\infty} s_k = f$ وَ f تابع حقيقي مكتمل موجب وقيوس. لدينا، إعتمادا إلى مبرهنة التقارب الرتيب:

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X s_k\,d\mu. \tag{17.9}$$

لكن، ينتج من القضية 9.1.9 ، أن:

$$\int_X s_k\,d\mu = \sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,d\mu,$$

وبالتالي:

$$\lim_{k\to\infty}\int_X s_k\,d\mu=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

وتنتج عندئذ العلاقة (16.9) بتعويض العبارة السابقة في الطرف الأيمن من (17.9) .

يمكننا، كنتيجة مهمة للمبرهنة 10.1.9 ، إعطاء الـ

11.1.9 **قضية • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا، معرفا على X . عندئذ، يشكل التابع المجموعاتي:**

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu,\ \ E\in\mathcal{A},$$

قياسا على $(X,\mathcal{A})$.

الإثبات

واضح أن ν موجب وأن $\nu(\emptyset)=0$. أمّا فيما يخص الـ σ ـ جمعية فإذا كانت $\{E_n\}$ متتالية غير متقاطعة من الأجزاء القيوسة فبوضع:

$f_n=f\chi_{E_n}$ ، $n=1$ ، 2 ، ...

نرى أن المتتالية $\{f_n\}$ تحقق فرضيات المبرهنة 10.1.9 وبالتالي، وفقا لـ (16.9) ، لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_n \nu(E_n) &= \sum_n\int_X f_n\,d\mu=\int_X\sum_n f_n\,d\mu\\ &= \int_X f\sum_n\chi_{E_n}\,d\mu=\int_X f\chi_{\cup_n E_n}\,d\mu=\nu(\cup_n E_n).\end{aligned}$$

أي أن ν سيغما جمعي.

من الطبيعي أن نتسأل هل يمكن تعميم المبرهنة 7.1.9 لتشمل فئة أوسع من التوابع؟ لنبدأ أولا بمناقشة نتيجة تعود إلى فاتو $(1878-1929)$. بما أنها تتضمن النهاية السفلى فإنها تطبق على متتاليات كيفية.

12.1.9 **مبرهنة [توطئة فاتو] • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة الموجبة والقيوسة المعرفة على X .**
عندئذ:

$$\int_X \liminf_n f_n\,d\mu\le\liminf_n\int_X f_n\,d\mu. \qquad (18.9)$$

الإثبات

إن فكرة الإثبات هي الجوء إلى مبرهنة التقاتب الرتيب في الوقت المناسب. لنضع:

$g_k=\inf_{n\ge k} f_n$ ، $k=1$ ، 2 ، ...

تتمتع المتتالية $\{g_k\}$ بالخواص التالية:

١. التوابع g_k قيوسة وهي حقيقية مكتملة وموجبة.
٢. المتتالية $\{g_k\}$ متزايدة.
٣. $g_k\le f_n$ ، مهما كان $1\le k\le n$.
٤. $\lim_{k\to\infty} g_k=\sup_{k\ge1}\left(\inf_{n\ge k} f_n\right)=\liminf_n f_n$.

إعتمادا على (٤) وعلى مبرهنة التقارب الرتيب يمكننا أن نكتب:

$$\lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k\,d\mu = \int_X \liminf_n f_n. \tag{19.9}$$

لكن، بفضل (٣) والرتابة، لدينا:

$$\int_X g_k\,d\mu \leq \int_X f_n\,d\mu,\ \forall n \geq k,$$

وبالتالي، من أجل كل k مثبت، لدينا:

$$\int_X g_k\,d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu. \tag{20.9}$$

والآن وبمزج (19.9) وَ (20.9) نحصل على (18.9) . هذا ينهي الإثبات.

13.1.9 **ملاحظة -•** يمكن للمتباينة الواردة في توطئة فاتو أن تكون تامة. وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ والمتتالية $f_n = n\chi_{]0,1/n[}$ ، $n \in \mathbb{N}^\star$ ، فنرى أن $\liminf_n f_n(x) = 0$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ ولذا يكون الطرف الأيسر من (18.9) معدوما في حين أن $\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu = 1$ مهما كان n وبالتالي الطرف الأيمن من نفس المتباينة يساوي 1 .

إن توطئة فاتو تتمتع بتطبيقات مهمة جدا. لقد إكتشفها فاتو أثناء دراسته لخواص تقارب تكامل «بواسون» وهذه المسألة تقع في قلب التحليل التوافقي.

2.9 تكامل التوابع من إشارة كيفية

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على X ومن إشارة كيفية. وليكن التابعان الحقيقيان المكتملان f^+ وَ f^- المعرفين على X بأن:

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\} \quad \text{وَ} \quad f^-(x)=\max\{-f(x),0\} \text{ ، } x \in X \text{ .}$$

يمكننا أن نكتب f كفرق تابعين موجبين قيوسين: $f=f^+-f^-$. إن التكاملين $\int_X f^+\,d\mu$ وَ $\int_X f^-\,d\mu$ موجدان إذن وإذا كان أحداهما متهيا فإننا نعرف **التكامل** $\int_X f\,d\mu$ **للتابع** f **على** X بأنه:

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+\,d\mu-\int_X f^-\,d\mu. \tag{21.9}$$

لاحظ أنه إذا كان f وَ g قيوسين وَ

إذا كان $f=g$ ، μ ـ شك كان $f^+=g^+$ وَ $f^-=g^-$ ، μ ـ شك

وبالتالي، ينتج من المبرهنة 6.1.9 (ا) أن تكامل f على X موجدا إذا وفقط إذا كان تكامل g موجودا ثمّ إن التكاملين متساويان.

يمكن الحصول مباشرة من التعريف السابق على البعض من خواص تكامل التوابع ذات إشارة كيفية. وعلى سبيل المثال لدينا:

$$-\infty \le \int_X f\,d\mu \le \infty, \tag{22.9}$$

وَ

$$\int_X \lambda f\,d\mu=\lambda\int_X f\,d\mu,\ \ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{23.9}$$

وفي الحقيقة تنتج (22.9) مباشرة من (21.9) . أمّا (23.9) فمن الملاحظة أنه إذا كان $\lambda>0$ كان $(\lambda f)^+=\lambda f^+$ وَ $(\lambda f)^-=\lambda f^-$ وإذا كان $\lambda<0$ كان $(\lambda f)^+=-\lambda f^-$ وَ $(\lambda f)^-=-\lambda f^+$.

1.2.9 **التوابع الكمولة والفئة** $L^1(X,\mu)$ • يمكن تشييد نظرية هامة جدا تعتني بالتوابع القيوسة التي يكونا من أجلها تكاملا الطرف الثاني من (21.9) متهيين. يشار إلى فئة هذة التوابع بِـ $L^1(X,\mu)$. إنها تدعى **فئة لوبيغ** L^1 . نقول عن عناصر $L^1(X,\mu)$ إنها **كمولة** .

لاحظ أنه بما أن

$$f^+,\ f^-\le |f|=f^++f^- \tag{24.9}$$

وبما أنه، من أجل كل f من $L^1(X,\mu)$ ، يكون المقدار

$$\int_X (f^++f^-)\,d\mu=\int_X |f|\,d\mu$$

متهيا فإننا نفترض في تعريف $L^1(X,\mu)$ أن $f\in L^1(X,\mu)$ إذا وفقط إذا f قيوسا وكان التكامل $\int_X |f|\,d\mu$ متهيا.

توجد أمثلة بسيطة تبين أنه يمكن لِـ $|f|$ أن يكون كمولا دون أن يكون f قيوسا. لذا فشرط القابلية للقياس ضروري في تعريف $L^1(X,\mu)$.

2.2.9 **قضية • ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مُقاسا وليكن** f **تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على** X **وبحيث يكون تكامله على** X **نسبة إلى** μ **معرفا. عندئذ لدينا:**

$$\left|\int_X f\,d\mu\right|\le\int_X |f|\,d\mu. \tag{25.9}$$

الإثبات

إذا كان الطرف الأيمن من (25.9) غير منته فليس هناك ما يحتاج إلى برهان. أمّا إذا كان $f \in L^1(X,\mu)$ فينتج من (24.9) ومن المبرهنة 6.1.9 أن تكاملي f^+ وَ f^- على X نسبة إلى μ متهيان ولدينا، إعتمادا على القضية 9.1.9 :

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\mu\right| &= \left|\int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu\right|\\ &\leq \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_X (f^+ + f^-)\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu.\end{aligned}$$

إذا كان f كمولا فيمكن النظر إلى (25.9) على أنها علاقة لتقدير «مقاسه». يوجد تقدير أدق إكتشفه «تشيبتشيف[2] » (Chebychev) (1821 – 1894) يدعى **متباينة تشيبتشيف.**

3.2.9 **مبرهنة [متباينة تشيبتشيف] • ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مُقاسا وليكن** f **تابعا حقيقيا مكتملا وقيوسا معرفا على** X **. عندئذ، من أجل** $\lambda > 0$ **، لدينا:**

$$\lambda\mu(\{|f|>\lambda\}) \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{26.9}$$

الإثبات

لتكن المجموعة $A_\lambda = \{|f|>\lambda\}$. إنّ A_λ مجموعة قيوسة ولدينا $\lambda\chi_{A_\lambda} \leq |f|$ ، μ ـ شك. ينتج عندئذ من المبرهنة 6.1.9 (جـ) أن:

$$\int_X \lambda\chi_{A_\lambda}\,d\mu = \lambda\mu(A_\lambda) \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

4.2.9 **لازمة • ليكن** $(X,\mathcal{A},\mu)$ **فضاء مُقاسا وليكن** $f \in L^1(X,\mu)$ **. عندئذ يكون** f **متهيا** μ **ـ شك. ثمّ، إذا كان** f **موجبا وكان** $\int_X f\,d\mu = 0$ **كان** $f=0$ **،** μ **ـ شك على** X **.**

الإثبات

إعتمادا على متباينة تشيبتشيف لدينا، عندما يؤول n إلى ∞ :

$$\mu(\{|f|>n\}) \leq \frac{1}{n}\int_X |f|\,d\mu \to 0.$$

وبالتالي:

$$\mu(\{|f|=\infty\}) = \lim_{n\to\infty}\mu(\{|f|>n\}) = 0\ ,$$

أي أن f منته μ ـ شك على X . ثمّ، إذا كان f موجبا وكان تكامله معدوما على X فينتج كذلك من متباينة تشيبتشيف أن $\mu(\{f>\frac{1}{n}\})=0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$ ولذا يكون $f=0$ ، μ ـ شك على X لأنه، إذا أشرنا بِـ S إلى مجموعة عناصر X حيث f غير معدوم، أي $S=\{x\in X \mid f(x)>0\}$ كان $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ حيث $S_n=\{x\in X \mid f(x)>\frac{1}{n}\}$ مع $\{S_n\}$ متتالية من أجزاء قيوسة ومتزايدة ولذا ينتج من إستمرار μ من الأسفل أن $\mu(S)=\lim_{n\to\infty}\mu(S_n)$.

لندرس الآن سلوك التكامل نسبة إلى الجمع.

[2] بافنوتيو لفوفيتش، رياضياتي روسي

5.2.9 قضية ← ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن λ عددا حقيقيا كيفيا وَ f وَ g تابعين من $L^1(X,\mu)$. عندئذ يكون التابع $f+\lambda g$ كمولا ولدينا:

$$\int_X (f+\lambda g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \lambda \int_X g\,d\mu. \tag{27.9}$$

الإثبات

أمّا قابلية $f+\lambda g$ للمكاملة فتنتج مباشرة من التقدير:

$$|f+\lambda g| \leq |f| + |\lambda||g| \cdot$$

ليكن $h = f+\lambda g$. إن تكامل h على X عدد منته معرف جيدا. ثمّ إن:

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + (\lambda g)^+ - (\lambda g)^-$$

وبالتالي:

$$h^+ + f^- + (\lambda g)^- = h^- + f^+ + (\lambda g)^+. \tag{28.9}$$

كل الحدود الواردة في 28.9 موجبة ووفقا للازمة 4.2.9 متهة μ ـ شك على X . ينتج عندئذ من القضية 9.1.9 أن:

$$\int_X h^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu + \int_X (\lambda g)^-\,d\mu = \int_X h^-\,d\mu + \int_X f^+\,d\mu + \int_X (\lambda g)^+\,d\mu.$$

وبما أن كل التكاملات متهية فيمكننا تحريكها بكل حرية لنحصل على:

$$\int_X h^+\,d\mu - \int_X h^-\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu + \int_X (\lambda g)^+\,d\mu - \int_X (\lambda g)^-\,d\mu.$$

هذا يعني أن (27.9) محققة.

نقدم فيما يلي صغة أخرى للقضية 5.2.9 وهي مهمة جدا في التطبقات إذ إنها تسمح بإستخدام توابع كيفية يكون تكاملها معرفا.

6.2.9 قضية ← ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين مكتملين وقيوسين معرفين على X . لنفرض أن تكامل f على X نسبة إلى μ معرفا وأن g كمول. عندئذ يكون تكامل التابع $f+g$ على X نسبة ألى μ معرفا ولدينا:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{29.9}$$

الإثبات

إعتدادا على القضية 5.2.9 تكون العلاقة (29.9) جديدة فقط في حالة f غير كمول. في هذه الحالة يكون أحد التكاملين $\int_X f^+\,d\mu$ وَ $\int_X f^-\,d\mu$ غير منته في حين يكون الآخر منته. لنفرض، بهدف تثبيت الأفكار، أن $\int_X f^-\,d\mu = \infty$. إذا إستخدمنا ترميز القضية 5.2.9 حيث نضع $h = f+g$ وَ $\lambda = 1$ فإن (28.9) تكتب:

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+. \tag{30.9}$$

بما أن $\int_X f^+\,d\mu$ ، $\int_X g^+\,d\mu$ متهيان فينتج من (30.9) أن $\int_X h^-\,d\mu = \infty$. ثمّ، بما أن $h^- = 0$ عندما $h^+ \neq 0$ ، إنه ينتج كذلك من (30.9) أن $h^+ \leq f^+ + g^+$ وبالتالي $\int_X h^+\,d\mu < \infty$. إذن تكامل h على X نسبة إى μ موجود وهو يساوي $-\infty$. ويكون عندئذ الطرف الأيسر من (29.9)

مساويا لِـ ∞ وهذه هي قيمة الطرف الأيمن. هذا ينهي البرهان.

نحن الآن على إستعداد لتقديم توطئة فاتو في حلة التوابع ذات إشارة كيفية.

7.2.9 **مبرهنة [توطئة فاتو] • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على X. لنفرض وجود تابع كمول g بحيث:**

$$g \leq f_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{31.9}$$

عندئذ تكون تكاملات $\liminf f_n$ وَ f_n ، $n = 1$ ، 2 ، ... على X نسبة إلى μ موجودة ولدينا:

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu. \tag{32.9}$$

الإثبات

بما أن (31.9) يقتضي أن $0 \leq f_n - g$ فإن تكامل التابع $f_n - g$ على X نسبة إلى μ معرف جيدا من أجل $n = 1$ ، 2 ، ... وَ كذلك تكامل $\liminf\limits_n f_n - g$.

يمكن عندها تطبيق توطئة فاتو الخاصة بالتوابع الموجبة لنحصل على:

$$\left.\begin{array}{rcl} \int_X \liminf_n (f_n - g)\, d\mu & = & \int_X (\liminf_n f_n - g)\, d\mu \\ & \leq & \liminf_n \int_X (f_n - g)\, d\mu. \end{array}\right\} \tag{33.9}$$

لتعتبر أولا الطرف الأيسر من (33.9) . إعتمادا على القضية 6.2.9 حيث نأخذ $f = \liminf_n f_n - g$ وَ $g = g$ نحصل على أن تكامل $f + g = \liminf_n f_n$ على X نسبة إلى μ معرف جيدا ولدينا:

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu = \int_X (\liminf_n f_n - g)\, d\mu + \int_X g \, d\mu. \tag{34.9}$$

بما أن g كمول فمن (34.9) ينتج مباشرة أن الطرف الأيسر من (33.9) يساوي:

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu. \tag{35.9}$$

وباللّجوء إلى أسلوب مماثل نرى أن تكامل f_n على X نسبة إلى μ موجود من أجل $n = 1$ ، 2 ، ... ، وأن التكامل الوارد في الطرف الأيمن من (33.9) يساوي:

$$\int_X f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu, \ n = 1, 2, \ldots \tag{36.9}$$

عندئذ بإستخدام (35.9) وَ (36.9) يمكننا كتابة (33.9) على الشكل:

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu.$$

وبما أن g كمول فيمكن إختصار $\int_X g \, d\mu$ في المتباينة أعلاه لنحصل على (32.9) .

توجد صيغة أخرى للمبرهنة 7.2.9 تتعلق بالنهاية العليا.

8.2.9 **لازمة • ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على X. لنفرض وجود تابع كمول g بحيث:**

$$f_n \leq g, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{37.9}$$

عندئذ تكون تكاملات $\limsup_n f_n$ وَ f_n ، $n = 1$ ، 2 ، ... على X نسبة إلى μ موجودة ولدينا:

$$\limsup_n \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n \, d\mu. \tag{38.9}$$

الإثبات

لاحظ أن (37.9) تكافيء $-f_n \leq -g$ ، مهما كان n طبيعي وأن g كمول إذا وفقط إذا كان $-g$ كمولا، وبعبارة أخرى، إن شروط توطئة فاتو تحققها المتتالية $\{-f_n\}$ والتابع $-g$. وبما أن:

$$\liminf_n \{-f_n\} = -\limsup_n f_n$$

فينتج من المبرهنة 7.2.9 أن:

$$\left.\begin{aligned} -\textstyle\int_X \limsup_n f_n \, d\mu &= \textstyle\int_X \liminf_n f_n \, d\mu \\ &\leq \liminf_n \textstyle\int_X (-f_n) \, d\mu = \liminf_n \left(-\textstyle\int_X f_n \, d\mu\right) \\ &= -\limsup_n \textstyle\int_X f_n \, d\mu. \end{aligned}\right\} \tag{39.9}$$

إن (39.9) ، سواء أن إحتوت مقادير متهية أم لا، تكافيء (38.9) . ومنه المطلوب.

9.2.9 **ملاحظة ◄** من الواضح أنه يكمن فرض (31.9) وَ (37.9) محققتين μ ـ شك فقط للحصول على نفس النتيجتين. وكذلك يمكن للمتباينتين (32.9) وَ (38.9) أن تكونا تامتين.

وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ والمتتالية $f_n = n\chi_{]0,1/n[}$ ، $n \in \mathbb{N}^\star$ ، فنرى أن $\liminf_n f_n(x) = 0$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ ولذا يكون الطرف الأيسر من (32.9) معدوما في حين أن $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dx = 1$ مهما كان n وبالتالي الطرف الأيمن من نفس المتباينة يساوي 1 .

وكذالك، إذا زود $\mathbb{R}$ بقياس لوبيغ، فمن أجل المتتالية $\{\varphi_n\}$ المعرفة بأن:

$$\varphi_n(x) = 2n(nx-1)\chi_{]0,1/n[}(x),\ \ x\mathbb{R}$$

لدينا أن $\limsup_n f_n(x) = 0$ مهما كان $x \in \mathbb{R}$ ولذا يكون الطرف الأيمن من (38.9) معدوما في حين أن $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n\, dx = -\frac{1}{2}$ مهما كان n وبالتالي الطرف الأيسر من نفس المتباينة يساوي $-\frac{1}{2}$.

نقدم الآن نتيجة تحتل الصدارة في نظرة تكامل لوبيغ. إنها مبرهنة التقارب بالهيمنة (أو المسيطر عليه) للوبيغ «متهل»؛ تعطي هذه المبرهنة شروط المرور إلى النهاية تحت إشارة التكامل.

10.2.9 **مبرهنة [متهل] ◄ ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المكتملة والقيوسة المعرفة على X . لنفرض أن:**

ا) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ موجودة μ ـ شك.

ب) يوجد تابع كمول g صفته أن:

$|f_n| \le g$ ، μ ـ شك مهما كان n طبيعي.

عندئذ يكون f كمولا ولدينا:

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{40.9}$$

الإثبات

ينتج مباشرة من (ا) أن f قيوس ومن (ب) أن $|f| \le g$ ، μ ـ شك، إذن f كمول. ينتج كذلك من (ب) أن f_n كمول ولدينا:

$-g \le f_n \le g$ ، μ ـ شك على X .

بما أن:

$f = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$ ، μ ـ شك على X ،

فينتج من توطئة فاتو ولازمتها أن:

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mu &\le \liminf_n \int_X f_n\, d\mu \\ &\le \limsup_n \int_X f_n\, d\mu \le \int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

إذن المقادير الأربعة السابقة متساوية ومتهية مما يثبت (40.9) .

11.2.9 **ملاحظة ◄** إذا كان التابع المهيمن g غير موجود فقد تتعذر نتيجة مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة. أنظر المثالان الواردان في الملاحظة 9.2.9.

3.9 تكاملا ريمان ولوبيغ

إننا نريد أن نعرف العلاقة بين تكاملي ريمان ولوبيغ في حالة وجودهما. وبعبارة أدق، هل مفهوم تكامل لوبيغ يمدد مفهوم تكامل ريمان؟

لنبدا بتحديد بعض المصطلحات. نسمي التوابع القيوسة حسب لوبيغ (أي عندما يزود $\mathbb{R}$ بعشيرة أجزائها القابلة للقياس حسب لوبيغ) بالتوابع القيوسة. كما نسمي التوابع الكمولة حسب لوبيغ بالتوابع الكمولة. وفي حالة وجوده، إننا نرمز بـ $\int_I f\,dx$ إلى تكامل لوبيغ على المجال I للتابع القيوس f ونرمز بـ $\int_a^b f(x)\,dx$ إلى تكامل ريمان للتابع f في حالة وجوده.

1.3.9 مبرهنة • ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $I=[a,b]$. إذا كان g ريمان كمولا على I كان f لوبيغ كمولا على I ولدينا:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,dx. \tag{41.9}$$

الإثبات

لتكن $\{P_n\}_n = \{\{a = x_{n,0} < \cdots < x_{n,k_n} = b\}\}_n$ متتالية تقسيمات للمجال I بحيث يكون P_{n+1} أدق من P_n مهما كان $n \geq 1$ وبحيث يؤول الوسيط δP_n إلى 0 عندما يؤول n إلى ∞ . إذا كانت $I_{n,k} = [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$ مع $k = 0$ ، ... ، k_n ، هي مجالات التقسيم P_n ، وكان

$$M_{n,k} = \sup_{I_{n,k}} f \text{ ، } m_{n,k} = \inf_{I_{n,k}} f$$

فإن التابعين:

$$U_n = \textstyle\sum_k M_{n,k}\chi_{I_{n,k}}(x) \qquad \text{وَ} \qquad L_n(x) = \sum_k m_{n,k}\chi_{I_{n,k}}(x)$$

محدودان وقيوسان على I ولذا فهما كمولان. إذا لاحظنا أن المتتالية $\{L_n\}$ متزايدة وَ $\{U_n\}$ متناقصة فإننا نرى أن النهايتين:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) \quad \text{و} \quad U(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) \tag{42.9}$$

موجودتان وهما متهيتان حيثما كان على I . ثمّ إن L وَ U قيوسان ولدينا

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x),\ \forall x \in I. \tag{43.9}$$

لنلاحظ الآن أن:

$$\int_I L_n\,dx = \sum_k m_{n,k}|I_{n,k}| = \underline{R}(f, P_n) \tag{44.9}$$

وَ

$$\int_I U_n\,dx = \sum_k M_{n,k}|I_{n,k}| = \overline{R}(f, P_n). \tag{45.9}$$

بما أن f محدود فإن التوابع L_n وَ U_n محدودة بإنتظام على I ولذا ينتج من «متهل» أنه لدينا:

$$\int_I L\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I L_n\,dx, \quad \int_I U\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I U_n\,dx. \tag{46.9}$$

وبما أن f ريمان كمول فينتج من (44.9) ، (45.9) ، (46.9) أن:

$$\int_I L\,dx = \int_I U\,dx = \int_a^b f\,dx. \tag{47.9}$$

إنه ينتج مباشرة من (47.9) أن تكامل التابع الموجب $U-L$ على المجال I معدوم ولذا، حسب اللّازمة 4.2.9 ، يكون $U=L$ ، μ ـ شك على I . ينتج عندئذ من (43.9) أن $f=U$ ، μ ـ شك. هذا يقضي قابلية f للقياس وينتج من (43.9) أن (31.9) محققة.

إن عكس المبرهنة 1.3.9 غير صحيح. توجد توابع لوبيغ كمولة لكنها غير ريمان كمولة وكمثال يمكن أخذ الدالة المميزة للأعداد الصماء المحصورة بين 0 وَ 1.

2.3.9 **ملاحظة** • من المعروف أن مفهوم تكامل ريمان يشمل مكاملة التوابع غير المحدودة وذلك بإعتبار ما يسمى «تكامل ريمان المعمم». وعلى سبيل المثال، إذا كان f تابعا غير محدود على $I=[a,b]$ وكان يتمتع بالخواص التالية:

ا) من أجل كل $0<\varepsilon<b-a$ يكون التابع f ريمان كمولا على المجال $[a+\varepsilon,b]$ ؛

ب) النهاية $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx=\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ موجودة؛

فإن العدد $\int_{a+}^{b} f(x)\,d\mu$ هو، تعريفا، تكامل ريمان المعمم للتابع f على $[a,b]$.

إن التوابع التي تتمتع بتكامل لريمان المعمم قابلة للمكاملة حسب لوبيغ كما تقرّه النتيجة الموالية.

3.3.9 **مبرهنة • ليكن f تابعا حقيقيا معرفا وموجبا على المجال $I=]a,b]$. إذا كان تكامل ريمان المعمم $\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$ موجودا فإن f لوبيغ كمولا على $]a,b[$ ولدينا:**

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx=\int_I f\,dx. \tag{48.9}$$

الإثبات

لتكن $b-a>\varepsilon_n>0$ متتالية تؤول نحو 0 عندما يؤول n نحو ∞ . التواع $f_n=f\chi_{[a+\varepsilon_n,b]}$ ، $n=1$ ، ... ، كمولة على I ، وفقا للمبرهنة 1.3.9. ولدينا:

$$\int_I f_n\,dx=\int_{a+\varepsilon_n}^{b} f(x)\,dx.$$

وبما أن المتتالية $\{f_n\}$ تتزايد نحو f على I (إن قيمة f عند a غير مهمة)، فينتج من مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي أن:

$$\int_I f\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n\,dx=\int_{a+}^{b} f(x)\,dx.$$

لدينا طبعا نتائج مماثلة بالنسبة إلى التكاملات الأخرى المعممة لريمان. على القارىء أن يلاحظ بهذه المناسبة أنه إذا عرفنا تكامل ريمان المعمم على $\mathbb{R}$ بأنه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx,$$

عندما تكون هذه النهاية موجودة، فيمكن أن يكون تكامل ريمان موجودا في حين يكون تكامل لوبيغ غير موجود. وعلى سبيل المثال التابع $f(x)=\sin x/x$ ريمان كمول لكنه غير لوبيغ كمول إذ إن $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx=\infty$.

يعطي قياس لوبيغ كيفية للتعرف على التوابع القابلة للمكاملة حسب ريمان على مجال منته.

4.3.9 **مبرهنة • ليكن f تابعا حقيقيا معرفا ومحدودا على المجال $I=[a,b]$. عندئذ يكون f ريمان كمولا على I إذا فقط إذا كان مستمرا حيثما كان تقريبا على I .**

4.9 الإشتقاق تحت إشارة التكامل

قبل الحديث عن الإشتقاق تحت إشارة التكامل، نقدم التعميم التالي لمبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة:

1.4.9 **مبرهنة • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ $\{f_\lambda\}$ ، حيث λ وسيط من المجال $]\alpha,\beta[$ ، جماعة توابع كمولة على X . لنفرض أن $\{f_\lambda\}$ تتقارب μ - شك على X نحو تابع f عندما يؤول λ نحو β وأنه يوجد تابع g كمول على X بحيث $|f_\lambda(x)| \leq g(x)$ على X عدا إحتمالا على مجموعة قياسها معدوم قد تتعلق بـ λ .**
عندئذ يكون f كمولا على X ولدينا:

$$\lim_{\lambda\to\beta}\int_X f_\lambda\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

لدينا نتائج مماثلة من أجل $\lambda \in]\alpha,\beta[$ وَ $\lambda \to \alpha$.

الإثبات

إنه ينتج مباشرة من مبرهنة لوبيغ العادية إذ إنه، من أجل كل متتالية $\{\lambda_n\}$ تتقارب نحو β النتيجة صادقة من أجل المتتالية $\{f_{\lambda_n}\}$.

2.4.9 **مبرهنة • ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ $F(.,.)$ تابعا حقيقيا معرفا على $X\times]\alpha,\beta[$. لنفرض أن $F(.,t)$ تابع كمول مهما كان $t \in]\alpha,\beta[$ ولنضع:**

$$I(t) = \int_X F(x,t)\, d\mu(x).$$

ليكن $t_0 \in]\alpha,\beta[$ ولنفرض أن المشتق الجزئي للتابع F نسبة إلى t عند النقطة t_0 ، $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t_0)$ ، موجود شبه كليا على X . لنفرض كذلك وجود تابع g كمول على X بحيث، من أجل t في جوار لـ t_0 ، يكون:

$$\frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0} \leq g(x) \text{ ، } \mu \text{ - شك على } X \text{ .}$$

عندئذ يكون $\frac{\partial F(x,t_0)}{\partial t}$ كمولا على X ولدينا:

$$\left\{\frac{dI(t)}{dt}\right\}_{t=t_0} = \int_X \frac{\partial F(x,t_0)}{\partial t}\, d\mu(x).$$

الإثبات

يكفي تطبيق المبرهنة لوبيغ الموسعة 1.4.9 السابقة حيث يؤخذ $t = \lambda$ كوسيط وَ $f_t(x) = \frac{F(x,t)-F(x,t_0)}{t-t_0}$.

تطبيق: حساب التكامل:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.$$

علينا أولا أن نلاحظ أن التابع المعتبر كمول على $[0,\infty[$ إذ إنه قيوس ولدينا:

$$e^{-s^2} \leq \frac{1}{1+s^2},\ \forall s \geq 0$$

إذن $I < \infty$. لنضع عندئذ:

$\varphi(t) = \left(\int_0^t e^{-s^2}\, ds\right)^2$ وَ $\psi(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{(1+x^2)}\, dx$ ·

واضح ، بسبب إستمرار التابع $s \mapsto e^{-s^2}$ ، أن:

$$\varphi'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds,\ \ \forall t \geq 0.$$

إننا نريد تطبيق المبرهنة السابقة 2.4.9 . ولهذ الغرض نأخذ $X =]0,1[$ ونعتبر التابع $F(.,.)$ المعرف على $X \times]0,\infty[$ بأن:

$$F(x,t) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{(1+x^2)}\cdot$$

إنه لدينا $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = -2te^{-t^2(1+x^2)}$ ولذا

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \leq 2te^{-t^2} \leq 2,\ \ \forall t \geq 0.$$

ينتج من هذا أن $|\frac{F(x,t)-F(x,t')}{t-t'}| \leq 2$ مهما كان $x \in X$ وَ t ، $0 \leq t'$ مع $t \neq t'$. وبما أن التابع الثابت $x \mapsto 2$ كمول على X فإنه يمكن تطبيق المبرهنة 2.4.9 للحصول، بعد تبديل المتغير، على:

$$\psi'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^1 te^{-t^2x^2}\, dx = -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-s^2}\, ds.$$

وبالتالي $\varphi'(t) + \psi'(t) = 0$ ، أي أن المجموع $\varphi(t) + \psi(t)$ ، ثابت من أجل $0 \leq t$ وبما أن $\phi(0) = 0$ وَ $\psi(0) = \frac{\pi}{4}$ فإن

$$\varphi(t) + \psi(t) = \frac{\pi}{4}\cdot \tag{49.9}$$

إذا لاحظنا أن $0 \leq \psi(t) \leq \frac{\pi}{4}e^{-t^2}$ ، مهما كان $0 \leq t$ فنحصل، بجعل t يؤول نحو $+\infty$ في العلاقة (42.9) ، على $I^2 = \frac{\pi}{4}$ ومنه:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

تمارين حول تكامل لوبيغ

1.9 باعتبار أمثلة مناسبة، بين أن المتباينة التامة ممكنة في توطئة فاتو وأن مبرهنة التقارب الرتيب غير واردة من أجل المتتاليات المتناقصة.
[يمكنك اعتبار، على $\mathbb{R}$ ، المتتاليتين $f_n(x) = nx^{n-1}\chi_{]0,1[}(x)$ وَ $g_n = \chi_{]n,\infty[}$]

2.9 لنضع، من أجل $0 < x$ ،

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\,.$$

بما أن تكامل ريمان للتابع f على $]\varepsilon,1[$ هو $-\varepsilon^2\sin\frac{\pi}{\varepsilon^2}$ فإن تكامل كوشي ـ ريمان للتابع f على $]0,1[$ معدوم. بين أن f غير قابل للمكاملة حسب لوبيغ على $]0,1[$ وهذا بأن تبين أن:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left|\cos\frac{\pi}{x^2}\right| dx = \infty\,.$$

[ليكن $a_n = (n+1/3)^{-1/2}$ وَ $b_n = (n-1/3)^{-1/2}$. ينتج عندئذ من كون $b_n \geq x \geq a_n$ أن $n\pi - \frac{1}{3}\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq n\pi + \frac{1}{3}\pi$ ولذا فإن $|\cos\frac{\pi}{x^2}| \geq \frac{1}{2}$.]

3.9 ليكن f تابعا موجبا معرفا وكمولا على $\mathbb{R}$ وليكن التابع

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

استخدم مبرهنة التقارب الرتيب لتبين أن F مستمر.

الهدف من التمارين الأربعة التالية هو وصف كيف نظر عدد من الرياضياتين إلى مفهوم المكاملة. وبهدف الإختصار نفرض أن μ هو قياس لوبيغ المعرف على $(X,\mathcal{L}(X))$ حيث X بلاطة متراصة من $\mathbb{R}^N$ وَ $\mathcal{L}(X)$ عشيرة أجزاء X القيوسة حسب لوبيغ وأن f تابع قيوس وموجب معرف على X .

4.9 لقد عرف لوبيغ تكامل تابع قيوس محدود f على النحو التالي: إذا كان $0 \leq f \leq M$ شك على X فتكامل f هو تعريفا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{mM} \frac{k}{m}\left|\left\{\frac{k}{m} \leq f < \frac{k+1}{m}\right\}\right|,$$

حيث، من أجل $E \subset \mathbb{R}^N$ ، يشير $|E|$ إلى قياس لوبيغ للجزء E .

بين أن هذا التعريف ينطبق مع التعريف الوارد في الدرس.

5.9 ووسع «دلا فالي بوسين» (de la Vallée-Poussin) (1866 – 1962) تعريف لوبيغ ليشمل التوابع القيوسة غير المحدودة على النحو التالي: ليكن T_m (m عدد طبيعي) التابع الحقيقي الذي تعريفه

$$T_m(t) = \tfrac{1}{2}\{|t+m| - |t-m|\},\ t \in \mathbb{R}\,. \qquad \text{(أرسم بيان } T_m \text{)}$$

إذا كان $f_m = T_m \circ f$ هو تابع بتر f عند الأفق m كانت $\{f_m\}$ متتالية عناصرها توابع محدودة وتكامل f هو تعريفا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m\,dx\,.$$

بين أن هذا التعريف يكافىء التعريف الوارد في الدرس.

6.9 أمّا «ساكس» (Saks) (1897 – 1942) فإنه يعرف التكامل بطريقة تذكر بتعريف تكامل ريمان ـ ستيلجس. وبعبارة ادق إذا كانت $\mathcal{P} = \{E_1,\ldots,E_n\}$ تجزئة قيوسة لِـ X وكان $m_k = \inf\limits_{E_k} f$

فإن التكامل يعطى بِـ

$$\int_X f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|\,.$$

بين أن هذا التعريف يكافىء كذلك التعريف الوارد في الدرس.

7.9 وأخيرا يوجد مفهوم للتكامل بأنه «المساحة تحت البيان». يعرف كاراثيودوري (Carathéodory) $(1873-1950)$ تكامل تابع محدود وقيوس على النحو التالي: ليكن الجزء $A(f)=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R} \mid 0\le y\le f(x)\}$. إن $A(f)$ جزء من $\mathbb{R}^{N+1}$ قيوس (تأكد من هذا) والتكامل هو تعريفا

$$\int_X f(x)\,dx = |A(f)| \tag{50.9}$$

حيث يشير $|A(f)|$ إلى قياس لوبيغ في $\mathbb{R}^{N+1}$ للجزء المعتبر.

بين أن (50.9) يكافىء كذلك التعريف الوارد في الدرس.

إنه كذلك من المفيد تأويل بعض النتائج ـ مثل مبرهنة التقارب المهيمن ـ على ضوء العلاقة (50.9) ومدلولها واضح عندئذ.

8.9 ما قولك في الإستنتاج: «إذا كان f تابعا حقيقيا موجبا وكان $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,dx<\infty$ كان $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$» ؟

9.9 ليكن f تابعا كمولا على $\mathbb{R}^N$ ومن أجل $v\in\mathbb{R}^N$ شعاعا مثبتا، ليكن $g(x)=f(x+v)$ انسحابا لِـ f. بين أن g كمول كذلك وأن:

$$\int_{-\mathbb{R}^N} g\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\,dx\,. \tag{51.9}$$

ما العلاقة (51.9) إلا تعبير آخر لخاصية لاتغيُّر قياس لوبيغ نسبة إلى الإنسحابات.

10.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وَ $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة بحيث $\sum\limits_n \int_X |f_n|\,d\mu<\infty$. أثبت أن $\sum\limits_n f_n$ متقاربة مطلقا μ ـ شك وَ:

$$\int_X \left(\sum_n f_n\right) d\mu = \sum_n \int_X f_n\,d\mu\,.$$

بين، على الخصوص أن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0$ ، μ ـ شك.

11.9 ليكن $r_1,r_2,\dots,r_n,\dots$ تعدادا للأعداد الناطقة الموجودة في $I=[0,1]$ وليكن التابع $f(x)=\sum\limits_{\{n|x>r_n\}} 2^{-n}$. أحسب $\int_I f(x)\,dx$.

12.9 أثبت أن المجموع

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}(1-\sqrt{\sin x})^n\cos x\,dx$$

متقارب نحو نهاية منتهية، عينها.

13.9 ليكن f تابعا موجبا وقيوسا معرفا على $\mathbb{R}$. أثبت أنه إذا كان $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ كمولا كان $f=0$ شك. ثمّ إذا كان f كمولا كان $\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^n x+1)$ متهيا شك وهو كمولا ولدينا:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\,.$$

14.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وليكن $f \in L^1(X,\mu)$. أثبت أن $\{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$ مجموعة σ ـ متهية، أي أنها اتحاد على الأكثر عدود لمجموعات قياساتها متهية.

15.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا وليكن f تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا وليكن القياس العرف على $(X,\mathcal{A})$ بأن:

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu,\ \ E\in\mathcal{A}\,.$$

1. متى يكون ν : ا) متهيا ؟ ب) σ متهيا ؟
2. وليكن كذلك g تابعا حقيقيا مكتملا وموجبا وقيوسا معرفا على X . بين أن:

$$\int_X g\,d\nu = \int_X gf\,d\mu\,.$$

16.9 أثبت أن توطئة فاتو صادقة من أجل التوابع التي تتعلق بوسيط مستمر. وبعبارة أدق، تحت شروط ملائمة، ينبغي إعطاؤها، يكول لدينا:

$$\int_X \liminf_{i\in I} f_i\,d\mu \le \liminf_{i\in I}\int_X f_i\,d\mu.$$

هنا I هي مجموعة كيفية للأدلة.

17.9 أثبت الصيغة التالية لتوطئة فاتو: لتكون $\{f_n\}$ متتالية توابع موجبة وقيوسة معرفة على مجموعة X. إذا كانت $\{f_n\}$ متقاربة نحو f ، μ ـ شك وكان $\int_X f_n\,d\mu \le M<\infty$ فإن f كمول ولدينا $\int_X f\,d\mu\le M$.

18.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وَ $\{\varphi_n\}$ وَ $\{\psi_n\}$ وَ $\{f_n\}$ متتاليات من التوابع الكمولة المعرفة على X وتتقارب ببساطة نحو φ وَ ψ وَ f على التوالي. لنفرض أن

$$\varphi_n(x)\le f_n(x)\le \psi_n(x) \quad \text{مهما كان} \quad x\in X \quad \text{وَ} \quad n\in\mathbb{N}^\star$$

وأن

$$\lim_{n\to\infty}\textstyle\int_X \varphi_n\,d\mu=\int_X\varphi\,d\mu\in\mathbb{R} \quad \text{وَ} \quad \lim_{n\to\infty}\int_X \psi_n\,d\mu=\int_X\psi\,d\mu<\infty$$

أثبت أن المتتالية $\{f_n\}$ كمولة عنصر بعنصر، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu\,.$$

19.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وَ $\{f_n\}$ متتالية متناقصة من التوابع القيوسة والموجبة المعرفة على X وتتقارب ببساطة نحو f . أثبت أنه إذا كان $f_1\in L^1(X,\mu)$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu\,.$$

أعط مثالا يبين أن النتيجة قد لا تصدق إذا استغنينا عن فرض f_1 كمولا.

20.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وَ f تابعا قيوسا وموجبا تماما μ ـ شك على X · أثبت أنه إذا كانت $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ متتالية بحيث

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = 0$$

فإن $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ ·

21.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$ ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع كمولة متقاربة بإنتظام على X نحو تابع f · أثبت أن f كمول وأن

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

هل لدينا نتيجة مماثلة في حالة $\mu(X) = \infty$ ؟

22.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسة متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع f · إذا كان f كمولا فأثبت أنه:

ينتج من $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$ أن $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$ ·

وأن النتيجة قد تكون متعذرة إذا كان f غير كمول·

23.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا ولتكن $\{f_n\}$ متتالية توابع قيوسا وموجبة متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع f · لنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu < \infty.$$

هل لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu \quad \text{مهما كان} \quad E \in \mathcal{A} \text{ ؟}$$

24.9 ليكن $I = [0,1]$ وَ $(I,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا وليكن f تابعا حقيقيا قيوسا معرفا على I · لنرمز بِـ A إلى مجموعة العناصر $x \in I$ بحيث $f(x) \in \mathbb{Z}$ · أثبت أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \Big[\cos\big(\pi f(x)\big)\Big]^{2n} d\mu = \mu(A).$$

25.9 ليكن $(I,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا حيث $I = [0,1]$ وليكن $f \in L^1(I,\mu)$ · أثبت أن $x^n f(x) \in L^1(I,\mu)$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ ثمّ أحسب:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I x^n f(x)\,d\mu(x).$$

26.9 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مُقاسا مع $\mu(X) < \infty$ وليكن f تابعا حقيقيا موجبا معرفا على X · أثبت أن الشرط الازم والكافي لكي تكون النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f^n\,d\mu$$

موجودة ومتهية هو أن يكون $\mu(\{f > 1\}) = 0$ ·

27.9 ليكن $I=[0,1]$ وَ $\{f_n\}$ متتالية توابع حقيقية لوبيغ قيوسة معرفة على I وبحيث تكون النهاية $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ موجودة شك على I ، أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\exp\bigl(f_n(x)\bigr)\,dx=\int_I f(x)\exp\bigl(f(x)\bigr)\,dx$$

وأن

$$\int_I\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x)]^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I[f_n(x)]^2\,dx.$$

ثمّ إذا افترضنا أن التوابع f_n وَ f لا تنعدم إلا على جزء صفري من I فبين أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\frac{\sin\{f_n(x)\}}{f_n(x)}\,dx=\int_I\frac{\sin\{f(x)\}}{f(x)}\,dx.$$

28.9 ا) قدّر النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\Bigl(1-e^{-x^2/n}\Bigr)x^{-1/2}\,dx.$$

ب) نفس السؤال بالنسبة إلى:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\Bigl(1-\frac{x}{n}\Bigr)^n e^{x/2}\,dx \quad \text{وَ} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^n e^{-2x}\,dx\ .$$

29.9 ليكن $-1<p$ وَ $0\le r$ ، بين أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}x^p(\operatorname{Log}x)^r\Bigl(1-\frac{x}{n}\Bigr)^n\,dx=\int_0^{\infty}x^p(\operatorname{Log}x)^r e^{-x}\,dx<\infty.$$

إستنتج أن:

$$\int_0^{\infty}x^p(\operatorname{Log}x)^r e^{-x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\Bigl[\operatorname{Log}n-\Bigl(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n\Bigr)\Bigr]=-C,$$

حيث $C=0,577215...$ هو ثابت «أولر».

30.9 ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\mu)$ الفضاء المقاس المكون من المجموعة $\mathbb{R}$ وعشيرة وقياس لوبيغ عليها وليكن $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ تابعا كمولا. أثبت أنه، من أجل كل $0<\varepsilon$ ، يوجد تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ محدود ومعدوم خارج مجال متراص $[a,b]$ بحيث:

$$\int_{\mathbb{R}}|f-g|\,d\mu\le\varepsilon.$$

31.9 استخدم تعريف الإشتقاق لكي تبرهن على أن:

$$f(t)=\int_{[0,1]}e^{tx}x^{-1/3}\,dx$$

قابل للإشتقاق عند كل نقطة $t\in\mathbb{R}$.

32.9 ليكن $I=[0,1]$ مزود بقياس لوبيغ وَ $f\in L^1(I)$ أثبت أن التابع:

$$g(t)=\int_I\cos\bigl(tf(x)\bigr)\,dx$$

معرف جيدا وقابل للإشتقاق عند كل نقطة $t\in\mathbb{R}$.

ما هي الشروط التي ينبغي أن يحققها f لكي يتمتع g بمشتقين؟ ثلاثة مشتقات؟

33.9 لتكن:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{k! 2^k} x^k, \ \ -1 < x < 1,$$

متتالية المجاميع الجزئية لسلسلة ماكلوران (Maclaurin) للتابع $f(x) = (1-x)^{-1/2}$. بين أن:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{]-1,1[} |S_n(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

الفصل 10

عشائر الجداء وقياسات الجداء

1.10 تذكير

1.1.10 **جبر المجموعات ـ تعريف •** لتكن X مجموعة وَ $\mathcal{A}$ فئة غير خالية من أجزاء X. نقول عن $\mathcal{A}$ إنها **جبر مجموعات** أو **جبر بوولي** على X إذا حققت ما يلي:

١ - مهما كان A وَ B من $\mathcal{A}$ لدينا $A \cup B \in \mathcal{A}$ ،

٢ - مهما كان A من $\mathcal{A}$ لدينا ${}^cA \in \mathcal{A}$.

2.1.10 **السيغما** (σ) **جبور أو العشائر ـ تعريف •** لتكن X مجموعة. نسمي سيغما (σ) **جبرا** أو **عشيرة** على X كل جبر مجموعات $\mathcal{A}$ على X يتمتع بخاصية **الجمعية العدودة** التي تعني أن اتحاد كل جماعة عدودة من عناصر $\mathcal{A}$ عنصر من $\mathcal{A}$.

3.1.10 **الفئات الرتيبة ـ تعريف •** لتكن $\{A_n\}$ متتالية **متزايدة** من أجزاء X. نسمي **نهاية** هذه المتتالية **اتحاد** الأجزاء A_n. إننا نضع:

$$A_\infty = \lim_\uparrow A_n = \bigcup_n A_n \quad \text{حيث} \quad A_{n+1} \supset A_n.$$

وكذلك، إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية **متناقصة** من أجزاء X فنسمي **نهاية** هذه المتتالية **تقاطع** الأجزاء B_n :

$$B_\infty = \lim_\downarrow B_n = \bigcap_n B_n \quad \text{حيث} \quad B_{n+1} \subset B_n.$$

نقول عن متتالية مجموعات إنها **رتيبة** إذا كانت إما **متناقصة أو متزايدة**.

1.3.1.10 **تعريف •** نسمي **فئة رتيبة** كل فئة $\mathcal{M}$ ، من أجزاء X ، تشمل على نهايات كل متتالياتها الرتيبة. أي أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية رتيبة عناصرها من $\mathcal{M}$ فنهايتها تنتمي إلى $\mathcal{M}$.

4.1.10 **قضية • كل عشيرة فئة رتيبة.**

الإثبات

لتكن $\mathcal{A}$ عشيرة وَ $\{A_n\}$ متتالية متزايدة من عناصرها. بما أن $\mathcal{A}$ تتمتع بخاصية الجمعية العدودة فإن

$$\lim \uparrow A_n = \bigcup A_n \in \mathcal{A}.$$

أما حالة المتتاليات المتناقصة فتعالج باستخدام كون العشيرة مغلقة بالنسبة إلى التقاطعات العدودة.

5.1.10 **قضية • هو فئة رتيبة كل تقاطع فئات رتيبة.**

الإثبات

لتكن $\{\mathcal{R}\}_{i\in I}$ جماعة من الفئات الرتيبة على مجموعة X ؛ $\mathcal{R}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$. ولتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية رتيبة عناصرها من $\mathcal{R}$. ولنثبت $I \ni i_0$. واضح أن $\mathcal{R}_{i_0} \ni A_n$ مهما كان $1 \leq n$. بما أن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ رتيبة في الفئة الرتيبة فإن نهاية هذه المتتالية تنتمي إلى $\mathcal{R}_{i_0}$. وبما أن i_0 كيفي فإن $\mathcal{R}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i \ni \lim_{n\to\infty} A_n$.

ينتج من هذا أنه من أجل كل فئة $\mathcal{Z}$ من المجموعات الجزئية من X ، توجد فئة رتيبة أصغرية $\mathcal{R}_0$ تحتوي على $\mathcal{Z}$. نقول عن $\mathcal{R}_0$ بأنها الفئة الرتيبة **المولدة** من $\mathcal{Z}$.

6.1.10 **مبرهنة ← ليكن $\mathcal{J}$ جبرا من أجزاء X ولنشير بـ $\mathcal{R}$ إلى الفئة الرتيبة المولدة من $\mathcal{J}$. عندئذ، إذا كان $\mathcal{A}$ يشير إلى العشيرة المولدة من $\mathcal{J}$ ، يكون $\mathcal{A}=\mathcal{R}$.**

الإثبات

بما أن $\mathcal{A}$ عشيرة فهي فئة رتيبة، وفقا لـ 4.1.10 ، وبما أنها تحتوي على $\mathcal{J}$ فهي تحتوي على أصغر فئة رتيبة تحتوي $\mathcal{J}$ ، إذن $\mathcal{A} \supset \mathcal{R}$. لإثبات العكس نعتبر، من أجل كل $\mathcal{P}(X) \ni A$ ، الفئة:

$$\Phi(A)=\{B\in\mathcal{P}(X) \mid A\cup B,\ A-B,\ B-A\in\mathcal{R}\}. \qquad (1.10)$$

يمكنك أن تلاحظ بسهولة أن $\Phi(A) \ni B$ إذا وفقط إذا كان $\Phi(B) \ni A$.

لنثبت A ولنبرهن على أن $\Phi(A)$ فئة رتيبة. وفي حقيقة الأمر، إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية متزايدة من عناصر $\Phi(A)$ تكون:

$\{A\cup B_n\}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{R}$
$\{B_n - A\}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{R}$
$\{A - B_n\}$ متتالية متناقصة من عناصر $\mathcal{R}$

فتنتمي إذن نهاياتها إلى $\mathcal{R}$ ، أي أن

$$\mathcal{R} \ni \lim_{\uparrow}(A\cup B_n) = A\cup \lim_{\uparrow} B_n \quad \text{وَ} \quad \mathcal{R} \ni \lim_{\uparrow}(B_n - A) = \lim_{\uparrow} B_n - A$$

$$\text{وَ} \quad \mathcal{R} \ni \lim_{\downarrow}(A - B_n) = A - \lim_{\uparrow} B_n \ ،$$

إذن $\Phi(A) \ni \lim_{\uparrow} B_n$.

ويمكنك أن تتأكد بنفس الأسلوب من أن $\Phi(A)$ تحتوي كذلك نهايات متتالياته المتناقصة.

إذا كان $\mathcal{J} \ni A_0$ كان $\Phi(A_0) \ni B_0$ مهما كان $\mathcal{J} \ni B_0$. إذن $\Phi(A_0)$ فئة رتيبة تحتوي $\mathcal{J}$ وبالتالي $\Phi(A_0) \supset \mathcal{R}$. وبعبارة أخرى $\Phi(A_0) \ni B$ مهما كان $\mathcal{J} \ni A_0$ ومهما كان $\mathcal{R} \ni B$.

ينتج عندئذ من التكافؤ الذي ذكر آنفا أن $\Phi(B) \ni A_0$ مهما كان $\mathcal{R} \ni B$ ومهما كان $\mathcal{J} \ni A_0$. هذا يعني أنه من أجل $\mathcal{R} \ni B$ مثبت لدينا $\Phi(B) \supset \mathcal{J}$. وبما أن $\Phi(B)$ فئة رتيبة فإن $\Phi(B) \supset \mathcal{R}$. برهنّا إذن على:

(2.10) مهما كان B وَ B' من $\mathcal{R}$ كان $B\cup B'$ ، $B'-B$ ، $\mathcal{R} \ni B-B'$.

عندئذ بأخذ $B'=X$ نحصل على أن $\mathcal{R} \ni {}^cB$ من أجل $\mathcal{R} \ni B$. وكذلك $\mathcal{R} \ni B_1\cup B_2$ من أجل B_1 وَ B_2 من $\mathcal{R}$. هذا يثبت أن $\mathcal{R}$ جبر مجموعات أو جبر لبوول.

ينتج من التوطئة 7.1.10 الموالية أن $\mathcal{R}$ عشيرة. إنها تحتوي إذن على العشيرة $\mathcal{A}$ المولدة من $\mathcal{J}$. إذن $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$.

7.1.10 توطئة -• ليكن $\mathcal{A}$ جبرا لبوول. إذا كان مغلقا نسبة إلى النهايات التزايدة (بمعنى أنه من أجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ عناصرها من $\mathcal{A}$ تكون النهاية $\lim_{\uparrow} A_n$ منتمية إلى $\mathcal{A}$) فإنه عشيرة.

الإثبات

لتكن $\{B_n\}$ متتالية كيفية من عناصر $\mathcal{A}$. بوضع $A_n = \bigcup\limits_{1\leq p\leq n} B_p$ نرى أن هذه المتتالية متزايدة وبالتالي:

$$\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n = \lim_{\uparrow} A_n \in \mathcal{A}.$$

الأمر الذي يبين أن $\mathcal{A}$ عشيرة.

2.10 قياسات الجداء

تنبيه
إننا نهتم فقط فيما يلي بالقياسات الـ σ ـ منتهية: نقول عن قياس λ معرف على فضاء قيوس $(F,\mathcal{Q})$ إنه σ ـ **منته** إذا وجدت متتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ عناصرها قيوسة (أي من $\mathcal{Q}$) وبحيث $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = F$. ونقول عندها عن المتتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنها **إفناء** للمجموعة F . يمكننا هنا أن نضف أننا نستطيع دائما فرض المتتالية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة. ذلك أنه يمكن تعويض هذه المتتالية بالمتتالية $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $M'_n = \cup_{i=1}^{n} M_i$ ، ذات عناصر قيوسة ومتزايدة واتحادها هو F .

ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ فضائين مقيسين. وليكن الجداء $X = X_1 \times X_2$ وَ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ عشيرة الجداء عليه. يمكن طبعا تعريف على $(X,\mathcal{A})$ عدة قياسات، لكن يهمنا دراسة تلك التي يمكن إنشاؤها اعتمادا على μ_1 وَ μ_2 ؛ وإذا أمكن تلك التي تسمح بتعميم الخواص الأساسية للتكاملات المضاعفة وتأتي في مقدمتها تبديل ترتيب المكاملة.

1.2.10 **تعريف** • نسمي قياس جداء كل قياس μ معرف على $(X,\mathcal{A}) \doteq (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ ويحقق:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2),\ \forall A_1 \in \mathcal{A}_1,\ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2,\quad \mu_1(A_1) < \infty,\ \mu_2(A_2) < \infty. \tag{3.10}$$

2.2.10 **قضية (الوحدانية) • ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ فضائين مقيسين σ ـ منتهيين. يوجد قياس جداء واحد على الأكثر، أي قياس μ واحد، على الأكثر، على $(X,\mathcal{A})$ يتمتع بالخاصية** (3.10) .

الإثبات
ليكن μ وَ $\widetilde{\mu}$ قياسين يحققان (3.10) . إنهما ينطبقان على المستطيلات، ووفقا للجمعية المتهية، فهما ينطبقان على الإتحادات غير المتقاطعة للمستطيلات، أي على جبر المجموعات $\mathcal{E}$ للمجموعات الأساسية. لنضع $\mathcal{M} = \{Z \in \mathcal{A} \mid \mu(Z) = \widetilde{\mu}(Z)\}$. عندها $\mathcal{M} \supset \mathcal{E}$.

لتكن $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة عناصرها من $\mathcal{M}$. ينتج عندها من خاصية الاستمرار من الأدنى للقياسات الموجبة أن:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(Z_n) = \widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\Big).$$

هذا يعني أن $\mathcal{M}$ مستقرة نسبة لنهايات متتالياتها المتزايدة.

لنفرض الآن أنه لدينا كذلك

$$\infty > \mu_1(X_1) \quad \text{وَ} \quad +\infty > \mu(X_2). \tag{4.10}$$

عندها يكون لدينا $+\infty > \mu(X) = \mu_1(X_1)\mu_2(X_2)$. ونستطيع استخدام الاستمرار من الأعلى للقياسات الموجبة لإثبات أن $\mathcal{M}$ مستقرة نسبة لنهايات متتالياتها المتناقصة.

بينا إذن أن $\mathcal{M}$ فئة رتيبة. ينتج عندئذ من المبرهنة 6.1.10 أن $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

يبقى أن نرفع القيد (4.10) . ليكن $\{A_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ إفناء (متزايدا) للمجموعة X_1 وَ $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ إفناء (متزايدا) للمجموعة X_2 . لِنرمز بـ μ_n إلى اقتصار μ وبـ $\widetilde{\mu}_n$ إلى اقتصار $\widetilde{\mu}$ على $A_{1n} \times A_{2n}$ ، على التوالي. اعتمادا على ما سبق، لدينا $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ ، ثمّ إن $+\infty > \mu_n(A_{1n} \times A_{2n})$ وَ

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1n} \times A_{2n})$. تشكل إذن المتتالية $\{A_{1n} \times A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ إفناء لِـ X نسبة إلى μ وإلى $\tilde{\mu}$. وعليه، لدينا وفقا لخاصية الاستمرار من الأسفل:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cap (A_{1n} \times A_{2n})), \ \forall A \in \mathcal{A}, \\ \tilde{\mu}(A) &= \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_n(A \cap (A_{1n} \times A_{2n})), \ \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

وإذا لاحظنا أن الطرفين الأيمنين متساويان فنرى أن $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ ، مهما كان $A \in \mathcal{A}$.

3.2.10 **مفهوم المقاطع •** ليكن x_1 عنصرا مثبتا في X_1 وليكن j_{x_1} حقن X_{x_2} في $X = X_1 \times X_2$ المعرف فأن $x_2 \mapsto (x_1, x_2)$. من أجل $Z \in \mathcal{P}(X)$ ، نضع $Z_{x_1} = j_{x_1}^{-1}(Z)$. يدعى Z_{x_1} **بمقطع** Z **فوق** x_1 . وإذا أشرنا بِـ π_i إلى مسقط X على X_i ($i = 1$ ، 2) فإن $Z_{x_1} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\{x_1\}) \cap Z)$.

4.2.10 **التوطئة الرئيسية • ليكن** $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$. **عندئذ:**

١ - **من أجل كل** x_1 **من** X_1 **فإن المقطع** A_{x_1} **ينتمي إلى** $\mathcal{A}_2$.

٢ - **وإذا كان** $\mu_2(X_2) < +\infty$ **كان التابع** $X_1 \ni x_1 \mapsto \kappa_A(x_1) \doteq \mu_2(A_{x_1}) \in \mathbb{R}_+$ **قيوسا مهما كان** A **من** $\mathcal{A}$. **(نقول** $\mathcal{A}_1$ **ـ قيوس.)**

إثبات

بما أن $\mathcal{A}$ مولدة من المستطيلات $\mathcal{R}$ فينتج من المبرهنة ــ أن $j_{x_1}^{-1}(\mathcal{A})$ مولدة من $j_{x_1}^{-1}(\mathcal{R})$. لكن $j_{x_1}^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}_2$ ؛ وبمأن $\mathcal{A}_2$ عشيرة فهي تنطبق مع العشيرة التي تولدها. هذا يثبت النقطة ١.

لنشير بِـ $\mathcal{M}$ إلى فئة الأجزاء B من $\mathcal{A}$ بحيث يكون التابع $x_1 \mapsto \kappa_B(x_1)$ قيوسا نسبة إلى $(X_1, \mathcal{A}_1)$. أي أن $\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{A} \mid X_1 \ni x_1 \mapsto \kappa_B(x_1) \in \mathbb{R}_+$ قيوس $\}$. تنتمي عندها المستطيلات إلى $\mathcal{M}$ وكذا الإتحادات المنتهية للمستطيلات غير المتقاطعة. هذا يعني أن جبر بوول للمجموعات الأساسية محتوى في $\mathcal{M}$. لنثبت الآن أن $\mathcal{M}$ فئة رتيبة. لتكن $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة عناصرها من $\mathcal{M}$. عندئذ، من أجل كل $x_1 \in X_1$ ، تكون المتتالية $\{(B_n)_{x_1}\}_{n\geq 1} = \{j_{x_1}^{-1}(B_n)\}_{n\geq 1}$ متزايدة ويكون $\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n)_{x_1} = B_{x_1}$ ، حيث $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. وينتج عندئذ من الاستمرار من الأسفل للقياس الموجب μ_2 أن

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{B_n}(x_1) = \lim_{n\to\infty} \mu_2((B_n)_{x_1}) = \mu_2\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n)_{x_1}\Big) = \mu_2((B)_{x_1}).$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \kappa_{B_n}(x_1) = \kappa_B(x_1)$. إذن κ_B تابع قيوس كنهاية بسيطة للمتتالية توابع قيوسة.

وبما أن $\mu_2(X_2) < \infty$ فيمكن تطبيق خاصية الستمرار من الأعلى للقياسات الموجبة من أجل المتتاليات المتناقصة للحصول على أن $\mathcal{M}$ مستقرة كذلك نسبة لنهايات متتالياتها المتناقصة. إذن $\mathcal{M}$ فئة رتيبة تحتوي على جبر المجموعات الأساسية، لذا لدينا $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ ، وفقا للمبرهنة 6.1.10 .

5.2.10 **إنشاء جداء قياسين •**

1.5.2.10 **مبرهنة • ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين مع** $\mu_1(X_1) < \infty$ **وَ** $\mu_2(X_2) < \infty$. **ولنضع:**

$$\varrho(A) = \int_{X_1} \kappa_A(x_1)\, d\mu_1(x_1), \;\; \forall A \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \tag{5.10}$$

حيث $\kappa_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$. **(ينتج من التوطئة** 4.2.10 **أن** $\varrho(A)$ **معرف جيدا) عندئذ يشكل** ϱ **قياسا على** $\mathcal{A}$ **كتلته الكلية تساوي** $\mu_1(X_1)\mu_2(X_2) < +\infty$. **ثمّ إن:**

$$\varrho(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \;\; \forall A_i \in \mathcal{A}_i. \tag{6.10}$$

الإثبات

بما أن الكتلة الكلية لِـ ϱ متهية فيكفي إثبات بديهية الجمعية. لنبدأ باثبات بديهية الجمعية المتهية: ليكن A' وَ A'' جزئي قيوسين من $\mathcal{A}$ مع $A' \cap A'' = \emptyset$ ولنضع $A = A' \cup A''$. لدينا عندها $A'_{x_1} \cap A''_{x_1} = \emptyset$ ومنه $\kappa_{A'}(x_1) + \kappa_{A''}(x_1) = \kappa_A(x_1)$ وَ $\varrho(A) = \varrho(A') + \varrho(A'')$.

لتكن الآن متتالية متزايدة $A^1 \subset A^2 \subset \cdots$ عناصرها من $\mathcal{A}$ ولنضع $A^\infty = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$. لدينا عندها $\lim_{\uparrow}(A^n_{x_1}) = (A^\infty)_{x_1}$ ، ولذا ينتج من خاصية الاستمرار من الأسفل للقياسات الموجبة أن $\lim\limits_{n\to\infty} \kappa_{A^n}(x_1) = \kappa_{A^\infty}(x_1)$ ، مهما كان $x_1 \in X_1$. ثمّ إن $\kappa_{A^{n+1}} \geq \kappa_{A^n}$ ، مهما كان $n \geq 1$. ولذا بتطبيق مبرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي نرى أن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_1} \kappa_{A^n}(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \kappa_{A^\infty}(x_1)\, d\mu_1(x_1),$$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(A^n) = \varrho(\lim_{\uparrow} A^n)$. بتطبيق مبدأ الافناء تسمح هذه الخاصية وخاصية الجمعية المتهية، يتبين أن ϱ قياس موجب.

أمّا العلاقة (6.10) فمكن التأكد منها بكل بساطة.

6.2.10 مبرهنة تبديل ترتيب المكاملة •

1.6.2.10 **مبرهنة • ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين ولنفرض أن** $\mu_1(X_1) < +\infty$ **وَ** $\mu_2(X_2) < +\infty$. **عندئذ، من أجل** $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **، لدينا:**

$$\int_{X_1} d\mu_1(x_1) \Big[\int_{X_2} \chi_A(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\Big] = \int_{X_2} d\mu_2(x_2) \Big[\int_{X_1} \chi_A(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\Big].$$

2.6.2.10 **مبرهنة (فوبني ولوبيغ) • ليكن** $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ **وَ** $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ **فضائين مقيسين وليكن** $X = X_1 \times X_2$ **وَ** $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **وَ** $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ **وَ** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **فضاء الجداء المقيس. وليكن** $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$. **عندئذ التابع الجزئي** $f_{x_1} : x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ **يحقق** $f_{x_1} \in \mathcal{L}^0(X_2, \mathcal{A}_2)$ **مهما كان** x_1 **من** X_1 .

لنفرض الآن أن $f \in L^1_\mu(X, \mathcal{A})$. **عندئذ تكون لدينا الخاصيتين:**

١ - μ_1 **- شك في** x_1 **لدينا** $f_{x_1} \in L^1_{\mu_2}(X_2, \mathcal{A}_2)$. **وإذا وضعنا** $k(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$ **فإن** k **ينتمي إلى** $L^1_{\mu_1}(X_1, \mathcal{A}_1)$.

٢ - لدينا:

$$\begin{aligned} \int_X f(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2) &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \Big[\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\Big] \\ &= \int_{X_2} d\mu_2(x_2) \Big[\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\Big]. \end{aligned}$$

وبالعكس، بفرض $f \in \mathcal{L}^0(X,\mathcal{A})$ **وَ** μ_1 **- شك،** $f_{x_1} \in L^1_{\mu_2}(X_2,\mathcal{A}_2)$ ، **وإذا وجد تابع** $k^\star \in L^1_{\mu_1}(X_1,\mathcal{A}_1)$ **بحيث** $\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\, d\mu_2(x_2) \leq k^\star(x_1 =$ **فإن** $f \in L^1_\mu(X,\mathcal{A})$ **وبالتالي تتحقق الخاصيتان (١) وَ (٢).**

3.6.2.10 **ملاحظة •** لنشير بِـ **Q** إلى مجموعة التوابع f من X في $\mathbb{R}$ التي تحقق () وبِـ **R** إلى مجموعة التوابع f التي تحقق () وَ () وَ () وَ () وَ (). إن **Q** وَ **R** تشكلان فضائين شعاعيين. وبما أن التوابع المميزة للأجزاء القيوسة تنتمي إلى **Q** ، وفقا للتوطئة الرئسية 4.2.10 (ولؤية ذلك، يكفي أن نلاحظ أنه من أجل Z من $\mathcal{A}$ فإن $(\chi_Z)_{x_1} = \chi_{Z_{x_1}}$ ، مهما كان x_1 من X_1)، فهذا وارد كذلك نسبة إلى العبارات الخطية للتوابع المميزة، أي أن التوابع البسيطة تنتمي إلى **Q** . وإذا أشرنا إلى مجموعة التوابع البسيطة بِـ $\mathcal{S}(X,\mathcal{A})$ فإن $\mathcal{S}(X,\mathcal{A}) \subset \mathbf{Q}$.

الإثبات

لنأخذ أولا الشرط الأقوى

f قيوسة ومحدودة.

عندئذ يكون f نهاية منتظمة للمتتالية من التوابع البسيطة (أنظر المبرهنة ()) $\{\varphi^n\}_{n=1}^\infty$: $\varphi^n = \sum_i \alpha_i^n \chi_{A_i^n}$. وينتج من الملاحظة القسابقة أن φ^n تنتمي إلى **Q** ، أي أن $(\varphi^n)_{x_1}$ مهما كان x_1 من X_1 . وبما أن $(f)_{x_1} = \lim_{n\to\infty} (\varphi^n)_{x_1}$ فإن $(f)_{x_1}$ قيوسة مهما كان x_1 من X_1 وهذا في ظل الشرط الأقوى.

لنعوض كذلك الفرضية (??) بفرضية أقوى[1] منها:

f يحقق (??)′ وبحيث $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subset A_1 \times A_2$ مع $\mu_i(A_i) < \infty$.

لتكن $\{\varphi^n\}_{n=1}^\infty$ متتالية توابع بسيطة متقاربة بانتظام نحو f مع $\varphi^n(x) = 0$ إذا كان $x \not\ni A_1 \times A_2$. عندها φ^∞ تحقق (??) وَ (??) . بما أن $\{\varphi^n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة بانتظام نحو f فإن $|f - \varphi^n| < \varepsilon_n \chi_{A_1 \times A_2}$ ولذا:

$$\int_X |f - \varphi^n|\, d\mu \leq \varepsilon_n \int_{A_1 \times A_2} d\mu = \varepsilon_n \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2).$$

وكذلك، لدينا

$$\int_{X_2} |f_{x_1} - \varphi {x_1}^n|\, d\mu_2 \leq \varepsilon_n \int_{A_2} d\mu_2(x_2) = \varepsilon_n \mu_2(A_2).$$

إذن تتقارب $\int_{X_2} \varphi {x_1}^n\, d\mu_2$ بانتظام نحو $\int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2$. ينتج من هذا أن الطرف اليسر من الدستور (??) تابع قيوس. وبتكرار مرة ثالثة نفس الاستدلال على المكاملة نسبة إلى x_1 فنحصل على (??) وَ (??) . وخلاصة القول، لقد بينا أن (??)′ تستلزم (??) .

ليكن $\{X_1^p\}_{p=1}^\infty$ وَ $\{X_2^p\}_{p=1}^\infty$ إفناءان لِـ X_1 وَ X_2 . تشكل عندها المتتالية $\{X_1^p \times X_1^p\}_{p=1}^\infty$ إفناء لِـ X . وليكن T_p مؤثر البتر المعرف بأن $T_p(t) = \frac{1}{2}\{|t+p| - |t-p|\}$ ، $(t \in \mathbb{R})$. يحقق عندئذ التابع $T_p(f)$ الشرط (??)′ .

لنفرض أن (??) محققة ولنفرض أن

$$f > 0. \tag{7.10}$$

تشكل عندها $\{T_p(f)\}_{p=1}^\infty$ متتالية متزايدة من $L^1_\mu(X)$ ولدينا

[1] أنظر التمرين -

$$|T_p(f)|_{L^1_\mu(X)} \leq |f|_{L^1_\mu(X)}.$$

بما أن $T_p(f)$ يحقق (??)′ فنستطيع كتابة (??) فينتج لدينا

$$\int_{X_1} k_p(x_1)\, d\mu_1(x_1) = |T_p(f)|_{L^1_\mu(X)}, \quad k_p(x_1) = \int_{X_2} (T_p(f))_{x_1}\, d\mu_2.$$

إن المتتالية $\{k_p\}$ متزايدة ولذا ينتج من مرهنة التقارب الرتيب لبيبو لفي على X_1 أن

$$\lim k_p = k_\infty \in L^1_{\mu_1}(X_1) \quad \text{وأن} \quad \int_{X_1} k_\infty\, d\mu_1 = \lim |T_p(f)|_{L^1_{\mu_1}(X_1)} = |f|_{L^1_{\mu_1}(X_1)}$$

مع نهاية $\{k_p(x_1)\}$ متنهية إذا كان $x_1 \ni B$ ، حيث $B \ni \mathcal{A}_1$ مع $\mu_1(B) = 0$ ·
لنثبت x_1 في B ولنطبق بيبو لفي في الفضاء X_2 ، لدينا:

$$k_\infty(x_1) = \lim_{p\to\infty} \int_{X_2} (T_p(f))_{x_1}\, d\mu_2 = \int_{X_2} \lim_{p\to\infty} (T_p(f))_{x_1}\, d\mu_2 = \int_{X_2} (f)_{x_1}\, d\mu_2.$$

وبهذا نكن قد بينا أن (??) وَ (??) في الحالة حيث f تحقق (??) وَ (7.10) · وإذا كانت (7.10) غير محققة فنكتب $f = f^+ - f^-$ وعندها يكون f^+ وَ f^- منتميين إلى $\mathbf{R}$ ووفقا للملاحظة تكون f منتميا إلى $\mathbf{R}$ ·

يبقى أن تنثبت العكس. ليكن f يحقق (??) ولنضع $f^1 = |f|$ · باستخدام مؤثر البتر، نرى أن:

$$\int_{X_2} (T_p(f^1))_{x_1}\, d\mu_2 \leq \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_2(x_2) \leq k^\star(x_2).$$

وبما أن $T_p(f) \in L^1_\mu(X)$ فيمكن تطبيق المتطابقة (??) للحصول على:

$$\int_X T_p(f^1)\, d\mu = \int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} (T_p(f))_{x_1}\, d\mu_2(x_2) \leq \int_{X_2} k^\star(x_2) d\mu_2(x_2).$$

الأمر الذي يعني أن نظيم $T_p(f^1)$ محدود بانتظام نسبة إلى p · فينتج إذن من معيار القابلية للمكاملة أن $f^1 \in L^1_\mu(X)$ · وأخيرا، بما أن f قيوس فإن معيار الهيمنة يستلزم (??) ·

تمارين عامة

34.10 لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين ولتكن A_1 وَ B_1 جزئين من X_1 وَ A_2 وَ B_2 جزئين من X_2 . أثبت أن:

١ - $A_1 \times (A_2 \cup B_2) = (A_1 \times A_2) \cup (A_1 \times B_2)$.

٢ - $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$.

٣ - ${}^c(B_1 \times B_2) = ({}^cB_1 \times X_2) \cup (X_1 \times {}^cB_2)$.

35.10

١ - ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وَ $J \subset X$ ولنعتبر الجماعة $\mathcal{A}_J = \{A \cap J \mid A \in \mathcal{A}\}$.
بين أن $\mathcal{A}_J$ عشيرة على J ، تسمى **عشيرة أثر** $\mathcal{A}$ **على** J .

٢ - لنفرض الآن أن J ينتمي إلى $\mathcal{A}$ وليكن μ قياسا موجبا معرفا على $(X, \mathcal{A})$. ليكن التابع المجموعاتي μ_J المعرف على $\mathcal{A}_J$ بأن $\mu_J(B) = \mu(B)$ ، مهما كان $B \in \mathcal{A}_J$. بين أن μ_J قياس موجب على $(J, \mathcal{A}_J)$ ، يدعى **باقتصار** القياس μ على J .

36.10 ليكن $\mathcal{A}$ جبر مجموعات على مجموعة X . برهن على أنه إذا كان مغلقا نسبة إلى نهايات متتالياته المتزايدة (بمعنى أنه من أجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ عناصرها من $\mathcal{A}$ ، تكون النهاية $\lim\limits_{\uparrow} A_n$ منتمية إلى $\mathcal{A}$) فإنه عشيرة.

37.10 لتكن X_1 وَ X_2 مجموعتين وليكن جداءاهما الديكارتي $X = X_1 \times X_2$. من أجل $A \subset X$ وَ $x_1 \in X_1$ وَ $x_2 \in X_2$ ، نشير بـ A_{x_1} إلى مقطع A فوق x_1 وَبـ A^{x_2} إلى مقطع A في مستوى x_2 ، أي أن

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \quad \text{وَ} \quad A^{x_2} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} \,.$$

ولتكن الآن $\{A^i\}_{i \in I}$ جماعة من أجزاء X . أثبت أن:

$${}^c(A^i)_{x_1} = {}^cA^i_{x_1}, \quad \Big(\bigcup_{i \in I} A^i\Big)_{x_1} = \bigcup_{i \in I} A^i_{x_1}, \quad \Big(\bigcap_{i \in I} A^i\Big)_{x_1} = \bigcap_{i \in I} A^i_{x_1}.$$

38.10 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا حقيقيا قيوسا. أثبت أنه حتى يكون f منتميا إلى الفضاء $L^1_\mu(X, \mathcal{A})$ يلزم ويكفي أن يوجد ثابت $0 < C$ بحيث

$$|T_n(f)|_{L^1_\mu} \doteq \int_X |T_n(f)| \, d\mu \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

حيث T_n هو تابع البتر بين الأفقين $-n$ وَ n وهو معرف بأن $T_n(t) \doteq \frac{1}{2}\{|t+n| - |t-n|\}$ ، $t \in \mathbb{R}$.

تمارين حول عشائر وقياسات الجداء ـ مبرهنة فوبيني

39.10 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ فضائين قيوسين وليكن فضاء الجداء $(X,\mathcal{A}) \doteq (X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)$. أثبت أن العشيرة $\mathcal{A}$ تتمتع بخاصية المقطع، بمعنى أنه، من أجل كل $\mathcal{A}\ni A$ ، يكون لدينا $\mathcal{A}_2 \ni A_{x_1} = \{x_2\in X_2 \mid A\}$ ، مهما كان x_1 من X_1 . ولدينا نفس النتيجة باستبدال الدليلين 1 وَ 2 .

40.10 ليكن الفضاء المقيس $(I^2,\mathcal{B}^2,\lambda^{(2)})$ ، حيث I مجال من $\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{B}^2$ عشرته البوريلية وَ $\lambda^{(2)}$ قياسه للوبيغ. أدرس القابلية للمكاملة للتابع $f: I^2\longrightarrow\mathbb{R}$ ثمّ أحسب التكاملات $\int_I\{\int_I f(x,y)\,d\lambda(x)\}\,d\lambda(y)$ وَ $\int_I\{\int_I f(x,y)\,d\lambda(y)\}\,d\lambda(x)$ في الحالات التالية.

١ - $I=[0,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$f(0,0)=0$ وَ $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ من أجل $(x,y)\neq(0,0)$.

٢ - $I=[-1,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$f(0,0)=0$ وَ $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)^2$ من أجل $(x,y)\neq(0,0)$.

٣ - $I=[0,1]$ وَ f التابع المعرف بأن

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n} & \text{من أجل } (x,y)\in\,]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]\times]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}] \\ -2^{2n+1} & \text{من أجل } (x,y)\in\,]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]\times]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}] \\ 0 & \text{عدا ذلك.}\end{cases}$$

41.10 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ فضاءين قيوسين. أثبت أن $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ هي أصغر (بمعنى الاحتوى) عشيرة $\mathcal{S}$ على $X_1\times X_2$ التي تجعل المسقطين π_i قيوسين عندما يزود الجداء بالعشيرة $\mathcal{A}$ والوصول X_i بالعشيرة $\mathcal{A}_i$ ، $i=1$ ، 2 .

42.10 ليكن $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ فضائين مقيسين مع $\mu_1(X_1)$ وَ $\mu_2(X_2)$ متهيين وغير معدومين.

١ - عين صورتي قياس الجداء $\mu_1\otimes\mu_2$ بواسطة المسقطين π_i للجداء $X_1\times X_2$ على X_i ، $i=1$ ، 2 . ماذا يمكنك قوله إذا كانا μ_1 وَ μ_2 قياسين احتماليين؟

٢ - ليكن γ قياسا متهيا على الفضاء المقاس جداء الفضاءين $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$. أثبت أنه إذا كان γ هو جداء القياسين على $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ فإن

$$\gamma=\frac{\gamma_{\pi_1}\otimes\gamma_{\pi_2}}{\gamma(X_1\times X_2)}.$$

٣ - لنأخذ $X_1=X_2\doteq\{0,1\}$ وَ $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2\doteq\mathcal{P}(\{0,1\})$. ليكن γ القياس المعرف على فضاء الجداء بأن $\gamma(\{0,0\})=\gamma(\{1,1\})\doteq a$ وَ $\gamma(\{0,1\})=\gamma(\{1,0\})\doteq\frac{1}{2}-a$ ، حيث $a\in[0,\frac{1}{2}]$.

[أ)] عين العشيرة $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$.

[ب)] عين قياسات الصورة γ_{π_i} ، $i=1$ ، 2 .

[جـ)] هل القياس γ هو جداء القياسين على $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ ؟

[د)] أوجد شرطا لازما وكافيا لكي يوجد قياسان ν_1 وَ ν_2 على $(X_1,\mathcal{A}_1)$ وَ $(X_2,\mathcal{A}_2)$ على التوالي بحيث يكون μ_i هو صورة $\nu_1\otimes\nu_2$ بواسطة المسقطين π_i ، $i=1$ ، 2 . أكتب ν_i بدلالة μ_i .

43.10 ليكن الفضاء القيوس $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R}), \lambda \times \tau)$ حيث λ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ وَ τ هو القياس المعرف على $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ كالآتي: من أجل كل $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ، $\tau(A) \doteq \operatorname{card}(A)$ إذا كان هذا العدد الأصلي منتهيا وَ $\tau(A) \doteq +\infty$ ماعدا ذلك. ليكن $\Delta \doteq \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$.

١ - بين أن $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

٢ - أثبت أن فرض القياسين σ منتهيين ضروري في مبرهنة تبديل ترتيب التكاملين (مبرهنة فوبيني).

تعريف .- ليكن $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا. نسمى **دعامة** أو **سند** f ملاصقة مجموعة نقط $\mathbb{R}^N$ حيث f غير معدوم، يُسشار إلى دعامة f بِـ $\operatorname{supp} f$ ، أي أن

$$\operatorname{supp} f \doteq \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}}.$$

44.10 ليكن $X_1 = X_2 = [0,1]$ وَ $\mu_1 = \mu_2$ قياس لوبيغ على المجال الحقيقي $[0,1]$. ولتكن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة تماما عناصرها من $]0,1[$ ومتقاربة نحو 1 . وكذلك، من أجل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، ليكن g_n تابع حقيقي مستمر ودعامته محتواة في $]\alpha_n, \alpha_{n+1}[$ مع $\int_0^1 g_n(t)\, dt = 1$. لنضع

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)] g_n(y), \ \ (x,y) \in [0,1]^2.$$

بين أن $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx$ وأن $\int_0^1 dx \int_0^1 |f(x,y)|\, dy = +\infty$. ماذا تستنتج نسبة إلى فرضيات فوبيني؟

45.10 ليكن $N \in \mathbb{N}^\star$ ولنشر بِـ ω_N إلى **حجم كرة الوحدة الأقليدية** لِـ $\mathbb{R}^N$ ، أي أن $\omega_N \doteq \lambda^{(N)}(B_N)$ ، حيث $\lambda^{(N)}$ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$ وَ

$$B_N \doteq \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1\}.$$

١ - أحسب ω_1 وَ ω_2 .

٢ - ا) أوجد علاقة تدريجية بين ω_N وَ ω_{N-2} من أجل كل $N \geq 3$ وهذا بملاحظتك أن $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1$ يكافيء $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ وَ $x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_N^2 \leq 1 - x_2^2 - x_2^2$.

ب) استنتج عبارة ω_N من أجل كل $N \geq 2$.

46.10 ليكن f وَ g تابعين حقيقيين لوبيغ جموعين على $\mathbb{R}^N$ وليكن التابع h المعرف من $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ في $\overline{\mathbb{R}}$ بأن $h(x,y) \doteq f(x-y) g(y)$.

١ - أثبت أن h لوبيغ كمول على $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. استنتج أن التطبيق $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\, d\lambda^{(N)}(y)$ ، حيث $\lambda^{(N)}$ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^N$ ، معرف شبه كليا على $\mathbb{R}^N$.

٢ - لنشير بِـ $f \star g$ إلى التابع من $\mathbb{R}^N$ في $\overline{\mathbb{R}}$ المعرف بأن:

$$(f \star g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\, d\lambda^{(N)}(y), \ \ x \in \mathbb{R}^N$$

عندما يكون التكامل معرفا، وبِـ $(f \star g)(x) \doteq 0$ ما عدا ذلك. أثبت أن التابع $f \star g$ لوبيغ كمول على $\mathbb{R}^N$ وأن:

$$|f \star g|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq |f|_{L^1(\mathbb{R}^N)} |g|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

حيث $|f|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ ، مثلا تشير إلى $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, d\lambda^{(N)}(x)$. يدعى $f \star g$ **بجداء تزويج** أو **لف** f وَ g .

تعريف ـ. ليكن $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ تابعا مستمرا. نسمي **دعامة** أو **سند** f ملاصقة مجموعة نقط $\mathbb{R}^N$ حيث f غير معدوم، ونشير إلى دعامة f بـ $\operatorname{supp} f$ ، أي أن:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}}.$$

47.10 ليكن التابع $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بأن

$g(t) = 0$ مهما كان $t \geq 0$ وَ $g(t) = e^{-1/t}$ من أجل $0 < t$.

١ - أثبت أن g قابل للاشتقاق ما لا نهاية من المرات على $\mathbb{R}$ ، أي أن g من صنف $\mathcal{C}^\infty$ على $\mathbb{R}$.

٢ - أثبت أن التابع ϱ من $\mathbb{R}^N$ في $\mathbb{R}$ المعرف بأن $\varrho(x) = g(1 - |x|^2)$ ، $x \in \mathbb{R}^N$ ، حيث $|x|$ هو النظيم الأقليدي للشعاع x ، أي أن $|x|^2 = |(x_1, \ldots, x_N)|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2$ ، من صنف $\mathcal{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^N$. عين دعامته.

ترميز ـ. ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$. نشير بـ $\mathcal{D}(\Omega)$ أو بـ $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ إلى **مجموعة** التوابع الحقيقية المعرفة على Ω ، من صنف $\mathcal{C}^\infty$ ، وذات دعامات **متراصة محتواة** في Ω .

48.10 أثبت توطئة **أوريشون** (Urysohn) : ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$ وليكن $K \subset \Omega$ جزء متراصا. عندئذ يوجد تابع $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ بحيث $\varphi(x) = 1$ مهما كان $x \in K$.

الفصل 11

فضاءات لوبيغ $\mathcal{L}^p$ وَ L^p $(1 \le p \le \infty)$

1.11 انصاف النظيمات المعممة N_p

ليكن $(X, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا ولنشر بِـ $\mathcal{M}_+$ الى مجموعة التوابع القيوسة من $(X, \mathcal{A})$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ مزود بعشيرته البوريلية $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. من أجل μ قياس موجب على $\mathcal{A}$ وَ $1 \le p < \infty$ عدد حقيقي، نضع $N_p(f) = (\int_X f^p \, d\mu)^{1/p}$.

1.1.11 مبرهنة • تتمتع التطبيقات $f \mapsto N_p(f)$ **لِـ** $\mathcal{M}_+$ **في** $\overline{\mathbb{R}}_+$ **(**$1 \le p < \infty$**) بالخواص التالية:**

١ - $N_p(0) = 0$ ، $N_p(cf) = cN_p(f)$ ، **مهما كان** $c \in \mathbb{R}_+$ **ومهما كان** $f \in \mathcal{M}_+$.
ثمّ إنه إذا كان f **وَ** g **عنصرين من** $\mathcal{M}_+$ **مع** $f \le g$ **كان** $N_p(f) \le N_p(g)$.

٢ - إذا كان $p > 1$ **وَ** $p' > 1$ **عددين حقيقيين مترافقين، أي بحيث** $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ **، كانت لدينا** متباينة هولدر[1] :

$$N_1(fg) \le N_p(f) \, N_{p'}(g), \;\; \forall f, g \in \mathcal{M}_+.$$

٣ - ولدينا متباينة مينكوفسكي[2] :

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g), \;\; \forall f, g \in \mathcal{M}_+.$$

قبل تدقيم البرهان عليهنا أولا

∘ بتمديد التابع $t \mapsto t^p$ $(p \ge 1)$ المعرف على $\mathbb{R}_+$ إلى $\overline{\mathbb{R}}_+$ وهذا بأن نضع $(+\infty)^p = +\infty$. ثمّ

∘ إعطاء متباينة يونغ[3] : مهما كان $\alpha > 0$ وَ $\beta > 0$ مع $\alpha + \beta = 1$ ، لدينا

$$a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b, \;\; \forall a \ge 0, b \ge 0. \tag{1.11}$$

يمكنك الحصول على هذه المتباينة بكل وساطة وهذا بأن تلاحظ أن التابع $x \mapsto -\ln x$ محدب ولذا:

$$-\ln(\alpha a + \beta b) \le -\alpha \ln a - \beta \ln b,$$

ومنه المتباينة (1.11) .

---

[1] هولدر (Hölder) (1859 – 1917) رياضياتي ألماني.
[2] هرمان منكوفسكي (H. Minkowski) (1864 – 1909) رياضياتي روسي ـ ألماني.
[3] يونغ (W.H. Young) (1862 – 1946) رياضياتي.

الإثبات

١) تينتج هذه الخاصية مباشرة من خواص التابع $x \mapsto x^p$ ومن خواص التكامل.

٢) يمكننا أن نلاحظ أنه يمكن الحصول على متباينة هولدر انطلاقا من المتباينة

$$\int_X f^\alpha g^\beta \, d\mu \leq \Big(\int_X f\, d\mu\Big)^\alpha \Big(\int_X g\, d\mu\Big)^\beta, \ \forall f, g \in \mathcal{M}_+, \ \forall \alpha > 0, \beta > 0, \ \alpha + \beta = 1. \quad (2.11)$$

ولرؤية هذا يكفي تعويض في المتباينة السابقة f بِـ f^p وَ g بِـ $g^{p'}$ وأخذ $\alpha = \frac{1}{p}$ وَ $\beta = \frac{1}{p'}$.

إثبات (2.11). إذا كان أحد التكاملين في الطرف الأيمن معدوما كان $f = 0$ أو $g = 0$، μ ـ شك ويكون $f^\alpha = 0$ أو $g^\beta = 0$، μ ـ شك، وعندها $\int_X f^\alpha g^\beta \, d\mu = 0$ ومنه المساواة بين طرفي (2.11) في هذه الحالة. لنفرض إذن كلا التكاملين في الطرف الأيمن غير معدوم. وعندها يمكن كتابة (2.11) على الشكل

$$\int_X \varphi^\alpha \psi^\beta \, d\mu \leq 1$$

حيث $\varphi = f/(\int_X f\, d\mu)$ وَ $\psi = f/(\int_X g\, d\mu)$. إذن $\int_X \varphi\, d\mu = 1$ وَ $\int_X \psi\, d\mu = 1$. فيكفي إذن لإثبات (2.11) البرهان على أن

$$\int_X \varphi^\alpha \psi^\beta \, d\mu \leq 1, \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}_+, \ \int_X \varphi\, d\mu = \int_X \psi\, d\mu = 1.$$

لكن، وفقا لِمتباينة يونغ، لدينا $\varphi^\alpha \psi^\beta \leq \alpha\varphi + \beta\psi$ وبمكاملة هذه المتباينة نحصل على

$$\int_X \varphi^\alpha \psi^\beta \, d\mu \leq \alpha \int_X \varphi\, d\mu + \beta \int_X \psi\, d\mu = \alpha + \beta = 1.$$

هذا ينهي البرهان على متباينة هولدر.

٣) لإثبات متباينة مينكوفسكي، نلاحظ أولا أنه إذا كان $N_p(f)$ أو $N_p(g)$ غير منته كان $N_p(f+g)$ غير منته وتكن لدينا المساواة بين الطرفين. وإذا كان $N_p(f+g) = 0$ تكون لدينا مساواة كذلك. لنفرض إذن أن $N_p(f) < \infty$ وَ $N_p(g) < \infty$. عندئذ يكون لدينا $N_p(f+g) < \infty$. وفي الحقيقة، بما أن التابع $t \mapsto t^p$ محدب فمن أجل $a \geq 0$، $b \geq 0$، لدينا

$$(a+b)^p = 2^p \Big(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\Big)^p \leq 2^p \Big(\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p\Big) = 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

إذن $(f+g)^p \leq 2^{p-1}(f^p + g^p)$ والمكاملة نحصل على $[N_p(f+g)]^p < \infty$. لنكتب الآن

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

وبتطبيق متباينة هولدر مرتين نجد:

$$\begin{aligned}
\int_X f(f+g)^{p-1}\, d\mu &\leq \Big(\int_X f^p\, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1-1/p} \\
\int_X g(f+g)^{p-1}\, d\mu &\leq \Big(\int_X g^p\, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1-1/p}
\end{aligned}$$

ومنه المتباينة

$$\int_X f(f+g)^p\, d\mu \leq (N_p(f) + N_p(g)) \Big(\int_X (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1-1/p}$$

التي، بعد قسمة طرفيها بالعدد المنته وغير المعدوم $N_p(f+g)$، تعطي متباينة مينكوفسكي.

2.1.11 **ملاحظة** ◄ لا تشكل التوابع N_p نظيمات لأنها قد تأخذ القيمة $+\infty$.

3.1.11 مبرهنة (التحدب العدود) •

١) إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متزايدة عناصرها من $\mathcal{M}_+$ فإن:

$$N_p\Big(\sup_{n\geq 1} f_n\Big) = \sup_{n\geq 1} N_p(f_n).$$

٢) وإذا كانت كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كيفية عناصرها من $\mathcal{M}_+$ فإن:

$$N_p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

الإثبات

١) بما أن التابع $t \mapsto t^p$ مستمر فإن $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^p = \Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\Big)^p$ وبما أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة فإن $\{f_n^p\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة كذلك وعندئذ ينتج من مبرهنة بيبو لفي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n^p\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n^p\,d\mu = \int_X \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)^p\,d\mu.$$

وعليه $\Big(\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int_X (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)^p\,d\mu\Big)^{1/p}$ ، أي أن (بسبب التزايد)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_X (f_n)^p\,d\mu\Big)^{1/p} = \sup_{n\geq 1} N_p(f_n) = N_p\Big(\sup_{n\geq 1} f_n\Big).$$

٢) لنضع $g_n = g_1 + \cdots + f_n$ ، المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة ولدينا $\sup\limits_{n\geq 1} g_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ ، وبتطبيق (١) نجد

$$N_p\Big(\sup_{n\geq 1} g_n\Big) = \sup_{n\geq 1} N_p(g_n).$$

لكن، وفقا لمتباينة مينكوفسكي $N_p(g_n) \leq \sup\limits_{k=1}^{n} N_p(f_k)$ ومنه

$$N_p\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) \leq \sup_{n=1}\Big(\sum_{k=1}^{n} N_p(f_k)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

هذا ينهي إثبات المبرهنة التحدب العدود.

4.1.11 بعض الأمثلة الهامة •

١ - أشهر وأهم الأمثلة هو الذي نحصل عليه بأخذ $X = \mathbb{R}$ وَ $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ ، عشيرة أجزاء $\mathbb{R}$ القيوسة حسب لوبيغ وَ $\mu = \lambda$ ، قياس لوبيغ.

٢ - $X = \mathbb{N}$ وَ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ، عشيرة كل أجزاء $\mathcal{N}$ وَ $\mu = \mu_d$ ، قياس التعداد. هنا

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu_d = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n \geq 0$$

ولذا $N_p(f) = \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p}$ وتصبح متباينتا هولدر ومينكوفسكي متباينتين حول السلاسل العددية الموجبة:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big)^{1/p},\ \ a_n, b_n \geq 0\\ \Big[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^p\Big] &\leq \Big[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\Big]^{1/p} + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p\Big]^{1/p},\ \ a_n, b_n \geq 0.\end{aligned}$$

5.1.11 ملاحظتان •

١ - لدينا كذلك المتباينة الهامة عمليا:

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow (N_p(f))^p + (N_p(g-f))^p \leq (N_p(g))^p.$$

وهي ناتجة من تطبيق المتباينة البسيطة:

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p,\ \ a>0,\ \ b>0,\ \ \forall p \geq 1$$

على f وَ $g-f$ مع $f \geq 0$ وَ $g-f \geq 0$.

٢ - حالة $0 < p < 1$. عندئذ تنقلق متباينة هولدر لتصبح:

$$\int_X fg\,d\mu \geq \Big(\int_X f^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X g^{p'}\,d\mu\Big)^{1/p'},\ \ \forall f,g \in \mathcal{M}_+$$

حيث $p' = p/(p-1)$ وهو سالب في هذه الحالة. كما تنقلب متباينة مينكوفسكي لتصبح:

$$\Big(\int_X f^p\,d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X g^p\,d\mu\Big)^{1/p} \geq \Big(\int_X (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/p}\ \ \forall f,g \in \mathcal{M}_+$$

التي تكتب $N_p(f) + N_p(g) \geq N_p(f+g)$ من أجل التوابع الموجبة. وهي لا تعطي المتباينة «العكسية» لمتباينة مينكوفسكي في حالة التوابع ذات إشارة كيفية.

٣ - متباينة أشباه النظيمات: من أجل f وَ g كيفيين، يمكن البرهان على المتباية

$$N_p(f+g) \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\{N_p(f) + N_p(g)\}$$

التي تُمكن من النظر إلى $\mathcal{L}^p$ $(0 < p < 1)$ كفضاءات شبه نظيمية.

2.11 الفضاءات $\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p < \infty)$

ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا ولكن $\mathcal{M}(=\mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}))$ فضاء التوابع القيوسة من $(X,\mathcal{A})$ في $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. لنذكِّر القارىء بأنه إذا كان $f \in \mathcal{M}$ كان $|f| \in \mathcal{M}_+$.

1.2.11 تعريف • ليكن $1 \leq p < \infty$. نسمي فضاء $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ الفضاء الجزئي من الفضاء $\mathcal{M}$ المعرف بأن:

$$f \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{M} \text{ وَ } |f|^p \text{ ، } \mu \text{ ـ كمول}$$

إذن توابع $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ هي توابع قيوسة وبحيث $\int_X |f|^p\,d\mu < \infty$. أمّا كون $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء شعاعي جزئي فينتج من المبرهنة 1.1.11 .

عند الممارسة وبهدف الاختصار نكتب فقط $\mathcal{L}^p$. ونسمي مجازا عناصر هذا الفضاء بالتوابع ذات القوة p كمولة (أو جموعة) ومن أجل f من $\mathcal{L}^p$ نكتب كذلك $N_p(f) = (\int_X |f|^p\,d\mu)^{1/p}$.

في حالة $X = \mathbb{N}$ وَ $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ وَ μ قياس التعداد، نستخدم الترميز ℓ^p وهو فضاء المتتاليات $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع $a_n \in \mathbb{R}$ وَ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty.$$

التوابع الـ μ ـ كمولة توافق حالة $p = 1$.

2.2.11 **بعض نتائج المقطع** 1.11 • ينتج من دراسة المقطع 1.11 أن $\mathcal{L}^p$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ وأن التطبيق $\mathcal{L}^p \ni f \mapsto N_p(f) \in \mathbb{R}_+$ نصف نظيم على $\mathcal{L}^p$.

الفضاء التوبولوجي الذي سيُعتبر فيما يلي هو دائما $\mathcal{L}^p$ مزود بنصف النظيم N_p ونستمر في الإشارة إليه بـ $\mathcal{L}^p$. إن هذا الفضاء غير مفصول. هل لك أن تقول لماذا؟

إننا ندعو التقارب في هذا الفضاء **بالتقارب بالمتوسط من الترتبة** p .

3.2.11 **ملاحظات** •

- لقد اقتصرنا هنا على الحالة حيث $1 \leq p < \infty$ وسوف نتطرق إلى الحالة $p = \infty$. يوجد تباين كبير بين الفضاءات L^p وَ L^∞ ، التي ستشيد اعتمادا على أنصاف النظيمات N_p وَ N_∞ ؛ ويلاحظ هذا التباين مثلا فيما يتعلق بمسألة **التنوية** .
- في حالة $0 < p < 1$ نحصل على فضاءات L^p شبه نظيمية. هذه فضاءات شعاعية توبولوجية. والجدير بالذكر أن ثنوي الفضاء L^p في هذه الحالة لا يحتوي إلا على العنصر المعدوم 0 ، الأمر الذي يحد من فوايد استخدام هذه الفاءات في التحليل التابعي.

4.2.11 **بعض الخواص المباشرة** • ليكن f وَ g تابعين من $\mathcal{M}$. لدينا عندئذ ما يلي:

١ - إذا كان f عنصرا من $\mathcal{L}^p$ وكان $f(x) = g(x)$ ، μ ـ شك فإن $g \in \mathcal{L}^p$ وَ $N_p(f) = N_p(g)$.

٢ - إذا كان $f \in \mathcal{L}^p$ كان $|f| \in \mathcal{L}^p$ وَ $N_p(|f|) = N_p(f)$.

٣ - إذا كان $f \in \mathcal{L}^p$ كان f^- وَ $f^+ \in \mathcal{L}^p$.

٤ - إذا كان f وَ $g \in \mathcal{L}^p$ كان $\inf\{f,g\}$ وَ $\sup\{f,g\} \in \mathcal{L}^p$.

يمكنك التأكد من الخواص الأوليين أن تستخدام التعريف نفسه. ولتأكد من الخاصيتين الثالثة والرابعة لاحظ أن $f^+ = \frac{1}{2}\{f + |f|\}$ وَ $f^- = \frac{1}{2}\{|f| - f\}$ وأن $\sup\{f,g\} = f + (g-f)^+$ وَ $\inf\{f,g\} = -\sup\{-f,-g\}$.

ينتج من هذا أن $\mathcal{L}^p$ فضاء **شبكي** .

5.2.11 **مبرهنة ريس وفيشر** • $\mathcal{L}^p$ **فضاء توبولوجي تام.**

تنتج مبرهنة ريس[4] وفيشر[5] هذه من المبرهنة التالية.

6.2.11 **مبرهنة • لتكن** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية لِكوشي في** $\mathcal{L}^p$ **. عندئذ توجد متتالية جزئية** $\{f_{n_k}\}$ **بحيث تكون:**

١ - السلسلة ذات الحد العام $N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ **متقاربة.**

٢ - السلسلة ذات الحد العام $f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ **متقاربة مطلقا** μ **ـ شك في** X .

٣ - لنضع μ **ـ شك في** X ، $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. **عندئذ** $f \in \mathcal{L}^p$ **وتكون المتتالية** $\{f_n\}$ **متقاربة نحو** f **في** $\mathcal{L}^p$.

---

[4] Fredrick Riesz (1880 – 1956) رياضياتي هنغاري. أحد مبتكري التحليل التابعي العصري، له أبحاث في المعادلات التكاملية ونظرية المؤثرات المتراصة وفي التوابع التوافقية والمسائل المسرانية.

[5] Ernst S. Fischer (1875 – 1959) رياضياتي ألماني له أعمال في التحليل الحقيقي وفي التحليل التابعي.

الإثبات

١. هذا واضح لأنها توجد متتالية مستخرجة $\{f_{n_k}\}$ بحيث يكون لدينا

$$N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \in \mathbb{N}^\star.$$

ويمكن الحصول على المتتالية المستخرجة على النحو التالي:

بما أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ لكوشي في $\mathcal{L}^p$ فيوجد $n_1 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث يكون $N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2}$ مهما كان $n_1 \leq n$ وَ $n_1 \leq m$. ويوجد $n_2 \in \mathbb{N}^\star$ ، $n_1 < n_2$ ، بحيث يكون $N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2^2}$ مهما كان $n_2 \leq n$ وَ $n_2 \leq m$. كما يوجد $n_3 \in \mathbb{N}^\star$ ، $n_2 < n_3$ ، بحيث يكون $N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2^3}$ مهما كان $n_3 \leq n$ وَ $n_3 \leq m$. وبعد k خطوة نرى أنه يوجد عدد طبيعي n_k أكبر تماما من n_{k-1} بحيث يكون $N_p(f_m - f_n) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ مهما كان $n_k \leq n$ وَ $n_k \leq m$. وإذا واصلنا على هذا المنوال نحصل على متتالية مستخرجة بالمواصفات المذكورة.

٢. لنضع $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. بما أن $f \in \mathcal{M}$ فإن $g \in \mathcal{M}_+$. وباستخدام متباينة التحدب العدود نرى أن

$$N_p(g) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_p(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

أي أن $N_p(g)$ منته. إذن $g(x)$ منته μ شبه كليا. ومنه التقارب المطلق للسلسلة ذات الحد العام $\{f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\}$ ، μ ـ شك.

٣. لنضع

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + f_{n_1}(x) \qquad \mu \text{ ـ شك.}$$

عندئذ $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$ ، μ ـ شك. إذن $|f(x)| \leq g(x) + |f_{n_1}(x)|$ ، μ ـ شك. ولذا $N_p(f) \leq N_p(g) + N_p(f_{n_1}) < \infty$. ومنه $f \in \mathcal{L}^p$.

لنبرهن الآن على أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة نحو f في $\mathcal{L}^p$. لدينا

$$N_p(f - f_{n_k}) = N_p\Big(f - \sum_{1 \leq k' \leq k-1} (f_{n_{k'+1}} - f_{n_{k'}}) - f_{n_0}\Big)$$

وعليه (التحدب العدود) $N_p(f - f_{n_k}) \leq \sum\limits_{k' \geq k} N_p(f_{n_{k'+1}} - f_{n_{k'}})$ ولذا $N_p(f - f_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}$. ينتج من هذا أن $N_p(f - f_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ وبما أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}^p$ فإن

$$N_p(f - f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

وفي الحقيقة، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، فبما أن $\lim\limits_{k \to \infty} N_p(f - f_{n_k}) = 0$ يوجد $k_0 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $N_p(f - f_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ مهما كان $k_0 \leq k$. وبما أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ لكوشي في $\mathcal{L}^p$ ، فيوجد $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ بحيث $N_p(f_m - f_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ مهما كان $n_0 \leq n$ وَ $n_0 \leq m$. ليكن الآن $m_0 = \max\{k_0, n_0\}$. عندئذ، من أجل $m_0 \leq n$ وَ $m_0 \leq k$ يكون لدينا:

$$\begin{array}{rcl} N_p(f - f_n) & = & N_p(f - f_{n_k} + f_{n_k} - f_n) \\ & \leq & N_p(f - f_{n_k}) + N_p(f_{n_k} - f_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{array}$$

7.2.11 **لازمة • لتكن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية لكوشي في $\mathcal{L}^p$ وبحيث تكون المتتامية $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ متقاربة μ ـ شك في X نحو $f(x)$. عندئذ ينتمي f الى $\mathcal{L}^p$ وتكون المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة نحو f في الفضاء $\mathcal{L}^p$.**

الإثبات
وفي الحقيقة توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تكون:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g(x) \text{ ، } \mu \text{ شك.}$$

إذن $f(x) = g(x)$ ، μ شك، ولذا f ينتمي إلى $\mathcal{L}^p$ وتكون المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة نحو f في $\mathcal{L}^p$.

8.2.11 **ملاحظات •**

١ - لا يمكن بصفة عامة انتظات نتيجة أحسن من التقارب μ شبه كليا لِمتتالية جزئية من $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، أنظر الملاحظة الثانية أدنه. وبعبارة أخرى لا يؤدي تقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{L}^p$ إلى تقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، μ ـ شك. الهدف من المثال التالي هو توضيح هذه النقطة:

لتكن المجموعة $X = [0,1]$ مزودة بعشيرتها البورلية $\mathcal{B}_{[0,1]}$ وبقياس لوبيغ. من أجل كل عدد طبيعي k ، نعتبر التوابع التالية $\varphi_j^{(k)}$ ، $j = 1$ ، ...، k المعطاة بأن $\varphi_j^{(k)} = \chi_{I_j^k}$ ، الدالة المميزة للمجال $I_j^k = [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$. ثمّ نأخذ المتتالية العرفة بأن:

$$f_1 = \varphi_1^{(1)}, f_2 = \varphi_1^{(2)}, f_3 = \varphi_2^{(2)}, f_4 = \varphi_1^{(3)}, \ldots, f_n = \varphi_j^{(k)},$$

مع $\varphi_j^{(k)}$ بحيث $n = \frac{k(k-1)}{2} + j$ ، $1 \leq j \leq k$ ، أي أن $f_n = \chi_{I_j^k}$. ليكن $f = 0$ ، لدينا:

$$N_p(f_n - f) = \Big(\int_{[0,1]} f_n^p \, d\lambda\Big)^{1/p} \leq \Big(\frac{1}{k}\Big)^{1/p}, \ \forall n \geq k(k-1)/2$$

ولذا تتقارب المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ في $\mathcal{L}^p$ نحو التابع المعدوم. ويمكنك أن ترى أن هذه المتتالية لا تتقارب نحو الصفر λ ـ شك على $[0,1]$. وهذا لأنه، من أجل كل $x \in [0,1]$ ، توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $f_{n_k}(x) = 1$ وتوجد متتالية جزئية $\{f_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ بحيث $f_{n_l}(x) = 0$. لكننا نستطيع استخراج متتالية جزئية تتقارب نحو 0 .

٢ - وفيما يتعلق بمتتاليات فوريي، نعرف النتيجة التالية، المبرهن عليها بأدوات أولية في حالة التوابع الحقيقية ذات دورة قدرها 2π ومستمرة على $\mathbb{R}$ ، التي تشكل فضاء جزئي من الفضاء

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2([0,2\pi], \mathcal{B}_{[0,2\pi]}, \lambda),$$

وهي أن سلسلة فوريي المرفقة بتابع f من $\mathcal{L}^2$ تتقارب نحو هذا التابع f في $\mathcal{L}^2$. وحسب المبرهنة السابقة، نستطيع أن نستخرج متتالية جزئية من متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، تتقارب λ ـ شك على $[0,2\pi]$. إلا أن هذه النتيجة تبقى غير كافية إذ إن ل. كارلسون Carleson برهن سنة 1966 تخمين لوسين Lusin القائل بأن **سلسلة فوريي لتابع من $\mathcal{L}^2$ تتقارب λ ـ شك نحو** f .

3.11 مبرهنات التقارب

1.3.11 **مبرهنة بيبو لفي (للّتقارب الرتيب) • لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع موجبة ومتزايدة عناصرها من الفضاء $\mathcal{L}^p$ وبحيث $\sup_{n\geq 1} N_p(f_n) < \infty$. عندئذ:**

١ - $\sup_{n\geq 1} f_n(x) < \infty$ ، μ ـ شك على X .

٢ - ليكن $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ، μ ـ شك على X . ينتمي التابع f إلى الفضاء $\mathcal{L}^p$ وَ $N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n)$ وتتقارب المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو f في الفضاء $\mathcal{L}^p$.

الإثبات

١. ليكن $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_{n\to\infty} f_n)$ وهو معرّف على X ثمّ إن $f \in \mathcal{M}_+$. ووفقا للمبرهنة 3.1.11 ، ١، ينتج من أن $f = \sup_{n\geq 1} f_n$ أن $N_p(f) = \sup_{n\geq 1} N_p(f_n)$. ولذا تؤدي الفرضية إلى أن $N_p(f) < \infty$ ولذا $f \in \mathcal{L}^p$ ومنه $\sup_{n\geq 1} f_n(x) < \infty$ ، μ ـ شك.

٢. ينتج من كون $N_p(f) = \sup_{n\geq 1} N_p(f_n)$ أن

$$\big(N_p(f)\big)^p = \sup_{n\geq 1}\big[N_p(f_n)\big]^p = \lim_{n\to\infty}\big[N_p(f_n)\big]^p < \infty.$$

تتقارب المتتالية $\{[N_p(f_n)]^p\}_{n=1}^{\infty}$ في $\mathbb{R}_+$ نحو $[N_p(f)]^p$.

وحسب المتباينة الواردة في الملاحظة الأولى من 5.1.11 ، لدينا، من أجل $n < m$:

$$\big[N_p(f_m - f_n)\big]^p \leq \big[N_p(f_m)\big]^p - \big[N_p(f_n)\big]^p.$$

هذا يعني أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}^p$. ولم يبقى عندها إلا تطبيق اللّازمة 7.2.11 للحصول على النتيجة.

2.3.11 **لازمة • لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية متناقصة من التوابع الموجبة والمنتمية إلى الفضاء $\mathcal{L}^p$. عندئذ تتقارب هذه المتتالية نحو تابع f في الفضاء $\mathcal{L}^p$ ولدينا**

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \inf_{n\geq 1} N_p(f_n).$$

الإثبات

لنضع $f = \inf_{n\geq 1} f_n$ ولنعتبر المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، حيث $g_n = f_1 - f_n$. واضح أن $0 \leq g_n$ مع المتتالية $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ متزايدة وَ $\sup_{n\geq 1} N_p(g_n) < \infty$ ، إذ إن $N_p(g_n) = N_p(f_1 - f_n) \leq N_p(f_1)$. وبما أن

$$\sup_{n\geq 1} g_n = -\inf\{f_n - f_1\} = f_1 - \inf_{n\geq 1} f_n = f_1 - f,$$

فإن $f_1 - f \in \mathcal{L}^p$ وَ $f \in \mathcal{L}^p$. ثمّ إن المتتالية $\{f_1 - f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو $f_1 - f$ في الفضاء $\mathcal{L}^p$ ، ولذا تتقارب كذلك $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو f في الفضاء $\mathcal{L}^p$. وبما أن تابع النظيم مستمر فلدينا

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = \inf_{n\geq 1} N_p(f_n).$$

3.3.11 **ملاحظة •** يجب أن ينتبه القارىء إلى أن نتيجة هذه اللّازمة غير واردة من أجل متتالية كيفية. أنظر المثال الوارد ضمن الملاحظات 6.3.11 أدناه.

4.3.11 **مبرهنة لوبيغ (للتقارب بالهيمنة) • لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الفضاء $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ وليكن $f \in \mathcal{M}$. لنفرض أن:**

١ - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ، μ ـ شك.

٢ - يوجد تابع $g \in \mathcal{L}^p$ بحيث $|f_n(x)| \leq g(x)$ ، μ ـ شك، مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

عندئذ ينتمي f إلى $\mathcal{L}^p$ وتكون المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة في الفضاء $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ نحو f .

الإثبات

ينتج من الشرطين (١) وَ (٢) أن $f(x) \leq g(x)$ ولذا $f \in \mathcal{L}^p$. ليكن الآن $h_n = f - f_n$. إذن

$|h_n(x)| \leq 2^p(g(x))^p$. فنستطيع عندئذ تطبيق مبرهنة التقارب بالهيمنة للبيغ المقدم في حالة $p = 1$ على متتالية التوابع h_n^p لأن $2^p g^p$ ينتمي إلى $\mathcal{L}^1$. إذن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |h_n|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |h_n|^p \, d\mu = 0$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} N_p(f - f_n) = 0$.

يمكن تمديد المبرهنة السابقة إلى مجموعة مرشحة. ولنقدم هذا التمديد على الشكل التالي:

5.3.11 **لازمة • لتكن $\mathcal{I}$ مجموعة مرَشَّحة بواسطة مرَشِّحة $\mathcal{F}$ تتمتع بأساس عدود ولتكن $\{f_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ جماعة توابع تنتمي إلى $\mathcal{L}^p$ وبحيث:**

١ - $\lim_{J,\mathcal{F}} f_j(x) = f(x)$ ، μ **- شك.**

٢ - يوجد تابع $g \in \mathcal{L}^p$ **بحيث** $|f_j(x)| \leq g(x)$ ، μ **- شك، مهما كان** j **من** $\mathcal{F}$.

عندئذ ينتمي f **إلى** $\mathcal{L}^p$ **وَ لدينا** $\lim_{J,\mathcal{F}} f_j = f$ **في** $\mathcal{L}^p$.

الإثبات

ليكن $\{A_n\}$ أساسا متناقصا لِـ $\mathcal{F}$. مهما كانت المتتالية $\{j_n\}$ مع $j_n \in A_n$ تحقق المتتالية التابعية $\{f_{j_n}\}$ شروط مبرهنة التقارب بالهيمنة ولذا $f \in \mathcal{L}^p$. وإذا كانت $\{f_j\}$ لا تتقارب نحو f في $\mathcal{L}^p$ فتوجد لتالية $\{f_{j_n}\}$ بحيث لا تتقارب $\{f_{j_n}\}$ نحو f في $\mathcal{L}^p$ ، وهذا تناقض.

6.3.11 **ملاحظات •**

- إن الفرضية (٢) $|f_n(x)| \leq g(x)$ الواردة في مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة تقوي الفرضية الواردة في مبرهنة بيبو لفي 1.3.11 . وقد لا تستقيم النتيجة من أجل متتالية كيفية تحقق فقط الشرط $\sup_{n\geq 1} N_p(f_n) < +\infty$ أو $\sup_{n\geq 1} f_n(x) < +\infty$.

مثال

ليكن $X = \mathbb{N}$ مزود بعشيرة أجزائه $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ وبقياس التعداد μ_d وليكن الفضاء ℓ^p الفضاء الموافق. من أجل المتتالية $\{f_n\}$ حيث $f_n = \chi_{\{n\}}$ لدينا $\int_{\mathbb{N}} f_n^p \, d\mu_d = 1$ ولذا $N_p(f_n) = 1$ وعليه

$$\sup_{n\geq 0} N_p(f_n) = 1 < +\infty \quad \text{وَ} \quad \sup_n f_n = 1 .$$

ولدينا من جهة أخرى $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\{n\}}(k) = 0$ مهما كان $k \in \mathbb{N}$. لكن ليس لدينا $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ في ℓ^p ، وإلا كان لدينا $\lim_{n\to\infty} N_p(f_n) = 0$ ، وهذا تناقض.

نلاحظ أنه ليس لدينا هنا لا $\sup N_p(f_n) = N_p(\sup f_n)$ ولا $\inf N_p(f_n) = N_p(\inf f_n)$.

- إن فرضية اللّازمة «مرشِّحة تتمتع بأساس عدود» ضرورية. هذا ما يتبين من المثال التالي. ليكن المجال $I = [0,1]$ مزود بعشيرتها البوريلية وقياس لوبيغ. ولتكن المجموعة Λ لأجزاء I المتهية. وليكن التابع

$$A \in \Lambda \mapsto f_A = \chi_A$$

يمكن النظر إلى A كدليل متعدد. لتكن $\mathcal{F}$ مرشحة مقاطع Λ من أجل علاقة الاحتواء. إن المجموعات $\{A \mid A \in \Lambda, B \supset A\}$ حيث B يتجول في Λ ، تشكل أساسا غير عدود للمُرشِّحة $\mathcal{F}$ لأنها مجموعة مقاطع Λ . لدينا:

$\lim_{A,\mathcal{F}} f_A(x) = \lim_{A,\mathcal{F}} \chi_A(x) = 1$ مهما كان $x \ni [0,1]$ ·

ثمّ إن $1 \ni \mathcal{L}^1(I,\mathcal{B},\lambda)$ يستلزم $f_A \ni \mathcal{L}^1$ وَ $1 \geq |f_A|$ مهما كان $A \ni \Lambda$ · لكن $\int_I f_A \, d\lambda = 0$ لأن $f_A(x) = 0$ ، λ ـ شك (تذكر أن قياس لوبيغ لوحيدات العنصر معدوم) ولدينا $\int_I 1 \, d\lambda = 1$ ، ولذا لا يمكن أن يكون لدينا $\lim_{A,\mathcal{F}} f_A = 1$ في $\mathcal{L}^1$ ·

4.11 فضاءات لوبيغ L^p $(\infty > p \geq 1)$

1.4.11 **تذكير وتعريف** • من المعروف أنه إذا كان لدينا فضاء شعاعي نصف نظيمي[6] فيمكن انشاء فضاء نظيمي باعتبار حاصل قسمته على علاقة التكافؤ

$$\mathcal{R}: \quad f\mathcal{R}g \iff ||f-g|| = 0$$

حيث $||\cdot||$ يشري إلى نصف النظيم·

في فضاءات لوبيغ $\mathcal{L}^p$ مزودة بنصف النظيم N_p ، تُترجم إذن العلاقة $\mathcal{R}$ بأن $N_p(f-g) = 0$ · وهي تكافىء أيضا

$$f(x) = g(x) \text{ ، } \mu \text{ ـ شبه كليا·}$$

ليكن $\mathcal{N}_\mu$ الفضاء الجزئي من الفضاء $\mathcal{M}$ المكون من التوابع المهملة· عندها

$$f(x) = g(x) \text{ ، } \mu \text{ ـ شك } \iff f - g \in \mathcal{N}_\mu \iff N_p(f-g) = 0 \text{ ·}$$

$L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ هو تعريفا الفضاء الحاصل $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/\mathcal{N}_\mu$ ·

وهو فضاء نظيمي إذ إننا بوضع $||\tilde{f}||_p = N_p(f)$ مع $f \ni \tilde{f}$ نحصل على نظيم في $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ · وبهدف الاختصار، نشير إلى $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ فقط بِـ L^p · يتكون هذا الفضاء من صفوف للتكافؤ التي نشير إليها بِـ f فقط، بدون ˜ إلا إذا كان هناك مجال للبس·

إذن L^p هو الفضاء الجزئي من $\mathcal{M}/\mathcal{N}_\mu$ المعرف بأن:

$$||\tilde{f}||_p < +\infty, \qquad (||\tilde{f}||_p = N_p(f), \;\; f \in \tilde{f}).$$

ويمكن بطبيعة الحال الاقتصار على استخدام التوابع المعرفة μ ـ شك فقط ثمّ اعتبار صفوف تكافؤها·

2.4.11 بعض الخواص الأساسية •

1.2.4.11 L^p **فضاء بناخي** • إن L^p فضاء شعاعي نظيمي بالانشاء· وهو تام حسب مبرهنة ريس وفيشر·

2.2.4.11 L^p **فضاء لريس** • أي أنه فضاء شعاعي مرتب وشبكي·

هو فضاء شعاعي مرتب: • $\tilde{f} \leq \tilde{g} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ ، μ ـ شك كليا ويمكننا أن نتأكد من أن هذه العلاقة منسجمة مع الفضاء الشعاعي·

---

[6] ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ · نقول عن تطبيق $q: E \to \mathbb{R}$ إنه نصف نظيم على E إذا كان (ا) $0 \leq q(x)$ مهما كان $x \ni E$ ؛ (ب) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ مهما كان x ، $y \ni E$ ؛ (جـ) $q(\alpha x) = |\alpha| q(x)$ مهما كان $x \ni E$ مهما كان $\alpha \ni \mathbb{R}$ ·

هو فضاء شعاري شبكي: • $\tilde{f}$ وَ $\widetilde{g}$ ينتميان إلى L^p يستلزم أن $\sup\{\tilde{f},\widetilde{g}\} \in L^p$ وَ $\inf\{\tilde{f},\widetilde{g}\} \in L^p$.
هذا ناتج من كون $\sup\{f,g\} \in \mathcal{L}^p$ وَ $\inf\{f,g\} \in \mathcal{L}^p$ ومن

$$\inf\{\widetilde{f},\widetilde{g}\} = \widetilde{\inf}\{f,g\} \quad \text{وَ} \quad \sup\{\widetilde{f},\widetilde{g}\} = \widetilde{\sup}\{f,g\}$$

وهما المساوتان اللّاتان يمكن البرهان عليهما بالكيفية المألوفة بالرجوع إلى العريف.
وينتج مما سبق أن:

$$|\widetilde{f}| = \widetilde{|f|}, \quad \widetilde{f}^+ = \widetilde{|f|}^+, \quad f^- = \widetilde{|f|}^-.$$

3.2.4.11 **مبرهنة •** L^p **فضاء شبكي تام.**
يعتمد إثبات هذه المبرهنة على الخواص الأربع التالية.

الخاصية الأولى • التوبولوجيا المعرفة على L^p بواسطة النظيم $||\cdot||$ منسجمة مع بنية الفضاء الشعاعي المرتب لِـ L^p .

الخاصية الثانية • في فضاء ريس L^p ، التطبيق $u \mapsto |u|$ مستمر بانتظام.

الخاصية الثالثة • ليكن E فضاء جزئيا من L^p مكونا من عناصر موجبة والمرشح بالعلاقة $\leq$ ، إذا كانت مرشحة مقاطع E تقبل نهاية في L^p فإن هذه النهاية هي الحد الأعلى لِـ E .

الخاصية الرابعة • ليكن E فضاء جزئيا في L^p مكونا من عناصر موجبة ومرشح بالعلاقة $\leq$. حتى يكون لِـ E حد أعلى في L^p يلزم ويكفي أن يكون $\sup\limits_{u\in E} ||u||_p < +\infty$.

3.4.11 علاقتا التقارب بالمتوسط بالتقارب المنتظم وبالتقارب μ ـ شبه كليا •

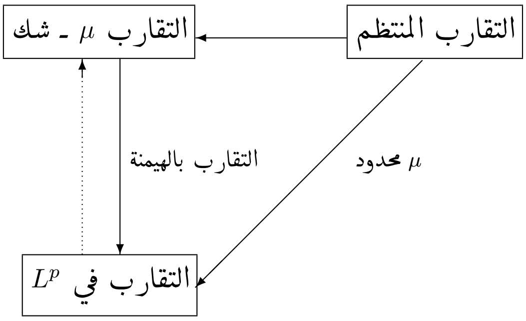
μ **كيفي •** إذا كانت المتتالية

μ **محدود •** إذا كان μ وحدودا فإن التقارب المنتظم يستلز التقارب في L^p .
وذلك لأنه من أجل كل f من L^p يكون لدينا المتباينة

$$|f|_{L^p} \leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\sup_{x\in X} |f(x)|\Big)\{\mu(X)\}^{1/p}$$

التي إذا مطبقت على $f_n - f$ تستلزل النتيجة.

يمكن تلخيص • المقارنة السابقة في الشكل التالي، حيث يعني السهم $\cdots\to$ أن الخاصية واردة من أجل متتالية جزئية فقط:



لا يستلزم إذن التقارب في L^p القارب المنتظم، إذ ليس لدينا حتى التقارب μ شبه الكلي. هذا يثير التساؤل: هي توجد شروط تضمن صحة العكس؟
ويجب أن نقول هنا أن التقارب المنتظم غير ملائم في مسائل المكاملة إذ إننا في هذا الميدان لا نعمل على العموم إلا على المجموعات

المعرفة بتقريب قياسه معدوم أي أننا لا نفرق بين مجمعتين قياس الفرق (المجموعاتي) بينهما معدوم. التقارب الـ μ شبه منتظم ملائم أكثر نسبة إلى المكاملة.

4.4.11 **حالة الفضاء** L^2 •

1.4.4.11 **مبرهنة •** $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ **مزود بالجداء السلمي**

$$(u, v) \mapsto (u \mid v) = \int_X uv \, d\mu$$

فضاء لهيلبرت على $\mathbb{R}$.

يستحسن أن نذكر هنا أن $\int_X uv \, d\mu$ معرف بأن $\int_X fg \, d\mu$ حيث f ممثل للصنف u وَ g ممثل للصنف v ؛ وقيمة التكامل $\int_X uv \, d\mu$ لا يتعلق بالمثلين المأخودين. يمكن التأكد بأنه فعلا جداء سلمي وأن النظيم الموافق له ينطبق مع النظيم $|\cdot|_{L^2}$ ، إذ إن $|f|_{L^2} = (\int_X f \cdot f \, d\mu)^{1/2}$. ثمّ إن L^2 فضاء تام.

2.4.4.11 **بعض النماذج الملموسة لفضاءات هيلبرت •** المبرهنة الموالية تُترجم نتيجة عكسية للمبرهنة السابقة وهي تقدم نوع من التمثيل «الملموس» لفضاء هيلبرتي مجرد بواسط الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$. ولتقديم المقصود نحتاج إلى مفهوم **البعد الهيلبرتي**.

تعريف ـ • نسمي **بالبعد الهيلبرتي** لفضاء هيلبرتي H العدد الأصلي لكل الأساسات الهيلبرتية لِـ H أي العدة المشتركة لكل الأسات التوبولوجية لِـ H . يشار للبعد الهيلبرتي بِـ $\dim_h H$.
ونذكر بأن

5.11 **الفضاءان** $\mathcal{L}^\infty$ **وَ** L^∞

1.5.11 **نصف النظيم** N_∞ •

1.1.5.11 **تعريف •** ليكن $f \in \mathcal{M}_+$ ولنضع $N_\infty(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(f^{-1}(]\alpha, +\infty])) = 0\}$.
يدعى $N_\infty(f)$ بالحد الأعلى بالقياس للتابع f أو كذلك الحد الأعلى الأساسي للتابع f .

وبعبارة أخرى، $N_\infty(f)$ هو الحد الأدنى للأعداد $\alpha \geq 0$ بحيث $f(x) \leq \alpha$ ، μ ـ شك. ويمكنك أن تتأكد من أن $N_\infty(f)$ هو الحد الأعلى للأعداد $\alpha > 0$ بحيث يكون $\mu(\{f > \alpha\}) > 0$ ، حيث $\{f > \alpha\}$ تشير إلى المجموعة $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ ؛ هذا يبرر الاصطلاح $\inf \emptyset = +\infty$ في حالة $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mu(\{f > \alpha\}) = 0\} = \emptyset$.

2.5.11 **مبرهنة ● التابع من $\mathcal{M}_+$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف بأن $f \mapsto N_\infty(f)$ يتمتع بالخواص التالية:**

١ - $N_\infty(0) = 0$ ؛ $N_\infty(f) = 0 \iff f = 0$ ، μ ـ **شك؛** $N_\infty(cf) = cN_\infty(f)$ **مهما كان** $c \in \mathbb{R}$ ؛
$$\forall f, g\mathcal{M}_+,\ f \le g \Longrightarrow N_\infty(f) \le N_\infty(g).$$

٢ - **لدينا**
$$N_\infty(f+g) \le N_\infty(f) + N_\infty(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+.$$

٣ - **لدينا**
$$N_\infty(fg) \le N_\infty(f) N_\infty(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+.$$

٤ - **مهما كان** $p \in [1, +\infty]$ **لدينا**
$$N_1(fg) \le N_p(f) N_{p'}(g),\ \forall f, g \in \mathcal{M}_+$$
(متباينة هولدر) حيث نضع $\frac{1}{\infty} = 0$.

قبل الحديث عن إثبات المبرهنة السابقة نقدم الملاحظة التالية.

3.5.11 **ملاحظة ●** ليكن $f \in \mathcal{M}_+$ ولنضع $a = N_\infty(f)$. إذا كان $a = \infty$ ، كان $0 \le f \le a$ على X . لنفرض إذن أن $0 \le a < \infty$. من التعريف لدينا $a = \inf A = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(\{f > \alpha\}$ ، حيث $\{f > \alpha\} = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$. باستخدام الخاصية المميزة للحد الأدنى نرى أنه،
من أجل $\varepsilon = 1$ ، يوجد $\alpha_1 \in A$ بحيث $a \le \alpha_1 < a + 1$ ،
من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، يوجد $\alpha_2 \in A$ بحيث $a \le \alpha_1 < a + \frac{1}{2}$ ،
من أجل $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ، يوجد $\alpha_3 \in A$ بحيث $a \le \alpha_1 < a + \frac{1}{3}$ ،
وإذا واصلنا على هذا المنوال فنرى أنها توجد متتالية $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ عناصرها من A بحيث $a \le \alpha_n < a + \frac{1}{n}$ ولذا $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$. من تعريف المجموعة A نرى أن $\mu(S_n) = 0$ مهما كان $n \ge 1$ ، حيث $S_n = \{f > \alpha_n\}$. ولذا:
$$0 \le f(x) \le \alpha_n,\ \forall x \in {}^cS_n = X \setminus S_n.$$
لنضع الآن $S = \bigcup\limits_{n=1}^\infty S_n$. إذن ${}^cS = \bigcap\limits_{n=1}^\infty {}^cS_n \subset {}^cS_n$ مهما كان $n \ge 1$. إذن
$$0 \le f(x) \le \alpha_n,\ \forall x \in {}^cS = X \setminus S.$$
وبجعل n يؤول نحو $+\infty$ نجد أن
$$0 \le f(x) \le a,\ \forall x \in {}^cS = X \setminus S.$$
وبما أن $\mu(S) = \mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^\infty S_n\Big) \le \sum\limits_{n=1}^\infty \mu(S_n) = 0$ فلقد بينا أن:
$0 \le f(x) \le N_\infty(f)$ ، μ ـ شك على X .

إثبات المبرهنة 2.5.11

تعتمد الإثباتات أساسا على التعريف وخواص الحد الأدنى.

لنثبت مثلا أنه من أجل $0 < c$ وَ $f \in \mathcal{M}_+$ ولنضع $A(f) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(\{f > \alpha\}) = 0$ وَ $A(cf) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(\{cf > \alpha\}) = 0$. إنه لدينا $A(cf) = cA(f)$ ، حيث نشير بِـ إلى الأعداد من الشكل $c\alpha$ مع $\alpha \in A(f)$. وفي الحقيقة، إذا كان $\alpha \in A(cf)$ ، كان $\mu(\{cf > \alpha\}) = \mu(\{f > \frac{\alpha}{c}\})$ ، إذ إن $\{cf > \alpha\} = \{f > \frac{\alpha}{c}\}$ ، ولذا $\frac{\alpha}{c} = \beta \in A(f)$ ، إذن $\alpha = c\beta \in cA(f)$. ليكن الآن $\alpha \in cA(f)$. إذن $\alpha = x\beta$ مع $\beta \in A(f)$ ، أي أن $\mu(\{f > \beta\}) = 0$. لكن

$0 = \mu(\{f > \beta\}) = \mu(\{cf > c\beta\}) = \mu(\{cf > \alpha\})$.

وعليه $\alpha = c\beta \in A(cf)$. ينتج من هذا (بستخدام خواص الحد الأدنى) أن $N_\infty(cf) = cN_\infty(f)$.

ليكن الآن f وَ g تابعين قيوسين مع $0 \le f \le g$. من أجل $\alpha \in \mathbb{R}_+$ لدينا $\{f > \alpha\} \subset \{g > \alpha\}$ ولذا (تزايد μ) $\mu(\{f > \alpha\}) \le \mu(\{g > \alpha\})$. إذن، إذا كان $\mu(\{g > \alpha\}) = 0$ كان $\mu(\{f > \alpha\}) = 0$. ولذا، إذا كان $\alpha \in A(g)$ كان $\alpha \in A(f)$ وعليه $A(g) \subset A(f)$ وبالتالي يكون

$$N_\infty(g) = \inf A(g) \ge \inf A(f) = N_\infty(f).$$

وتتم إثباتات النقط المتبقية من المبرهنة بنفس الكيفية باستخدام تعريف نصف النظيم N_∞ وخواص الحد الأدنى. لنقدم:

إثبات النقطة (د) ـ إذا كان $p \in]1, +\infty[$ فإن النتيجة معروفة وهي متباينة هولدر التي قدمة ضمن المبرهنة 1.1.11 . وإذا كان $p = \infty$ كان

$$N_1(fg) \le N_\infty(f) N_1(g).$$

وفي الحقيقة، إذا كانت $N_\infty(f) = \infty$ وكان $N_1(g) = 0$ كان $fg = 0$ ، μ ـ شك ولذا $N_1(fg) = 0$ وعليه $N_(fg) = \infty \cdot 0 = 0$. وئذا كان $N_\infty(f) N_1(g) = \infty$ وتكون المتباينة محققة. لنفرض إذن أن $N_\infty(f) = M < \infty$. وفقا للملاحظة 6.3.11 ، لدينا $0 \le f(x) \le M$ ، μ ـ شك، ومنه $0 \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ ، μ ـ شك. والتالي

$$0 \le N_1(fg) \le M N_1(g) = N_\infty(f) N_1(g).$$

في حالة $p = \infty$ ، تدعى المتباينة التي حصلنا عليها منذ لحظة بمتباينة المتوسط.

4.5.11 العلاقة بين $N_\infty(|f|)$ وَ $N_p(f)$ وَ $\sup_{x \in X} |f(x)|$ •

- لدينا بصفة عامة $N_\infty(|f|) \le \sup_{x \in X} |f(x)|$.

هذا واضح إذا كان $M = \sup_{x \in X} |f(x)| = +\infty$. وإذا كان $0 \le M < +\infty$ واعتبارنا المجموعة $A(|f|) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0$ فإن $\{|f| > M\} = \emptyset$ ولذا $M \in A(|f|)$. ومنه $N_\infty(|f|) = \inf A(|f|) \le M$.

- في الحالة الخاصة حيث $X = \mathbb{R}$ وَ $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}}$ ، عشيرة لوبيوغ لأجزاء $\mathbb{R}$ القيوسة، وَ λ قياس لوبيغ، وفي حالة f مستمر، فينطبق $N_\infty(|f|)$ مع النظيم العادي للتقارب المنتظم الذي نشير إليه هنا بِـ $|f|_u$.

- إذا كان μ قياسا محدودا، فمن جهة نستطيع أن نكتب $|f| \le M$ ، μ ـ شك على X ولذا $N_p(f) \le \mu\big(\mu(X)\big)^{1/p}$ مهما كان $p \in]1, \infty[$. ومنه $\limsup_{p \to \infty} N_p(f) \le M$.

ومن جهة أخرى، إذا كان $|f| \ge M'$ على جزء E من X مع $0 < \mu(E)$ فلدينا كذلك $N_p(f) \ge M'\big(\mu(E)\big)^{1/p}$. وبالتالي $\liminf_{p \to \infty} N_p(f) \ge M'$. وإذا ما طبقنا هذا على $N_\infty(|f|)$ فنحصل على

$\limsup_{p \to \infty} N_p(|f|) \le N_\infty(|f|)$ وَ $\liminf_{p \to \infty} N_p(|f|) \ge M'$ مهما كان $N_\infty(|f|) > M'$.

هذا يستلزم أن $\limsup_{p\to\infty} N_p(f) = \liminf_{p\to\infty} N_p(f) = N_\infty(|f|)$. بينا إذن أنه وفي حالة μ قياس محدود، يكون لدينا $N_\infty(|f|) = \lim_{p\to\infty} N_p(f)$.

5.5.11 **تعريف الفضاءان $\mathcal{L}^\infty$ وَ L^∞** • من أجل $f \in \mathcal{M}$ نعتبر $N_\infty(|f|)$ الذي نشير إليه أيضا بـ $N_\infty(f)$.

$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ هو تعريفا الفضاء الجزئي من $\mathcal{M}$ المعرف بأن:

$$\mathcal{L}^\infty \overset{\text{تعر}}{\Longleftrightarrow} f \in \mathcal{M} \text{ وَ } N_\infty(f) < \infty$$

إن $\mathcal{L}^\infty$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{M}$ وَ N_∞ نصف نظيم عليه. نقول عن عناصر $\mathcal{L}^\infty$ بأنها توابع μ ـ محدودة أو محدودة بالقياس أو محدودة أساسا.

ونعتبر الفضاء الشعاعي الحاصل $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}_\mu$ ، حيث $\mathcal{N}_\mu = N_\infty^{-1}(0)$ ، الذي نشير إليه بـ $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ أو اختصارا بـ L^∞ . الفضاء L^∞ فضاء شعاعي نظيمي ونظيمه $|\cdot|_{L^\infty}$ ناتج من N_∞ .

1.5.5.11 **خواص L^∞** • إنها تماثل خواص L^p $(1 \le p < \infty)$ وتبهن بكيفيات مماثلة بل هي أبسط. وبصفة خاصة، L^∞ فضاء بناخي. وسبب ذلك هو أنه إذا كانت $\{\widetilde{f_n}\}_{n=1}^\infty$ متتالية لكوشي في هذا الفضاء فشبه كليا نسبة إلى x من X ، تكون $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ (f_n ممثل ما لصف التكافؤ $\widetilde{f_n}$) متتالية كوشية في $\mathbb{R}$ وهي لذلك متقاربة. هذا يستلزم النتيجة.

ولدينا هنا الخاصية الاضافية التي ليس لها مثيل في الفضاءات L^p مع $1 \le p$ منته.

$\mathcal{L}^\infty$ جبر جزئي من $\mathcal{M}$. إذ إنه إذا كان f وَ g من $\mathcal{M}^\infty$ كان $fg \in \mathcal{L}^\infty$. وهو جبر جزئي نظيمي لكون نصف النظيم N_∞ منسجما مع البنية الجبرية. إذن L^∞ **هو جبر نظيمي تام** ، أي جبر لبناخ.

6.11 التقريب في L^p . مبرهنات الكثافة. القابلية للفصل

1.6.11 كثافة التوابع البسيطة •

1.1.6.11 **مبرهنة • المجموعة $S \cap L^p$ المكونة من صفوف التوابع الحقيقية البسيطة التي تنتمي إى L^p كثيفة في هذا الفضاء من أجل $1 \le p < \infty$.**

الإثبات

لنبدأ بحالة التوابع الموجبة. ولنشير بـ $\mathcal{S}_+$ إلى التوابع السيطة الموجبة وبـ $\mathcal{L}_+^p$ إلى التوابع القيوسة الموجبة ذات قوة p كمولة. وليضع $S'_+ = \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{L}_+^p$ وَ $S'_+ = S_+ \cap L_+^p$. ليكن $f \in \mathcal{M}_+$. توجد متتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ متزايدة عناصرها من $\mathcal{S}_+$ تتقارب ببساطة نحو f . عندها تنتمي $\widetilde{\varphi}_n$ إلى S'_+ ولدينا:

$$|f - \varphi_n|^p \le f^p, \ \ f \in \mathcal{L}_+^p \ .$$

وعليه، اعتمادا على مبرهنة لوبيغ للتقارب بالهيمنة، لدينا $\lim_{n\to\infty} |\widetilde{f} - \widetilde{\varphi}_n|_{L^p} = 0$. ومنه كثافة S'_+ في L_+^p .

في حالة صف $\widetilde{f}$ عناصره من اشارة كيفية نأخذ ممثلا له f ونكتبه على الشكل $f = f^+ - f^-$ (الجزء الموجب ناقص الجزء السالب) ومهما تابعان قيوسان موجبان ينتميان إلى $\mathcal{L}_+^p$ فنستطع عندها إيجاد متتاليتين $\{\varphi_n^+\}_{n=1}^\infty$ وَ $\{\varphi_n^-\}_{n=1}^\infty$ متقاربتين في $\mathcal{L}_+^p$ نحو f^+ وَ f^- على التوالي. إذا وضعنا $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ فنرى أن $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية توابع بصيطة تتقارب في $\mathcal{L}_p$ نحو f . هذا يستلزم النتيجة.

2.1.6.11 **ملاحظة •** إذا كان $\mu(X) < \infty$ فإن كل التوابع البسيطة تنتمي إلى $\mathcal{L}^p$ ، وفي هذه الحالة يكون S كثيف في $\mathcal{L}^p$. لكن إذا كان $\mu(X) = \infty$ فليس التوابع البسيطة تنتمي كلها إلى $\mathcal{L}^p$. ولذا لا تعتبر النتيجة السابقة مبرهنة لكثافة S في L^p في حالة $\mu(X) = \infty$. إلا أن **التوابع الدرجة** تنتمي كلها إلى $\mathcal{L}^p$. التوابع الدرجية هي التوابع البسيطة المعدومة خارج جزء قياسه منته، أي أنها التوابع التي تكتب على الشكل $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ ، حيث $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ، $i = 1$ ، ... ، n وَ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ أجزاء قيوسة من X مع $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) < \infty$.

2.6.11 كثافة التوابع الدرجية •

1.2.6.11 **مبرهنة • الفضاء الجزئي للتوابقع الدرجية (القيوسة وذات قيم حقيقية متهية) كثيفة في $\mathcal{L}^p$ مع $1 \leq p < \infty$.**

الاثبات

باستخدام تفكيك تابع إلى جزء موجب وجزء سالب، نستطيع الاكتفاء بالتوابع الموجبة.

ليكن $\mathcal{L}^p_+$ ولنضع $A_n = \{x \in X \mid \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n\}$. لدينا $\mu(A_n) < \infty$ ، إذ إن:

$$\int_X f^p \, d\mu \geq \int_{A_n} f^p \, d\mu \geq (\tfrac{1}{n})^p \mu(A_n)$$

أي أن $\mu(A_n) \leq n^p \int_X f^p \, d\mu < +\infty$.

لنضع الآن $f_n \doteq \chi_{A_n} f$ ، χ_{A_n} هي الدالة المميزة للجزء A_n . إن المتتالية التابعية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب في $\mathcal{L}^p$ نحو f ، إذا إن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ وَ } 0 \leq f_n \leq f \text{ مع } f \in \mathcal{L}^p_+ .$$

لكن، بما أن التابع f_n قيوس ومحدود فهو نهاية منتظمة لمتتالية توابع بسيطة $\{\varphi_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ ، يمكن أخذها معدومة خارج A_n ، أي أن $f_n = \lim_{j\to\infty} \varphi_{nj}$. عندئذ

$$N_p(f - \varphi_{nj}) \leq N_p(f - f_n) + N_p(f_n - \varphi_{nj}) \leq \varepsilon.$$

من أجل n وَ j كبيرين وهذا لكون التقارب المنتظم على A_n (وقياسه منته) يستلزم التقارب في $\mathcal{L}^p$.

يُمكِّن البتر الخاص f_n المستخدم في الإثبات السابق من الحصول على نتائج مهمة تبعا للملاحظة التالية.

2.2.6.11 **ملاحظة •** ليكن $f \in \mathcal{L}^p$. ينتمي التبع $f_n = f\chi_{A_n}$ إلى $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ مهما كان $p \in]1, +\infty[$. وفي الحقيقة، يكفي دراسة حالة $f \geq 0$ وإثبات أن $f \in \mathcal{L}^q$ مهما كان $q \geq 1$ متهيا. وهذا وارد لكون $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ وهو لذا في $\mathcal{L}^q$ ، إذ إن $\mu(A_n) < \infty$. لدينا $f_n^q = f^q \chi_{A_n}$ ولذا $N_q(f_n) \leq n[\mu(A_n)]^{1/q} < \infty$. يمكننا إذن نص الخاصية التالية:

خاصية ـ الفضاء $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ كثيف في $\mathcal{L}^p$ ، مهما كان $1 \leq q < \infty$.

وبصفة خاصة، $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ كثيف في $\mathcal{L}^2$. سوف نستخدم هذه النتيجة عند دراسة تحويل فوريي، الذي سننظر إليه كتمديد لهذا التحويل (المعرف على $\mathcal{L}^1$) إلى $\mathcal{L}^2$.

3.2.6.11 **مبرهنة • الفضاء الجزئي للتوابع الدرجية (القيوسة وذات قيم حقيقية متهية) فضاء كثيف في $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ ، المزود بالتوبولوجيا الناتجة من توبولوجية الجداء، أي الموافقة مثلا للنظيم** $|f|_{\mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p} = N_q(f) + N_p(f)$.

الاثبات

وهو مماثل للمبرهنة السابقة. نستخدم دائما البتر $f_n = f\chi_{A_n}$ مع $f \in \mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p$. عندها تتقارب $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ نحو f في $\mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^p$ المزود بالتوبولوجيا الناتجة المذكورة، ثمّ نختم باستخدام متتالية من التوابع الدرجية كما فعلنا في اثبات المبرهنة السابقة.

وكتطبيق للنتائج الكثافة السابقة نستطيع إعطاء:

4.2.6.11 **توطئة ريمان ولوبيغ • ليكن** $f \in \mathcal{L}^1$. **لدينا:**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos nx\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin nx\, d\lambda = 0.$$

الإثبات

لنضع $a_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos nx\, d\lambda$ وَ $b_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin nx\, d\lambda$ وَ $I \doteq [a,b]$ مع $b > a$ عددين حقيقيين.

١ - إذا كان $f = \chi_I$ فإن النتيجة محققة إذ إن

$$a_n(\chi_I) = \int_a^b \cos nx\, dx = \frac{\sin nb - \sin na}{n}$$

ولدينا عبارة مماثلة من أجل b_n .

٢ - ينتج من النقطة السابقة أن الخاصة محققة من أجل كل تابع درجي.

٣ - لنأخذ الآن f من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ كيفيا. تضمن مبرهنة الكثافة 1.2.6.11 وجود متتالية $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ من التوابع الدرجية تتقارب بالمتوسط نحو f . إذن، من أجل $\varepsilon > 0$ بحيث $N_1(f-\varphi_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
هيا بنا مثلا نتناول دراسة $a_n(f)$. لدينا $a_n(f) = a_n(f-\varphi_n) + a_n(\varphi_n)$. وعليه:

$$|a_n(f-\varphi_n)| \leq N_1(f-\varphi_n) \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star.$$

وباختيار n_0 بحيث $|a_n(\varphi_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل $n \geq n_0$ فنرى في الختام أنه لدينا $|a_n(f)| \leq \varepsilon$ من أجل $n \geq n_0$.

3.6.11 **كثافة التوابع المستمرة •** إننا هنا نفرض ما يلي:

- X فضاء توبولوجي مفصول (أي أنه لِهوزدورف) متراص محليا.
- μ قياس نظامي بمعنى أنه:

من أجل كل $A \in \mathcal{A}$ وكل $\varepsilon > 0$ يوجد A_1 وَ A_2 من $\mathcal{A}$ مع A_1 شبه متراص بحيث $\overline{A}_1 \subset A \subset \mathring{A}_2$ مع $\mu(A_2 \setminus A_1) \leq \varepsilon$.

لاحظ أن الفرضيتين السابقتين محققتين في حالة الفضاء $(I, \mathcal{L}_I, \lambda)$ حيث I مجال من $\mathbb{R}$ وَ $\mathcal{L}_I$ عشيرة أجزاء I القابلة للقياس حسب لوبيغ وَ λ هو قياس لوبيغ على I . ولدينا الشيء نفسه إذا عوضنا I ببلاطة في $\mathbb{R}^N$ وعشرة لوبيغ وقياسه عليها.

يمكن تهديب إلى حد ما الفرضيات وهذا بأخذ X فضاء معتدل (normal) والقياس نِظامي بمعنى أضعف، ثمّ لا ضرورة لِأخذ A_1 شبه متراص.

1.3.6.11 **تذكير توبولوجي •**

الفضاء المعتدل • هو فضاء لِهوزدورف يحقق شرط فضل المغلقات، أي مهما كان الجزءان المغلقان F_1 وَ F_2 في X وغير المتقاطعين فيوجد جزءان مفتوحين $\mathcal{O}_1$ وَ $\mathcal{O}_2$ غير متقاطعين وبحيث $F_1 \subset \mathcal{O}_1$ وَ $F_2 \subset \mathcal{O}_2$.

في فضاء معتدل، يمكن إثبات مبرهنة أو توطئة أوريشون Urysohn[7] (التي تشكل شرطا لازما وكافيا لكي يكون فضاء ما معتدلا).

توطئة أوريشون • **ليكن X فضاء توبولوجيا مفصولا. حتى يكون X معتدلا يلزم ويكفي أن يتحقق ما يلي:**

> **مهما كان F وَ G جزئين مغلقين من X وغير متقاطعين يوجد تابع حقيقي معرف ومستمر على X وبحيث:**
>
> $f(F) = \{1\}$ **وَ** $f(G) = \{0\}$ **وَ** $0 \leq f(x) \leq 1$ **مهما كان** $x \in X$.

تنتج من توطئة أريشون **مبرهنة التمديد** لِتياتز Tietze[8] وهي تشكل كذلك شرطا لازما وكافيا للاعتدال ونصها:

2.3.6.11 **مبرهنة التمديد لِتياتز • ليكن X فضاء توبولوجيا مفصولا (لِهوزدورف) وليكن (a, b) مجالا من $\mathbb{R}$ مع $a < b$. حتى يكون X فضاء معتدلا يلزم ويكفي أن يكون بالامكان تمديد كل تابع مستمر على جزء كيفي F من X مغلق ويئخذ قيمه في (a, b) إلى تابع مستمر على X بأكمله ويأخذ قيمه في (a, b) .**

هنا يشير الرمز (a, b) إلى أحد المجالات $[a, b]$ ، $[a, b[$ ، $]a, b]$ ، $]a, b[$.

---

[7] Pavel Samuilowitch $(1898 - 1924)$ رياضياتي روسي له أعمال في التوبولوجيا وخاصة في الفضاءات القابلة للمترنة

[8] Heinrich Frantz Friedrich $(1880 - 1964)$ رياضياتي نمساوي. له أعمال في التوبولوجيا وخاصة في الفضاءات المترية.

الفضاءات المتراصة محليا • وهي فضاءات هوزدورف حيث تتمتع كل نقطة بجوار متراص على الأقل.

إن كل فضاء متراص فضاء معتدل. لكننا لا نستطيع الزجم بأي شيء مسبق في حالات الفضاءات المتراصة محليا. إلا أنه لدينا الصغة التالية لتوطئة أريشون.

3.3.6.11 **قضية • ليكن X فضاء متراصا محليا وليكن K جزء متراصا وَ $\mathcal{O}$ جزء مفتوحا مع $K \subset \mathcal{O}$. يوجد عندئذ تابع f مستمر على X وبحيث**

$f(x) = 1$ **على** K **وَ** $f(x) = 0$ **على** ${}^c\mathcal{O}$ **مع** $0 \le f(x) \le 1$ **مهما كان** $x \in X$.

نستطيع الآن أعطاء النتيجة المهمة التالية.

4.3.6.11 **مبرهنة • ليكن X فضاء معتدلا وليكن μ قياسا نِظاميا معرفا على عشيرة $\mathcal{A}$ من أجزاء X . عندئذ المجموعة $C_c(X) \cap L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ، حيث $C_c(X) \doteq \mathcal{C}_c(X)/\mathcal{N}_\mu$ ، مع $\mathcal{C}_c(X)$ هي مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة وذات سندات متراصة محتواة في X ،كثيفة في $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.**

الاثبات

المطلوب البرهان على أنه

$$\forall \widetilde{f} \in L^p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \widetilde{g} \in C_c(X) \cap L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

بحيث $|\widetilde{g} - \widetilde{f}|_{L^p} \le \varepsilon$.

كما سبق أن لاحظنا، يكفي اعتبار حالة $0 \le f$. بما أن $f = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ (في L^p)، مع φ_n تابع درجي موجب، فيكفي دراسة حالة تابع φ_n درجي. لكن φ_n عبارة خطية متهية لدوال مميزة، فالمسألة ترجع إلى الحالة حيث $f = \chi_A$ مع $A \in \mathcal{A}$.

بما أن μ قياس نظامي فيوجد A_1 وَ A_2 من $\mathcal{A}$ بحيث

$\overline{A}_1 \subset A \subset \mathring{A}_2$ مع $\mu(A_2 \setminus A_1) \le \varepsilon^p$.

يوجد وفقا لِتوطية أريشون تابع $g \in \mathcal{C}_c(X)$ بحيث

$0 \le g(x) \le 1$ مهما كان $x \in X$ وَ $g(x) = 1$ على $\overline{A}_1$ وَ $g(x) = 0$ على ${}^c\mathring{A}_2$.

وبما أن $f = g$ ، μ ـ شك، فإن:

$$|\widetilde{f} - \widetilde{g}|_{L^p}^p = \int_X |f - g|^p \, d\mu \le \int_{A_2 \setminus A_1} d\mu,$$

ومنه $|\widetilde{f} - \widetilde{g}|_{L^p} \le \varepsilon$.

4.6.11 لازمات •

- **الفضاء** $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ **هو إتمام الفضاء** $C_c(\mathbb{R})$ مزود بالتوبولوجيا الناتجة، وهذا لكون $\overline{\mathcal{C}}_c = \mathcal{L}^1$ ولكون $\mathcal{L}^1$ فضاء تام. هنا $\mathcal{C}_c \subset \mathcal{L}^1$. ثمّ إنه من أجل f وَ g عنصران من $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ لدينا:

$$|f - g|_{\mathcal{L}^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)| \, dt$$

لأن في هذه الحالة ينطبق تكامل لوبيغ مع تكامل ريمان. وهكذا يظهر تكامل لوبيغ على $\mathcal{L}^1$ كتعميم طبيعي لتكامل ريمان على $\mathcal{C}_c$.

- **قابلية الفضاء** $L^p([a,b], \mathcal{B}_{[a,b]}, \lambda)$ **والفضاء** $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ **للفصل.**

بما أن الفضاء $\mathcal{C}_c([a,b])$ قابل للفصل وهذا وفقا لمبرهنة ستون وفياتشتراس (التقريب بواسطة كثيرات الحدود)، فإن $L^p([a,b])$ فصول. وكذلك، بما أن $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ فصول فإن $L^p(\mathbb{R})$ فصول.

◦ **نتيجة أخرى للكثافة.**
الفضاء $\mathcal{C}_c \cap (L^p \cap L^q)$ كثيف في $L^p \cap L^q$ المزود بالتوبولوجيا الناتجة من توبولوجيا الجداء.

ولرؤية هذا نستخدم أيضا البتر f_n الوارد في إثبات المبرهنة 1.2.6.11 . من أجل $f \in L^p \cap L^q$ ، لدينا $f_n \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ مع $f_n \leq n$. ويوجد عندها $\varphi \in \mathcal{C}_c \cap L^p$ بحيث:

$$|\varphi| \leq n \quad \text{مع} \quad N_p(\varphi - f_n) \leq \varepsilon.$$

وينتج عندئذ من اكبار بسيط أن $N_q(\varphi - f_n) \leq n\varepsilon^{p/q}$ ، وهذا بفرض $q > p$. هذا يمكننا من أن نختم، إذ إن $f_n \to f$ في $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$.

في حالة $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}, \lambda_N)$ ، $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^N}$ هي عشيرة أجزاء $\mathbb{R}^N$ القابلة للقيوس حسب لوبيغ، لدينا $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ ، ولذا ينستطيع أن نقول إن
$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ كثيف في $L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^q)$.

5.6.11 **كثافة التوابع من صنف C^∞** • نحن هنا نقتصر على حالة $L^p(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \lambda)$ ، حيث Ω جزء مفتوح من $\mathbb{R}^N$ أو $\mathbb{R}^N$ نفسه وَ $\mathcal{L}_\Omega$ عشيرة أجزاء $\mathbb{R}^N$ القيوسة حسب لوبيغ وَ λ هو قياس لوبيغ على Ω . ونشير إلى هذا الفضاء اختصارا بِـ $L^p(\Omega)$. لدينا النتيجة التالية:

1.5.6.11 **مبرهنة • ليكن Ω جزء من $\mathbb{R}^N$ مزودا بعشيرة وقياس لوبيغ. عندئذ من أجل كل $p \in]1, +\infty[$ يكون الفضاء $\mathcal{D}(\Omega)$ للتوابع القابلة للإشتقاق بلا تناه وذات سندات متراصة وحتواة في Ω ، كثيف في $L^p(\Omega)$.**

يعتمد الإثبات على مفهوم جداء التزويج أن اللّف الذي يأتي تقديمه في مقطع لاحق. يمكن للقاريء المهتم ان يرجع إليه.

6.6.11 **حالة الفضاء L^∞** • إن المبرهنة 3.2.6.11 لا تبقى صحيحة في حالة $p = \infty$. فالفضاء $L^\infty(X) \cap C_c(X)$ غير كثيف في الفضاء $L^\infty(X)$. وملاصقة هذا الفضاء الجزءي هي على العموم فضاء جزئي أصغر تمام من $L^\infty(X)$. ومن المفيد تمييز هذا الفضاء الجزئي.

1.6.6.11 **التوابع «المعدومة عند مالانهاية»** • نقول عن تابع f حقيقي معرف على فضاء لهوزدورف متراص محليا إنه معدوم عند مالانهاية إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد جزء متراص K من X بحيث $|f(x)| \leq \varepsilon$ مهما كان $x \in {}^cK$.
إن هذا التسمية نابعة من الحالة الخاصة الملوسة للمستقيم العددي $\mathbb{R}$.

يشار إلى التوابع المستمرة المعدومة عند مالانهاية بِـ $\mathcal{C}_0(X)$. من الواضح أن $\mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{C}_0(X)$ وأن هناك تطابق بين هذين الفضائين في حالة X متراص.

2.6.6.11 **مبرهنة • ليكن X فضاء لهوزدورف متراص محليا. عندئذ $\mathcal{C}_0(X)$ هو إتمام الفضاء $\mathcal{C}_c(X)$ نسبة للنظيم الناتج من نظيم L^∞ ، أي نظيم الذروة $|u|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |u(x)|$ ، $u \in \mathcal{C}_0(X)$.**

الإثبات

من الواضح أن فضاء متري ولذا يبقى البرهان على أن $\mathcal{C}_c(X)$ كثيف في $\mathcal{C}_0(X)$ وعلى أن $\mathcal{C}_0(X)$ فضاء تام.

١ - ليكن $\mathcal{C}_0(X) \ni u$ وليكن $\varepsilon > 0$. يوجد جزء متراص $X \supset K$ بحيث $|u(x)| \leq \varepsilon$ مهما كان $x \ni {}^cK$. ينتج من مبرهنة أوريشون وجود تابع $\mathcal{C}_c(X) \ni g$ بحيث $0 \leq g(x) \leq 1$ مع $g(x) = 1$ على K . إذن يحقق التابع $v = ug$ ما يلي:

$$\mathcal{C}_c(X) \ni v \quad \text{وَ} \quad |u - v|_\infty = |u(1-g)|_\infty \leq \varepsilon$$

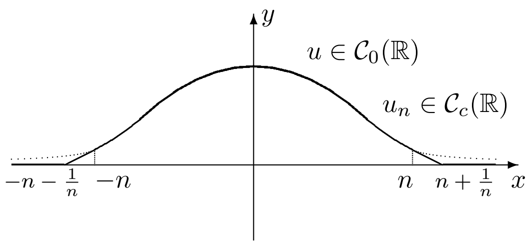
ومه النتيجة.

٢ - ليكن $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية لكوشي في $\mathcal{C}_0(X)$. عندئذ يتقارب u_n بانتظام نحو u من $\mathcal{C}_0(X)$. وفي الحقيقة الأمر، إذا كان $\varepsilon > 0$ يوجد عندد طبيعي n_0 بحيث $|u_n - u|_\infty \leq \frac{1}{2}$ مهما كان $n_{\leq} n$. ثمّ إنه يوجد متراص K_n بحيث $|u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ مهما كان $x \ni {}^cK_n$. ولذا:

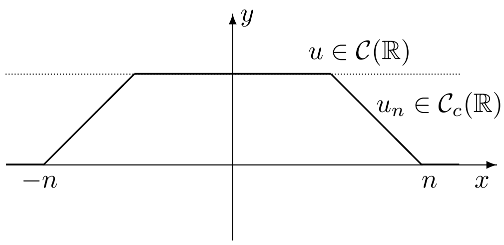
$$|u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in {}^cK_{n_0}$$

ومنه النتيجة.

3.6.6.11 **ملاحظة •** يجب أن نفتق جيدا بين التقارب المنتظم على X والتقارب المنتظم على كل متراص، الذي تدعى بالتقارب المتراص. إن المثالين التاليـين يوضحان الفرق بين التقاربين في حالة $\mathbb{R}$.



التقارب المنتظم في $\mathbb{R}$



التقارب المتراص في $\mathbb{R}$

الفضاء $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ **غير فصول**

إننا نبين هذا بواسطة مثال مضاد في الفضاء $L^\infty([0,1), \mathcal{L}_{[0,1]}, \lambda)$. ليكن المجال $I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. ولتكن A مجموعة التوابع u التي تأخذ القيمة 1 أو -1 من أجل $x \ni I_n$. إن المجوعة A غير قابلة للعد.

إننا فيما يلي نعمل على $\mathbb{R}^N$ أو جزء منه مزود بعشيرة وقياس لوبيغ.

7.11 جداء لف (أو تزويج) التوابع وعملية الصقل

1.7.11 **لف التوابع** • ليكن f التابع المعرف بأن $f(x) = |x|^{-\frac{N}{2}}$ إذا $0 < |x| \leq 1$ وَ $f(x) = 0$ من أجل $x = 0$ أو $|x| > 1$. لدينا $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$، لكن $f^2 = f \cdot f$ **لا** تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$. إننا إذن نرى أنه إذا كان f وَ g تابعين من $L^1(\mathbb{R}^N)$ فلا ينتمي التابع fg بالضرورة إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$. وبعبارة أخرى، ليست العبارة $\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(y)\,dy$ منتهية بالضرورة. ولذا فقد يتعجب القاريء من كون عبارة «قربة جدا» منها وهي $(f \star g)(x)$ **جداء لف** التابعين f وَ g عند النقطة x، منتهية شبه كليا في $\mathbb{R}^N$.
وعلى وجه التحديد لدينا ما يلي: ليكن f وَ g تابعين من $L^1(\mathbb{R}^N)$. وليكن التكامل

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy, \;\; x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.11}$$

لنفرض أن f وَ g تابعان موجبن. عندمّا من أجل $x \in \mathbb{R}^N$ مثبت، يكون التابع تحت إشارة تكامل في (3.11) تابعا موجبا ولذا يكون $(f \star g)(x)$ عددا حقيقيا موجبا موتها أن $+\infty$. هل يوجد $x \in \mathbb{R}^N$ يكون من أجله $\infty > (f \star g(x)) < +\infty$ ؟ وكأسلوب للاجابة عن هذا السؤال نبين أن اللّف $f \star g$ تابع كمول الأمر الذي يؤدي الى أنه منته شبه كليا. ولكي نرى القابلية للمكاملة، نلاحظ أن:

$$||f \star g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right] dx$$

ويمكن معالجة هذه العبارة باستخدام مبرهنة فوبيني وخاصية لاتغير تكامل لوبيغ نسبة الى الانسحابات، هذا يكتب:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right] dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dx \right] dy \\ &= ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \, ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \,. \end{aligned}$$

2.7.11 **مبرهنة • ليكن f وَ g تابعين $L^1(\mathbb{R}^N)$. عندئذ،**

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,dy < \infty, \quad \textbf{شك} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.11}$$

من أجل العناصر $x \in \mathbb{R}^N$ التي تحقق (3.11)، نعرف:

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{5.11}$$

عندئذ ينتمي $f \star g$ إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$ وَ

$$||f \star g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \, ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \,.$$

الاثبات
لنلاحظ أولا أن التابع h المعرف على $\mathbb{R}^{2N}$ بأن $h(x,y) = |f(x-y)||g(y)|$ موجب وقيوس. من أجل شبه كل $y \in \mathbb{R}^N$، لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = |g(y)| \, ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

وَ

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |h(x,y)\, dx = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

تضمن عندها مبرهنة طونيلي (وهي ـ) إنتماء التابع h إلى $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. وباستخدام مبرهنة فوبوني نحصل على

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x,y)|\, dy < \infty, \quad \text{شك} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

وَ

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |h(x,y)|\, dy \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, .$$

وهذه هي نتيجة المبرهنة.

يمكن توسيع المبرهنة السابقة إلى L^p .

1.2.7.11 مبرهنة • ليكن $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ات $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 < p \leq \infty$. عندئذ،

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\, dy < \infty, \quad \text{شك} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.11}$$

ويكون التابع، المعرف عند العناصر x من $\mathbb{R}^N$ التي تحقق (6.11) بأن

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy$$

منتميا إلى $L^p(\mathbb{R}^N)$ ولدينا

$$||f \star g||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, .$$

الأثبات

النتيجة واضحة في حالة $p = \infty$. لنفتض إذن إن $1 < p < \infty$. اعتمادا على المبرهنة 2.7.11 ، من أجل شبه كل $x \in \mathbb{R}^N$ ، يكون التابع $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ كمولا على $\mathbb{R}^N$ ، أي أن:

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N).$$

وبما أن $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$ ، فباستخدام متباينة هولدر نحصل على

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)||f(x-y)|^{1/p'} \in L^1_y(\mathbb{R}^N)$$

وَ

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\, dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy\right)^{1/p} ||f||^{1/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

ولذا

$$|(f \star g)(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p)(x).\, ||f||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, .$$

وتطبيق الآن المبرهنة 2.7.11 ، فنرى أن

$$f \star g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{ات} \quad ||f \star g||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, ||f||^{p/p'}_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

أي أن

$$||f \star g||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, .$$

2.2.7.11 **قضية • ليكن** $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ **وَ** $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ · **عندئذ**

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f} \star h).$$

حيث $\check{f}(x) = f(-x)$ ، x **شك في** $\mathbb{R}^N$ ·

الإثبات

ينتمي التابع $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$ إلى $L^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$ إذ إن

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)|g(x)|\, dy \right) dx < \infty$$

وهذا وفقا لِمتباينة هولدر وللمبرهنتين 2.7.11 وَ 1.2.7.11 · والتالي، حسب مبرهنة فوبيني:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} (f \star g)(x)h(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\, dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\, dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)(\check{f} \star h)(y)\, dy.\end{aligned}$$

3.2.7.11 **سندات التوابع القيوسة •**

إن مفهوم سند أو دعامة تابع مستمر f معروف جيدا، فهو متممة أكبر مفتوح حيث f معدوم (أو، وهذا مكافيء، إنه ملاصقة، المجوعة $\{x \mid f(x) \neq 0\}$)· إنه ليس بالبسيط تعميم هذا المفهوم إلى التوابع القيوسة، لأن هذا التوابع معرفة شبه كليا فقط· التعريف السابق غير ملائم، ويمكن للقاريء أن يقتنع بهذا باعتبار الدالة المميزة $\chi_{\mathbb{Q}}$ لمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ · لدينا النتيجة:

4.2.7.11 **قضية • ليكن** Ω **جزء مفتوحا من** $\mathbb{R}^N$ **وليكن** f **تابعا حقيقيا معرفا على** Ω · **ليكن** $\{\omega_i\}_{i \in I}$ **جماعة كل المفتوحات** $\omega_i \subset \Omega$ **بحيث** $f = 0$ **شك على** ω_i **من أجل كل** $i \in I$ · **ولضع** $\omega = \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i$ ·

عندئذ $f = 0$ **شك على** ω ·

5.2.7.11 **تعريف •** ليكن Ω وَ f وَ ω مثل في القضية 4.2.7.11 · إن سند f هو تعريفا المجموعة $\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \omega$ ·

6.2.7.11 **ملاحظة •**

١ - إذا كان f_1 وَ f_2 تابعين بحيث $f_1 = f_2$ شك على Ω · عندئذ $\operatorname{supp} f_1 = \operatorname{supp} f_2$ · **نستطيع إذن الحديث عن سند تابع** f **من** L^p ـ وهذا دون ذكر المثل الذي نختاره لتمثيل صف التكافوء·

٢ - إذا كان f مستمرا فمن السهل التأكد من أن التريف السابق يكافيء التعريف المألوف للسند·

إثبات القضية 4.2.7.11 ليس من الواضح أن $f = 0$ شك في ω لأن الجماعة I غير عدودة· لكننا نسطيع رد المسألة إلى الحالة العدودة بالأسلوب التالي:

لتكن $\{K_n\}$ متتالية من الأجزاء ω المتراصة بحيث $\omega = \bigcup_n K_n$. (يمكن مثلا أخذ $K_n = \{x \in \omega \mid \mathrm{d}(x, {}^c\omega) \ge \frac{1}{n}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| \le n\}$). من أجل كل n نغطي K_n بواسطة عدد منته من المفتوحات ω_i ، ونعتبر $K_n \subset \bigcup_{i \in I_n} \omega_i$ مع I_n منته $I \subset$. ليكن $J = \bigcup_n I_n$. عندئذ J عدود ولدينا $\omega = \bigcup_{i \in J} \omega$. بما أن $f = 0$ شك في ω_i ، فنستنتج أن $f = 0$ في ω .

7.2.7.11 **قضية • ليكن** $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. **عندئذ**

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

الاثبات

ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ عنصرا مثبتا بحيث يكون التابع $y \mapsto f(x-y)g(y)$ كمولا (أنظر المبرهنتين 2.7.11 وَ 1.2.7.11). لدينا

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,dy.$$

إذا كان $x \notin \operatorname{supp} f$ فإن $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ وَ $(f \star g)(x) = 0$. إذن $(f \star g)(x) = 0$ شك على ${}^c(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$

وعلى وجه الخصوص $(f \star g)(x) = 0$ شك في داخلية ${}^c(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)$. وبالتالي $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

8.2.7.11 **ملاحظة •** من الواضح أنه إذا كان سندا f وَ g متراصين فإن $f \star g$ متراصة. لكن وصفة عامة إذا كان أحد السندين فقط متراصا فإن سند $f \star g$ غير متراص.

9.2.7.11 **قضية • ليكن** $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. **عندئذ** $f \star g \in C(\mathbb{R}^N)$.

الاثبات

لنلاحظ أولا أنه من أجل **كل** $x \in \mathbb{R}^N$ ، يكون التابع $y \mapsto f(x-y)g(y)$ كمولا على $\mathbb{R}^N$ ويتمع $(f \star g)(x)$ بمعنى من أجل **كل** $x \in \mathbb{R}^N$. لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة نحو x . لنضع

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y) \quad \text{وَ} \quad F(y) = f(x-y)g(y).$$

عندئذ $F_n(y) \to F(y)$ شك في $\mathbb{R}^N$. لنثبت الآن جزء متراصا K بحيث $(x_n - \operatorname{supp} f) \subset K$ من أجل $n \in \mathbb{N}$. لدينا $f(x_n - y) = 0$ من أجل $x \not\ni K$ ومذا

$$|F_n(y)| \le |f|_{L^1(\Omega)} \chi_K(y) g(y) \quad \text{شك في} \quad \mathbb{R}^N.$$

وبما أن الطرف الثاني للمتباينة السابقة ينتمي إلى L^1 ، فإن مبرهنة لوبيغ تستلزم أن

$$(f \star g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(y)\,dy \to \int_{\mathbb{R}^N} F(y)\,dy = (f \star g)(x).$$

10.2.7.11 **ترميزات •** ليكن k عددا طبيعيا. نرمز بـ

○ D^k إلى إحدى المشتقات الجزئية

$$D^k f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial^{\alpha_N}} \quad \wedge \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = k.$$

∘ $C^k(\Omega)$ فضاء التوابع القابلة للاشتقاق k مرة بالاستمرات في Ω ثمّ نضع

$$\begin{aligned} C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega) \quad \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega). \end{aligned}$$

لنذكر أن $C_c(\Omega)$ يشير إلى التوابع المستمرة ذات سندات متراصة في Ω .

11.2.7.11 **قضية • ليكن** $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ ، $(k \in \mathbb{N}^\star)$ **وَ** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. **عندئذ**

$$f \star g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^k(f \star g) = (D^k f) \star g.$$

وبصفة خاصة، إذا كان $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ **وَ** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ، **عندئذ** $f \star g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

الاثبات

يمكن بالتدريج رد المسألة إلى حالة $k = 1$. ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ عنصرا مثبتا. المطلوب الثبات على أن $f \star g$ قابل للمفاضلة نسبة إلى x وأن

$$\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f \star g)(x) \quad \wedge \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}، \frac{\partial f}{\partial x_2}، \ldots، \frac{\partial f}{\partial x_N}\right).$$

ليكن $h \in \mathbb{R}^N$. بما أن h مآله الصفت، نستطيع أن نفرض أن $|h| < 1$. يمكننا أن نفرض

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y)| \\ &\qquad = \left| \int_0^1 [h\nabla f(x+sh-y) - h\nabla f(x-y)]\, ds \right| \\ &\qquad \leq |h|\varepsilon(|h|), \;\; \forall y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

مع $\varepsilon(|h|) \to 0$ عندما $|h| \to 0$ ، إذ إن ∇f مستمر بانتظام في $\mathbb{R}^N$. ليكن K متراصا مثبتا وواسع بكفاية لكي يكون $x + B(O,1) - \operatorname{supp} f \subset K$. لدينا

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y) = 0, \;\; \forall y \notin K, \;\; \forall h \in B(O,1).$$

ولذا

$$\begin{aligned} |f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| \;\;&\leq\;\; |h|\varepsilon(|h|)\chi_K(y), \\ &\quad\;\; \forall y \in \mathbb{R}^N, \;\; \forall h \in B(O,1). \end{aligned}$$

والتالي

$$|(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x) - h(\nabla f \star g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|) \int_K |g(y)|\, dy.$$

ينتج مما سبق أن $f \star g$ قابلا للمفاضلة نسبة إلى x وأن

$$\nabla(f \star g)(x) = (\nabla f \star g)(x).$$

3.7.11 صقل التوابع •

1.3.7.11 **تعريف • نسمي متتالية صاقلة** متتالية تابعية $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ **بحيث**

$$\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \quad \text{على} \quad \mathbb{R}^N.$$

لنأكد وجود متتالية توابع صقيلة· ولرؤية هذا نثبت تابعا ρ بحيث

$$\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \rho \subset B(0,1), \quad \rho \geq 0 \quad \text{على} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{وَ} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho > 0$$

ثمّ نأخذ المتتالية $\{\rho_n\}$ المعطاة بأن

$$\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx) \quad \text{مع} \quad C = \left\{\int_{\mathbb{R}^N} \rho\right\}^{-1}.$$

كتابع ρ يمكن اختيار التابع

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} & \text{من أجل} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{من أجل} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

في كل ما يلي، نخصص الترميز $\{\rho_n\}$ إلى متتالية صاقلة·

2.3.7.11 **قضية • ليكن** $f \in C(\mathbb{R}^N)$ · **عندئذ** $\rho_n \star f \to f$ **بانتظام على كل متراص من** $\mathbb{R}^N$ ·

الاثبات

ليكن K جزء متراصا مثبتا من $\mathbb{R}^N$ · من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ ، يتعلق بِـ K وبحيث

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in K, \ \forall y \in B(0,\delta).$$

إذن

$$\begin{aligned} (\rho_n \star f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\, dy \\ &= \int_{B(O,1/n)} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\, dy \end{aligned}$$

وعليه، من أجل $n \geq \frac{1}{\delta}$ وَ $x \in K$ ، لدينا

$$|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = \varepsilon.$$

3.3.7.11 **مبرهنة • ليكن** $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leq p \leq \infty$ · **عندئذ**

$$\rho_n \star f \to f \quad \text{في} \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

الاثبات

ميكن $\varepsilon > 0$ · تضمن من جهة مبرهنة الكثافة 4.4.9.11 **وجود** تابع $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ **بحيث** $||f - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$ · ومن جهة أخرى، من المعروف وفقا للقضية 2.3.7.11 ، أن $\rho_n \star f_1 \to f_1$ بالنتظام على كل مرتاص· وكذلك، وفقا للقضية 7.2.7.11 ، لدينا

$$\text{supp}\,(\rho_n \star f_1) \subset B\Big(0, \frac{1}{n}\Big) + \text{supp } f_1 \subset K \quad \text{مع} \quad K \quad \text{متراص مثبت}.$$

وبالتالية

$$||\rho_n \star f_1 - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

وأخيرة، بما أن

$$\rho_n \star f - f = [\rho_n \star (f - f_1)] + [\rho_n \star f_1 - f_1] + [f_1 - f],$$

فينتج، اعتمادا على التقدير المبرهنة 2.7.11 ،

$$||\rho_n \star f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\,||f - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + ||\rho_n \star f_1 - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,.$$

لدينا إذن

$$\limsup_{n\to\infty} ||\rho_n \star f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon,\ \ \forall \varepsilon > 0$$

ولذا

$$\lim_{n\to\infty} ||\rho_n \star f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

4.3.7.11 **لازمة • ليكن Ω جزء مفتوحا كيفيا من $\mathbb{R}^N$. عندئذ، $\mathcal{D}(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ من أجل** $1 \leq p < \infty$.

الاثبات

وهو يستخدم تقنية الصقل بواسطة اللّف التي أدخلها لوري Jean Leray[9] وفريديركس Friedrichs[10] .
ليكن $f \in L^p(\Omega)$ وَ $0 < \varepsilon$ وَ $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$||f - f_1||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

ولنعربر التابع $\overline{f}_1$ المعرف بأن

$$\overline{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{إذا كان} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا كان} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

ينتمي التابع $\overline{f}_1$ إلى $L^p(\mathbb{R}^N)$ ولدينا، وفقا للمبرهنة 3.3.7.11 :

$$\left|\left|\rho_n \star \overline{f}_1 - \overline{f}_1\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

لكن،

$$\operatorname{supp}(\rho_n \star \overline{f}_1) \subset B\Big(0, \frac{1}{n}\Big) + \operatorname{supp} f_1 \subset \Omega \quad \text{من أجل } n \text{ كبير بكفاية.}$$

لنضع الآن $u_n = (\rho_n \star \overline{f}_1)_{|\Omega}$. عندئذ، من أجل n كبير بكفاية، $u_n \in C_c(\Omega)$ ثمّ إن $||u_n - f_1||_{L^p(\Omega)} \to 0$. إذن، من أجل n كبير بكفاية:

$$||u_n - f||_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon.$$

[9] رياضياتي فرنسي. (1906 – 1998) كان وستاذا في كوليج فرنسا (Collège de Fance) . له أعمال في ميكانيكا السوايل وفي المعادلات التابعية والمعادلات التكاملة والمعادلات التفاضلية الجزئية وفي التوبولوجية الجبرية. دخل أكديمية العلوم سنة 1953 .

[10] Kurt Otto رياضياتي ألماني. له أعمال في ميكانيكا السوائل وفي التحلي التابعي وفي العادلات التفاضلية الجزئية.

8.11 معاييـر التراص في L^p

في الكثير من مسائل التحليل التابعي النظرية أو التطبيقية، إنه من المهم بمكان معرفة متى تكون جماعة من التابع الفضاء $L^p(\Omega)$ شبه متراصة في هذا الفضاء نسبة إلى التوبولوجيا القوية. إن القاريء يعرف بدون شك مبرهنة أسكولي Ascoli الذي يشكل معيارا للتراص في $C(K)$ حيث K فضاء متري متراص. وبما أن هذه المبرهنة هي أساس لمعايير التراص المعروفة في L^p، لنبدأ بذكيره:

5.0.8.11 مبرهنة • ليكن K فضاء متراصا وَ $\mathcal{K}$ جزء محدودا من $C(K)$. لنفرض أن $\mathcal{K}$ متساوي الاستمرار بانتظام، أي

$$\text{مهما كان } \varepsilon > 0 \text{ يوجد } \delta > 0 \text{ بحيث} \quad \mathrm{d}\left(x_1, x_2\right) \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon, \forall f \in \mathcal{K}. \tag{7.11}$$

عندئذ، $\mathcal{K}$ شبه متراص في $C(K)$.

الاثبات

يمكن للقاريء إيجاد إثبات مبرهنة أسكولي مثلا في ديادوني Dieudonné [?] أو يوشيدا Yosida [?] .

6.0.8.11 ترميزات •

١ - نضع $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ وهو انسحاب f وفق الشعاع h .

٢ - ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$. نقول عن جزء مفتوح ω إنه **محتوى بقوة** في Ω ونكتب $\omega \subset\subset \Omega$ إذا كان $\overline{\omega} \subset \Omega$ وإذا كانت $\overline{\omega}$ متراص.

لنعط نتيجة تعود إلى فريشي Fréchet[11] وكولموڤوروف Kolmogorov[12]

7.0.8.11 مبرهنة (فريشي وكولموڤوروف) • ليكن Ω جزء مفتوحا من $\mathbb{R}^N$ وَ $\omega \subset\subset \Omega$. وليكن $\mathbf{F}$ جزء محدودا من $L^p(\Omega)$ مع $1 \leq p < \infty$. لنفرض أن $\mathbf{F}$ كمولة بالتساوي، أي:

$$\text{مهما كان } \varepsilon > 0 \text{ يوجد } \delta > 0 \text{ ، } \delta < \mathrm{d}\left(\omega, {}^c\Omega\right) \text{ بحيث} \quad \forall h \in \mathbb{R}^N,\ |h| \leq \delta \Rightarrow ||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon, \forall f \in \mathbf{F}. \tag{8.11}$$

عندئذ، $\mathbf{F}_{|_\omega}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$.

الاثبات

يمكننا دائما أن نفرض أن Ω محدودا. من أجل $f \in \mathbf{F}$ ، نضع

$$\overline{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{إذا كان } x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا كان } x \in (\mathbb{R}^N \setminus \Omega). \end{array} \right.$$

[11] René Maurice رياضياتي فرنسي 1878 – 1973 . صاحب تعريف الفضاءات المترية (1906) والتريف الحالي للتفاضل. له أعمال في التحليل التابعي وفي نظرية الاحتمالات. دخل عكديمية العلوم الفرنسية سنة 1956 .

[12] André Nicolaïévitch رياضياتي روسي (1903–) . واضع النظرية التبديهية للاحتمالات و ات دس پرئسس ماركوف Markov . وبالتعاون مع خنشين A. Khintchine ، وضع النظرية الطيفية للمعاملات processus المستقرة.

وَ $\overline{\mathbf{F}} = \{\overline{f} \mid f \in \mathbf{F}\}$. إنه واضح أن المجموعة $\overline{\mathbf{F}}$ محدودة في $L^p(\mathbb{R}^N)$ وفي $L^1(\mathbb{R}^N)$. لنتصرف في ثلاث خطوات:

١ - لدينا

$$||\rho_n \star \overline{f} - \overline{f}||_{L^p(\omega)} \le \varepsilon,\ \forall \overline{f} \in \mathbf{F},\ \forall n \ge \frac{1}{\delta}.$$

وفي الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}|(\rho_n \star \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(y)|\rho_n(y)\,dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(y)|^p \rho_n(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

وبالتالي

$$|(\rho_n \star \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \le \int_{B(0,1/n)} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(y)|^p \rho_n(y)\,dy.$$

إذن، من أجل $n \ge \frac{1}{\delta}$ ، وفقا لِـ (8.11) ، لدينا

$$\int_\omega |(\rho_n \star \overline{)} f(x) - \overline{f}(x)|^p\,dx \le \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)\,dy \int_\omega |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(y)|^p \le \varepsilon^p.$$

٢ - الجماعة $\mathbf{H} = (\rho_n \star \overline{\mathbf{F}})_{|\overline{\omega}}$ تحقق، من أجل كل n ، فرضيات مبرهنة أسكولي. وفي الحقيقة، لدينا أولا

$$|\rho_n \star \overline{\mathbf{F}} \overline{f}|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le |\rho_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |\overline{f}|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le C_n,\ \forall \overline{f} \in \overline{\mathbf{F}}.$$

ثمّ، من أجل كل x_1 ، x_2 من $\mathbb{R}^N$ وكل $\overline{f} \in \mathbf{F}$ ، لدينا

$$|(\rho_n \star \overline{f})(x_1) - (\rho_n \star \overline{f})(x_2) \le |x_1 - x_2|\,||\rho_n||_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)}\,||\overline{f}||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le C_n|x_1 - x_2|.$$

حيث $\mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^N)$ هو فضاء التوابع اللّيبشترية على $\mathbb{R}^N$ مزود بالنظيم

$$||g||_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \ne y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|}.$$

ينتج من هذا أن $\mathbf{H}$ شبه متراص في $C(\overline{\omega})$ ولسبب أقوى في $L^p(\omega)$.

٣ - نهاية البرهان: ليكن $\varepsilon > 0$. ولنثبت $n \ge \frac{1}{\delta}$ بحيث

$$||(\rho_n \star \overline{f}) - f||_{L^p(\omega)} \le \varepsilon,\ \forall f \in \mathbf{F}.$$

وبما أن $\mathbf{H}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$ ، فنستطيع تغطية $\mathbf{H}$ بواسطة عدد منته من الكرات (في $L^p(\omega)$) أنصاف أقطاره ε . عندئذ تغطي عندئذ الكرات الموافقة له التي تساوي أنصاف أقطاريها 2ε المجموعة $\mathbf{F}_{|\omega}$. هذا يبين أن $\mathbf{F}_{|\omega}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$.

8.0.8.11 **لازمة • ليكن Ω جزء مفتوح من $\mathbb{R}^N$ وَ $\mathbf{F}$ جزء محدود من $L^p(\Omega)$ مع** $1 \le p < \infty$. **لنفرض أن**

(9.11) **مهما كان** $\varepsilon > 0$ ، **مهما كان** $\omega \subset\subset \Omega$ **يوجد** $\delta > 0$ ، $\delta < \mathrm{d}\,(\omega, {}^c\Omega)$ **بحيث**
$\forall h \in \mathbb{R}^N,\ |h| \le \delta \Rightarrow ||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} \le \varepsilon, \forall f \in \mathbf{F},$

وَ

(10.11) **مهما كان** $\varepsilon > 0$ **يوجد** $\omega \subset\subset \Omega$ **بحيث** $\varepsilon \ge ||f||_{L^p(\Omega\setminus\omega)}$ **مهما كان** $f \in \mathbf{F}$.

عندئذ، $\mathbf{F}$ شبه متراص في $L^p(\Omega)$.

الاثبات

ليكن $0 < \varepsilon > 0$. نثبت $\omega \subset\subset \Omega$ وبحيث $\varepsilon \ge ||f||_{L^p(\Omega\setminus\omega)}$ ، مهما كان $f \in \mathbf{F} \ni$. اعتمادا على المبرهنة 7.0.8.11 ، نعرف أن $\mathbf{F}_{|\omega}$ متراص في $L^p(\omega)$. نستطيع عندئذ تغطيته بواسطة عدد منته من الكرات من $L^p(\omega)$ ، وهي:

$$\mathbf{F}_{|\omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon) \quad \text{مع} \quad g_i \in L^p(\omega).$$

ولنضع

$$\widetilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{إذا كان} \quad x \in \omega \\ 0 & \text{إذا كان} \quad x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

يمكننا أن نتأكد بسهولة من أن $\mathbf{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\widetilde{g}_i, 2\varepsilon)$ ؛ الكرورات هي في $L^p(\Omega)$.

9.0.8.11 **ملاحظة** • إن عكس اللّازمة 8.0.8.11 السابقة صادق.

10.0.8.11 **ملاحظة** • ليكن $\mathbf{F}$ جزء محدودا من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \le p < \infty$ ويحقق

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{بحيث} \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \text{مع} \quad |h| \le \delta, ||f||_{L^p(\Omega\setminus\omega)}, \ \forall f \in \mathbf{F}.$$

لا نستطيع بصفة عامة أن نستنتج أن $\mathbf{F}$ شبه متراص في $L^p(\mathbb{R}^N)$. إلا أننا نستطيع أن نقول إن $\mathbf{F}_{|\omega}$ شبه متراص في $L^p(\omega)$ ، من أجل كل مفتوح ومحدود من $\mathbb{R}^N$. حاول إنشاء مثال! ولإنهاء هذا المقطع نقدم تطبيقا بسيطا لكنه مفيد للمبرهنة 7.0.8.11 .

11.0.8.11 **لازمة** • **ليكن** $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **تابعا مثبتا وَ**

$$\mathbf{F} = G \star \mathbf{B}$$

حيث $\mathbf{B}$ يشير إلى جزء محدود من $L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \le p < \infty$. **عندئذ، من أجل كل مفتوح محدود من** $\mathbb{R}^N$ ، $\mathbf{F}_{|\omega}$ **شبه متراص في** $L^p(\omega)$.

الاثبات

إنه واضح من جهة أن $\mathbf{F}$ محدود في $L^p(\mathbb{R}^N)$. ومن جهة أخرى، إذا كان $f = G \star u$ مع $u \in \mathbf{B}$ ، لدينا

$$||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = ||(\tau_h G - G) \star u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le ||\tau_h G - G||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

إننا سننهي البرهان اعرمادا على الـ

12.0.8.11 **توطئة** • **ليكن** $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \le q < \infty$. **عندئذ**

$$\lim_{h \to 0} ||\tau_h G - G||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

الاثبات
ليكن $\varepsilon > 0$ معطى وليكن $G_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ بحيث $||G - G_1||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. لدينا من جهة

$$\begin{aligned} ||\tau_h G - G||_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq ||\tau_h G - \tau_h G_1||_{L^q(\mathbb{R}^N)} + ||\tau_h G - G_1||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + ||G_1 - G||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq 2\varepsilon + ||\tau_h G_1 - G_1||_{L^q(\mathbb{R}^N)} . \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى فواضح أن $\lim\limits_{h\to 0} ||\tau_h G_1 - G_1||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0$ وعليه

$$\limsup_{h\to 0} ||\tau_h G - G||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon.$$

9.11 الانعكاسية والقابلية للفصل والثنوية في الفضاءات L^p

سوف نميز ثلاث حالات:

.1 $1 < p < \infty$ ، .2 $p = 1$ ، .3 $p = \infty$.

إلا أننا نبدأ بتقديم (تذكير) ببعض المفاهيم والنتائج تمهيدية. ونكتفي بعرضها بدون براهين وعلى القارىء المهتم أن يرجع إلى كولموغوروف ـ فومين [٤] أو بريزيس [?] .

13.0.9.11 **الفضاء الثوي لفضاء بناخي •** ليكن E فضاء باناخيا حقيقيا. نشير بِـ E' إلى فضاء كل الأشكال الخطية المستمرة على E . عناصر E' هي إذن تطبيقات خطية مستمرة من E في حقل الأساس $\mathbb{R}$ ولذا من أجل كل عنصر $f \in E'$ يوجد ثابت $c > 0$ بحيث $|f(x)| \le c|x|_E$ ، مهما كان $x \in E$. من أجل f من E' وَ $x \in E$ لنكتب $\langle f, x\rangle \doteq f(x)$ ونسمي $\langle \cdot, \cdot\rangle$ بمخلب الثنوية (بين E' وَ E). يزود E' بالنظيم الثنوي وهو المعرف بأن

$$|f|_{E'} = \sup_{x \in B_E} |f(x)| = \sup_{x \in B_E} f(x), f \in E'.$$

أشرنا هنا بِـ B_E إلى كرة الوحدة المغلقة في E ، أي أن $B_E = \{x \in E \mid |x|_E \le 1\}$. من المعروف أن الفضاء الشعاعي E' مزود بالنظيم الثنوي فضاء باناخي.

14.0.9.11 **التقارب الضعيف في فضاء باناخي •** ليكن E فضاء باناخيا. نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنها متقاربة بضعف في E نحو عنصر x إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\langle f, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$ ، مهما كان $f \in E'$.

15.0.9.11 **الفضاءات الانعكاسية •** ليكن E فضاء باناخيا وليكن E' فضاءه الثنوي وَ E'' فضاءه الثنوي الثاني، أي ثنوي الفضاء الثنوي E' ، مزود بالنظيم $|\xi|_{E''} = \sup_{f \in B_{E'}} |\langle \xi, f\rangle|$ ، حيث، تبعا لترميز سابق $B_{E'}$ هي كرة الوحدة المغلقة في E' وَ $\langle \xi, f\rangle \doteq \xi(f)$. يدعى $\langle \cdot, \cdot\rangle$ بمخلب الثنوية بين الفضائين E'' وَ E' .

يمكن تريف **حقن قانوني** لِـ E في E'' على النحو التالي: ليكن $x \in E$ عنصرا مثبتا. يشكل الطبيق $x \mapsto \langle f, x\rangle$ شكلا خطيا مستمرا على E' ، إنه إذن عنصر من E'' ، نشير إليه بِـ Jx . لدينا إذن:

$$\langle Jx, f\rangle_{E'', E'} = \langle f, x\rangle_{E', E}, \ \forall x \in E, \ \forall f \in E'.$$

من الواضح أن J تطبيقا خطيا وهو متقايس، بمعنى أن $|Jx|_{E''} = |x|_E$ ، مهما كان $x \in E$.

تعيف • نقول عن فضاء باناخي إنه **انعكاسي** إذا كان الحقن J غامر، أي $J(E) = E''$.

تتمتع الفضاءات الانعكاسية بخواص ثمينة نذكر منها:

16.0.9.11 **مبرهنة • ليكن E فضاء باناخيا انعكاسيا ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية محدودة في E . يمكن عندئذ استخراج منها متتالية $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة بضعف في E نحو شعاع x .**

هدفنا هو، كما أسلفنا، دراسة ما إذا كانت فضاءات لوبيغ انعكاسية. نحو لتناول هذه الخاصية نحتاج إلى المفوم الهندسي التالي.

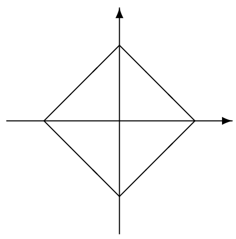
1.9.11 الفضاءات المحدبة بانتظام •

1.1.9.11 **تعريف** • نقول عن فضاء لباناخ E إنه **محدب بانتظام** إذا تحقق ما يلي:
مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث مهما كان x وَ y من E مع $1 \geq |x|_E$ وَ $1 \geq |y|$ فإنه ينتج من كون $\varepsilon > |x-y|_E$ أن $1-\delta > |\frac{x+y}{2}|_E$.

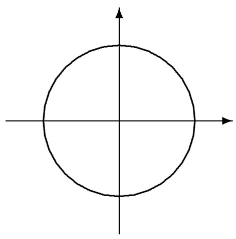
تمرين • برهن على أن الفضاءات $\ell^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ محدبة بانتظام.

2.1.9.11 **ملاحظة** • يجب الانتباه إلى أن التعريف السابق ذو طبيعة هندسية وليست توبولوجية لأنه يتناول خاصية لكرة الوحدة في E التي ينبغي أن تكون «جيدة الاستدارة» وهي الخاصية التي يمكن أن تُفقد عند أخذ نظيم مكافئ. المثال التالي يوضح هذه النقطة.

3.1.9.11 **مثال** • ليكن $E = \mathbb{R}^2$. هذا الفضاء محدب بانتظام نسبة إلى النظيم اقليدس $|x|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ لكنه ليس كذلك نسبة إلى النظيم $|x|_1 = |x_1| + |x_2|$. وإذ تأملت صورتي كرتي الوحدة نسبة إلى هذين النظيمين فترى هذا جليا.



كرة الوحدة في $\mathbb{R}^2$ نسبة النظيم $|\cdot|_1$



كرة الوحدة في $\mathbb{R}^2$ نسبة إلى النظيم $|\cdot|_2$

فيما يلي نقل بدون اثبات النتيجة التالية:

2.9.11 **مبرهنة** • **كل فضاء باناخي محدب بانتظام انعكاسي.**

1.2.9.11 **تمرين** • ليكن E فضاء باناخيا محدبا بانتظام. ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عناصرها من E متقاربة بضعف نحو x في E ولنفرض أن

$$\limsup_n |x_n|_E \leq |x|_E.$$

أثبث أن هذه المتتالية تتقارب بقوة في E نحو x :

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_E = 0.$$

3.9.11 **دراسة** L^p **في حالة** $1 < p < \infty$ • تعتبر هذه الحالة أحسن الحالات من حيث عدد الخواص التي تتمتع بها فضاءات لوبيغ L^p : إنها انعكاسية وقابلة للفصل وثنوي L^p هو $L^{p'}$ ، حيث p' هو مرافق هولدر لِـ p .

4.9.11 **مبرهنة** • **الفضاء** $L^p(\Omega)$ **انعكاسي من أجل** $1 < p < \infty$.

لكي نثبت هذه المبرهنة، يكفي - وفقا للمبرهنة 2.9.11 - البرهان على أنه من أجل $1 < p < \infty$ ، يكون فضاء باناخ $L^p(\Omega)$ محدبا بانتظام.

1.4.9.11 **مبرهنة** • **الفضاء** $L^p(\Omega)$ **محدب بانتظام من أجل** $1 < p < \infty$.

اثبات المبرة 1.4.9.11
إنه يعتمد على متباينتي كلاركسون Clarkson :

متباينة كلاركسون الأولى ـ من أجل $2 \leq p < \infty$ ، لدينا:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left\{||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)}\right\}, \quad \forall f,g \in L^p(\Omega). \tag{11.11}$$

متباينة كلاركسون الثانية ـ من أجل $1 < p \leq 2$ ، لدينا:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left\{||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||g||^p_{L^p(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall f,g \in L^p(\Omega). \tag{12.11}$$

لإثبات متباينة كلاركسن الأولى، نستخدم المتباينة، المحققة من أجل $p \in [2,\infty[$:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \left[\frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p\right]^{\frac{1}{p-1}}, \ \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{13.11}$$

ولإثبات متباينة كلاركسن الثانية، نستخدم المتباينة، المحققة من أجل $1 < p \leq 2$:

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{a-b}{2}\right|^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p\right]^{\frac{1}{p-1}}, \ \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{14.11}$$

من أجل إثباتي المتباينتين 13.11 وَ 14.11 يمكن العودة إلى التمارين.

اثبات المبرهنة 4.9.11 لفرض أولا أن $p \in [2,\infty[$. وليكن $\varepsilon > 0$ مثبتا. من أجل f وَ g من $L^p(\Omega)$ تابعين بحيث

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq 1, \ ||g||_{L^p(\Omega)} \leq 1, \quad \text{وَ} \quad ||f-g||_{L^p(\Omega)} > \varepsilon,$$

تمكن المتباينة (13.11) من الحصول على:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(\Omega)} < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

ومنه:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(\Omega)} < 1-\delta \quad \text{وَ} \quad \delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} > 0,$$

الأمر الذي يثبت أن $L^p(\Omega)$ محدب بانتظام من أجل $2 \leq p < \infty$.

لنفرض الآن أن $1 < p < 2$. وليكن $\varepsilon > 0$ مثبت. من أجل f وَ g من $L^p(\Omega)$ بحيث:

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq 1, \ ||g||_{L^p(\Omega)} \leq 1, \quad \text{مع} \quad ||f-g||_{L^p(\Omega)} > \varepsilon,$$

تمكن المتباينة (14.11) من الحصول على

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}.$$

ومنه:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(\Omega)} < 1-\delta \quad \text{مع} \quad \delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} > 0,$$

الأمر الذي يثبت أن $L^p(\Omega)$ محدب بانتظام من أجل $1 < p < 2$.

هذا ينهي البرهان على أن $L^p(\Omega)$ محدب بانتظام من أجل $1 < p < \infty$. ينتج عندئذ من المبرهنة 2.9.11 أن الفضاء $L^p(\Omega)$ انعكاسي من أجل $1 < p < \infty$.

2.4.9.11 **مبرهنة (التمثيل لريس) • ليكن** $1 < p < \infty$ **وَ** $\varphi \in (L^p(\Omega)'$. **يوجد عندئذ تابع** $u \in L^{p'}(\Omega)$ **وحيد بحيث**

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

ثمّ إن

$$||u||_{L^{p'}(\Omega)} = ||\varphi||_{(L^p\Omega)'}.$$

الاثبات

ليكن المؤثر $\left(L^p(\Omega)\right)' \ni Tu \mapsfrom u \in L^{p'}(\Omega)$ المعرف بأن

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

3.4.9.11 **ملاحظة •** إن المبرهنة 2.4.9.11 مهم جداإنها تقول إن كل شكال خطي مستمر على $L^p(\Omega)$ مع $1 < p < \infty$ يمثل وبكيفية وحيدة بواسطة تابع من $L^{p'}(\Omega)$. ثمّ إن المؤثر $u \mapsto \varphi$ تشاكل متقايس، الأمر الذي يسمح بمطابقة ثنوي $L^p(\Omega)$ بالفضاء $L^{p'}(\Omega)$. **إننا في كل مايلي، نأخذ بهذه التطابق:**

$$\left(L^p(\Omega)\right)' = L^{p'}(\Omega).$$

4.4.9.11 **مبرهنة (الكثافة) • من أجل** $1 \le p < \infty$ **، الفضاء** $C_c(\Omega)$ **كثيف في** $L^p(\Omega)$.

لإثبات هذه المبرهنة نقدم تعريفا وتوطئة.

5.4.9.11 **تعريف •** ليكن $1 \le p < \infty$. نشير بِـ $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ إلى فضاء التوابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$ بحيث $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ من أجل كل متراص $K \subset \Omega$ ، χ_K هي الدالة المميزة لِـ K .

6.4.9.11 **توطئة • ليكن** $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ **بحيث**

$$\int_\Omega fu = 0, \ \forall u \in C_c(\Omega). \tag{15.11}$$

عندئذ $f = 0$ **شك في** Ω .

اثبات التوطئة 6.4.9.11 لنقسم عملنا إلى مرحلتين:

ا) لنفرض أن $L^1(\Omega)$ مع $|\Omega| < \infty$.

بما أن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^1(\Omega)$ ، من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، يوجد $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث $||f - f_1||_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon$. ينتج من (15.11) أن

$$\left| \int_\Omega f_1 u \right| \le \varepsilon \, ||u||_{L^\infty(\Omega)}, \ \forall u \in C_c(\Omega). \tag{16.11}$$

لنضع

$$K_1 = \{x \in \Omega \mid f_1(x) \le \varepsilon\} \quad \text{وَ} \quad K_2 = \{x \in \Omega \mid f_1(x) \le -\varepsilon\}.$$

بما أن K_1 وَ K_2 جزئان متراصان وغير متقاطعين، فنستطيع ـ وفقا لمبرهنة تياتز وأوريشون ـ نشاء تابع $u_0 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$|u_0(x)| \le 1, \ \forall \ x \in \Omega \quad \wedge \quad u_0(x) = \begin{cases} +1, & x \in K_1 \\ -1, & x \in K_2 \end{cases}.$$

ليكن $K = K_1 \cup K_2$. لدينا

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega\setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

ولذا، وفقا لِـ (16.11) :

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \le \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1 u_0| \le \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1|.$$

إذن

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| \le + \int_{\Omega\setminus K} |f_1| \le \varepsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |f_1| \le \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$$

إذ إن $f_1| \le \varepsilon$ على $\Omega \setminus K$. ومنه

$$||f||_{L^1(\Omega)} \le ||f - f_1||_{L^1(\Omega)} + ||f_1||_{L^1(\Omega)} \le 2\varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|.$$

ولكون هذه المتباينة محققة مهما كان $\varepsilon > 0$ ، فنستنتج أن $f = 0$ شك في Ω .

ب) في الحالة العامة، نكتب $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ مع Ω_n مفتوح وَ $\overline{\Omega}_n$ متراص وَ $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$. يمكن أخذ

$$\Omega_n = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, {}^c\Omega) > \frac{1}{n}\ quad \wedge \quad |x| < n\}.$$

وبتطبيق ما سبق على Ω_n وَ $f_{|\Omega_n}$ ، فنرى أن $f = 0$ شك في Ω_n . هذا يستلزم أن $f = 0$ شك في Ω .

اثبات المبرهنة 4.4.9.11 الحالة $p = 1$ معروفة. لنفرض إذن $1 < p < \infty$. للبرهان على أن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ ، يكفي التأكد من أنه إذا كان

$h \in L^{p'}(\Omega)$ يحقق $\int_\Omega hu = 0$ مهما كان $u \in C_c(\Omega)$ فإن $h = 0$.

لكن $h \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ إذ إن

$$\int_\Omega |h\chi_K| \le ||h||_{L^{p'}(\Omega)} |K|^{1/p} < \infty$$

ونستطيع عندها تطبيق التوطئة 6.4.9.11 للحصول على $h = 0$ شك في Ω .

7.4.9.11 **مبرهنة • من أجل** $1 \le p < \infty$ **، الفضاء** $L^p(\Omega)$ **قابل للفصل.**

برهان لتكن $\{P_i\}_{i\in I}$ جماعة البلاطات العدودة P من الشكل

$$P = \prod_{k=1}^N]a_k, b_k[, \quad a_k,\ b_k \in \mathbb{Q}, \quad P \subset \Omega.$$

لنشري بِـ E إلى الفضاء الشعاعي على $\mathbb{R}$ المولد بواسطة التوابع χ_{P_i} (أي العبارات الخطية المتهية ذات معاملات ناطقة في التوابع χ_{P_i}). إذن E عدود. لنثبت أن E كثيف في $L^p(\Omega)$. ليكن $f \in L^p(\Omega)$ وليكن $\varepsilon > 0$ مثلبتا. يوجد، وفقا للمبرهنة 4.4.9.11 ، تابع $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث $||f - f_1||_{L^p(\Omega)}$. ليكن Ω' جزء مفتوحا ومحدودا بحيث $\text{supp}\ f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. بما أن $f_1 \in C_c(\Omega')$ ، فنستطيع بسهولة إنشاء تابع $f_2 \in E$ بحيث

$$\text{supp}\ f_1 \subset \Omega', \quad |f_2(x) - f_1(x)| \le \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}, \quad \text{شك} \quad \Omega'.$$

[يمكن البدء بتغطية المتراص $\text{supp}\ f_1$ وباسطة عدد منته من البلاطات P_i حيث يكون تذبذب f_1 أقل من $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$]. ينتج من هذا أن $||f_2 - f_1||_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$ ولذا $||f_2 - f||_{L^p(\Omega)} \le 2\varepsilon$.

8.4.9.11 **ملاحظة •** لاثبات المبرهنة 7.4.9.11 ، كان بالامكان كذلك استخدام كون الفضاء $C(K)$ قابل للفصل من أكل كل متراص K .

5.9.11 دراسة الفضاء $L^1(\Omega)$ •

1.5.9.11 مبرهنة • ليكن $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ **· عندئذ، يوجد** $u \in L^\infty(\Omega)$ **وحيد بحيث**

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^1(\Omega).$$

ثمّ إنه لدينا:

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}\,.$$

الاثبات

لنبدأ باثبات وجود التابع u · لنثبّت $w \in L^2(\Omega)$ بحيث، من أجل كل متراص $k \subset \Omega$ ، مدينا $w \ge \varepsilon_K > 0$ شك على K[13] · إن التطبيق $L^2(\Omega) \ni f \mapsto \langle \varphi, wf\rangle \in \mathbb{R}$ شكل خطي مستمر على $L^2(\Omega)$ · ينتج عندئذ من تطبيق المبرهنة 2.4.9.11 (من أجل $p=2$)، وجود تابع $v \in L^2(\Omega)$ بحيث

$$\langle \varphi, wf\rangle = \int_\Omega vf, \ \forall \in L^2(\Omega). \tag{17.11}$$

لنضع $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$ · هذا ممكن لكون $w(x) > 0$ من أجل كل $x \in \Omega$ · ينتمي التابع u في $L^\infty(\Omega)$ ولدينا $||u||_{L^\infty(\Omega)} \le ||\varphi||_{L^1(\Omega)}$ · وفي الحقيقة، لدينا وفقا لِـ (17.11) :

$$\left|\int_\Omega vf\right| \le ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}\,||wf||_{L^1(\Omega)}\,, \ \forall f \in L^2(\Omega). \tag{18.11}$$

لنخذ $C > ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}$ ولنثبت أن المجموعة

$$A = \{x \in \Omega \mid |u(x)| > C\}$$

مهملة ـ فينتج من هذا أن u ينتمي إلى $L^\infty(\Omega)$ وأن $||u||_{L^\infty(\Omega)} \le ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}$ · لنستدل بالخلف· لو كان A غير مهمل لوجدت مجموعة $\widetilde{A} \subset A$ قيوسة وبحيث $0 < |\widetilde{A}| < \infty$ · وإذا أخذنا في (18.11) التابع

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x \in \widetilde{A} \quad \wedge \quad u(x) > 0 \\ -1, & x \in \widetilde{A} \quad \wedge \quad u(x) < 0 \\ \ \ 0, & x \in \Omega \setminus \widetilde{A} \end{cases}$$

فنجد

$$\int_{\widetilde{A}} |u|w \le ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'} \int_{\widetilde{A}} w$$

وبالتالي

$$C\int_{\widetilde{A}} w \le ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'} \int_{\widetilde{A}} w$$

وهذا محال لكون $\int_{\widetilde{A}} w > 0$ ·

الخلاصة: ننشىء تابع $u \in L^\infty(\Omega)$ مع

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \le ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}$$

بحيث

$$\langle \varphi, wf\rangle = \int_\Omega uwf, \ \forall f \in L^2(\Omega). \tag{19.11}$$

ينتج من هذا أن

---

[13] من الواضح أن مثل هذا التابع موجود: نستطيع، على سبيل المثال، أخذ، $w(x) = \alpha_n$ من أجل $x \in \Omega$ وَ $n \le |x| < n+1$ حيث تؤخذ الثوابت α_n لكي ينتمي w إلى $L^2(\Omega)$ ·

$$\langle \varphi, g\rangle = \int_\Omega ug, \ \ \forall g \in C_c(\Omega). \tag{20.11}$$

وفي الحقيقة، إذا كان $g \in C_c(\Omega)$ يكون التابع $f = \frac{g}{w}$ منتميا إلى $L^2(\Omega)$ (إذ إن $0 < \varepsilon \leq w$ على $\text{supp}\ g$) ويمكن أخذ f في (19.11). بما أن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^1(\Omega)$ فينتج من (20.11) أن

$$\langle \varphi, g\rangle = \int_\Omega ug, \ \ \forall g \in L^1(\Omega).$$

وأخيرا، لدينا

$$|\langle \varphi, g\rangle| \leq \int_\Omega |ug| \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)}\, ||g||_{L^1(\Omega)}\,, \ \ \forall g \in L^1(\Omega)$$

وبالتالي

$$||\varphi||_{(L^1(\Omega))'} \leq ||g||_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

إذن

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ||\varphi||_{(L^1(\Omega))'}\,.$$

ووحدانية u ناتجة من التوطئة 6.4.9.11 .

تمارين حول فضاءات لوبيغ

49.11 ليكن $\mathbb{R}$ مزود بعشيرته البوريلية وقياس لوبيغ λ . بين أن التوابع التالية تنتمي إلى $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\lambda)$ مهما كان $1 \leq p$ حقيقي:

١ - $f(x) = x(1-x)\chi_I(x)$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، χ_I هي الدالة المميزة للمجال $I = [0,1]$.

٢ - $g(x) = e^{-x^2}$ ، $x \in \mathbb{R}$.

٣ - $h(x) = x^n e^{-x^2}$ ، $x \in \mathbb{R}$ وَ n عدد طبيعي غير معدوم.

50.11 ليكن الفضاء المقيس $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ ، λ هو قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$ وليكن $\alpha \in]1,+\infty[$ عددا حقيقيا. نعتبر على $\mathbb{R}$ التوابع التالية:

١ - $f_\alpha(x) \doteq x^{-1/\alpha}\chi_{]0,1[}(x)$.

٢ - $g_\alpha(x) \doteq x^{-1/\alpha}\chi_{[1,+\infty[}(x)$.

٣ - $h_\alpha(x) \doteq \big(x(1+\ln^2 x)\big)^{-1/\alpha}\chi_{]0,1[}(x)$.

٤ - $l_\alpha(x) \doteq \big(x(1+\ln^2 x)\big)^{-1/\alpha}\chi_{]1,+\infty[}(x)$.

المطوب من أجل كل من التوابع الأربعة السابقة تعيين، بدلالة α ، قيم p لكي ينتمي هذا التابع إلى $\mathcal{L}^p$. (في حالة h_α وبعد التحوُّل إلى تكامل ريمان، يمكن اللّجوء إلى تبديل المتغير $y = \frac{1}{x}$.)

51.11 ليكن $p > 1$ عددا حقيقيا. أثبت متباينة يونغ:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},\ \ \forall a,b \geq 0 \qquad (p' = p/(p-1)).$$

[يمكنك دراسة تغيرات التابع $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto \frac{t^p}{p} + \frac{1}{p'} - t \in \mathbb{R}$ ، ثمّ حساب قيمته عند النقطة $t = ab^{1-p'}$.]

52.11

١ - ليكن $p \geq 1$ عددا حقيقيا. برهن على أن $t^p + 1 \leq (t+1)^p$ مهما كان $t \geq 0$.
استنتج أن $a^p + b^p \leq (a+b)^p$ مهما كان $a \geq 0$ ، $b \geq 0$ $(p \geq 1)$.
برهن كذلك على أن $(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p+1)$ مهما كان $t \in [0,1]$.
استنتج أن $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ مهما كان $a \geq 0$ ، $b \geq 0$.

٢ - ليكن $0 < p < 1$. برهن على أن $t^p + 1 \geq (t+1)^p$ مهما كان $t \geq 0$.
استنتج أن $a^p + b^p \geq (a+b)^p$ مهما كان $a \geq 0$ ، $b \geq 0$ $(0 < p < 1)$.

53.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين قيوسين من $(X,\mathcal{A})$ في $(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R})$. وليكن $p \geq 1$ عددا حقيقيا. إذا كان $0 \leq f \leq g$ فبرهن على أن

$$\big(N_p(f)\big)^p + \big(N_p(g-f)\big)^p \leq \big(N_p(g)\big)^p.$$

54.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا وليكن f وَ g تابعين حقيقيين قيوسين من $(X,\mathcal{A})$ في $(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R})$. وليكن $0 < p < 1$ عددا حقيقيا. برهن على أن

$$N_p(f+g) \le 2^{\frac{1}{p}-1}\{N_p(f)+N_p(g)\}.$$

55.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. وليكن $p>0$ وَ $q>0$ عددين حقيقيين ولنضع $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{r}$. أثبت أنه، من أجل كل $f \in \mathcal{L}^p$ وَ $g \in \mathcal{L}^q$ ، لدينا:

$$fg \in \mathcal{L}^r \quad \text{وَ} \quad N_r(fg) \le N_p(f)N_q(g).$$

56.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا. ولتكن $\{p_j\}_{j=1}^k$ متتالية أعداد حقيقية موجبة تماما وبحيث

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j}=1$$

ولتكن $\{f_j\}_{j=1}^k$ متتالية توابع حقيقية قيوسة وبحيث $f_j \in L^{p_j}(X,\mathcal{A},\mu)$. أثبت أن:

$$f_1\cdots f_k \in L^1 \quad \text{وَ} \quad |f_1\cdots f_k|_{L^1} \le \prod_{j=1}^{k}|f_j|_{L^{p_j}}.$$

57.11

١ - x وَ y عددان حقيقيان. أثبت أن

$$|x+y|^p+|x-y|^p \le 2(|x|^p+|y|^p) \quad \text{إذا كان} \quad 1 \le p \le 2 \tag{21.11}$$

وأن

$$|x+y|^p+|x-y|^p \ge 2(|x|^p+|y|^p) \quad \text{إذا كان} \quad 2 \le p < +\infty \tag{22.11}$$

مع دراسة الحالة حيث تكونا هاتان المتباينتان تامتين.

٢ - $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيس. ليكن p عددا حقيقيا مع $1 \le p < +\infty$ وَ $p \ne 2$ وليكن f وَ g تابعين من L^p . أثبت أنه حتى يكون لدينا

$$|f+g|_{L^p}^p+|f-g|_{L^p}^p = 2(|f|_{L^p}^p+|g|_{L^p}^p) \tag{23.11}$$

يلزم ويكفي أن يكون $fg=0$ ، μ ـ شك على X .

58.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا منتهيا، أي مع $\mu(X)<+\infty$ ، وليكن $p \ge 1$. برهن التكافؤ:

$$f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu) \iff f \text{ قيوس وَ } \sum_{n=1}^{\infty}n^p\mu(E_n) \quad \text{حيث} \quad E_n=\{x\in X \mid n-1 \le |f(x)| \le n\}.$$

59.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$ ، وليكن $p \ge 1$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع f . بين أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة نحو نفس التابع f في كل فضاء $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ مهما كان $1 \le q < p$.

60.11 ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X)<+\infty$. وليكن $p \ge 1$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية من $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ متقاربة في هذا الفضاء نحو تابع f . لنفرض أن $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ متقاربة μ ـ شك على X نحو تابع g . هل توجد علاقة بين f وَ g ؟

61.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X) < +\infty$ ، وليكن $p \in]1, \infty[$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ متقاربة μ ـ شك نحو تابع f من L^p وتحتوي على متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث تتقارب متتالية النظيمات $\{|f_{n_k}|_{L^p}\}_{n=1}^{\infty}$ نحو $|f|_{L^p}$. برهن على أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو f في L^p .

62.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X) < +\infty$ ، وليكن $p \in]1, \infty[$ عددا حقيقيا ولتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ متقاربة نحو تابع f من L^p . وليكن $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ، p' هو مرافق هولدر للعدد p ، أي $p' = p/(p-1)$. أثبت أن المتتالية $\{f_n g\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة نحو fg في الفضاء $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

63.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا مع $\mu(X) = 1$ ، ولتكن $f \in L^p$ وَ $1 \le q < p < \infty$. أثبت أن $|f|_{L^q} \le |f|_{L^p}$.

64.11 أثبت أن $\ell^q(\mathbb{R}) \subset \ell^p(\mathbb{R})$ مهما كان $1 \le q < p < \infty$ مع (متباينة جنسن Jensen):

$$|x|_{\ell^p} \le |x|_{\ell^q}, \ \forall x \in \ell^q.$$

65.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا حقيقيا قيوسا على X وليكن $Q \in \mathcal{A}$. إذا كان $f \ge \alpha$ (α عدد حقيقي معطى) وكان Φ تابعا حقيقيا محدبا على المجال $]\alpha, +\infty[$ ، فبرهن على **متباينة جنسن** Jensen :

$$\Phi\Big(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f\, d\mu\Big) \le \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \Phi(f)\, d\mu.$$

يمكنك أن تستخدم المتباينات التالية الصحيحة من أجل Φ محدب:

$$\frac{\Phi(u)-\Phi(\beta)}{u-\beta} \ge \frac{\Phi(u)-\Phi(\alpha)}{u-\alpha} \ge \frac{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}{\beta-\alpha}, \ \ u > \beta > \alpha.$$

66.11 نقول عن فضاء بناخي E إنه **محدب بانتظام** إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon \in]0, 2]$ يوجد $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث

$$(\forall x, y \in E, ||x|| = ||y|| = 1, ||x-y|| \ge \varepsilon) \Longrightarrow \Big|\Big|\frac{x+y}{2}\Big|\Big| \le 1-\delta.$$

أثبت أن الفضاءات L^p مع $1 < p < +\infty$ ، محدبة بانتظام.

تذكّر متباينتي كلاركسون Clarkson

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f+g}{2}\Big|_{L^p}^p + \Big|\frac{f-g}{2}\Big|_{L^p}^p &\le \frac{1}{2}|f|_{L^p}^p + \frac{1}{2}|g|_{L^p}^p, \ \forall p \in [2, \infty[\\
\Big|\frac{f+g}{2}\Big|_{L^p}^{p'} + \Big|\frac{f-g}{2}\Big|_{L^p}^{p'} &\le \Big[\frac{1}{2}|f|_{L^p}^p + \frac{1}{2}|g|_{L^p}^p\Big]^{\frac{1}{p-1}}, \ \forall p \in]1, 2[.
\end{aligned}$$

67.11 ليكن $1 < p < 2$ ولتكن f_1 ، ... ، $f_k \in \mathcal{L}^p$. أثبت وجود متتالية أعداد $\varepsilon_j = \pm 1$ ، $j = 1$ ، ... ، k ، بحيث:

$$|\varepsilon_1 f_1 + \cdots + \varepsilon_k f_k|_{L^p}^p \le \sum_{j=1}^{k} |f_j|_{L^p}^p.$$

يمكنك الاستدلال بالتدريج وباستخدام متباينة كلاركسون.

أثبت مباشرة أن هذه المتباينة تبقى صحيحة من أجل $p = 2$ ؛ ثمّ إنها توجد أيضا متتالية $\varepsilon'_j = \pm 1$ ، $j = 1$ ، ... ، k ، بحيث:

$$|\varepsilon'_1 f_1 + \cdots + \varepsilon'_k f_k|^2_{L^2} \geq \sum_{j=1}^{k} |f_j|^2_{L^2}.$$

68.11 نقول عن متتالية توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الفضاء $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ مع $1 < p < +\infty$ إنها **متقاربة بضعف** نحو تابع f في L^p إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu, \ \ \forall g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu).$$

وعندها نقول عن التقارب في L^p ، وفقا للنظيم $|\cdot|_{L^p}$ ، بأنه **التقارب القوي**.

١ - أثبت أن التقارب القوي يستلزم التقارب الضعيف.

وبهدف دراسة العكس، يمكنك فحص المثال المضاد:

$L^p = L^2([0, 2\pi], \widehat{\mathcal{B}}_{[0,2\pi]})$ ، λ قياس لوبيغ

والمتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ مع $f_n(x) = \sin nx$ ، $x \in [0, 2\pi]$.

٢ - في حالة $p = 2$ ، بين أن الشرطين المواليين يستلزمان التقارب القوي:

- ∘ $f_n \rightharpoonup f$ بضعف عندما يؤول n نحو ∞ .
- ∘ $|f_n|_{L^2} \longrightarrow |f|_{L^2}$ عندما يؤول n نحو ∞ .

69.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تطبيقا لِـ X في $\mathbb{R}$ قيوسا وبحيث $|f|_{L^\infty} > 0$. نعتبر التابع φ للمجال $[1, +\infty[$ في $\overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف بأن $\varphi(p) \doteq \int_X |f|^p \, d\mu$. لنضع $E_p \doteq \{p \geq 1 \mid \varphi(p) < +\infty\}$.

١ - أثبت أن E_p مجال من $\mathbb{R}$.

٢ - أثبت أن $\ln \varphi_p$ تابع محدب في $\mathring{E}_f$ داخلية E_f ، ولذا فالتابع φ مستمر على E_f .

٣ - أثبت أنه من أجل كل مجال I محتوى في $[1, +\infty[$ ، يوجد تطبيق f بحيث $I = E_f$. (يمكنك استخدام توابع التمرين 2.2 السابق.)

٤ - أثبت أنه من أجل $1 \leq r < p < s < +\infty$ لدينا $|f|_{L^p} \leq \max\{|f|_{L^r}, |f|_{L^s}\}$ وَ $\mathcal{L}^p(\mu) \supset \mathcal{L}^r(\mu) \cap \mathcal{L}^s(\mu)$.

70.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا متهيا (أي أن $\mu(X) < \infty$). أثبت أنه إذا كان p وَ q عددين حقيقيين من $[1, +\infty[$ مع $p < q$ كان $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1$. أعط مثالا يبين أن الشرط $\mu(X) < +\infty$ ضروري.

بين كذلك بواسطة أمثلة أنه لدينا على العموم $\bigcap_{p\in[1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^\infty$ وأن $\bigcup_{p\in]1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^1$.

71.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا منتهيا. أثبت أنه إذا كان p وَ q عددين حقيقيين من $[1, +\infty]$ مع $p < q$ كان $L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$ وأن

$$|f|_{L^p} \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |f|_{L^q}, \forall f \in L^q(X, \mu).$$

حيث نعمل بالاصطلاح $\frac{1}{\infty} = 0$.

قارن التوبولوجيا في L^q مع تلك المحصل عليه بأخذ أثر توبولوجيا L^p على L^q .

72.11 ليكن $p \in [1, +\infty[$ عددا حقيقيا وليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. ولنشير بِـ E^p إلى مجموعة كل الصفوف، وفق (μ) ، للتوابع $f \in \mathcal{L}^p$ بحيث تكون الصورة $f(X)$ جزء منته من $\mathbb{R}$ (أي أن f تابع درجي في $\mathcal{L}^p$). أثبت أن E^p كثيف في L^p . (يمكنك أن تبدأ بتقريب الصفوف $\tilde{f}$ من L^p مع $f \geq 0$).

73.11 ليكن $p \in [1, +\infty[$ عددا حقيقيا وليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. ولنشير بِـ S^p إلى مجموعة كل الصفوف، وفق (μ) ، للتوابع البسيطة φ على $(X, \mathcal{A})$ وبحيث $\mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$ (فنقول أن φ ، μ - درجي على X). من أجل $f \in \mathcal{L}^p$ مع $f \geq 0$ وَ $n \in \mathbb{N}^\star$ ، نضع $A_n \doteq \{\frac{1}{n} \leq f \leq n\}$.

١ - برهن على أن $\mu(A_n) < +\infty$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٢ - بين أن $f_n \doteq f\chi_{A_n}$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^p$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$ وأن $\lim\limits_{n\to\infty} |\tilde{f}_n - \tilde{f}|_{L^p} = 0$.

٣ - برهن على أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^\star$ ، توجد متتالية $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ من التوابع البسيطة، والموجبة والمعدومة خارج A_n ، تتقارب بانتظام على X نحو f_n . استنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} |\tilde{f}_n - \tilde{\varphi}_{n,k}|_{L^p} = 0$ مهما كان $n \in \mathbb{N}^\star$.

٤ - برهن على أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\varphi \in S^p$ بحيث $|\tilde{f} - \tilde{\varphi}|_{L^p} < \varepsilon$.

٥ - برهن على أن S^p كثيف في L^p .

74.11 فضاءات $\mathcal{L}^p$ مع $0 < p < 1$.

ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا. نقول عن تابع حقيقي قيوس f إنه ينتمي إلى $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ($0 < p < 1$) إذا كان $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. برهن على أن التابع d المعرف بأن

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p \, d\mu, \ \ f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

يشكل مسافة على هذا الفضاء وأن الثنائية $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu), d)$ فضاء متري تام.

75.11 ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء مقيسا وليكن f تابعا جموعا، أي أن $f \in L^1(X, \mu)$. ولتكن $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية توابع من X في $\mathbb{R}$ ، قيوسة ومتقاربة μ - شبه كليا (شك) على X نحو تابع $u : X \to \mathbb{R}$. وليكن $\varrho > 0$ عددا حقيقيا. من أجل m ، n عددين طبيعيين، نضع $L_n^\varrho = \{x \in X \mid |u_n(x) - u(x)| < \varrho\}$ وَ $E_{nm}^\varrho = \{x \in X \mid |u_n(x) - u_m(x)| \leq \varrho\} \cap L_n^\varrho$ وَ $Y_n^\varrho = \{x \in X \mid |u_n(x) - u(x)| = \varrho\}$.

١ - أثبت أن $\lim\limits_{m\to\infty} \int_X \chi_{E_{nm}^\varrho} f \, d\mu = \int_X \chi_{L_n^\varrho} f \, d\mu$.

٢ - أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \chi_{L_n^\varrho} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

٣ - أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \chi_{Y_n^\varrho} f \, d\mu = 0$.

المقارنة بين التقارب الشبه الكلي وبالقياس وبالمتوسط

في كل ما يلي نزود $\mathbb{R}$ ، أو أي مجال منه، بعشيرته البوريلية وبقياس لوبيغ، ونشير بِـ I إلى المجال $[0,1]$ وبِـ χ_E إلى الدالة المميزة للجزء E من مجموعة كيفية X .

تذكير: ليكن $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقيسا ولتكن $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية توابع من X في $\mathbb{R}$ ، قيوسة. إننا نعرف عدة كيفيات لتقارب هذه المتتالية نحو تابع قيوس $\psi : X \to \mathbb{R}$.

◦ التقارب الشبه الكلي (شك) :

$$\psi_n \xrightarrow{\text{شك}} \psi \iff \mu(\{x \in X \mid \psi_n(x) \not\to \psi(x)\}) = 0.$$

◦ التقارب بالقياس (قياس):

$$\psi_n \xrightarrow{\text{قياس}} \psi \iff \Big\{\forall \varrho > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |\psi_n(x) - \psi(x)| > \varrho\}) = 0\Big\}.$$

◦ التقارب بالمتوسط أو في $L^1(X,\mu)$ (من أجل ψ_n وَ ψ في L^1):

$$\psi_n \xrightarrow{\|\|_1} \psi \iff \lim_{n\to\infty} \int_X |\psi_n(x) - \psi(x)|\, d\mu = 0.$$

◦ التقارب المهيمن عليه (من أجل ψ_n وَ ψ في L^1):

$\psi_n \xrightarrow{\text{مهيمن}} \psi \iff \psi_n \xrightarrow{\text{شك}} \psi$ ويوجد $\theta \in L^1(X,\mu)$ بحيث $|\psi_n| \le |\theta|$ ، μ - شك في X .

إن العلاقات بين كيفيات التقارب هذه معروفة. ويتبين من التمرين الموالي أن البعض من الاستلزامات بينها غير واردة.

76.11

١ - لنكتب كل عدد طبيعي n على الشكل $n = 2^k + m$ مع $0 \le m < 2^k$ ونضع، من أجل x في I :

$$v_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } m/2^k \le x \le (m+1)/2^k, \\ 0 & \text{عدا ذلك}. \end{cases}$$

أثبت أن $v_n \xrightarrow{\|\|_1} 0$ وَ $v_n \xrightarrow{\text{قياس}} 0$ ، لكن من أجل كل $x \in I$ ، $v_n(x) \not\to 0$. ماذا تستنتج؟

٢ - نعتمد الترميز السابق، ونضع، من أجل x من I :

$$w_n(x) = \begin{cases} 2^k & \text{إذا كان } m/2^k \le x \le (m+1)/2^k, \\ 0 & \text{عدا ذلك}. \end{cases}$$

أثبت أن $w_n \xrightarrow{\text{قياس}} 0$ ، لكن $w_n \overset{\|\|_1}{\not\longrightarrow} 0$. ماذا تستنتج؟

77.11 لنبدأ بتذكير القارىء بمبرهنة ريس: إذا كان $(H,(\cdot|\cdot))$ فضاء هيلبرتيا حقيقيا وكان H شكلا خطيا مستمرا على H ، فيوجد شعاع $y \in H$ بحيث $\varphi(x) = (x|y)$ مهما كان $x \in H$.

ليكن $(X,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وليكن μ وَ ν قياسين موجبين متهيين على $(X,\mathcal{A})$ بحيث $\mu(A) = 0$ يستلزم $\nu(A) = 0$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$.

١ - ليكن $\tau \doteq \mu + \nu$ ، أي أن $\tau(A) \doteq \mu(A) + \nu(A)$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ · بين أن τ قياس موجب ومنته على $(X, \mathcal{A})$ وأنه من أجل كل تابع $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$:

$$\int_X f\, d\tau = \int_X f\, d\mu + \int_X f\, d\nu.$$

٢ - (أ) أثبت أن $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau) \subset \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$ ·

(ب) برر أنه يمكن تعريف شكلا خطيا φ على $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ وهذا بوضع $\varphi(\tilde{f}) \doteq \int_X f\, d\nu$ مهما كان $\tilde{f} \in L^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ · استخدم متباينة هولدر لتثبت أن φ مستمر على $L^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ · استنتج وجود تابع $g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ بحيث:

$$\int_X f\, d\nu = \int_X fg\, d\tau,\ \ \forall f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau).$$

(جـ) برهن على أنه من أجل كل $A \in \mathcal{A}$ ، لدينا $0 \leq \int_X \chi_A g\, d\mu \leq \int_X \chi_A\, d\tau$ وأن $\nu(g = 1) = \tau(g = 1) = 0$ · استنتج أن $0 \leq g < 1$ ، τ - شبه كليا·

٣ - (أ) أثبت وجود $h \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ بحيث $0 \leq h(x) < 1$ مهما كان $x \in X$ ومن أجل كل $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \tau)$ لدينا

$$\int_X f(1-h)\, d\nu = \int_X fh\, d\mu. \tag{24.11}$$

(ب) أثبت أن المساواة (24.11) صحيحة من أجل كل $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ ·

٤ - استنتج من الأسئلة السابقة مبرهنة **رادون ونيكوديم** في حالة القياسات المتهية:

إذا كان μ وَ ν قياسين موجبين متهيين على فضاء قيوس $(X, \mathcal{A})$ بحيث $\mu(A) = 0$ يتلزم أن $\nu(A) = 0$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ ، فيوجد تابع موجب $\varrho \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \nu)$ ، μ - وحيد بحيث $\nu(A) = \int_X \varrho \chi_A\, d\mu$ مهما كان $A \in \mathcal{A}$ ·

ونكتب عادة $\nu = \varrho \cdot \mu$ أو $d\nu(x) = \varrho\, d\mu(x)$ ونقول إن القياس μ يقبل التابع ϱ ككثافة نسبة إلى القياس μ ·

78.11 ليكن $\mathbb{R}_+^\star \doteq]0,+\infty[$ مزود بعشيرة وقياس لوبيغ. وليكن $\infty > p > 1$ وَ $L^p(\mathbb{R}_+^\star) \ni f$ وليكن التابع F المعرف بأن $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ ، $\mathbb{R}_+^\star \ni x$.

١ - أثبت متباينة هاردي Hardy $|F|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}|f|_{L^p}$ التي تعني أن التطبيق $f \mapsto F$ ينقل $L^p(\mathbb{R}_+^\star)$ في نفسه.

٢ - أثبت أن المساواة واردة فقط من أجل $f = 0$ شك.

٣ - أثبت أن الثابت $\frac{p}{p-1}$ لا يمكن أن يعوض بثابت أصغر.

٤ - إذا كان $0 < f$ مع $L^1 \ni f$ فبين أن $L^1 \not\ni F$.

ارشاد: ١. افرض أولا أن $0 \leq f$ وينتمي إلى $C_c(\mathbb{R}_+^\star)$. تؤدي المكاملة بالتجزئة إلى العلاقة $\int_0^\infty F^p(x)\,dx = -p\int_0^\infty F^{p-1}(x)xF'(x)\,dx$. لاحظ أن $xF' = f - F$ وطبق متباينة هولدر على $\int F^{p-1}f$. عالج بعدئذ الحالة العامة. ٣. خذ $f(x) = x^{-1/p}$ على المجال $[1,a]$ ، مع a كبير بكفاية، وَ $f(x) = 0$ عدا ذلك.

79.11 لتكن $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ متتالية أعداد موجبة. أثبت أن

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}a_n\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \qquad 1 < p < \infty.$$

ارشاد: إذا كانت المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ متناقصة فيمكن الحصول على هذه النتيجة اعتمادا على التمرين السابق. استنتج الحلة العامة من الحالة الخاصة هذه.