RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba Alger
Département de Mathématiques

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **ANALYSE NON LINÉAIRE**
Présenté par : **SOUILAH REZAK**
Intitulé :

EXISTENCE POUR UN SYSTÈME ELLIPTIQUE QUASILINÉAIRE AVEC LA CROISSANCE QUADRATIQUE AYANT UNE STRUCTURE PARTICULIÈRE

Soutenu publiquement le 23 juin 2008 à l'E.N.S-Kouba devant le jury composé de

Mr Mahmoud Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Président
Mr Khaled Sadallah	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr EL-Hacène Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr Abdelaziz Choutri	Chargé de cours	E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr Abdelhafid Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Promoteur

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on va chercher une solution pour le système elliptique quasi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -div(A(x,u)Du^\gamma) = G^\gamma(x,u,\nabla u) + F(x,u,\nabla u)Du^\gamma \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega), \quad 1 \leq \gamma \leq m \\ u \in (H_0^1(\Omega) \bigcap (L^\infty(\Omega))^m \end{cases}$$

le membre de droite de chaque équation de ce système se compose de deux parties : la première partie est $G^\gamma(x,u,\nabla u)$, elle a une croissance quadratique en Du^δ *pour* $\delta \leq \gamma$, et elle a également une petite croissance quadratique en Du^δ *pour* $\delta > \gamma$. La deuxième partie est le terme $F(x,u,\nabla u)Du^\gamma$, dont la nonlinéarité F est la même pour toutes les équations et elle a une croissance linéaire en ∇u. On approximera le problème et on supposera qu'on a une estimation à L^∞ sur la solution approchée. Sans aucune supposition supplémentaire sur cette estimation on montre que la solution approchée converge fortement dans $(H_0^1(\Omega))^m$, vers une solution de notre problème, par conséquent le système admet au-moins une solution.

Mots clés :
Système d'équations elliptiques quasilinéaires, opérateurs de type Leray-Lions, conditions de croissance, existence de solutions faibles, approximation, théorème du point fixe de Schauder, estimations a priori.

Abstract

In this memory, we consider the quasilinear elliptic system :

$$\begin{cases} -div(A(x;u)Du^\gamma) = G^\gamma(x,u,\nabla u) + F(x,u,\nabla u)Du^\gamma \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega), \quad 1 \leq \gamma \leq m \\ u \in (H_0^1(\Omega) \bigcap (L^\infty(\Omega))^m \end{cases}$$

The right hand side of this system consists of two parts : the first one, $G^\gamma(x,u,\nabla u)$, can have a quadratic growth in Du^δ for $\delta \leq \gamma$, and possibly a small quadratic growth in Du^δ for $\delta > \gamma$; the second part is a coupling term with the particular structure $F(x,u,\nabla u)Du^\gamma$, where the nonlinearity F is the same for all the equations and can have linear growth in ∇u. We approximate the problem and assume that an L^∞ estimate on the approximated solutions is known. Without assuming any smallness on this L^∞ estimate we then prove that approximations converge strongly in $(H_0^1(\Omega) \bigcap (L^\infty(\Omega))^m$ and that the system admits at least one solution.

Key words :

Quasilinear elliptic system, growth conditions, Lerray-Lions operators, existence of weak solutions, approximation, Schauder fixed point theorems, a priori estimates.

ملخّص

في هذّا البحث نسعى إلى إثبات وجود حل لجملة من المعادلات الناقصية شبه الخطية التالية

$$\begin{cases} -div(A(x;u)Du^\gamma) = G^\gamma(x,u,\nabla u) + F(x,u,\nabla u)Du^\gamma \; dans \; \mathfrak{D}'(\Omega), \quad 1 \le \gamma \le m \\ u \in (H_0^1(\Omega) \bigcap (L^\infty(\Omega))^m \end{cases}$$

حيث الطرف الأيمن لكل معادلة من هذه الجملة مكون من حدين الأول $G^\gamma(x,u,\nabla u)$ ذو تزايد تربيعي بالنسبة إلى Du^δ من أجل $\delta \le \gamma$ و تزايد تربيعي صغير بالنسبة إلى Du^δ من أجل $\delta > \gamma$.

أما الحد الثاني فهو $F(x,u,\nabla u)Du^\gamma$ حيث $F(x,u,\nabla u)$ هو نفسه في كل المعادلات زيادة على ذلك فهو يتمتع بتزايد خطي بالنسبة إلى ∇u .

نقوم أولا بتقريب المسألة لنحصل على حل تقريبي و الذي سنبرهن فيما بعد أنه يتقارب نحو حل للمسألة المطروحة.

مفاتيح هذه المذكرة

جملة من المعادلات الناقصية شبه الخطية، مؤثر من نوع $Leray - Lions$ ، شروط التزايدات، وجود حلول ضعيفة، تقريب، نظرية النقطة الصامدة لشودر $(Schauder)$ ، تقديرات قبلية.