

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques



MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : Analyse non linéaire

Présenté par : **AIT-MAHIOUT LATIFA**

Intitulé

**Étude des champs de Beltrami linéaires et non linéaires
dans des domaines tridimensionnels**

Soutenu publiquement le 28-02-2010 à l'ENS-Kouba

devant le jury composé de :

Mr. Y. Atik	Professeur	ENS-Kouba	Président.
Mr. A. Mokrane	Professeur	ENS-Kouba	Rapporteur.
Mr. T. Z. Boulmezaoud	Professeur	Paris VI	Co-Rapporteur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	ENS-Kouba	Examineur.
Mr. D. Teniou	Professeur	USTHB	Examineur.

Table des matières

Notations	3
1 Introduction	4
2 Rappels et définitions	9
2.1 Quelques rappels de base	9
2.2 Quelques théorèmes fondamentaux	11
2.3 Théorème du point fixe	17
2.4 Un théorème de Stampacchia. Principe du maximum	18
2.4.1 Un théorème de Stampacchia	18
2.4.2 Principe de maximum	21
3 Espaces $H(\text{div})$ et $H(\text{rot})$, problèmes de potentiels vecteurs	28
3.1 Espaces $H(\text{div})$ et $H(\text{rot})$	28
3.2 Problèmes de potentiels vecteurs	30
4 Les champs de Beltrami linéaires dans un domaine borné	41
4.1 Étude du problème (4.1) lorsque α est connu	43
4.1.1 Cas $\alpha = 0$	43
4.1.2 Cas $\alpha \in \mathbb{R}^*$	44
4.2 Une formulation potentiel vecteur	53
4.3 Deux problèmes avec α inconnue	54
4.3.1 Problème A	55
4.3.2 Problème B	60
4.4 Exemple : Un champ de Beltrami linéaire à l'intérieur d' une sphère	62
4.4.1 Harmoniques sphériques	62
4.4.2 Équation de Helmholtz à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère unité	64

5	Champs de Beltrami linéaires dans un domaine extérieur	74
6	Champs de Beltrami non linéaires dans un domaine borné	95
7	Stratégie itérative	123

ملخص

تدخل الأعمال المقدّمة في هذه المذكرة في ميدان المعادلات التفاضليّة ذات المشتقات الجزئية و تتعلّق بحقول بلترامي (أو فضاءات عديمة القوة) خطيّة أو غير خطيّة.

إنّ حقول بلترامي هي فضاءات ثلاثية البعد ذات تفرّق معدوم و تحقّق المعادلة

$$\text{rot } B = \alpha B$$

حيث α ثابت حقيقي معلوم أو غير معلوم في الحالة الخطيّة و عبارة عن تابع في الحالة غير الخطيّة. تظهر حقول بلترامي في عدّة ميادين من الفيزياء مثل ميكانيك السوائل، فيزياء البلازما، الفيزياء الفلكية، الفيزياء الكهرومغناطسيّة، و الفيزياء الشمسيّة، حيث هناك عدّة تساؤلات و كذلك عدّة مواضيع للبحث و الدراسة. نقدّم في هذه المذكرة بعض نتائج الوجود، الوحدانيّة و الملوسة لحقول بلترامي الخطيّة التي هي حلول لمسائل حدية في ساحة محدودة ذات ثلاثة أبعاد متعدّدة الترابط و في ساحة خارجيّة ثلاثيّة البعد. و بالمثل، نقدّم نتيجة وجود في حالة فضاءات عديمة القوة غير خطيّة في ساحة ثلاثيّة البعد و محدودة، بسيطة او متعدّدة الترابط، و نقترح خوارزمية تكرارية تتعلّق بتقريب هذه المسألة غير الخطيّة.

نأمل مواصلة العمل مستقبلاً في هذا المجال و ذلك بدراسة حالة التناظر المحوري الذي يقلّ الكلام عنه في الكثير من المراجع المتعلّقة بالموضوع. و سنحاول إيجاد طريقة تكرارية أقلّ تكلفة و التي تسمح لنا بتقريب هذه المسألة غير الخطيّة و بعدها سنهتمّ بدراسة الوحدانيّة بالنسبة للمسألة غير الخطيّة.

كلمات مفتاحيّة

حقول بلترامي، حقول عديمة القوة، مؤثر الدوران، عناصر متمهية، معادلات ذات مشتقات جزئية غير خطيّة، التقريب بالتكرار.

Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur un thème s'inscrivant dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Ce thème concerne les champs de Beltrami (ou champ sans-force) linéaires et non-linéaires.

Les champs de Beltrami sont des champs tridimensionnels à divergence nulle et vérifiant l'équation

$$\operatorname{rot} B = \alpha B$$

où α est une constante réelle connue ou inconnue dans le cas linéaires, et une fonction dans le cas non-linéaires. Ils apparaissent dans plusieurs domaines de la physique tels que la mécanique des fluides, la physique des plasmas, l'astrophysique, l'électromagnétisme, et la physique solaire, dans lesquels ils suscitent plusieurs questions et font ainsi l'objet de nombreuses études.

Nous présentons ici quelques résultats d'existence, d'unicité et de régularité des champs de Beltrami linéaires solutions de problèmes aux limites dans un domaine borné de dimension trois multiplement connexe, et dans un domaine tridimensionnel extérieur.

De même, nous présentons un résultat d'existence des champs sans force non-linéaires dans un domaine borné de dimension trois, simplement ou multiplement connexe, et nous proposons un algorithme itératif pour approcher la solution de ce problème non-linéaire.

Nous espérons pouvoir prochainement étudier le cas axisymétrique dont on parle très peu dans la littérature. Nous tenterons ensuite de trouver une méthode itérative moins coûteuse qui nous permette d'approcher les solutions du problème non linéaire. Nous nous pencherons également sur l'étude de l'unicité pour le problème non linéaire.

Mots clés :

Champs sans force, Champs de Beltrami, Opérateur Rot, Éléments finis, EDP non linéaire, approximation itérative.

ABSTRACT

The memory presented here concerns Beltrami — or force-free — fields, both linear and nonlinear, in the general context of partial differential equations.

Beltrami fields are three-dimensional, divergence-free fields satisfying the equation

$$\operatorname{rot} B = \alpha B$$

where α is a known or unknown constant in the linear case, and a function in the nonlinear case. They are relevant in several areas of physics, such as fluid mechanics, plasma physics, astrophysics and electromagnetism. Their study raises many questions and is the subject of many works.

We present here a few existence, uniqueness and regularity results for linear Beltrami fields that solve boundary value problems in a multiply connected, bounded three-dimensional domain as well as in an exterior domain.

Similarly, we present an existence result for nonlinear force-free fields in an either simply or multiply connected, three dimensional bounded domain. We propose an iterative algorithm to approximate the solution of this nonlinear problem.

We hope to study the axisymmetric problem which is not considered very often in the literature. We also hope to find the best iterative approximation method for the nonlinear problem. We also plan to address the uniqueness problem in the nonlinear case.

Key words :

Force free fields, Beltrami flows, Curl Operator, Non linear PDE, finite elements, iterative approximation.