République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Département de Mathématiques

ENS-Kouba, Alger

Spécialité : **Mathématiques**

Option : **Équations et inclusions différentielles**

Présenté par

Mabrouk BRIKI

Étude de quelques problèmes aux limites par des méthodes variationnelles

Directeur de mémoire : **Toufik MOUSSAOUI**

Soutenu le 18 /10/2012

Devant la Commission d'Examen

JURY

A. MOKRANE	Prof. ENS-Kouba	Président
S. DJEBALI	Prof. ENS-Kouba	Examinateur
A. BENMEZAI	Prof. USTHB	Examinateur
K. HAMMACHE	M.C.(B) ENS-Kouba	Examinateur
T. MOUSSAOUI	M.C.(A). ENS-Kouba	Rapporteur

Table des matières

Introduction générale

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire, qui est probablement originaire du problème brachistochrone posé en 1696 et résolu par Newton, Leibniz, Jakob et Johann Bernoulli, ainsi que par L'Hôpital et qui consiste à déterminer la trajectoire la plus rapide permettant à une masse ponctuelle uniquement soumise à la gravité d'aller d'un point A à un point B, bien que le problème des surfaces de révolution dans un milieu résistant étudié par Newton remonte encore plus loin. Des contributions importantes ont également été donnée par Euler, qui a publié la première monographie sur le calcul des variations en 1744, et par Lagrange qui a introduit des formalismes et des techniques qui sont toujours en usage aujourd'hui. Le principe de moindre action de Maupertuis est aussi un des premiers cadres variationnels posé.
L'exemple classique pour les problèmes variationnels est le principe de Dirichlet, à savoir le fait que la solution d'une équation à dérivées partielles de type elliptique couplée avec une condition aux limites peut être obtenu comme un minimiseur d'une fonctionnelle appropriée. Dans un des cas les plus classiques, un ensemble ouvert Ω est donnée, avec une fonction réelle f définie sur la frontière de Ω. Le problème consiste à trouver une fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega\,; \\ u = f, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Sous des hypothèses convenables, la solution (unique) de (1) est caractérisée comme étant le minimum absolu de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

parmi tous les u qui prenne la valeur f sur $\partial\Omega$ et appartenant à un espace de fonctions convenable.

Riemann a introduit ce point de vue en 1851, et a donné le nom de principe de Dirichlet pour le processus de résolution de (1) en minimisant J. Bien que le principe de Dirichlet est élégant et peut être appliqué à une grande classe de problèmes autres que (1), la preuve fournie par Riemann ne peut pas être considérée comme correcte, comme cela a été dûment signalé par Weierstrass. Le problème réside dans le fait que lorsque on travaille dans des espaces fonctionnels, et donc dans des espaces vectoriels de dimensions infinies, les propriétés de compacité usuelles de la dimension finie ne sont plus vraies, et les étapes de la démonstration de l'existence des extremas, en grande partie fondées sur des arguments de compacité, ne fonctionnent plus. Ces faits n'avaient pas encore été pleinement reconnu au temps de Riemann.

Le dénouement théorique de ces types de difficultés a besoin du développement extraordinaire de l'analyse fonctionnelle, théorie de la mesure et de l'intégration qui a explosé au cours du XXe siècle, avec l'étude précise des propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels de dimensions infinies, la théorie de l'intégration de Lebesgue, et beaucoup d'autres techniques.

L'idée fondamentale derrière le principe de Dirichlet est l'interprétation d'un problème différentiel, écrit abstraitement comme $F(u) = 0$, comme

$$J'(u) = 0,$$

où J est une fonction appropriée définie sur un ensemble de fonctions, et J' est le différentiel de J dans un sens qu'on va préciser. En d'autres termes, les zéros de F sont considérés comme des points critiques (pas nécessairement minimas) de J. L'équation $J'(u) = 0$ est l'équation d'Euler, ou l'équation d'Euler-Lagrange associé à J. Dans plusieurs cas, il s'avère que c'est beaucoup plus facile de trouver un point critique de J que de travailler directement sur l'équation $F(u) = 0$. Par ailleurs, dans d'innombrables applications, la fonctionnelle J a une signification physique qui est fondamentale. Souvent, J est une énergie, écrite comme l'intégrale d'un Lagrangien, et donc trouver un point de minimum signifie non seulement de résoudre l'équation différentielle, mais trouver la solution d'énergie minimale qui est souvent très importante dans les problèmes concrets. L'interprétation de J comme une énergie est si fréquente que les fonctionnelles associées à des problèmes différentiels sont appelés fonctionnelles d'énergie, même lorsque le problème n'a pas d'applications directes en physique.

Bien sûr, tous les problèmes différentiels peuvent être écrits sous la forme $J'(u) = 0$. Lorsque cela est possible, on dit que le problème est variationnel, ou a une structure variationnelle, et ceux-ci sont les seuls types de problèmes que nous aborderons ici. Au cours du vingtième siècle,

après avoir donné les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiel aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées. D'une part, des techniques de minimisation ont évolué à un niveau très élevé, et ont été appliquées à un nombre énorme de problèmes dans beaucoup de domaines de la science pure et appliquée. Les méthodes qui sont concernées par la minimisation de fonctionnelles sont appellées des méthodes directes du Calcul des Variations. D'autre part, les procédures visant à la recherche de points critiques des fonctionnelles et qui ne sont pas des points de minimum ont donné lieu à une branche de l'analyse non linéaire connue sous le nom de la théorie des points critiques. Parmi les précurseurs de cette théorie sont Ljusternik et Schnirelman, avec leur célèbre travail en 1929 sur l'existence des géodésiques fermées, et Morse, qui a donné les fondations de l'analyse non linéaire.
Une des idées les plus fécondes issues de cette recherche, est la notion de l'existence des points critiques qui est liée à des propriétés topologiques des ensembles de sous-niveaux de la fonctionnelle, dans le sens qu'un changement dans le type topologique de ces sous-niveaux nous assure l'existence d'un point critique, pourvu que des conditions de compacité sont satisfaites. La systématisation des propriétés de compacité demandées dans le cadre de la dimension infinie est due à Palais et Smale, qui ont introduit une condition de compacité qui porte leur nom et est aujourd'hui reconnue comme la notion la plus utilisée dans la théorie des points critiques. Les deux facteurs qui sont le changement de la topologie et la compacité, ont été beacoup utilisés par des chercheurs travaillant dans les équations elliptiques semi-linéaires. Les deux résultats les plus célèbres sont le théorème du col (Mountain Pass) démontré par Ambrosetti et Rabinowitz en 1973, et le théorème du point selle (Saddle Point) démontré par Rabinowitz en 1978.

Ce travail consiste à étudier quelques problèmes aux limites posés sur les intervalles bornés et non bornés de la droite réelle $\mathbb{R}$ par des méthodes variationnelles ainsi que la théorie des points critiques.
Notre travail s'appuie essentiellement sur les articles de J.J. Nieto, D. O'Regan [1], J.M. Gomes, L. Sanchez [2] et enfin D. Bonheure, J.M. Gomes, L. Sanchez [3].
Le travail se propose de reprendre systématiquement toutes les démonstrations en les détaillant dans l'espoir de les rendre plus claires pour un public plus large. Cela nous amène à rappeler ou à detailler certaines notions fondamentales utilisées (telles la semi-continuité inférieure et supérieure, les espaces de Sobolev, la théorie des injections, condition de Palais-Smale, théorie des points critiques, minimisation, ...).
Dans le deuxième chapitre, il a été montré dans [1] la structure variationnelle sous-jacente à une équation différentielle impulsive. Ils ont pris comme modèle un problème de Dirichlet avec des

impulsions et ils ont montré que les solutions du problème impulsif minimisent la fonctionnelle (énergie).
Aussi, les points critiques de cette fonctionnelle sont en effet des solutions du problème impulsif. Cette approche est originale et peut constituer une nouvelle manière de traiter les problèmes non linéaires discontinus tels que les problèmes impulsifs.
Plus précisément, dans [1], les auteurs ont étudié le problème de Dirichlet non linéaire suivant :

$$(NP) \quad \begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)), \quad p.p. \quad t \in [0, T]\,; \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions impulsives

$$\Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, 2, ..., p.$$

Ici $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, ..., p$ sont continues. Ce problème impulsif est désigné par (NP) et ils ont supposé que $\lambda > -\lambda_1 = \frac{\pi^2}{T^2}$ Le premier résultat obtenu affirme que :
si f est bornée et que les fonctions impulsives I_j sont bornées, alors, le problème (NP) possède au moins une solution.
Pour la démonstration, ils ont utilisé un théorème qui assure l'existence d'un minimum sous une condition de coercivité.
Le second résultat dit que si f est sous-linéaire et que les fonctions impulsives I_j croissent aussi d'une manière sous-linéaires, alors, le problème (NP) possède au moins une solution. Pour la démonstration, nous avons aussi utilisé la condition de coercivité d'une certaine fonctionnelle.
Comme cas particulier, nous avons aussi traité le problème impulsif suivant pour $\lambda > -\lambda_1$:

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(t) = u^2(t) + \sigma(t), \quad t \in (0, T), \\ \Delta u'(t_j) = I_j(u(t_j)), \quad j = 1, ..., p; \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

et ils ont démontré que si les fonctions impulsives I_j sont telles que $I_j(s) = 0$ pour $s \leq 0$ et satisfaisant $|I_j(u)| \leq a_j + b_j|u|^{\gamma_j}$, pour tout $u \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., p$ avec $\gamma_j \in [0, 1)$ et si $\sigma(t) < 0$, $t \in (0, T)$, alors le problème (2) admet une solution.
Pour la démonstration, nous avons utilisé le célebre théorème du col démontré par Ambrosetti-Rabinowitz en 1973 dans [4] où nous avons vérifié la condition de Palais-Smale ainsi que les conditions géométriques pour certaine fonctionnelle appropriée.

Le second travail étudié dans ce mémoire est dû à [2] et qui consiste à étudier deux types de problèmes aux limites sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Les problèmes sont suggérés par des modèles de la Physique Mathématiques. Dans le premier type de problème, la condition au point 0 est $u(0)=\alpha$ alors que dans le second type ils ont considéré une condition de Neumann homogène $u'(0)=0$. Dans les deux cas, les solutions doivent satisfaire $u(+\infty)=0$. Leur approche est variationnelle et les solutions sont obtenues comme des minimiseurs ou des points critiques de type passage du col (mountain pass) d'une certaine fonctionnelle. Plus précisément, ils ont traité le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u''(t)+p(t)u(t)=q(t)h(u(t)), \quad t\in(0,+\infty), \\ u(0)=\alpha, \quad u(+\infty)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Avec la notation :

$$C_\alpha=\{u : u\in AC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \quad u(0)=\alpha \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u'(t)^2dt<+\infty\}$$

et ils ont montré que si $p\geq 0$ et il existe une primitive P de p vérifiant $P^2(t)\leq \beta p(t)$, et $\lim_{t\longrightarrow 0} P(t)u^2(t)=-\phi\leq 0, \quad \textit{pour tout} \quad u\in C_\alpha$, avec $0\leq\beta<\frac{1}{4}$. De plus on suppose que

A) $q>0, q\in L(0,1)$ et $\int_1^\infty q(t)dt=+\infty$,

B) $h(0)=0$ et $h(u)>0, \quad \textit{pour tout} \quad u>0$,

C) $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\frac{p(t)}{q(t)}=0$,

D) $\liminf_{u\longrightarrow+\infty}\frac{h(u)}{u}>0$.

Alors le problème (3) admet une solution positive.
La preuve est basée sur un procédé de minimisation.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons étudié l'existence de solutions positives du problème

$$\begin{cases} u''+k\frac{u'}{t}=h(t)g(u), \quad t\in(0,+\infty), \\ u'(0)=0,\ u(+\infty)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Ici $k>1$, h est bornée et la croissance de g à l'infini est contrôlée par un exposant critique. Dans notre approche, la méthode de tir (shooting method) de Beresticky, Lions et Peletier [5] est combinée aux méthodes variationnelles.
Concernant les fonctions h et g, les hypothèses essentielles sont :

(H1) h est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et il existe $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ tels que
$0<c_1\leq h(t)\leq c_2, \quad \forall t\in[0,+\infty[$;

(H2) g est une fonction localement Lipschitzienne sur $[0,+\infty[$ telle que $g(0) = 0$ et il existe $a > 0$ avec $(a-u)g(u) > 0$ si $0 < u \neq a$;

(H3) il existe $\xi > a$ tel que $G(\xi) < 0$, où $G(u) = \int_0^u g(s)ds$.

et ils ont demontré que si g est bornée, et $(H1) - (H3)$ sont satisfaites et $g'(a) < 0$, alors le problème (4) admet une solution u telle que $u'(t) < 0 \quad \forall t > 0$ et $u(+\infty) = 0$.
Dans le cas où la non linéarité g est non bornée, nous aurons besoin d'une hypothèse de croissance de type puissance à l'infini qui est :

(H4) Il existe $r \in]0, \frac{k+3}{k-1}[$ tel que

$$\limsup_{u \longrightarrow +\infty} \frac{|g(u)|}{u^r} < +\infty,$$

ainsi qu'une hypothèse de superlinéarité :

(S) Il existe $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \geq 0$

$$G(u) - \theta u g(u) \geq \rho.$$

et le résultat obtenu dit que si $(H1)$ est verifiée et $g(u) = \alpha u + f(u)$ où $\alpha > 0$ et f est une fonction continue satisfaisant (S) avec $\rho = 0$ et telle que pour des constantes $L > 0, \quad q \in]1, \frac{k+3}{k-1}[$, $|f(u)| \leq L u^q, \quad \forall u \geq 0$, alors le problème (4) admet au moins une solution positive.