

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ecole Normale Supérieure*  
*Kouba-Alger*

# THESE

Présentée pour l'obtention du grade de :  
*MAGISTER EN MATHÉMATIQUES*

Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par  
*DEBBA MOSTEFA*

*Sujet*

*Etude d'un problème parabolique dans un domaine  
plan non régulier (non rectangulaire)*

*Directeur de thèse : B.K. Sadallah*

Soutenue le : 20 / 05 /2002

Devant le jury composé de :

<i>M. S. Mouley</i>	professeur (USTHB)	<b>Président</b>
<i>Y. Atik</i>	professeur (ENS –Alger)	<b>Examineur</b>
<i>A. Mokrane</i>	Maître de conférences (ENS –Alger)	<b>Examineur</b>
<i>B.K. Sadallah</i>	Maître de conférences (ENS –Alger)	<b>Rapporteur</b>

# Table des Matières

<b>1 Problèmes aux limites : Des domaines réguliers aux domaines non réguliers</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Quelques méthodes de résolution des EDP . . . . .	8
1.2.1 Estimations à priori . . . . .	8
1.2.2 Intégrales singulières . . . . .	10
1.2.3 Techniques de Leray-Schauder (Méthodes topologiques) . . . . .	11
1.2.4 Théorie des opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	16
1.2.5 Sommes d'opérateurs . . . . .	18
1.2.6 Méthode de Hill-Yosida . . . . .	21
1.3 Des domaines réguliers aux domaines non réguliers . . . . .	22
1.3.1 Exemple 1 [28.1] : Le laplacien . . . . .	23
1.3.2 Exemple 2 [28.2] : Deux opérateurs liés au laplacien . . . . .	27
1.3.3 Exemple 3 [28.2] : Problème mal posé pour l'équation de la chaleur . . . . .	30
1.3.4 Exemple 4 [28.2] : Problème mal posé pour l'équation des ondes . . . . .	31
1.4 Types de problèmes étudiés dans les domaines non réguliers . . . . .	34
1.4.1 Cadres fonctionnels . . . . .	34
1.4.2 Problèmes étudiés . . . . .	35
<b>2 Existence et unicité de la solution d'un problème parabolique dans un domaine plan non régulier (cas du disque)</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	41

2.2	Résolution du problème ( $P$ ) . . . . .	45
2.2.1	Résolution du problème ( $P$ ) dans $\Omega_1$ . . . . .	45
2.2.2	Résolution du problème ( $P$ ) dans $\Omega_2$ . . . . .	59
2.2.3	Résolution du problème ( $P$ ) dans $\Omega_3$ . . . . .	60
2.3	Construction de la solution de ( $P$ ) dans $\Omega$ . . . . .	70
2.4	Remarques . . . . .	73
2.4.1	Remarque 1 . . . . .	73
2.4.2	Remarque 2 . . . . .	74
2.5	Références Bibliographiques . . . . .	76

# Résumé

Le présent travail se compose de deux parties.

Dans la première partie, on présente une description des problèmes aux limites et de quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles. On remarque que lors du passage des domaines réguliers aux domaines non réguliers, certains résultats classiques tombent en défaut. Un aperçu historique sur les travaux dans les domaines non réguliers nous a paru indispensable et d'un intérêt certain pour saisir la différence entre ces deux types de problèmes.

Dans cet aperçu on a tenté de rassembler certains exemples se rattachant à ce vaste domaine de recherche mathématique.

Dans la seconde partie, on se propose de résoudre un problème parabolique dans un domaine plan non régulier. Plus précisément, on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet

$$(P) \begin{cases} Lu = f \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

posé dans le disque  $\Omega = B(0, r)$ ,  $r > 0$  de  $\mathbb{R}^2$  décrit par les variables  $t$  et  $x$ ,

$\Gamma$  étant la frontière de  $\Omega$ , où :  $L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + c(t, x) Id$ ,

avec  $a, b, c$  des fonctions ayant une certaine régularité et  $f \in L^2(\Omega)$  donnée.

On démontre que le problème  $(P)$  admet une solution unique dans  $H^{1,2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,

Où

$$H^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in L^2(\Omega), j = 1, 2 \right\}$$

et

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^2, u|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

Notre méthode repose sur une approximation du domaine  $\Omega$  par des domaines se ramenant à des rectangles par des changements de variables réguliers. Moyennant des estimations a priori, on établit l'existence et l'unicité de la solution du problème  $(P)$  dans  $\Omega$  par le recollement des solutions.

Mots clés : Opérateur parabolique, domaine non régulier, espace de Sobolev anisotrope  $H^{1,2}(\Omega)$ .