RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure, Kouba- Alger

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

Présenté par : **HOURIA ADJAL**

Sous la direction du professeur : **TENIOU DJAMEL EDDINE**

Recouvrement du potentiel à partir de données de Cauchy partielles.

Soutenu le 02-06-2010 à l'E.N.S-Kouba devant la commission d'examen :

Mr. A. Mokrane	Professeur	E.N.S-Kouba	Président.
Mr. D. Teniou	Professeur	U.S.T.H.B	Rapporteur.
Mr. M. Bousselsal	Professeur	E.N.S-Kouba	Examinateur.
Mr. H. Ouazar	Maître de conférence	E.N.S-Kouba	Examinateur.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire , nous étudions un problème inverse concernant l'équation de Schrödinger $\Delta - q$, posée dans un domaine borné, avec potentiel q.

Soit $n \geq 3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné avec une frontière de classe C^2. Donnons $q \in L^\infty(\Omega)$, nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (\Delta - q)u = 0 \quad \text{dans}\,\Omega \\ \quad u_{|\partial\Omega} = f, \end{cases}$$

où $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Supposons que 0 n'est pas une valeur propre de $\Delta - q$ dans Ω alors notre problème a une solution unique $u \in H^1(\Omega)$, la définition habituelle de l'opérateur de Dirichlet-Neumann est donné par :

$$\Lambda_q(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ et ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Le problème inverse posé est alors de déterminer le potentiel q à partir de Λ_q.

On définit $H_\Delta(\Omega)$ par :

$$H_\Delta(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

$H_\Delta(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec la norme :

$$\|u\|^2_{H_\Delta(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On définit alors l'ensemble des données de Cauchy partielles :

$$C_{q,\epsilon} = \{(u_{|\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega_{-,\epsilon(\xi)}}); u \in H_\Delta(\Omega),\, (\Delta - q)u = 0 \; dans \; \Omega\}$$

Dans ce mémoire on montre qu'en dimension $n \geq 3$ la connaissance des données de Cauchy pour l'équation de Schrödinger sur des sous ensemble de la frontière

détermine le potentiel de manière unique.

Nous nous basons essentiellement sur l'article de Bukhgein-Uhlmann [6].

Mots clés : Problème inverse de conductivité, problème inverse de l'équation de Schrödinger, la tomographie d'impédance électrique, solutions "optique géométrique", problèmes inverses.

Abstract

In this paper, we study an inverse problem for the Schrödinger equation $\Delta - q$, posed in boundary domain with potential q. Let $n \geq 3$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a bounded domain with C^2 boundary. Given $q \in L^\infty(\Omega)$, we consider the following boundary problem :

$$\begin{cases} (\Delta - q)u = 0 \quad \text{dans}\,\Omega \\ \quad u_{|\partial\Omega} = f. \end{cases}$$

where $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. If we suppose that 0 is not an eigenvalue of $\Delta - q$ in Ω, then our problem have an unique solution $u \in H^1(\Omega)$. The usuel definition of the Dirichlet-Neumann operator is given by :

$$\Lambda_q(f) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$$

where $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ and ν is the unit-outer normal to $\partial\Omega$. The inverse problem posed is then to determine the potential q from Λ_q.

We define $H_\Delta(\Omega)$ by :

$$H_\Delta(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

$H_\Delta(\Omega)$ is a Hilbert space if equipped with the scalar product which gives the norm :

$$\|u\|^2_{H_\Delta(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

We define the set of partial Cauchy data :

$$C_{q,\epsilon} = \{(u_{|\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega-,\epsilon(\xi)}); u \in H_\Delta(\Omega),\, (\Delta - q)u = 0\ dans\ \Omega\}.$$

In this paper showing that in dimention $n \geq 3$ the knowledge of Cauchy data for Schrödinger equation, on the subset of the boundary determine, the potential uniquely.

We rely primarily on the article : Bukhgein-Uhlmann [6].

Key words : Inverse conductivity equation, inverse problem of Schrödinger equation, electrical impedance tomography, geometrical optic solutions, inverse problems .