

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'enseignement Supérieur  
et de la recherche Scientifique  
ECOLE NORMALE SUPERIEURE  
Vieux -kouba (ALGER)  
Département de mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
المدرسة العليا للأساتذة  
القبة القديمة ( الجزائر )  
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

# نظرة على الأعداد الأولية

تحت إشراف الأستاذ:  
- أحمد آيت مختار.

إعداد الطالبان:  
- مسعودة فضلي .  
- سعدية خبال.

لجنة المناقشة:

الأستاذ: حازي محمد..... رئيسا  
الأستاذ: بن عياط جيلالي..... ممتحنا  
الأستاذ: آيت مختار أحمد..... مشرفا

السنة الجامعية: 2009/2008

دفعة جوان 2009

## مقدمة و نبذة تاريخية :

لقد كانت الأعداد هي أول ما ظهر من علوم الرياضيات لكونها أقرب هذه العلوم إلى واقع الإنسان، وتمتلك بعض الأعداد خصائص سحرية وغريبة جعلتها تستولي على اهتمام كثير من العلماء و الرياضيين و منها الأعداد الأولية موضوع مذكرتنا. فيكفي أن نقول أن أكبر عدد أولي تم اكتشافه مؤخرا يحتاج لكتابته بخط صغير إلى ورقة طولها يقارب خمسة كيلومترات.

تناولنا في مذكرتنا مجموعة الأعداد الأولية كفصل أول، لنتعمق أكثر في الموضوع بإدراج أعداد Mersenne في الفصل الثاني، و نأتي على ذكر بعض الأعداد المميزة في الفصل الثالث، أما الفصل الرابع فيحتوي أرقام قياسية و بعض التخمينات، لنتعرف على أهم تطبيقاتها في الفصل الأخير.

نرجوا أننا سنزيح الستار عن جزء ولو يسير حول الأعداد الأولية، موضوعنا شيق ورحب الأفاق يستحق أن نتكلفوا معنا مشاق قراءته لتنهلوا من نبع أصيل في الرياضيات.

يعتبر الإغريق هم أول من درس الأعداد الأولية و خصائصها ، حيث كان رياضيو مدرسة Pythagore ( 500 ق.م إلى 300 ق.م ) مهتمين بالأعداد و خصائصها السحرية و المنطق العددي، فقد فهموا فكرة الأولية.

لقد أثبت العلماء الإغريق القدامى في حوالي 300 ق.م أن هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية، كما لاحظ العلماء الإغريق أيضا أن الأعداد الأولية تتوزع بطريقة غير منتظمة ( فمن الممكن أن تجد فراغات مطلقة كبيرة بين أي عددين أوليين متتاليين و من الممكن لا )

و قدم Euclide أيضا برهان على النظرية الأساسية في الحساب التي تقول : أي عدد صحيح يمكن كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية، أثبت Euclide أيضا أنه إذا كان العدد  $2^n - 1$  أولي فإن العدد  $2^{n-1}(2^n - 1)$  يكون تاما أي أنه يساوي مجموع كامل عوامله الموجبة بدون العدد نفسه، و قد استطاع الرياضي Euler (1747) أن يثبت أن جميع الأعداد التامة الزوجية هي من هذه الصورة أي  $2^{n-1}(2^n - 1)$  ، و لا يعرف لحد الآن هل يوجد عدد تام فردي، و في حوالي (200ق.م) اكتشف الإغريقي Eratosthène خوارزمية لحساب الأعداد الأولية تسمى غربال Eratosthène.

بعد ذلك كان هناك فراغ كبير في تاريخ الأعداد الأولية فيما يسمى بالعصور المظلمة و لكن التطور الهام التالي تم بواسطة Fermat مع بداية القرن السابع عشر حيث أثبت ظنية ألبرت جيرالد التي تقول : أن كل عدد أولي من الصورة  $4n+1$  يمكن كتابته بطريقة واحدة كحاصل جمع مربعين، و كان بالإمكان إثبات إمكانية كتابة أي عدد كحاصل جمع أربع مربعات، كما اكتشف طريقة جديدة لتحليل الأعداد الكبيرة و التي أثبتها بتحليل العدد  $2027651281 = 44041 \times 46161$ .

و قد أثبتت هذه النظرية نصف ما يعرف بالفرضية الصينية التي وضعت قبل 2000 سنة و التي تقول أن أي عدد صحيح  $n$  يكون أوليا إذا و فقط إذا كان العدد  $2^n - 2$  يقبل القسمة على  $n$ . النصف الآخر من هذه الفرضية خاطئ حتى الآن فعلى سبيل المثال العدد :  $2^{341} - 1$  يقبل القسمة على 341 رغم أن العدد 341 مركب ( $341 = 11 \times 31$ )

لقد قال Gauss أنه لو حصل على 15 دقيقة و هو غير مشغول فسوف يقضيها في حساب الأعداد الأولية الأطفالية ( أول 1000 عدد أولي )، و يذكر Gauss أنه حتى نهاية حياته قد حسب ثلاثة ملايين عدد أولي .