وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
- القبّة القديمة - (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Ecole normale supérieure
-Vieux Kouba - (Alger)
Département de Mathémathiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة التعليم الثانوي

المنحنيات الناقصية

إعداد:
⊛ مختاري عبد الحق
⊛ بن عامر محمد
⊛ بن يوسف سفيان

تحت إشراف الأستاذ:
★ بن عياط الجيلالي

لجنة المناقشة:

- دربال عبدلله	أستاذ محاضر	....	رئيسًا
- بن عياط الجيلالي	أستاذ محاضر	....	مشرفًا
- آيت مختار أحمد	أستاذ محاضر	....	مُمتحنًا

السنة الجامعية: *2008/2007*
مكتوب بـ: ArabTEX
دفعة جوان: *2008*

مقدمة:

المنحنيات الناقصية هي حالة خاصة من المنحنيات الجبرية[1] ولعلها من أكثر المواضيع تداولا للبحث حاليا في ميدان الجبر، وسبب ذلك يعود أساسا إلى تمتعها بخاصية مهمة والمتمثلة في خاصية الجمع الهندسي لنقاطها، هذا ما أسس لفكرة تزويدها بقانون زمرة حيث يمكن تحديدها من عدة جوانب:

- هندسيا، باستعمال قاعدة القاطع والمماس.
- جبريا، باستعمال معادلات لكثيرات حدود.
- تحليليا، باستعمال التوابع العقدية التحليلية.

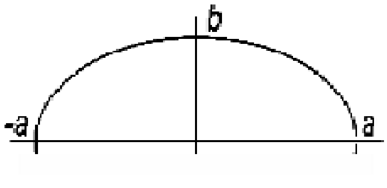
كما أن لها العديد من التطبيقات في مجالات مختلفة، إذ بالإظافة إلى أنها تعتبر نقطة التقاء لفروع الرياضيات (الجبر، الهندسة والتحليل) فهي تدخل في الميكانيك الكلاسيكي من خلال وصف حركة النواسات، وفي ميكانيك الكم من خلال نظرية الأوتار، وفي نظرية الأعداد من خلال برهان نظرية فيرما الأخيرة، وفي نظرية الترميز (*cryptologie*) من خلال مسألة تفكيك الأعداد وصناعة الشيفرات...

يبدو لنا من الإسم بأن المنحني الناقصي هو نفسه القطع الناقص، غير أن حقيقة الأمر ليست كذلك. وهذا يسوقنا إلى طرح السؤال التالي وهو كيف اكتسب المنحني الناقصي هذا الإسم ؟

إرتبط هذا الإسم أساسا بالتوابع[2] والتكاملات الناقصية[3] التي نشأت إنطلاقا من حساب طول قطع ناقص.

لنعتبر القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



طول قوس يعرف بـ $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ ، إذن يكون طول نصف قطع ناقص:

$$l=\int ds=a\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2-(1-b^2/a^2)}{a^2-x^2}}x$$

[1] هي مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق المعادلة $f(x,y)=0$ حيث f كثير حدود.

[2] أنظر تعريف $2-5$ ص 20

[3] هو التكامل $\int R(x,y)$ حيث $R(x,y)$ تابع ناطق لإحداثيات (x,y) تنتمي إلى منحني ناقصي

نضع $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ و بتغيير المتغير $x \longrightarrow ax$ فنجد

$$\begin{aligned} l &= a\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} \\ &= a\int_{-1}^{1}\frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= a\int_{-1}^{1}\frac{1-k^2x^2}{y} \end{aligned}$$

حيث $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ يمثل معادلة منحني سمي بالناقصي إنطلاقا من هذا السياق الذي يفسر سبب هذه التسمية.

باختيار مناسب للإحداثيات، يمكن تمثيل المنحني الناقصي في مستوي بمعادلة تكعيبية من الشكل:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.....(1)$$

حيث المعاملات a_1, a_2, a_3, a_4 و a_6 عناصر من حقل K يعرف عليه المنحنى، لكنها ليست معرفة بشكل وحيد.

بالعكس، من أجل معادلة تصف منحني ناقصي، يجب أن يكون المنحني غير شاذ، بمعنى أنه لا توجد نقطة رجوع، ولا نقطة مضاعفة[4] .

إذا كان الحقل K مميزته تختلف عن 2 يمكن كتابة المعادلة 1 من الشكل

$$E : y^2 = x^3 + a_2'x^2 + a_4' + a_6'.....(2)$$

حيث

$$\begin{aligned} a_2' &= a_2 + \frac{a_1^2}{4} \\ a_4' &= a_4 + \frac{a_1a_3}{2} \\ a_6' &= a_6 + \frac{a_3^2}{4} \end{aligned}$$

إذا كان K حقل مميزته تختلف عن 3 يمكن كتابة المعادلة (3) من الشكل

[4] انظر ملاحظة هامة ص 8

$$E : y^2 = x^3 + a''_4 x + a''_6,$$

حيث

$$\begin{aligned} a''_4 &= a'_4 - \frac{a'^2_2}{3} \\ a''_6 &= a'_6 - \frac{a'_2 a'_4}{3} + \frac{2a'^3_2}{27}. \end{aligned}$$

تلخيصا نقول، المنحني الناقصي على حقل K مميزته تختلف عن 2 أو 3 يعطى بمعادلة ويرستراس

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

حيث $a, b \in K$ وتحقق $-4a^3 - 27b^2 \neq 0$ [5] .

نشير إلى أن بعض الخصائص و البناءات لجمع النقاط، تعريف المنحني الناقصي وكذلك بعض تطبيقاتها تتعلق بالحقل المختار K ، وسيكون مدار البحث بنوع من التفصيل من أجل $K = \mathbb{R}$ و $K = \mathbb{C}$ ، وبسطحية من أجل $K = \mathbb{Q}$ و $K = \mathbb{Z}$ و $K = \mathbb{F}_p$.

[5] أنظر القضية $1 - 1$