الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Vieux – Kouba (ALGER)
Département de mathématiques

التكامل
جوانب نظرية وأخرى تطبيقية

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الأساسي

إعداد
- بوالطمين عتيقة
- تركي آسيا

تحت إشراف الأستاذ
محمد حازي

لجنـــــة المناقشة

الأستاذ: أحمد آيت مختار ..... رئيسا
الأستاذ: محمد الطاهر طالبي ..... ممتحنا
الأستاذ: التهامي زمولي ..... ممتحنا
الأستاذ: محمد حازي ..... مشرفا

السَّنة الدِّراسيَّة:2008/2007

دفعة جوان 2008

الفهرس

العناوين **رقم الصفحة**

مقدمة.

- لماذا هذا الاختيار؟. 6
- لمحة تاريخية. 7
- تصدير.....7

الفصل الأول: التكامل المحدود على

1.1 مكاملة التوابع الدرجية 9
1.1.1 التقسيمات..... 9
2.1.1 مجاميع داربو 10
3.1.1 التوابع الدرجية..... 14
4.1.1 تكامل التوابع الدرجية. 14
5.1.1 خواص تكامل التوابع الدرجية. 16
6.1.1 تفسير تكامل تابع درجي 17
2.1 قابلية التوابع المحدودة للمكاملة ريمانيا..... 18.
1.2.1 التكامل العلوي والسفلي حسب ريمان 18
2.2.1 خواص التطبيقين $f \to U(f)$ و $f \to V(f)$.....19
3.2.1 القابلية للمكاملة حسب ريمان 20
4.2.1 مجاميع ريمان. 22
5.2.1 خواص تكامل ريمان.....23

الفصل الثاني: التطبيقات الهندسية و الميكانيكية على التكامل المحدود

1.2 إيجاد المساحات في مجموعة الإحداثيات المتعامدة..... 26
2.2 إيجاد المساحة المحصورة بين تابعين 27
3.2 مساحة القطاع المنحني في مجموعة الإحداثيات القطبية 28
4.2 حجم الجسم الدوراني. 29

الفصل الثالث: التكاملات غير المحددة

1.3 تكامل تابع على مجال $[a,b]$. 30

2.3 الخواص الأولية للتكامل على مجال $[a,b]$ 31
3.3 تقارب تكاملات توابع موجبة.....31
4.3 مقياس مقارنة للتوابع الموجبة. 32
5.3 مقياس كوشي للتقارب. 33
6.3 التكاملات المتقاربة مطلقا والنصف متقاربة. 34

الفصل الرابع: التكاملات الثنائية وأمثلة تطبيقية.

1.4 حساب التكامل الثنائي 37
2.4 بعض خواص التكامل الثنائي..... 39
3.4 تطبيقات التكامل الثنائي 43
دليل العلماء 46
دليل المصطلحات.....49
مراجع 51
خاتمة 52

مقدمة

الحمد لله حمدا يوافي نعمة، ويدفع نقمة، ويكافئ مزيده ... سبحانك ربنا لا نحصي ثناء عليك أنت كما أثنيت على نفسك، ونشهد أن لا إله إلا أنت وحدك لا شريك لك، شهادة ندخرها عندك ليوم البعث والنشور. وصل اللهم على عبدك ورسولك – سيدنا محمد – وعلى آله وصحبه ومن نهج نهجه إلى يوم الدين.

وبعد:

ما الفخر إلا لأهل العلم إنهم على هدى لمن استهدى أدلاء
وقدر كل امرئ ما كان يحسنه والجاهلون لأهل العلم أعداء
ففز بعلم تعش حيا به أبدا الناس موتى وأهل العلم أحياء

علي بن أبي طالب.

1) لماذا هذا الاختيار؟

في مطلع شهر نوفمبر من هذا العام، وضع قسم الرياضيات، وهذا دأبه، بين أيدينا عناوين متعددة لمواضيع متنوعة تخص مذكرات التخرج. لم يسعفنا الحظ، بعد إجراء القرعة، في الحصول على الموضوع الذي كنا نتطلع إليه، مما حدا بنا إلى التوجه إلى الأستاذ الفاضل محمد حازي طلبا للبديل الذي يروقنا ويلبي غايتنا... اقترح علينا مجموعة من المواضيع شد انتباهنا منها موضوع التكامل. لدينا عليه معلومات بسيطة زانها وزادها رونقا وتشويقا تلك النظريات الرائعة التي درسناها في السنة الثالثة في سياق الحساب التكاملي الموسع من خلال وحدة التحليل العقدي التي كان يشرف عليها الأستاذ الفاضل محمود سعود.

فنحن جئنا هذا الموضوع ننشد فيه غايات ثلاث:

- تفصيلية لمفاهيم وبراهين لم يسعفنا الحظ في استيعابها،
- تكميلية لأخرى لم نتطرق إليها في مشوارنا الدراسي،
- توسيعية وتطبيقية لمفاهيم درست سابقا.

زد إلى ذلك الجوانب التاريخية والتثقيفية التي يزخر بها هذا الموضوع.

2) لمحة تاريخية:

لا شك أن الكثير من العلوم ظهرت بوادرها منذ عصور قديمة جدا. ومن هذه العلوم الرياضيات التي من بطونها التكامل. فهناك اعتقاد أن التكامل ظهر في زمن ازدهار الحضارة الإغريقية، وكان ذلك عندما حاول علماء الإغريق إيجاد بعض المساحات والحجوم، مثل مساحة الدائرة وحجم الاسطوانة، بطرق تشبه إلى حد كبير طرق التكامل المستخدمة في زمننا هذا، فالتكامل في بداياته أساسا عبارة عن قوالب وقوانين لمساحات وحجوم.

فقد درس أرخميدس (Archimède) في القرن الثالث قبل الميلاد ما ندعوه اليوم بتكامل القطع المكافئ. ظهرت هذه المسألة المدروسة من قبل أرخميدس في حالات عديدة تخص حساب المساحات ، وكان للعرب أيضا محاولات في دراسة هذه المسألة.

عرف الرياضيون بين القرنين السابع عشر والثامن عشر خصائص كثيرة حول المساحات والتكاملات دون التوصل إلى تعريف عام. فقد أعطى فيرما (Fermat) عام 1636م قيما لتكاملات توابع أسية بفضل خصائص كثيرة خاصة بهذه التوابع.

في القرن السابع عشر ابتكر " كيبلر وهيجنز وديكارت (Descartes, Kepler, Huygens) بعض الحالات الخاصة للتكامل. وفي القرن الثامن عشر قدم العالم السويسري أولر (Euler) مفهوم التكامل الجزئي وهو تكامل مرتبط بالدوال ذات متغيرين أو أكثر.

والواقع أن تعريف التكامل يرتكز بشكل جوهري على مفهوم التابع الذي لم يكن معروفا بدقة. وقد كانت لأولر أولى محاولة لتعريف التابع في القرن الثامن عشر. وفي ذلك الوقت، تنبأ ديريكليت (Dirichlet) أنه يمكن مكاملة تابع شرط ألا يكون متقطعا كثيرا.

يعد الرياضي المهندس ريمان (Riemann) أول من أثبت أن التكامل (المحدود) هو عبارة عن المساحة تحت المنحنى على مجال المكاملة، وذلك عندما قام بتقسيم المساحة وفق مساحات مستطيلات متتالية متناهية في الصغر ثمّ بيّن أنّ التكامل ما هو إلا مجموع هذه المساحات. وقد قدم خصائص التكاملات في بحث سنة 1953م.

شهدت نظرية التكاملات بداية حقيقية في مطلع القرن العشرين مع لوباڤ (Lebesgue) و ستلجاس (Stieljes).

3) هيكلة

اعتمدنا في هذا البحث على دراسة نظرية وأخرى تطبيقية بوبناها على أربع فصول.

يتضمن الفصل الأول التكاملات المحدودة في . يشمل تعار يف ومبرهنات إضافة إلى بعض الخصائص الأساسية.

عرضنا في الفصل الثاني مجموعة من التطبيقات الهندسية والميكانيكية للتكامل المحدود.

أمّا الفصل الثالث فقد خصصناه لدراسة التكاملات غير المحدودة على □، حيث قمنا بتقديم بعض التعاريف والنظريات الخاصة بها.

ركّزنا في الفصل الرابع على التكاملات الثنائية حيث تعرضنا فيه إلى التعاريف والمبرهنات والخصائص التي سمحت لنا قدرتنا بالوصول إليها إضافة إلى أمثلة تطبيقية.

جئنا في نهاية الموضوع بخاتمة وذيلناه بدليل للعلماء المذكورين وأهم المراجع المعتمدة.