مقدمة

إن تنامي سرعة الحساب وانخفاض تكلفة تخزينه بالكمبيوتر سمحت بالتعرض وابتكار طرق لحل مسائل كان حجمها الكبير عائقا، وذلك منذ الحرب العالمية الثانية. من بين المسائل نجد مسائل الأمثَلة التي شهدت في السنوات الأخيرة توسعا كبيرا و هذا لأهميتها (لأنها شملت مستويات متنوعة كالبيولوجي، وسائل الإعلام والاتصال، والإعلام الآلي ...)، وبالتالي طرق جديدة مقترحة.

لهذا النوع من المسائل معنى رياضياتي و هدف عملياتي مما أدى إلى ابتكار أدوات رياضية وخوارزميات، وقد اعتبرت ككيان معرفي ثري نظريا هو البحث العملياتي Operational Research .

البحث العملياتي هو مجموع تقنيات رياضية تسمح بنمذجة ومعالجة المسائل التنظيمية و إعطاء وسيلة أخذ القرارات التي تطرح في عالم المؤسسات، نذكر منها: مسائل النقل، مسائل تحديد مواقع التخزين و التفريغ، مسائل تسيير المخزون أو الطاقة (محروقات، غاز، أو موارد أخرى..).
هذه النمذجة تقود إلى دراسة برامج خطية لمسائل الأمثَلة الأساسية التي تكون عادة ذات طبيعة توافقية أو ممثلة ببرنامج خطي Linear Programming من الشكل:

$$(LP)\begin{cases} \max Z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حيث A مصفوفة m n معاملاتها صحيحة، $c \in \mathbf{Z}^n$ ، $b \in \mathbf{Z}^m$ و $\max Z$ تابع الهدف.

من الواضح أن مجموعة الحلول المحققة لـــ (LP) هي ضمن المجموعة $P(b) = \{x : x \in \mathbf{R}_+^n, Ax = b\}$ والتي نسميها متعدد الوجوه المرتبط بالبرنامج الخطي (LP).

إذا حللنا هذا البرنامج كما هو فإنّنا يمكن أن نجد حلّا أمثَلاً بمركّبات غير صحيحة، ولكن يحدث أن يكون البرنامج نموذجا لمسالة واقعية وحسية مثل مسألة أمثَلة إنتاجية بدلالة العمّال أو الآلات (المجهول يمثل عدد العمال أو عدد الآلات) فلا يمكن أن نتكلّم عن نصف عامل أو رُبُع آلة ، هنا نضيف شروطا جديدة تضمن أن تجعل الحلول صحيحة، فنحصل على البرنامج الخطي بمتغيرات صحيحة Integer Linear Programming التالي:

$$(ILP)\begin{cases} \max z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \, ; x \in \mathbf{Z}^n \end{cases}$$

أول فكرة يمكن أن تخطر على البال هي حل البرنامج المستمر أي $x \geq 0$ (دون الشرط $x \in \mathbf{Z}^n$)، ثم نأخذ القيمة الصحيحة الأقرب (التقريب إلى الوحدة) للحل الأمثل غير الصحيح، و لكن هذه الطريقة غير مجدية لأنه يمكن تضييع الحل الأمثل أو حتى تحقيق الحل للشروط المطلوبة.

مثال:

$$\begin{cases} \max Z = x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -8x_1 + 10x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بتطبيق خوارزمية المبسط على البرنامج يكون الحل الأمثل $x_2 = \frac{9}{2}$ ، x_1=4. و بأخذ القيمة الصحيحة الأقرب يصبح ليس حلا محققا x_2=4 ، x_1=4.

و إذا اعتبرنا البرنامج بأعداد صحيحة يكون الحل الأمثل هو: x_2=2 ، x_1=1 .

طرح المشكلة

كيف المرور من الحل الصحيح إلى الحل المستمر؟

أو كيف الحصول على الحلول الصحيحة ؟ أو بالأحرى متى نحصل على حل صحيح؟

لنعتبر البرنامج الخطي:

$$(LP)\begin{cases} \max Z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

حيث: A,b,c ذات معاملات صحيحة.

لتكن B مصفوفة الأساس الأمثل من A ، محددها $d = |\det(B)|$ صحيح غير معدوم.

نسمي $(x_i, i \in I)$ المتغيّرات الأساسية و $(x_j, j \in J)$ المتغيّرات خارج الأساس، فيكون:

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A_I x_I + A_J x_J = Bx_I + A_J x_J = b \\ &\Leftrightarrow Bx_I = b - A_J x_J \\ &\Leftrightarrow x_I = B^{-1}b - B^{-1}A_J x_J \end{aligned}$$

لأنّ: $x = \begin{pmatrix} x_I \\ x_J \end{pmatrix}$ و $A = (A_I, A_J) = (B, A_J)$.

عبارة قلب المصفوفة B تستدعي أن يظهر في المقام d محدد المصفوفة B، ولكن المتغيرات خارج الأساس معدومة أي: $x_j = 0, \forall j \in J$، فيكون $x_I = B^{-1}b$.

المشكل الذي يواجهنا يتلخص في ظهور محددات المصفوفات الأساسية في المقام لذلك نفكر في مجموعة المسائل الخطية التي مصفوفاتها لها شكل ما والتي نسميها **المصفوفات وحيدة القياس.**

في بحثنا هذا، الجزء الأول عبارة عن **فصل تمهيدي** يتم فيه عرض عموميات حول البرمجة الخطية وبعض المفاهيم حول نظرية البيانات؛ يليه **الفصل الأول** الذي يهتم بتعريف المصفوفات وحيدة القياس وخصائصها المميزة، أما **الفصل الثاني** يشير إلى بعض نماذجها ونهتم أكثر بمصفوفات الشبكات في **الفصل الثالث** عرض لأهم الطرائق للتعرف على المصفوفات وحيدة القياس، ثم **الفصل الرابع** عبارة عن تطبيق لخاصية المصفوفات وحيدة القياس على مسألة واقعية. ونختم **بخلاصة** لأهم النتائج.