

Ministère de l'Enseignement supérieur  
et de la recherche scientifique  
Ecole Normale Supérieure  
Vieux Kouba(Alger)  
Département de Mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
المدرسة العليا للأساتذة  
القبة القديمة (الجزائر)  
قسم الرياضيات

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

## حول التكاملات المتعددة وحساب الحجم والسطوح

إعداد:

عبد الجبار علاوة  
فاروق أشلاف  
نور الدين بوزيان

تحت إشراف الأستاذ:  
لحسن وعزار

### لجنة المناقشة

الأستاذة: أنسة حربلي..... رئيسا  
الأستاذ: توفيق موساوي..... ممتحنا  
الأستاذ: لحسن وعزار..... مشرفا

تاريخ المناقشة 24 جوان .

السنة الجامعية 2007 - 2008  
(دفعة جوان: 2008)

## الفهرس:

- 1.....مقدمة
- 2.....1-I-أرخميدس وقياس الدائرة.
- 2.....1-1-I-حياة أرخميدس.
- 2.....2-1-I-أهم مؤلفاته
- 2.....2-1-I-عمل أرخميدس في قياس الدائرة (مساحة، محيط)
- 2.....2-1-I-المبرهنات الثلاث لأرخميدس حول قياس الدائرة (مساحة، محيط)
- 3.....3-2-I-رسالة ابن الهيثم في مساحة الكرة.
- 16.....16-II-عموميات حول التكاملات المتعددة في  $n$
- 22.....22-II-1-تعريف البلاطة في  $n$
- 22.....22-II-2-تعريف مجموعة قابلة للتبليط
- 23.....23-II-3-تعريف مجموعة قابلة للقياس – حسب ريمان-
- 23.....23-II-4-تعريف مجموعة مهمة – مفهوم ريمان-
- 25.....25-II-5-التكامل على مجموعة من  $n$
- 25.....25-II-6-نظرية
- 28.....28-II-7-حساب عملي لتكامل  $f$  على  $E \subset G$  في  $n$
- 28.....28-II-1-7-التكامل الثنائي
- 30.....30-II-2-7-التكامل الثلاثي
- 31.....31-II-8-بعض خواص التكاملات على  $n$
- 32.....32-II-9-طريقة تغيير المتحول في التكاملات من  $n$
- 33.....33-II-10-بعض تغييرات المتحول الشهيرة
- 33.....33-II-10-1-تغير المتحول في  $2$
- 34.....34-II-10-2-تغير المتحول في  $3$

- III- حساب المساحات في  $i^2$  و الحجم في  $i^3$  ..... 37
- III-1- نظرية كافاليري في التكامل..... 37
- III-2- طريقة حساب حجم أو مساحة محاكية لأخرى..... 38
- III-3- حساب حجوم بعض الأشكال الهندسية الشهيرة في  $i^3$  باستعمال..... 39
- III-3-1- حجم الكرة  $B_3(0,R)$  بطريقة كافاليري..... 39
- III-3-2- حساب حجم أسطوانة باستعمال نظرية كافاليري..... 40
- III-3-3- حساب حجم شكل بيضوي..... 41
- III-3-4- حساب حجم الطارة..... 43
- III-3-5- حجم الهرم..... 44
- III-3-6- حساب حجم المخروط..... 45
- III-3-7- حجم الجسم الدوراني..... 46
- III-4- التوزيع Gamma..... 47
- III-5- حجم كرة في "  $\square$  "..... 49
- IV- دراسة السطوح و حساب التكامل على سطح من  $\square^3$  ..... 51
- IV-1- نظرية التوابع الظمنية..... 51
- IV-2- الكتابة الصريحة لسطح بسيط..... 51
- IV-3- الكتابة الوسيطة لسطح بسيط..... 51
- IV-4- المستوي المماس لسطح من  $\square^3$  ..... 52
- IV-5- تعريف معادلة المستوي المماس عند نقطة..... 52
- IV-6- كيفية تعريف شعاع عمودي على المستوي المماس..... 52
- IV-7- التكامل على سطح من  $\square^3$  وحساب مساحته من  $\square^3$  ..... 55
- IV-7-1- التكامل على سطح معطى وسيطيا..... 55
- IV-7-2- التكامل على سطح معطى صراحة..... 57
- IV-7-3- التكامل على سطح معطى ضمنيا..... 57
- IV-8- الشكل التربيعي الأول في التكامل على سطح..... 58

- 59-IV-9 حساب مساحة سطح محاكية لأخرى.....59
- 59-IV-10 تحويل تكامل على مساحة إلى التكامل على حافة.....59
- 59-IV-10-1 نظرية قرين.....59
- 61-IV-10-2 نظرية التباعد.....61
- 64-IV-10-4 تعميم صيغة قرين إلى  $\mathbb{R}^3$ .....64
- 65-IV-11 حساب مساحة بعض السطوح الشهيرة في  $\mathbb{R}^3$ .....65
- 65-IV-11-1 حساب مساحة سطح الكرة  $B(0, R)$  من  $\mathbb{R}^3$ .....65
- 66-IV-11-2 حساب مساحة سطح المخروط.....66
- 66-IV-11-3 حساب مساحة الطائرة.....66
- 67-IV-11-4 سطح الجسم الدوراني.....67
- 69.....خاتمة

## مقدمة:

اقتصرنا في هذه المذكرة على طرح علم الهندسة و ما مدى فعاليته في قياس المساحات و الحجوم، فلقد استعملها مثلا المصريون قديما في تقسيم مساحات الأراضي. وتعتبر الرياضيات من أهم العلوم التي اهتم بها العرب - على غرار الأمم الأخرى- وأعطتها من العناية و الاهتمام ما جعلتها عنصرا فعالا في الحياة العملية والاجتماعية. ومما توصل إليه علماء الرياضيات الحديثة في هذا الصدد استخدام طريقة التكامل في الحسابات الأنفة الذكر، وكان اهتمامنا باختيار هذا الموضوع تحت عنوان "حول التكاملات المتعددة وحساب الحجوم والسطوح".

الإشكالية: إن صياغتنا للإشكالية كانت وفق طبيعة الموضوع المراد دراسته وهي كالتالي:

ماهي طرق وكيفيات حساب الحجوم والسطوح في الفضاء؟  
ولحل هذه الإشكالية قسمنا عملنا هذا إلى أربعة فصول، فتطرقنا في الفصل الأول إلى لمحة تاريخية تضمنت أعمال أرخميدس في قياس الدائرة وابن الهيثم في حساب حجم الكرة، وفي فصلنا الثاني إقتصرنا على مجموعة من التعاريف و النظريات الخاصة بالتكاملات المتعددة في  $\mathbb{R}^n$ ، أما الفصل الثالث فقد خصصناه لحساب التكاملات في  $\mathbb{R}^2$  وحساب الحجوم، وختمنا عملنا هذا بفصل رابع تضمن التكاملات على السطوح وحساب مساحة سطح.