وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
- القبّة القديمة - (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Ecole normale supérieure
-Vieux Kouba - (Alger)
Département de Mathémathiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة التعليم الثانوي

تطور المعادلات التفاضلية الجزئية في القرن العشرين

إعداد:
- البحري زهور
- يوسف أكرور
- مهدي نجمة

تحت إشراف الأستاذ:
- عبد الحفيظ مقران

لجنة المناقشة:

- أبو بكر خالد سعد الله	أستاذ التعليم العالي	.....	رئيسًا
- عبد الحفيظ مقران	أستاذ التعليم العالي	.....	مشرفًا
- يوسف ثرثور	أستاذ محاضر	.....	مُمتحنًا
- عبد العزيز شوتري	أستاذ مكلف بالدروس	.....	مُمتحنًا

السنة الجامعية: *2008/2007*
مكتوب بـ: Arab TEX
دفعة جوان: *2008*

المحتويات

1 المقدمة 4

2 المعادلات التفاضلية 7

1.2 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى 7

1.1.2 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة 7

2.1.2 تعيين الثابت التكاملي 8

2.2 المعادلة التفاضلية الخطية 8

3.2 المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى 10

1.3.2 بنية مجموعة الحلول 10

2.3.2 طريقة حل المعادلة المتجانسة 10

3.3.2 الحل الخاص بتغيير الثابت 11

4.2 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة 12

1.4.2 طريقة حل المعادلة المتجانسة 13

2.4.2 الحل الخاص لـ (E) 15

3.4.2 طريقة تغيير الثوابت 16

3 المعادلات التفاضلية الجزئية 17

1.3 المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة 18

2.3 المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى 19
1.2.3 تبديل المتغيرات 19
2.2.3 طريقة الخواص 20

3.3 المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية 21

4.3 بعض تطبيقات الـ EDP 22
1.4.3 الفيزياء 22
2.4.3 البيولوجيا 23
3.4.3 معالجة الصور 24

4 نماذج المعادلات التفاضلية الجزئية في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر 29

5 طرق حساب الحلول في القرن التاسع عشر 32

1.5 طريقة فصل المتغيرات و نسبة حلول المعادلات الخطية 32

2.5 التفاعل بين دراسة الدوال التوافقية الحقيقية ذات متغيرين والدوال التحليلية لمتغير عقدي وحيد 33

3.5 طريقة دوال Green 33

4.5 مبدأ Green لمعادلة Laplace 33

5.5 طرق السلاسل الصحيحة 34

6 تطور النظريات الدقيقة للحل في العقود الأخيرة للقرن التاسع عشر 35

7 الفترة 1890 – 1900 : بداية الـ EDP الحديثة وعمل Poincaré 38

8 برامج Hilbert 39

9 Bernstein وبداية التقديرات الأولية 41

10 قابلية الحل للمعادلات الناقصية الخطية من الدرجة الثانية 45

11 نظرية Leray-Schauder 47

12 تصنيف Hadamard لـ EDP و المسائل ذات القيم الحدية 49

13 الحلول الضعيفة 52

14 فضاءات Sobolev 55

15 نظرية Schwartz للتوزيعات 58

16 المراجع 60

قائمة بأهم الرموز المستعملة 64

قائمة بأهم المصطلحات المستعملة 65

قائمة أسماء أهم علماء الرياضيات المذكورين 68

الفصل 2

المقدمة

دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية EDP بدأت في القرن الثامن عشر في عمل Euler، Dalembert Lagrenge و Laplace كنمط رئيسي في الدراسة التحليلية لنماذج في الفيزياء. تحليل النماذج الفيزيائية بقي حتى يومنا هذا أحد الإهتمامات الأساسية في تطوير المعادلات التفاضلية الجزئية EDP .
البداية كانت في القرن التاسع عشر، بعمل Rimann،وقد أصبحت الـ EDP أيضا الأداة الأساسية في الفروع الأخرى من الرياضيات.

هذه الثنائية من وجهات النظر كانت مركزة إلى دراسة الـ EDP خلال القرن التاسع عشر والعشرين. من جهة لدينا دائما علاقة مع نموذج فيزيائي ،أو هندسي أو مجالات تطبيقية أخرى. ومن جهة أخرى هناك التطبيقات الإحتمالية للمعادلات التفاضلية الجزئية EDP التي دارت في أغلب الأحيان مستقلة لكي تكون أداة أساسية في تطوير فروع أخرى من الرياضيات. هذا المنظور الثنائي ذكر بشكل واضح للمرة الأولى من قبل Poincaré [PO1] في ورقته الهامة في 1890 .

أكّد Poincaré أنّ العديد من المسائل الفيزيائية المختلفة تظهر في مجالات متعددة (مثل الكهرباء، الحرارة، الهيدروديناميكا، المغناطيسية، البصريات، المطاطية، ...إلخ) لها تشابه عائلي " شبه عائلة " ، ذكر Poincaré أنها يجب أن تعالج بطرق مشتركة.

شرح كذلك أهمية إمتلاك براهين دقيقة ، على الرغم من أن النماذج هي فقط تقريب للحقيقة الفيزيائية.

أولا: عالم الرياضيات يرغب في إنجاز بحثه بالدّقة و الشكل المقنع.

ثانيا: النظرية الناتجة تطبق كأداة في دراسة مجالات رياضية رئيسية، مثل تحليل Rimann للتوابع الآبلية. و في نفس الورقة نجد فهما عميقا لمختلف معادلات الفيزياء الرياضية التي تلعب دورا هاما ضمن الرياضيات نفسها وهذا في الحقيقة هو الدور الأساسي للـ EDP .

إن المثال الكبير الأول هو تطبيق Rimann النظري محتمل الحجّة،إستعمالات مبدأ Dirichlet في تطوير نظرية عامة للدوال التحليلية بمتغيّرات عقدية،والنظرية التي تعطي علاقة سطوح Rimann ·

التعميم الأخير كان إمتدادا بدأ بنظرية Hodge لطرائق المقارنة في دراسة الهندسة الجبرية ذات عدة متغيرات· أدى إلى مثل هذه التطورات كنظرية Rimann-Roch و نظرية دليل Atiyah-Singer ·

مثال رئيسي آخر هو الهندسة التفاضلية، خصوصا في سماتها العامة، مثل السطوح الأصغرية والمسائل التي تعطى مع معادلات Monge-Ampere ، حفّزت تحليل الـ EDP خاصة المعادلات اللاخطية·

من الجهة الأخرى إنشاء الطرق التحليلية القوية في EDP (التقديرات الأولية) جعلت من الممكن الإجابة عن الأسئلة الأساسية المفتوحة في الهندسة التفاضلية· مما ثمّن حقل الهندسة التفاضلية في العقود الأخيرة للقرن العشرين·

من الناحية الأخرى نظرية جمل المعادلات التفاضلية الجزئية من الدرجة الأولى كانت في تفاعل مع نظرية Lie في أصل أعمال S.Lie الأولى التي بدأت في 1870 وأعمال E.Cartan في بداية 1890 ·

نظرية الأشكال التفاضلية الخارجية لعبت دورا مهما جدا منذ تقديمها وإستعمالها من قبل E.Cartan و مقدمّة نظرية الحزمة من قبل Leray في 1945 أدت إلى إتحاد مهم لأفكار و تقنيات متنوعة من نظريات الطوبولوجيا الجبرية و التفاضلية، الهندسة الجبرية، الجبر المتشابه و التحليل المحلي؛ (أنظر كتاب Kashiwar و schapira)

الحاجة لمعالجة دقيقة لحلول الـ EDP و مسائل القيم الحدية (BVP) ، كان حافزا قويا في تطوير الطرق الأساسية في التحليل الحقيقي و التحليل التابعي منذ بداية القرن العشرين·

تطوير التحليل التابعي كان قد عُرض بشكل واضح من قبل J.Diedonne في تأريخه للتحليل التابعي·

كما أن الدراسة المنظمة لـ EDP الخطية و قيمها الحدية في بداية الخمسينات و الستينات أدت إلى توسع كبير للتقنيات في تحليل Fourier· ونظرية المؤثر التكاملي الشاذ، التي بدأت في الثلاثينات بالإرتباط مع الـ EDP ، أصبحت من خلال نظرية Calderon-Zygmand وإمتداداتها إحدى المواضيع الأساسية في التحليل التوافقي·

في نفس الوقت تطبيقات تحليل Fourier على الـ EDP من خلال عدة أدوات مثل معامل تفاضلي مزيف و تكامل Fourier ، أعطى إمتدادا كبيرا لنظرية الـ EDP الخطية·

المثال الآخر هو التفاعل بين الـ EDP و الطوبولوجيا· والذي أول ما ظهر في العشرينات و الثلاثينيات حيث كان موجها نحو إيجاد حلول عامة للـ EDP اللاخطية، خصوصا التي تظهر في ميكانيك السوائل، كعمل Laray في العشرينيات، نظريات المتغيرات لـ M.Horse و Ljusternik -Schnirelman ونسبة Leray- Schauder في الفضاءات ذات البعد غير المتنهي في الثلاثينيات كامتداد كلاسيكي لنسبة Brouwer ·

بعد 1960 قُدّمت وجهة نظر مختلفة في دراسة الطوبولوجيا التفاضلية أعطت نتائج مهمة مثل نظرية Bott الدورية، وبرهان Smale لتقدير Poincaré (للبعد ≤ 5) .
كما أن لتحليل Yang و Mills للـ EDP دور أساسي في تقدم طوبولوجيا الأبعاد الصغيرة.

الإرتبط الأساسي الآخر الذي يتظمن الـ EDP كأداة محورية بين القضايا الرياضية الأساسية و التطبيقات العملية يقع في حقل النماذج الإحتمالية، ما تسمّى بالعمليات العشوائية هو ظهور الدراسة الأولى للحركة البروانية Brownian من قبل Wiener (في العشرينيات و بداية الثلاثينيات) والذي مدد من طرف Ito، Levy، Kolmogrov، و آخرين إلى نظرية عامة من المعادلات العشوائية التفاضلية. والتي نتج عنها مؤخرا برنامج Malliavin بإستعمال فضاءات Sopolev ذات البعد اللانهائي.

هذه النظرية توصل مباشرة إلى EDP للإنتشار، مثل معادلة الحرارة. كما أن لهذه المعادلات (المعادلات العشوائية التفاضلية) الدور الرئيسي في تسعير الخيار في المالية.

المثال المميز الآخر هو العلاقة بين الهندسة الجبرية و نظرية الحل لـ Korteweg De Vries للـ EDP .
هذه المعادلة قدمت في 1896 كنموذج لموجات الماء و قد جُدِّدت بشكل جيد من قبل M.Kruskal و معاونيه في الستينات، دراسة تقارب حلول المعادلات اللاخطية للتطور، خصوصا تلك التي تحكم تدفق السائل وحركة الغاز، أصبحت ميدانا مهما للتفاعل بين الـ EDP و تيار من المواضيع في نظرية الفوضى.

هناك العديد من المجالات الأخرى من البحث المعاصر في الرياضيات التي تلعب فيها الـ EDP دورا مهما من بينها البعد اللانهائي للتمثيل الجماعي، النظرية الأساسية لبناء حقل الكم، الفضاءات المتجانسة والفيزياء الرياضية.

أخيرا، هذه يمكن أن تكون النقطة العلمية الأكثر أهمية في مجال حسابات حلول الـ EDP وتتمثل في الإهتمام الرئيسي في إستعمال الحسابات العلمية. والذي كان قد أكد poincaré عليه في 1890 ، بالرغم من كون التقنيات العلمية المتوفرة في وقته محدودة جدا كما لاحظ poincaré ذلك بنفسه.

اليوم بوصول الحواسب الممتازة أصبح الحساب أداة أساسية في التقدم العلمي.