الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية ك/رقم.......

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la recherche Scientifique
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
Vieux –kouba (ALGER)
Département de mathématiques

مذكرة بعنوان:

الدالة الأسية في الفضاءات المجردة وتطبيقاتها

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

إعداد الطلبة:
- خوجة سميرة
- محمدي نعيمة

إشراف الأستاذ:
د. أبو بكر خالد سعد الله

لجنـــة المناقشة:

أ.عبد الحفيظ مقران	: أستاذالتعليم العالي	رئيسا.
أ.وعزار أحسن	: أستاذ محاضر	ممتحنا.
أ.أبو بكر خالد سعد الله	: أستاذ التعليم العالي	مشرفا.

السنة الدراسية 2006 / 2007
دفعة جوان

الفهرس

المقدمة

تتنــــاول هــذه المذكرة موضوع الدالة الأسية في الفضاءات المجردة. وقــد حاولنا قدر المستطاع جمع بعض المفاهيم والتعاريف والخصائص المتعلقة بهذه الــدالة.

يتوزع هذا العمــل إلى ثلاثة فصول :

يــــقدم الفصــــل الأول مختصــرًا لبــعض المفـــاهيم الأوليـــة المـــستعملة في بحثنا.

أمــــا الفصــــل الثـــاني فيتنـــاول تــعريفـــات وخـــواص متعلقـــة بالــدالة الأسيـــة فـــي فضــــاء بـــانـــاخـــي.

وخصـــص الفصــــل الثـــالــث للتطبيقـــات المختلفـــة للـــدالة الأسيــــة الــتي مـــن بينــها حــلول معـــادلات تفاضليــة خطيــة متجانســـة.

وأنهينـــا المــذكـــرة بوضـــع دليــــل للمصطلحـــات المستعملـــــة إضافـــــة إلـــى الرمـــوز المتـــداولة فـــي الريـــاضيات والمستعملـــة فـــي بحثنا.

وإثــراءً للــموضوع ضمّنــا المــذكــرة بلــمحـــة عـــن الـــدالة الأسيـــة فـــي فضــــاء مجــرد.

لــقد عرفــت الـــدالة الأسيـــة عند Heraclitus كــدالــة متعلقـــة بالــزمــن $t \to T(t)$ ثمّ عرّفت بالعــلاقــة :

$$T(t) = \exp(tA).$$

نعلم أن الـــدالة الأسيـــة السلميـــة $t \to T(t\,a)$، تحقــق المعادلة التابعية :

$$f(t+s) = f(t).f(s) \qquad \text{(أ)}$$

كمــــا تحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) \qquad \text{(ب)}$$

العبارة (أ) أستعملت لأول مرة من طرف Napier John (1550-1617). أما (ب) فقد أستعملت من طرف Leonhard Euler (1707- 1783) الذي وضع النتائج السابقة على الشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n=e^t.$$

حيث $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

فمفهوم الدالة الأسية بسيط من خلال العلاقة (ب)، إذن الدالة الأسية السلمية هي عبارة عن دليل ومرشد في الحالات غير المعروفة.

وقد أستعمل دستور تايلور من طرف Joseph Louis (1772) و Lagrange (1736-1830) كما يلي :

$$g(s+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n g^{(n)}(s)}{n!}$$

$$g(s+t)=\exp\left(t\frac{d}{dt}\right)g(s)$$

وإذا نشرنا الدالة الأسية ذات العبارة $e^{h\frac{d}{dx}}f(x)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} e^{h\frac{d}{dx}}f(x) &= (1+h\frac{d}{dx}+\frac{1}{1.2}h^2\frac{d^2}{dx^2}+\alpha c)f(x) \\ &= f(x+h). \end{aligned}$$

إن إكتشاف التوابع التحليلية ونظرية الزمر الجزئية الحديثة منذ 200 سنة، أعطى تفسيرًا فعالاً وذلك بإستعمال المفهوم الحديث للدالة الأسية الذي أثبت صحة دستور لاغرانج الذي إفترض أن f قابلة للمكاملة، وأن الزمرة الجزئية ناتجة من المشتق الأول في فضاء الدوال القابلة للمكاملة، حيث أنه لم يهتم بإثبات هذا الدستور بل إستعمله بمهارة كبيرة، وكان مهتما بحساب الرموز المتعلقة بالعمليات المتوقعة في المعادلات التطورية.

إكتشف Lagrange بأن دستوره قادر على تفسير بعض النظريات صعبة البرهان. ومن بين الكتّاب الذين إستعملوا هذا الدستور :