

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Ecole normale supérieure
Vieux Kouba(Alger)
Département de Mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبلة القديمة (الجزائر)
قسم الرياضيات

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

نظرية النقاط الصامدة في فضاءات
سوبولاف و تطبيقاتها على المعادلات
التفاضلية ذات المشتقات الجزئية

إشراف الأستاذ :
موساوي توفيق

إعداد الطالبات :
بن سعيدان خيرة هاجر
خليل يمينة
سلماني فوزية

لجنة المناقشة

أ. بسحنون زهيرة : أستاذة مكلفة بالدروس رئيسة
أ. باشوش كمال : أستاذ مكلف بالدروس ممتحنا
أ. موساوي توفيق : أستاذ مكلف بالدروس مشرفا

السنة الجامعية 2007-2008
(دفعة جوان: 2008)

فهرس

01مقدمة

الفصل الأول

03.....I- مفاهيم عامة

الفصل الثاني

II- فضاءات سوبولاف *Sobolev* وصياغة تغيرات المسائل التناقضية في النهايات

06..... ذات البعد 1

07..... II 1- فضاء سوبولاف $W^{1,p}(I)$ *Sobolev*

09..... II 2- فضاء سوبولاف $W^{m,p}(I)$ *Sobolev*

09..... II 3- فضاء سوبولاف $W_0^{1,p}(I)$ *Sobolev*

الفصل الثالث

III- فضاءات سوبولاف *Sobolev* وصياغة تغيرات المسائل التناقضية في

12..... النهايات ذات البعد N

12..... III 1- فضاء سوبولاف $W^{1,p}(\Omega)$ *Sobolev*

14..... III 2- فضاء سوبولاف $W^{m,p}(\Omega)$ *Sobolev*

14..... III 3- متباينات *Sobolev*

15..... III 4- فضاءات سوبولاف $W_0^{m,p}(\Omega)$ *Sobolev*

17..... III 5- التوزيعات

18..... III 6- تفسير الصياغة التغيرية

الفصل الرابع

21..... IV- نظريات النقطة الصامدة

21..... IV 1- نظرية النقطة الصامدة *Banach*

- 21.....**Brouwer** -2. IV نظريات النقطة الصامدة
- 22..... **Schauder** -3. IV نظرية النقطة الصامدة لـ
- 22.....**Tychonov** -4. IV نظرية النقطة الصامدة لـ
- 23.....-5. IV بعض نظريات النقطة الصامدة.

الفصل الخامس

- 24.....-V نظرية جديدة للنقاط الصامدة مع شرط التراص غير محقق
- 24.....-1. V نظرية النقطة الصامدة الجديدة.

الفصل السادس

- 28.....-VI تطبيقات
- 28.....-1. IV المسألة التناقضية مع القوة الحرجة لـ **Sobolev**
- 34.....-2. IV حل مسألة معينة بطريقة النقطة الصامدة لشودر **Schauder**
- 39..... خاتمة
- 40..... ملحق
- 43..... أهم الرموز المستعملة
- 44..... المصطلحات
- 49..... المراجع

مقدمة

تتناول هذه المذكرة نظرية النقاط الصامدة في فضاءات سوبولوف *Sobolev* وتطبيقاتها في المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية، حيث أن مفهوم النقطة الصامدة لتطبيق ما معرف من المجموعة A نحو أخرى B يتمثل في الحل u للمعادلة $Tu = u$. نستطيع كتابة كل معادلة حقيقية $F(u) = 0$ على شكل معادلة نقطة صامدة، لذا فنظرية النقطة الصامدة بجعبتها وسائل مفيدة لإثبات وجود حل لبعض المعادلات.

يتضمن هذا العمل صنفا هاما من الفضاءات، وتأتي هذه الأهمية من كون إنتماء تابع u للفضاء $L^p(\Omega)$ حيث Ω مفتوح من \mathbb{R}^n لا يعني إنتماء مشتقه بالمفهوم التوزيعي لهذا الفضاء، لذلك كان من الضروري البحث عن صنف من الفضاءات التي تسمح بإنتماء التابع u و مشتقه إلى الفضاء $L^p(\Omega)$ ، يسمى هذا النوع من الفضاءات فضاءات سوبولوف *Sobolev*. هذا العمل البسيط يتوزع إلى ستة فصول:

يقدم الفصل الأول مختصرا لبعض التعاريف و الخواص الأساسية حول المعادلات التفاضلية الجزئية.

أما الفصل الثاني فيتناول محتواه تعريفات خاصة بفضاءات سوبولوف *Sobolev* وصياغة تغييرات المسائل في النهايات ذات البعد 1 كما يتناول الفصل الثالث فضاءات سوبولوف *Sobolev* وصياغة تغييرات المسائل في النهايات ذات البعد N .

كلا من الفصلين الثاني والثالث يتضمن محتواهما تعريفات خاصة بفضاءات سوبولوف *Sobolev* $W^{m,p}(I)$ و $W^{m,p}(\Omega)$ على الترتيب مع $p \geq 1$ وذلك حسب قيم m ، تتخللهما نتائج ونظريات مرتبطة بشكل خاص بالتقريب في هذه الفضاءات، نقصد بالتقريب دراسة بعض المجموعات الكثيفة في $W^{m,p}$ ، كما قدمنا متباينات سوبولوف *Sobolev* ضمن دراسة العلاقة بين L^p و $W^{m,p}$ من حيث الإحتواءات الممكنة و ذلك تبعا لقيم m, p, N .

كما تطرقنا أيضا إلى قضايا مهمة في فضاء التوزيعات $D'(\Omega)$. خصص الفصل الرابع لتقديم النظريات الأساسية للنقطة الصامدة والتي تتمثل في نظريات

Tychonov و *Schauder*، *Brouwer*، *Banach*.

أما الفصل الخامس خصص لدراسة نظرية جديدة للنقاط الصامدة مع فقدان شرط التراص.

أخيرا أولينا في الفصل السادس أهمية خاصة للتطبيقات التي تتمتع بها نظرية النقاط الصامدة في فضاءات سوبولوف *Sobolev*. تتمثل هذه التطبيقات أساسا في دراسة وجود و وحدانية حلول بعض المسائل الناقصية الخطية و غير الخطية و إعطاء ما يعرف بالصيغة التغيرية لها، فألت عملية البحث عن حل لمسألة حدية إلى البحث عن الحل الضعيف لهذه المسألة و هذا بمعرفة خواص هذا الحل كإتتمائه مثلا للفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ و هو ما يؤدي عموما إلى حل المسألة الأصلية.