وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبّة القديمة - (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
Vieux Kouba -(Alger)
Département de Mathématiques

حساب التغيرات ومعادلة أولر – لاغرانج

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

إعداد :
- شنوف رزيقة
- قيدري هيبة

تحت إشراف الأستاذة
- مقران أميرة

لجنة المناقشة :

* زيتوني ليلى ..... رئيسة
* مصطفاوي زهيّة ..... ممتحنة
* مقران أميرة ..... مشرفة

السنة الجامعية : *2011/2010*

دفعة جوان : *2011*

الفهرس

بعض الرموز
مقدمة
1 مفاهيم و نظريّات أساسيّة
1.1 تعاريف 2
1.1.1 تعريف الحدّ الأدنى الشّامل 2
2.1.1 تعريف الحدّ الأدنى المحلّي 2
3.1.1 تعريف نقطة حرجة 3
4.1.1 تعريف مصفوفة معرّفة موجبة 3
2.1 شروط لازمة و كافية لوجود حدّ أدنى محلّي 3
1.2.1 الشرط اللّازم من الرّتبة 1 3
2.2.1 الشرط اللّازم من الرّتبة 2 4
3.2.1 الشرط الكافي من الرّتبة 2 4
3.1 فضاءات L^p 4
1.3.1 تعريف 4
2.3.1 تعريف 5
3.3.1 متراجحة هولدر 5
4.3.1 توطئة أساسيّة في حساب التّغيّرات 5
5.3.1 لازمة 6
6.3.1 لازمة 6
7.3.1 قاعدة لايبنيز 7

4.1 فضاءات سوبولاف 7
1.4.1 تعريف 7
5.1 التّحدّب 8
1.5.1 التّوابع و المجموعات المحدّبة 8
2.5.1 خصائص التّوابع المحدّبة 9
3.5.1 تحويل لجوندر 12

2 معادلة أولر – لاغرانج

1.2 المسألة النّموذجيّة 15
2.2 معادلة أولر – لاغرانج 17
1.2.2 نظريّة أولر – لاغرانج 17
2.2.2 الصّيغة الثّانية لمعادلة أولر – لاغرانج 23
3.2 تعميم معادلة أولر – لاغرونج 24
1.3.2 شرط تزايد على f 24
2.3.2 شرط تزايد على $D_u f$ ، $D_\xi f$ 24
3.3.2 الصّيغة الضّعيفة لمعادلة أولر – لاغرانج 25
4.3.2 معادلة أولر – لاغرانج 27

3 معادلة هاملتون – جاكوبي

1.3 الصّيغة الهاملتونيّة 30
1.1.3 نظرية 31
2.3 معادلة هاملتون – جاكوبي 35

1.2.3 نظريّة 35

مثال تطبيقي 40

مقدّمة

إن دراسة الدّوال العدديّة يشمل بالخصوص إيجاد القيم القصوى، وهذا هو أحد مضامين الحساب التّفاضلي. ولمّا تكون الدّالة معرّفة على فضاء توابع سمّاها أولر (EULER) آنذاك بحساب التّغيّرات ؛ ولاتزال تحمل هذا الإسم.

فحساب التّغيّرات هو أحد الفروع القديمة في الرّياضيّات، فإن غضضنا النّظر عن أعمال فياشتراص (WEIRSTRESS) التي تعتمد على طرق هندسيّة، يمكن أن نعتبر القرن 17 بداية هذا الفرع .

فرغم أعمال فيرما (FERMAT) و نيوتن (NEWTON)، إلّا أنّ أكثر كتب حساب التغيّرات ترجع البداية إلى برنولي (J.BERNOULI) سنة 1696، و الذي طرح لرياضيّاتيّي عصره تحدّيا متمثّلا في مسألة (brachistochrone) والتي قام بحلّها و كذا كلّ من ليبنيز (LEIBNIZ)، نيوتن (NEWTON) وغيرهم.

لكنّ مرحلة جدّ مهمة في حساب التّغيّرات تلك التي أجتيزت من طرف أولر (EULER) من ثمّ لاغرانج (LAGRANGE)، حيث وضعا شرطهما اللّازم الشّهير و المعروف الآن باسم معادلة أولر لاغرانج، فكانت بوّابة الطّرق الكلاسيكيّة في حساب التّغيّرات التي هي موضوع دراستنا في هذه المذكّرة.

في سنة 1900 عند ملتقى الرّياضيّاتيّين في باريس، صاغ هيلبرت (HILBERT) 23 مسألة ؛ و التي إعتبرها الأكثر أهمية لتطوير الرياضيات من بينها المسألة 19 ، 20 و 23 مخصّصة لحساب التّغيّرات.

تطور و تأثير حساب التّغيّرات على الفروع الأخرى في الرياضيات، الميكانيك، الإقتصاد، والبيولوجيا يؤكّد توقّعات هيلبرت (HILBERT).

نشير إلى أنّنا لم نتكلّم عن بعض التّطوّرات الجدّ مهمة في حساب التّغيّرات كالطّرق المباشرة، دراسة صقالة الحلّ و التي لم نتطرق إليها في هذه المذكّرة.

قسمنا مذكرتنا هذه إلى ثلاث فصول:

- **الفصل الأوّل** : قدّم على شكل تذكير بأهم المفاهيم العامة حول الحد الأدنى، الفضاء L^p، ، فضاء سوبولاف التّحدّب، وبعض النظريات التي نستخدمها بشكل أساسي في مايلي.
- **الفصل الثّاني** : الذي خصّص للمسألة التّموذجيّة، نظريّة أولر – لاغرانج وبعض الأمثلة عنهما.
- **الفصل الثّالث** : فقد تضمّن الصّيغة الهاملتونيّة، معادلة هاملتون – جاكوبي وبعض الأمثلة عنهما.